

УДК 532.546; 532.5.013.4  
PACS 47.55.pb, 47.56.+r

## Влияние анизотропии проницаемости и свойств дна на тепловую конвекцию в донных отложениях

А. Е. Самойлова<sup>1,2†</sup>, А. А. Егорова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

<sup>2</sup> Институт механики сплошных сред, Пермь, Россия

† samoilova@psu.ru

Изучается влияние анизотропии проницаемости пористой среды и изменения проницаемости дна на конвективную неустойчивость в морских донных отложениях. Донные отложения моделируются как горизонтальная двухслойная система, состоящая из верхнего слоя пористой среды, насыщенной водой (наличие примесей не учитывается), и нижнего непроницаемого полубесконечного массива. Рассматриваются два типа граничного условия для фильтрационного потока на верхней границе (дне водного тела): открытая и непроницаемая граница. Линейный анализ устойчивости проводится в рамках сопряженной задачи о конвекции в горизонтальном слое пористой среды с жидкостью и теплопередаче в непроницаемом массиве снизу. Получены аналитические выражения для функции тока и температуры конвективной неустойчивости в зависимости от значений параметра анизотропии проницаемости пористой среды. Мерой анизотропии проницаемости принято отношение коэффициентов проницаемости в вертикальном и горизонтальном направлениях. Показано, что с увеличением анизотропии симметрия конвективного течения относительно центра слоя пористой среды нарушается: центр конвективного вала смещается к нижней границе слоя в среде с большей анизотропией. Поле температуры глубже проникает во второй слой непроницаемой среды с ростом анизотропии проницаемости. Получены выражения, определяющие кривые нейтральной устойчивости для различных значений параметра анизотропии и при разных граничных условиях сверху. Определены критические значения числа Рэлея-Дарси и волнового числа. Порог возникновения конвекции повышается в системе с непроницаемой верхней границей по сравнению с открытой верхней границей. Увеличение анизотропии существенно понижает порог конвективной неустойчивости, а также уменьшает критическое волновое число. В пределе сильной анизотропии проницаемости, когда в горизонтальном направлении жидкость просачивается через пористую среду практически без сопротивления, конвекция становится длинноволновой, порог ее – ниже на порядок в сравнении с изотропной средой.

**Ключевые слова:** донные отложения; пористая среда; тепловая конвекция

Поступила в редакцию 12.09.2024; после рецензии 17.10.2024; принята к опубликованию 17.10.2024

## Influence of permeability anisotropy and boundary conditions on thermal convection in seabed sediments

A.E. Samoilova<sup>1,2†</sup>, A.A. Egorova<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Perm State University, Perm, Russia

<sup>2</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

† samoilova@psu.ru

We study how the surface boundary condition and permeability anisotropy influence the convective instability in seabed sediments. The sediments are modeled as a horizontal two-layer system consisting of an upper porous layer saturated with water (impurities are neglected) and a lower impermeable semi-infinite massif. Two types of boundary conditions for the filtration flow at the upper surface (the bottom of the water body) are considered: an open boundary and an impermeable boundary. A linear stability analysis is performed within the adjoint problem of convection in the porous layer and the heat transfer in the impermeable massif below. The stream function and the temperature of convective instability are calculated depending on the values of the permeability anisotropy parameter. It is shown that the stagnation point within the convective roll shifts down to the lower boundary of the porous layer in a medium with greater anisotropy. The temperature field penetrates deeper into the impermeable massif with increasing permeability anisotropy. We obtained equations defining the neutral stability curves for different values of the anisotropy parameter and under different upper boundary conditions. The convective threshold increases with the decreasing permeability of the upper boundary. An increase in anisotropy significantly lowers the convective instability threshold and decreases the critical wave number. In the limit of strong permeability anisotropy, when the liquid flows through the porous medium in the horizontal direction almost without resistance, convection becomes longwave, the convective threshold is an order of magnitude lower compared to an isotropic medium.

**Keywords:** seabed sediments; porous media; thermal convection

Received 12 September 2024; revised 17 October 2024; accepted 17 October 2024

doi: 10.17072/1994-3598-2024-4-55-63

## 1. Введение

В данной работе исследуется тепловая конвекция, возникающая в донных отложениях под действием геотермического градиента. Изучается влияние таких осложняющих факторов, как анизотропия свойств пористой среды, а также изменение проницаемости границы.

### 1.1. Донные отложения

Изучение конвективных процессов в донных отложениях важно с точки зрения проблемы формирования природных депозитов гидрата метана, а также потенциальной возможностью захоронения промышленных выбросов углекислого газа [1, 2].

Под действием геотермического теплопотока в донных отложениях естественным образом может возникать тепловая конвекция в той части отложений, которая насыщена морской водой. Однако в современных работах по моделированию образования гидратов возможность возникновения конвекции обычно не учитывается [3]. При этом в моделях содержится механический параметр – скорость восходящего фильтрационного потока жидкости через отложения, которая не поддается измерению и при моделировании используется в качестве свободного параметра для «подгонки» результатов численного моделирования к данным натурных наблюдений. В работе [4] предложена модель донных отложений, которая позволяет связать восходящий фильтрационный поток с конвективным течением.

В рамках упомянутой модели донные отложения рассматриваются как двухслойная система

(рис. 1). Из данных геофизических наблюдений известно, что в донных отложениях на глубине 300-400 м возникает эффективная непроницаемая граница [5]. В результате разложения гидратов из-за повышения температуры пузырьки газа закупоривают поры в породе [6]. Так что в донных отложениях слой пористой среды, насыщенный водой, граничит снизу с непроницаемым массивом. При изучении конвекции решается сопряженная задача о неустойчивости в слое пористой среды с жидкостью и распространении тепла в непроницаемом массиве.



**Рис. 1.** Математическая модель донных отложений

Сверху пористая среда граничит с океаном; температура на верхней границе фиксирована, поскольку эта температура определяется независимыми внешними условиями. Действительно, на масштабах океана конвективный (турбулентный) теплоперенос в водном теле существенно более эффективен, чем теплоперенос в пористой среде.

Проницаемость границы с водным телом может быть разной. Для богатых органикой донных отложений характерно отсутствие выраженных гидроизолирующих слоев [7]. В таком случае следует полагать отсутствие горизонтальной компоненты градиента давления на верхней границе (см. раздел 2.2). Для других провинций характерно наличие гидроизолирующих слоев в пределах верхних нескольких метров отложений. Для таких случаев требуется ставить условие непротекания на верхней границе (см. раздел 2.3).

## 1.2. Анизотропия свойств пористой среды

Механизм формирования донных отложений создает сильную анизотропию структуры породы, что неизбежно приводит к анизотропии ее свойств, например, проницаемости. [2]

Изучение влияния анизотропии свойств пористой среды на конвективную неустойчивость проводилось в ряде работ российских и зарубежных авторов [9]. Стандартный подход заключается во введении эффективных коэффициентов проницаемости  $K_x$  и  $K_z$  вдоль горизонтального и вертикального направлений, соответственно [10]. В уравнении течения жидкости коэффициент проницаемости рассматривается в виде тензора второго ранга:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

## 2. Тепловая конвекция в донных отложениях

### 2.1. Определяющие уравнения

В представленной двухслойной системе тепловая конвекция, развивающаяся в верхнем слое пористой среды, описывается уравнениями Дарси-Буссинеска с учетом анизотропии проницаемости (уравнение движения спроецировано на оси  $Ox$  и  $Oz$ ):

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{K_x} u_x = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{K_z} u_z + g\beta T = 0, \quad (3)$$

$$(\rho c_p)_{cp} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_{ж} \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa_{cp} \Delta T, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

где  $p, T$  – давление и температура жидкости,  $\mathbf{u} = (u_x, 0, u_z)$  – скорость фильтрации,  $\nu$  – динамическая вязкость жидкости,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\kappa_{cp}$  – эффективная теплопроводность пористой среды, насыщенной жидкостью,  $(\rho c_p)_{ж}$  –

теплоемкость в единице объема жидкости,  $(\rho c_p)_{cp}$  – теплоемкость единицы объема, насыщенной жидкостью пористой среды.

В нижнем непроницаемом массиве учитывается теплоперенос, описываемый уравнением теплопроводности:

$$(\rho c_p)_{cp} \frac{\partial T_m}{\partial t} = \kappa_{cp} \Delta T_m, \quad (6)$$

где  $T_m$  – температура непроницаемого массива.

После обезразмеривания система уравнений (2)–(6) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \varepsilon \tilde{u}_x = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \tilde{u}_z + \text{Rp} \tilde{T} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T} = \Delta \tilde{T}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}_m}{\partial \tilde{t}} = \Delta \tilde{T}_m, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0. \quad (11)$$

Здесь знаком « $\sim$ » обозначены безразмерные величины. Для удобства мы опустим « $\sim$ » всюду в дальнейшем. Масштабы величин при обезразмеривании выбраны следующие:

$$[r] = H, [t] = \frac{H^2 (\rho c_p)_{ж}}{\chi (\rho c_p)_{cp}}, [\mathbf{u}] = \frac{\chi}{H}, \quad (12)$$

$$[T] = \Theta, [p] = \frac{\nu \chi}{K_z}, \chi = \frac{\kappa_{cp}}{(\rho c_p)_{ж}}.$$

Здесь  $H$  – толщина верхнего слоя пористой среды, насыщенной жидкостью,  $\Theta$  – перепад температуры в верхнем слое, вызванный геотермическим градиентом (характерные значения для донных отложений 40 К/км).

В уравнениях (7) и (8) появляются безразмерные параметры:

$$\varepsilon = \frac{K_z}{K_x}, \text{Rp} = \frac{g\beta\Theta H K_z}{\nu \chi}, \quad (13)$$

это параметр анизотропии проницаемости и число Рэлея–Дарси, которое определено через эффективную вертикальную проницаемость  $K_z$ .

Отметим, что в нашем исследовании мы ограничиваемся значениями  $\varepsilon$ , лежащими в интервале  $[0; 1]$ . Действительно, для донных отложений характерна такая анизотропия, когда проницаемость в вертикальном направлении меньше проницаемости в горизонтальном направлении, т.е.  $\varepsilon < 1$ . Предельные случаи  $\varepsilon = 1$  и  $\varepsilon = 0$  соответствуют изотропной проницаемости и сильной анизотропии (см. раздел 2.4).

Система уравнений (7)–(11) дополняется граничными условиями. На границе между слоями ставятся условия непротекания, а также сшивки температуры и теплопотока:

$$z = 1: u_z = 0, T = T_m, \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T_m}{\partial z}. \quad (14)$$

На удалении от слоя насыщенной пористой среды (глубоко внизу) задан постоянный (геотермический) теплопоток:

$$z \rightarrow \infty: \frac{\partial T_m}{\partial z} = 1. \quad (15)$$

Верхняя граница системы соответствует границе донных отложений и водного тела (океана). На этой границе, как упоминалось, могут реализоваться две противоположные ситуации: отсутствие (I) или наличие (II) гидроизолирующего горизонта:

$$z = 0: \text{(I)} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \text{(II)} u_z = 0, T = T_u. \quad (16)$$

Здесь учтено, что верхняя граница поддерживается при постоянной температуре  $T_u$ .

Задача (7)–(11), (14)–(16) (с любым из граничных условий на верхней границе) допускает стационарное решение, соответствующее состоянию механического равновесия с линейным профилем температуры:

$$\bar{u} = 0, \bar{T} = T_u + z, \frac{d\bar{p}}{dz} = -\text{Rp}\bar{T}, \bar{T}_m = T_u + z. \quad (17)$$

Для дальнейшего анализа устойчивости решения (17) относительно малых двумерных возмущений вводится функция тока:

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, u_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (18)$$

Мы рассматриваем стационарные возмущения. Линейная задача устойчивости для таких возмущений имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \text{Rp} \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \Delta T, \quad (20)$$

$$\Delta T_m = 0, \quad (21)$$

$$z = 0: \text{(I)} \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \text{(II)} \psi = 0, T = 0, \quad (22)$$

$$z = 1: \psi = 0, T = T_m, \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T_m}{\partial z}, \quad (23)$$

$$z \rightarrow \infty: \frac{\partial T_m}{\partial z} = 0. \quad (24)$$

Решение можно представить в виде плоских возмущений периодических вдоль оси  $Ox$ :

$$\psi = rf(z) \sin kx, r = \sqrt{\text{Rp}}, \quad (25)$$

$$T = g(z) \cos kx, T_m = e^{-k(z-1)} \cos kx,$$

где  $k$  – волновой вектор конвективных возмущений.

После подстановки решения (25) получаем краевую задачу для функций  $f(z)$  и  $g(z)$ :

$$\varepsilon \frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f - rkg = 0, \quad (26)$$

$$\frac{d^2 g}{dz^2} - k^2 g - rkf = 0, \quad (27)$$

$$z = 0: \text{(I)} \frac{df}{dz} = 0, \text{(II)} f = 0, g = 0, \quad (28)$$

$$z = 1: f = 0, g = 1, \frac{dg}{dz} = -k. \quad (29)$$

Далее мы рассматриваем влияние анизотропии проницаемости на конвекцию по-отдельности для ситуации отсутствия (I) и наличия (II) гидроизолирующего горизонта сверху.

## 2.2. Открытая верхняя граница (I)

В случае проницаемого дна океана система (26)–(29) решается с граничным условием (I) в (28). Решение находится аналитически:

$$f(z) = \frac{C_1}{kr} [s_1 \text{ch}(\sigma z) + s_2 \cos(\lambda z)] + \frac{C_2}{kr} \sigma s_1 \left[ \frac{\text{sh}(\sigma z)}{\sigma} - \frac{\sin(\lambda z)}{\lambda} \right], \quad (30)$$

$$g(z) = C_1 [\text{ch}(\sigma z) - \cos(\lambda z)] + C_2 \sigma s_1 \left[ \frac{\text{sh}(\sigma z)}{\sigma s_1} + \frac{\sin(\lambda z)}{\lambda s_2} \right], \quad (31)$$

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{-k^2(\varepsilon + 1) + \sqrt{(\varepsilon k^2 + k^2)^2 - 4\varepsilon k^2(k^2 - r^2)}}{2\varepsilon}},$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{k^2(\varepsilon + 1) + \sqrt{(\varepsilon k^2 + k^2)^2 - 4\varepsilon k^2(k^2 - r^2)}}{2\varepsilon}},$$

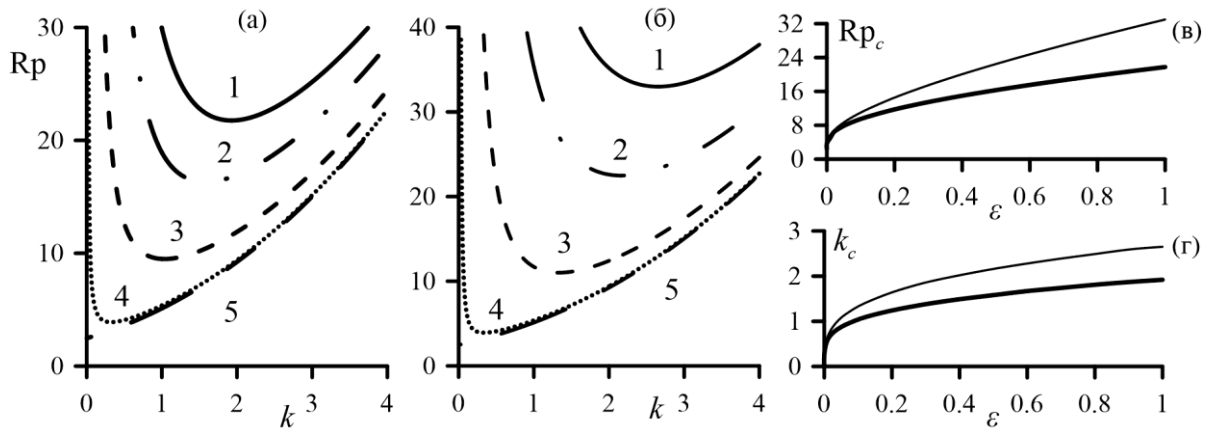
$$s_1 = \sigma^2 - k^2, s_2 = \lambda^2 + k^2.$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  имеют вид:

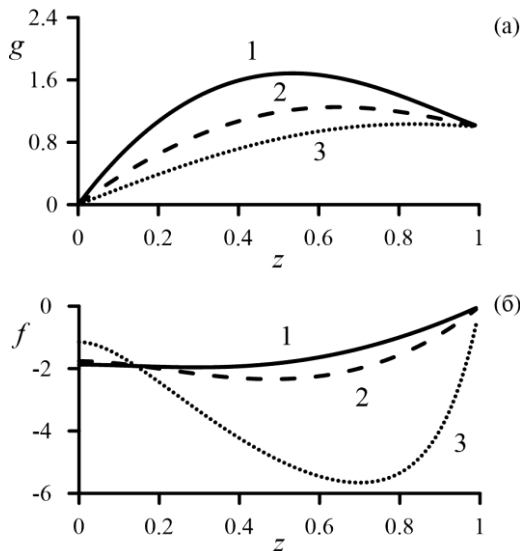
$$C_1 = -\frac{s_1 s_2 (\lambda \text{sh} \sigma - \sigma \sin \lambda)}{(\sigma^2 + \lambda^2) (\sigma s_1 \sin \lambda \text{ch} \sigma + \lambda s_2 \text{sh} \sigma \cos \lambda)},$$

$$C_2 = \frac{\lambda s_2 (s_1 \text{ch} \sigma + s_2 \cos \lambda)}{(\sigma^2 + \lambda^2) (\sigma s_1 \sin \lambda \text{ch} \sigma + \lambda s_2 \text{sh} \sigma \cos \lambda)}.$$

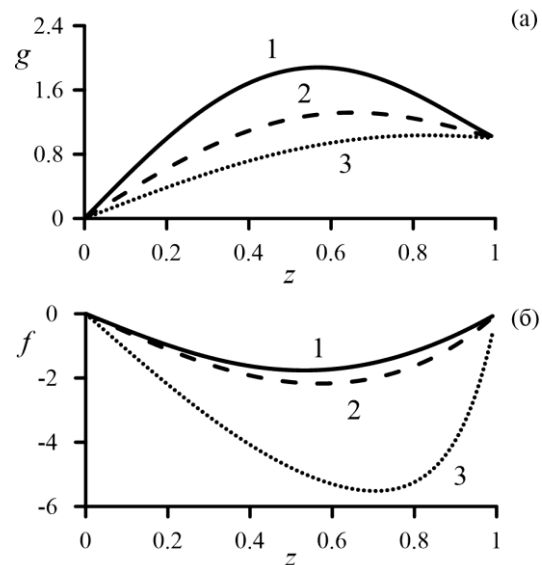
Вид нейтральной кривой определяется из следующего трансцендентного уравнения:



**Рис. 2.** Нейтральные кривые конвективной неустойчивости жидкости в слое с открытой (а) и непроницаемой (б) верхней границей. Линии 1–5 соответствуют  $\varepsilon = 1, 0.5, 0.1, 0.001, 0$ . Зависимость критического числа Рэля-Дарси (в) и критического волнового числа (z) от параметра анизотропии  $\varepsilon$ . Жирные линии соответствуют открытой верхней границе, тонкие – непроницаемой верхней границе



**Рис. 3.** Графики функций  $f(z)$  и  $g(z)$  при разных значениях коэффициента анизотропии:  $\varepsilon = 1$  (сплошные линии),  $\varepsilon = 0.1$  (штриховые линии),  $\varepsilon = 0.001$  (пунктирные линии)



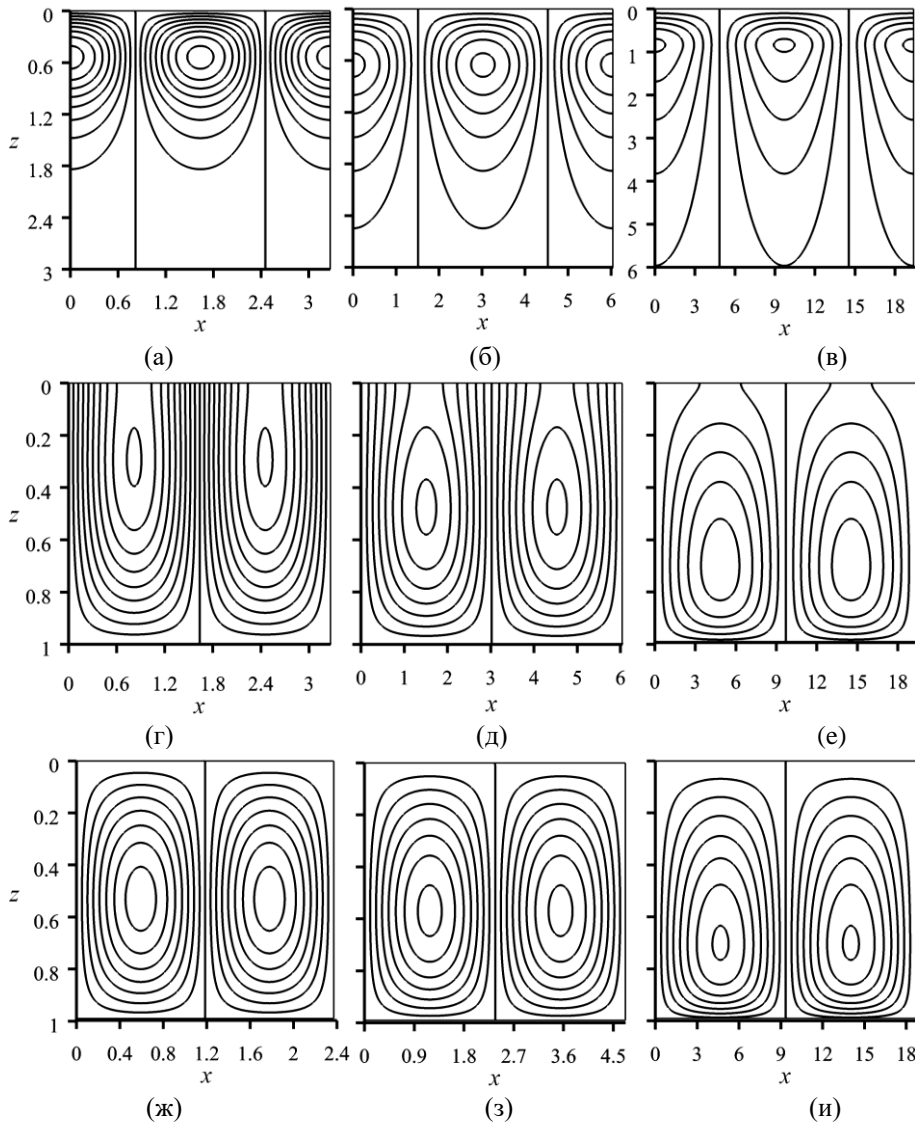
**Рис. 4.** Графики функций  $f(z)$  и  $g(z)$  при разных значениях коэффициента анизотропии:  $\varepsilon = 1$  (сплошные линии),  $\varepsilon = 0.1$  (штриховые линии),  $\varepsilon = 0.001$  (пунктирные линии)

$$\begin{aligned}
 & s_1 s_2 (\sigma^2 - \lambda^2) \operatorname{sh} \sigma \sin \lambda + \\
 & + k (\sigma^2 + \lambda^2) \times \\
 & \quad \times (\sigma s_1 \operatorname{ch} \sigma \sin \lambda + \lambda s_2 \operatorname{sh} \sigma \cos \lambda) + \\
 & + \lambda \sigma (s_1^2 + s_2^2) \operatorname{ch} \sigma \cos \lambda + 2 \lambda \sigma s_1 s_2 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

Уравнение (32) решалось нами численно, методом секущих. Результат численного решения представлен на рис. 2, а. Нейтральные кривые имеют характерный вид «мешка» с одним минимумом, соответствующий критическим значениям числа Рэля-Дарси и волнового числа. Видно, что нейтральная кривая смещается вниз влево с уменьшением параметра анизотропии.

На рис. 2, в, z жирными линиями изображены зависимости критических значений  $R_{p,c}$  и  $k_c$  от параметра анизотропии. Из графиков видно, что с уменьшением  $\varepsilon$  уменьшаются значения  $R_{p,c}$  и  $k_c$ , следовательно, порог возникновения конвекции понижается. Неустойчивость становится более длинноволновой при уменьшении  $\varepsilon$ , т.е. в среде с более сильной анизотропией проницаемости.

На рис. 3 приведены графики функций  $f(z)$  и  $g(z)$  при разных значениях коэффициента анизотропии. Сплошной линией построены графики для случая  $\varepsilon = 1$  при критических значениях  $R_{p,c} = 21.7$  и  $k_c = 1.92$ , штриховой линией – для  $\varepsilon = 0.1$  при  $R_{p,c} = 9.49$  и  $k_c = 1.04$ , пунктирной –  $\varepsilon = 0.001$ ,  $R_{p,c} = 3.89$  и  $k_c = 0.32$ . Видно, что уменьшение  $\varepsilon$



**Рис. 5.** Поля возмущений температуры (а-в) и поля функции тока для открытой (г-е) и непроницаемой (ж-и) верхней границы при разных значениях коэффициента анизотропии. (а,г,ж)  $\varepsilon = 1$ , (б,д,з)  $\varepsilon = 0.1$ , (в,е,и)  $\varepsilon = 0.001$

(т.е. увеличение анизотропии) приводит к смещению экстремумов функции тока и температуры к нижней границе пористого слоя.

На рис. 5, а–е представлены двумерные изображения полей возмущения температуры и функции тока при разных значениях коэффициента анизотропии:  $\varepsilon = 1, 0.1, 0.001$ . Критические значения числа Рэлея–Дарси и волнового числа взяты такими же, как и при построении графиков функций  $f(z)$  и  $g(z)$  (см. выше).

Как видно, с уменьшением значения  $\varepsilon$  возмущения температуры проникают в нижний непроницаемый слой глубже.

Течение жидкости имеет характерный вид конвективных ячеек и сосредоточено в верхнем слое пористой среды. Поскольку верхняя граница системы проницаемая, конвективные ячейки незамкнуты в этом месте. При уменьшении коэффициента анизотропии центры конвективных ячеек

смещаются вниз, это же можно увидеть и на графиках функций  $f(z)$ .

### 2.3. Непроницаемая верхняя граница (II)

В случае непроницаемого дна океана система (26)–(29) решается с граничным условием (II) в (28). Функции  $f(z)$  и  $g(z)$  определяются как:

$$f(z) = \frac{s_1 s_2}{rk(\lambda^2 + \sigma^2)} \left[ \frac{\text{sh}(\sigma z)}{\text{sh} \sigma} - \frac{\sin(\lambda z)}{\sin \lambda} \right], \quad (33)$$

$$g(z) = \frac{1}{(\lambda^2 + \sigma^2)} \left[ s_2 \frac{\text{sh}(\sigma z)}{\text{sh} \sigma} + s_1 \frac{\sin(\lambda z)}{\sin \lambda} \right]. \quad (34)$$

Вид нейтральной кривой определяется в этом случае уравнением

$$s_2 \sigma \text{cth} \sigma + s_1 \lambda \text{ctg} \lambda + k(\lambda^2 + \sigma^2) = 0. \quad (35)$$

Результат численного решения уравнения (35) показан на рис. 2, б. Нейтральные кривые имеют

такой же вид, что и в случае с открытой верхней границей, однако минимумы кривых при соответствующих значениях  $\varepsilon$  расположены правее и выше, в отличие от предыдущего случая. Это означает, что конвекции в слое с непроницаемой верхней границей развиться сложнее, чем в слое с открытой границей. На рис. 2, *в, г* тонкими линиями изображены зависимости критических значений числа Рэлея-Дарси и волнового числа от  $\varepsilon$ . Как и в случае с проницаемой верхней границей, при уменьшении коэффициента анизотропии уменьшаются  $R_{pc}$  и  $k_c$ .

Вид функций  $f(z)$  и  $g(z)$ , построенных при различных значениях коэффициента анизотропии, представлены на рис. 4. Сплошной линией построены графики для случая  $\varepsilon = 1$  при критических значениях  $R_{pc} = 32.99$  и  $k_c = 2.65$ , штриховой – для  $\varepsilon = 0.1$  при  $R_{pc} = 11.01$  и  $k_c = 1.33$ , пунктирной –  $\varepsilon = 0.001$ ,  $R_{pc} = 3.92$ ,  $k_c = 0.34$ . Видно, что вид функции  $g(z)$  качественно не поменялся. Это говорит о том, что изменение граничного условия на верхней границе практически не влияет на температуру. Решение для функции тока, представленное на рис. 4, *б*, меняет свой вид вблизи  $z = 0$  по сравнению с кривыми на рис. 3, *б*, что согласуется с изменением граничного условия в этом месте.

Поля функции тока представлены на рис. 5, *ж–и*. Принципиальное отличие формы конвективных ячеек обусловлено изменением граничного условия. Жидкость не может просачиваться через верхнюю границу, поэтому конвективные ячейки замкнуты. При уменьшении коэффициента анизотропии центры конвективных ячеек смещаются вниз. Поля возмущений температуры в данном случае практически совпадают с полями на рис. 5, *а–в*.

#### 2.4. Предельный случай $\varepsilon = 0$

В предельном случае очень сильной анизотропии,  $\varepsilon = 0$ , мы имеем дело с ситуацией, когда просачивание жидкости через пористую среду в горизонтальном и вертикальном направлениях отличается на порядки. Для донных отложений это означает конечность вертикальной проницаемости,  $K_z = O(1)$ , и почти бесконечную горизонтальную проницаемость,  $K_x \gg 1$ . Жидкость течет в вертикальном направлении с неким конечным сопротивлением, а в горизонтальном – вовсе без сопротивления.

Строго положив  $\varepsilon = 0$  в уравнении (26), мы получаем из (26)–(29) краевую задачу для температурной функции  $g(z)$ :

$$\frac{d^2 g^{(0)}}{dz^2} + g^{(0)}(r^2 - k^2) = 0, \quad (36)$$

$$z = 0: g^{(0)} = 0, \quad (37)$$

$$z = 1: g^{(0)} = 1, \quad \frac{dg^{(0)}}{dz} = -k. \quad (38)$$

Решение данной задачи:

$$g^{(0)}(z) = \frac{\sin(\sqrt{r^2 - k^2} z)}{\sin \sqrt{r^2 - k^2}}. \quad (39)$$

Решение для функции тока также может быть найдено из (26):

$$f^{(0)}(z) = -\frac{r \sin(\sqrt{r^2 - k^2} z)}{k \sin \sqrt{r^2 - k^2}}. \quad (40)$$

Отметим, что выражения (39) и (40) могут быть получены из (33), (34) предельным переходом при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Следует учесть, что в таком пределе коэффициенты  $\lambda$  и  $\sigma$  преобразуются как

$$\lambda^2 = r^2 - k^2 + O(\varepsilon), \quad (41)$$

$$\sigma^2 = \frac{k^2}{\varepsilon} + r^2 + O(\varepsilon). \quad (42)$$

Важно, что решение, описывающее конвекцию, «не чувствует» изменений граничных условий на верхней границе. Действительно, при таком режиме, когда в горизонтальном направлении жидкость течет практически без сопротивления, открытость верхней границы не способна влиять на течение. На рис. 5, *е, и* представлены поля функции тока при  $\varepsilon = 0.001$  для открытой и непроницаемой верхней границы, соответственно. Как видно, изолинии функции тока на рисунке рис. 5, *е* вблизи верхней границы стремятся замкнуться, что, безусловно, происходит при строгом  $\varepsilon = 0$ .

Уравнение, определяющее вид нейтральной кривой, можно получить, подставив решение (39) во второе граничное условие из (38):

$$\sqrt{r^2 - k^2} \operatorname{ctg} \sqrt{r^2 - k^2} + k = 0. \quad (43)$$

Данное выражение также является результатом вычисления предела выражений (32) и (35) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Вид нейтральной кривой (43) отличается от кривых для конечных значений параметра анизотропии  $\varepsilon$ . Для  $\varepsilon = 0$  нейтральная кривая конвективной неустойчивости пересекает вертикальную ось на плоскости  $R_p - k$ , см. кривые 5 на рис. 2, *а, б*. Как видно из этих рисунков, для двух разных граничных условий на верхней границе нейтральные кривые при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сходятся в пределе к одной кривой, описываемой уравнением (43).

В рассматриваемом случае критические возмущения носят длинноволновый характер,  $k_c = 0$ . Критическое значение числа Рэлея-Дарси при этом на порядок отличается от соответствующего значения для изотропной среды:  $R_{pc} = \pi^2/4 \approx 2.47$ .

Отметим, что для критических длинноволновых возмущений решение (40), описывающее вид течения, кажется парадоксальным, поскольку  $f^{(0)}(z)$  не удовлетворяет граничному условию при  $z = 1$ . Мы предполагаем, что в предельном случае очень сильной анизотропии образуется погранич-

ный слой вблизи  $z = 1$ . Действительно, на рисунках полей функции тока можно заметить тенденцию к сгущению изолиний вблизи  $z = 1$  при уменьшении  $\varepsilon$ .

### 3. Заключение

Изучено влияние анизотропии проницаемости пористой среды и изменения проницаемости границы на конвективную неустойчивость в морских донных отложениях. Для моделирования донных отложений использовалась двухслойная модель, предполагающая наличие эффективной границы снизу в слое отложений из-за закупорки породы пузырьками газа, высвобождающегося из гидратов. Решалась сопряженная задача о конвекции в горизонтальном слое пористой среды с жидкостью и теплопередаче в непроницаемом массиве снизу. Рассматривались два типа верхнего граничного условия для фильтрационного потока: открытая и непроницаемая границы. Анизотропия проницаемости определялась через отношение коэффициента проницаемости в вертикальном направлении к коэффициенту проницаемости в горизонтальном направлении.

В рамках линейного анализа устойчивости получены аналитические выражения, описывающие функцию тока и температуру конвективных возмущений в зависимости от параметра анизотропии проницаемости  $\varepsilon$ . Показано, что с увеличением анизотропии симметрия относительно центра слоя пористой среды нарушается. Экстремум функции тока (отвечающий точке стагнации в центре конвективного вала) смещается к нижней границе слоя в среде с большей анизотропией. Поле температуры глубже проникает во второй слой непроницаемой среды с ростом анизотропии. Данные выводы согласуются с результатами других авторов, полученными для однослойной системы [9, 10]. Значения  $R_{pc}$  и  $k_c$  для изотропного случая  $\varepsilon = 1$  полностью совпадают с опубликованными ранее результатами без учета анизотропии [4, 11].

Получены выражения, определяющие кривые нейтральной устойчивости для различных значений параметра анизотропии и при разных граничных условиях сверху. Определены критические значения числа Рэлея-Дарси и волнового числа. Непроницаемая верхняя граница приводит к повышению порога возникновения конвекции по сравнению с открытой верхней границей. Увеличение анизотропии существенно понижает порог конвективной неустойчивости, а также уменьшает критическое волновое число.

В пределе сильной анизотропии проницаемости, когда в горизонтальном направлении жидкость просачивается через пористую среду практически без сопротивления, конвекция становится длинноволновой, порог ее ниже на порядок в сравнении с изотропной средой. Вид течения в

этом случае плохо описывается полученным решением вблизи нижней непроницаемой границы. Вблизи этой границы образуется аналог пограничного слоя: изолинии течения сгущаются в окрестности нижней границы.

Работа выполнена в рамках бюджетной темы № 124021600038-9.

### Список литературы

1. Rochelle C.A., et al. Can CO<sub>2</sub> hydrate assist in the underground storage of carbon dioxide? // *Geol. Soc. Spec. Publ.* 2009. Vol. 319. P. 171–183
2. Голдобин Д. С., Барях А. А. Подземная утилизация углерода как элемент декарбонизации деятельности человека // *Вестник Пермского федерального исследовательского центра.* 2023. № 4. С. 6–13.
3. Davie M. K., Buffett B. A. A numerical model for the formation of gas hydrate below the seafloor // *J. Geophys. Res. Solid Earth.* 2001. Vol. 106. №. B1. P. 497–514.
4. Самойлова А. Е., Егорова А. А. Тепловая конвекция в слое пористой среды между водным телом и непроницаемым массивом // *Пермские гидродинамические научные чтения: материалы IX-й Всероссийской конференции.* Пермь, 2023. С. 367–370.
5. Barnard A., Max M. D., Gualdesi L. Submarine vortices derived from natural gas hydrate conversion: a mechanism for ocean mixing // *Mediterr. Mar. Sci.* 2017. Vol. 18. №. 2. P. 202–214.
6. Lyubimov D. V., Shklyaev S., Lyubimova T. P., Zikanov O. Instability of a drop moving in a Brinkman porous medium // *Phys. Fluids.* 2009. Vol. 21. No. 1, 014105.
7. Dillon W. P., Max M. D. The US Atlantic continental margin; the best-known gas hydrate locality // *Natural Gas Hydrate: In Oceanic and Permafrost Environments.* Dordrecht: Springer Netherlands, 2000. P. 157–170.
8. Spinelli G., Giambalvo E., Fische, A. Sediment permeability, distribution, and influence on fluxes in oceanic basement // *Hydrogeology of the Oceanic Lithosphere,* Cambridge: Cambridge University Press, 2004. P. 151–188.
9. Nield D.A., Bejan A. *Convection in porous media.* Cham: Springer, 2017. 778 p.
10. McKibbin R. Thermal convection in a porous layer: Effects of anisotropy and surface boundary conditions. // *Transp. Porous Med.* 1986. Vol. 1, P. 271–292.
11. Самойлова А. Е., Голдобин Д. С., Клименко Л. С. Конвективный перенос в донных отложениях // *XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.* СПб, 2023. С. 668–670.



## References

1. Rochelle C. A., et al. Can CO<sub>2</sub> hydrate assist in the underground storage of carbon dioxide? *Geol. Soc. Spec. Publ.*, 2009, vol. 319, pp. 171–183.
2. Goldobin D. S., Baryakh A. A. Underground sequestration of carbon as a component of decarbonization of anthropogenic activity. *Perm Federal Research Center Journal*, 2023, no 4, pp. 6–13 (In Russian).
3. Davie M. K., Buffett B. A. A numerical model for the formation of gas hydrate below the seafloor // *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 2001, vol. 106, no. B1, pp. 497–514.
4. Samoiloва A. E., Egorova A. A. Thermal convection in porous media placed between water body and impermeable porous massif. *Proc. Conf. "Perm hydrodynamic Scientific Readings – 2023"*, Perm, 2023, pp. 367–370. (in Russian)
5. Barnard A., Max M. D., Gualdesi L. Submarine vortices derived from natural gas hydrate conversion: a mechanism for ocean mixing. *Mediterr. Mar. Sci.*, 2017, vol. 18, no. 2, pp. 202–214.
6. Lyubimov D. V., Shklyayev S., Lyubimova T. P., Zikanov O. Instability of a drop moving in a Brinkman porous medium. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, no. 1, 014105.
7. Dillon W. P., Max M. D. The US Atlantic continental margin; the best-known gas hydrate locality. *Natural Gas Hydrate: In Oceanic and Permafrost Environments*, Dordrecht: Springer Netherlands, 2000, pp. 157–170.
8. Spinelli G., Giambalvo E., Fishe A. Sediment permeability, distribution, and influence on fluxes in oceanic basement. *Hydrogeology of the Oceanic Lithosphere*, Cambridge: Cambridge University Press, 2004, pp. 151–188.
9. Nield D. A., Bejan A. *Convection in porous media*. Cham: Springer, 2017, 778 p.
10. McKibbin R. Thermal convection in a porous layer: Effects of anisotropy and surface boundary conditions. *Transp. Porous Med.*, 1986, vol. 1, pp. 271–292.
11. Samoiloва A. E., Goldobin D. S., Klimenko L. S. Convective flow in the seabed sediments. *Proc. of the XIII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics*. S.-Petersburg, 2023, pp. 668–670. (in Russian)

### Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Самойлова А. Е., Егорова А. А. Влияние анизотропии проницаемости и свойств дна на тепловую конвекцию в донных отложениях // Вестник Пермского университета. Физика. 2024. № 4. С. 55–63. doi: 10.17072/1994-3598-2024-4-55-63

### Please cite this article in English as:

Samoilova A.E., Egorova A.A. Influence of permeability anisotropy and boundary conditions on thermal convection in seabed sediments. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2024, no. 4, pp. 55–63. doi: 10.17072/1994-3598-2024-4-55-63

### Сведения об авторах

1. Анна Евгеньевна Самойлова, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории подземной утилизации углерода, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Ак. Королёва, 1, Пермь, 614013; доцент кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068
2. Анастасия Александровна Егорова, студент физико-математического института, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068; лаборант лаборатории подземной утилизации углерода, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Ак. Королёва, 1, Пермь, 614013

### Author information

1. Anna E. Samoiloва, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Associate Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia
2. Anastasia A. Egorova, Student, Institute of Physics and Mathematics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia; Laboratory Assistant, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia.