

УДК 532.517.4
PACS 47.27.E-, 05.45.-a

О статистических свойствах каскадных моделей турбулентности

А. В. Шестаков[†], П. Г. Фрик[‡]

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

[†] shestakov@icmm.ru

[‡] frick@icmm.ru

Проведен статистический анализ характеристик пульсаций поля скорости, спектрального потока энергии и скорости диссипации энергии в рамках двух типов каскадных моделей развитой турбулентности. Показано, что функция распределения вероятности спектрального потока энергии у рассмотренных моделей отличается принципиально – в одной поток энергии флуктуирует, но остается в основном положительным, с очень небольшой долей отрицательных значений, в то время как в другой модели размах флуктуаций значительно шире и вероятность отрицательных значений сопоставима с вероятностью положительных. Для одинаковых начальных условий совпадает только статистический момент первого порядка. Качественное совпадение демонстрирует функция распределения скорости диссипации энергии. Важно, что, не смотря на столь разные статистические свойства каскадного потока энергии, обе модели одинаково хорошо воспроизводят статистику моментов высокого порядка для пульсаций поля скорости. Этот факт заслуживает внимания, так как считается, что поведение структурных функций высокого порядка определяется функцией распределения вероятности поля скорости диссипации энергии и/или поля плотности спектрального потока энергии.

Ключевые слова: турбулентность; каскадные модели; спектральный поток;

Поступила в редакцию 23.07.2024; после рецензии 14.10.2024; принята к опубликованию 14.10.2024

On statistical properties of shell models of turbulence

A. V. Shestakov[†], P. G. Frick[‡]

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

[†] shestakov@icmm.ru

[‡] frick@icmm.ru

We have conducted statistical analysis of the characteristics of the velocity field pulsations, spectral energy flux, and energy dissipation rate in the framework of two types of shell models of developed turbulence. It is shown that the probability distribution functions of the spectral energy flux of the considered models differ fundamentally: in one model the energy flux fluctuates but remains mainly positive, with a very small fraction of negative values, while in the other model the range of fluctuations is much wider and the probability of negative values is comparable to the probability of positive values. For the same initial conditions, only the first-order statistical moment coincides. Qualitative coincidence is demonstrated by the distribution function of the energy dissipation rate. It is important that, in spite of such different statistical properties of the cascade energy flux, both models reproduce equally well the statistics of the high-order moments for the velocity field pulsations. This fact is noteworthy because the behavior of the high-order structural

functions is believed to be determined by the probability distribution function of the energy dissipation rate and/or the spectral energy flux density.

Keywords: turbulence; shell models; spectral flux

Received 23 July 2024; revised 14 October 2024; accepted 14 October 2024

doi: 10.17072/1994-3598-2024-4-38-44

1. Введение

В серии классических работ 1941 года А. Н. Колмогоров сформулировал базовые гипотезы о существовании в развитой турбулентности инерционного интервала масштабов, в котором статистические свойства турбулентности определяются средней скоростью диссипации энергии ε , которая, в свою очередь, равна средней скорости спектрального переноса энергии вдоль инерционного интервала l [1]. Для структурных функций скорости эти гипотезы и соображения размерности дают степенные законы вида

$$S_q(l) = \langle \delta v_l^q \rangle \sim (\varepsilon l)^{q/3} \quad (1)$$

где δv_l есть разность какой-либо компоненты скорости в двух точках, отстоящих на расстоянии l друг от друга, а порядок q равен любому целому числу.

Для структурной функции третьего порядка соотношение (1) представляет собой точный закон ($S_3(l) = -4/5(\varepsilon l)$ – это знаменитый закон Колмогорова «4/5»), а для всех остальных представляет собой оценку, на нестрогость которой еще в 1942 году указал Л. Ландау (подробно обсуждается во многих книгах, например, [2–4]). Проблема состоит в том, что скорость диссипации энергии, как и спектральный поток энергии, есть величина случайная, а это означает, что возведение в степень средней величины в (1) становится некорректным. Влияние неоднородности поля скорости диссипации на турбулентность получило название «пережаемости» и стало предметом исследований, не завершившихся и до настоящего времени. По сути, речь ведется о законе распределения вероятности для скорости диссипации энергии (так, А. Н. Колмогоров в теории локально-однородной турбулентности предположил логнормальное распределение [5], а ряд авторов – логпуассоновское [6, 7]).

Одним из самых простых инструментов исследования каскадных процессов в развитой турбулентности являются каскадные модели (в англоязычной литературе принят термин «shell models»), которые, не смотря на свою простоту, воспроизводят многие свойства реальных турбулентных потоков. Модели этого типа предложили независимо друг от друга А. М. Обухова [8] и Е. Лоренц [9] в начале 1970-х, но популярными они стали после работы М. Ямады и К. Охитани [10], которые на базе модифицированной модели Е. Гледзера [11], рассмотрели поведение аналогов структурных

функций высоких порядков и обнаружили, что они очень хорошо воспроизводят известные экспериментальные данные. Соответствующий класс моделей получил название GOY (Gledzer-Okhitani-Yamada) и в течение почти двух десятков лет оставался самым популярным типом каскадных моделей (см. обзор [12]). Что касается структурных функций высокого порядка, наиболее подробный анализ целого класса моделей типа GOY был проведен в работе [13], в которой было показано, что при наборе параметров, отвечающих однородной изотермической трехмерной турбулентности, функции распределения потока энергии действительно напоминают логпуассоновские распределения.

В начале 2000-х на смену моделям GOY пришли модели нового поколения, приспособленные для корректного описания каскада различных спиральных инвариантов в турбулентности (снова отсылаем к обзору [12]), но как ни странно, попыток проверить в рамках этих моделей вопрос о функциях распределения вероятности не было.

В данной работе сделана попытка восполнить этот пробел. В начале исследования ответ казался почти очевидным (оснований ждать других законов не было), но результат оказался не совсем тривиальным – структурные функции ведут себя в обоих классах моделей практически идентично, а функции распределения плотности вероятности для спектральных потоков отличаются сильно. Этот результат и стал основным содержанием работы.

2. Каскадные модели

Вопрос о статистических свойствах различных каскадных моделей рассмотрим на основе двух каскадных моделей турбулентности. Одна из них – известная модель GOY [13], вторая модель разработана авторами и подробно описана в работе [14].

Каскадные модели турбулентности подробно описаны в литературе, например, в [4, 12], поэтому описание принципов их построения и особенностей опустим. Все каскадные модели турбулентности записываются для переменных U_n , каждая из которых является коллективной характеристикой пульсаций скорости в сферической оболочке (shell), определяемой в пространстве Фурье так, что $k_n < |k| < k_{n+1}$, а $k_n = \lambda^n$ (величина λ определяет толщину оболочек). Каскадные уравнения имеют вид

$$d_t U_n = W_n(U, U) - \nu k_n^2 U_n + F_n. \quad (2)$$

Конкретный вид модели определяется структурой оператора $W_n(U, U)$, который моделирует нелинейное слагаемое уравнения Навье-Стокса и описывает взаимодействие вихрей разного масштаба. Слагаемое $\nu k_n^2 U_n$ описывает действие вязкости, F_n описывает внешнюю силу. Разные каскадные модели отличаются друг от друга видом оператора $W_n(U, U)$.

2.1. Модель GOY

Каскадная модель GOY сформулирована в комплексных переменных и для однородной изотропной трехмерной турбулентности имеет вид [4]

$$\dot{U}_n = ik_n \left(U_{n+1}^* U_{n+2} + \frac{1-\lambda}{\lambda^2} U_{n-1}^* U_{n+1} - \frac{1}{\lambda^3} U_{n-1}^* U_{n-2} \right). \quad (3)$$

Модель GOY в невязком пределе и отсутствии внешней силы имеет два интеграла движения (как и трехмерные уравнения Эйлера). Это энергия пульсаций скорости

$$E = \sum_n \frac{U_n U_n^*}{2},$$

и второй интеграл

$$H = \sum_n (-1)^n k_n U_n U_n^*,$$

выступающий аналогом спиральности (спиральностью называется интеграл от скалярного произведения векторов скорости и завихренности).

Модель GOY по классификации обзора [12] относится к моделям типа L2 (нелинейный оператор включает локальные взаимодействия масштаба n с соседними масштабами, от $n-2$ до $n+2$).

2.2. Модель ND-C

Вторая модель, которую будем обозначать аббревиатурой ND-C (комплексное обобщение модели Новикова-Деснянского), относится по той же классификации к моделям типа L1 (нелинейный оператор включает локальные взаимодействия масштаба n с соседними масштабами, от $n-1$ до $n+1$). Уравнения модели запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}_n = & ik_n \gamma_1 \left[U_{n-1}^2 + (U_{n-1}^*)^2 + \right. \\ & \left. + \lambda (U_n^* U_{n+1} - U_n U_{n+1}^*) - \right. \\ & \left. - \lambda^2 (U_n U_{n+1} + U_n^* U_{n+1}^*) \right] + \\ & + ik_n \gamma_2 \left[U_{n-1} U_n + U_{n-1}^* U_n^* + \right. \\ & \left. + \lambda (U_{n-1}^* U_n^* - U_{n-1} U_n) - \right. \\ & \left. - \lambda^2 (U_{n+1}^2 + (U_{n+1}^*)^2) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Модель (5) также имеет два интеграла движения. Энергия определена точно также, как и в мо-

дели GOY (4), а второй интеграл, являющийся аналогом спиральности и имеющий соответствующую размерность, имеет вид

$$H = \frac{1}{4i} \sum_n k_n (U_n^2 - (U_n^*)^2).$$

Модель содержит два весовых коэффициента $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = -\lambda^{-5/2}$. Свойства этой модели подробно описаны в [14].

3. Показатели скейлинга структурных функций

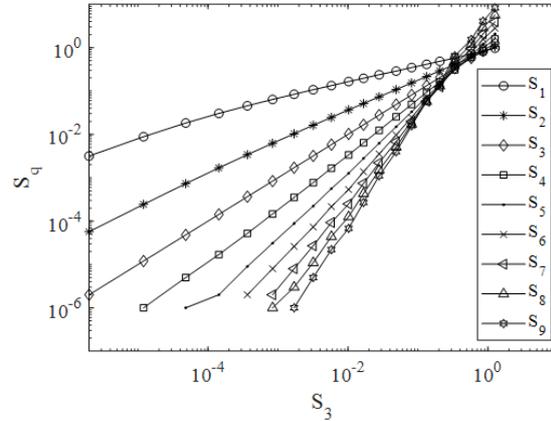
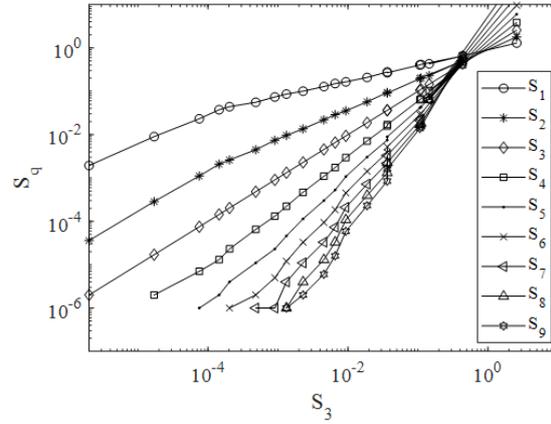


Рис. 1. Структурные функции S_q в зависимости от S_3 , полученные с помощью модели GOY (а) и модели ND-C (б) для $Re=10^5$

Уравнения (4) и (5) решались численно для числа Рейнольдса $Re=10^5$ и внешней силы F_n , действующей с единичной мощностью только на самом большом масштабе ($k_0=1$) – на макро, или внешнем масштабе турбулентности. Решения уравнений носят хаотический характер и структурные функции определяются путем осреднения на значительном интервале времени (порядка тысяч безразмерных единиц времени). Инерционный интервал со степенной зависимостью для структурных функций вида

$$S_q = \langle |U_n|^q \rangle \sim k_n^{-\zeta} q$$

устанавливается в интервале волновых чисел $k_2 < k < k_{12}$. Для определения показателей скейлинга ζ_q используется метод, известный под аббревиатурой ESS (Extended Self-Similarity [15]) и состоящий в том, что структурные функции произвольного порядка строятся не как функции масштаба l , а как функции структурной функции третьего порядка, которая в инерционном интервале строго линейна по l . Метод широко используется при определении скейлинговых показателей по экспериментальным и численным данным [4], так как позволяет существенно точнее определить значения показателей ζ_q .

Результаты вычислений структурных функций в рамках обеих моделей показаны на рис. 1 в двойном логарифмическом масштабе. Можно отметить, что на одинаковой выборке данных (интервалы интегрирования обеих моделей были равны) модель (5) дает более гладкие зависимости, но вычисленные методом наименьших квадратов значения показателей ζ_q оказались практически одинаковыми. Эти значения, вычисленные по результатам расчета обеих моделей, приведены на рис. 2 вместе с аналитической кривой, получаемой по формуле Ше-Левека [6]

$$\zeta_q = \frac{q}{9} + 2 \left(1 - (2/3)^{q/3} \right),$$

которая до настоящего времени остается лучшей аппроксимацией имеющихся экспериментальных данных. Можно видеть, что обе модели воспроизводят эту зависимость практически точно.

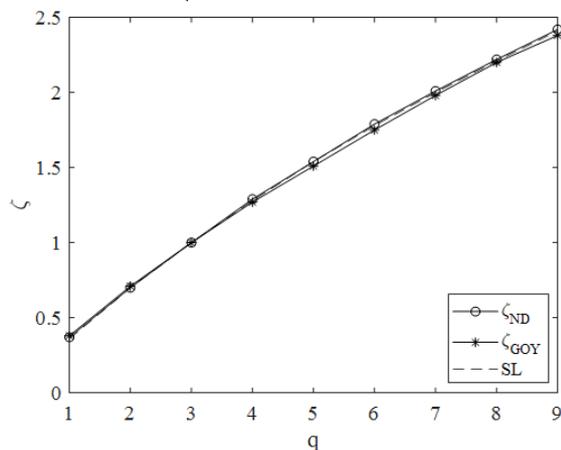


Рис. 2. Скейлинговые показатели ζ_q структурных функций, для модели GOY и ND-C, полученные с применением гипотезы ESS, в сравнении с аналитической формулой Ше-Левека (SL)

4. Плотность распределения вероятности спектральных потоков и скорости диссипации энергии

Для середины инерционного интервала ($n=6$) в течение всего расчета регистрировались значения

спектрального потока энергии π и по полученным выборкам строилась функция распределения вероятности $P(\pi)$. Одновременно вычислялась интегральная скорость диссипации энергии $\varepsilon = \sum_n \nu k_n^2 U_n U_n^*$, для которой также строилась функция распределения плотности вероятности $P(\varepsilon)$.

На рис. 3 приведены функции распределения плотности вероятности для спектрального потока энергии для модели GOY и модели ND-C. Расчеты выполнены для числа Рейнольдса $Re=10^5$, длина выборки в обоих случаях одинакова и составила 2×10^6 точек. Время выборки – 1000 единиц времени оборота крупномасштабного вихря.

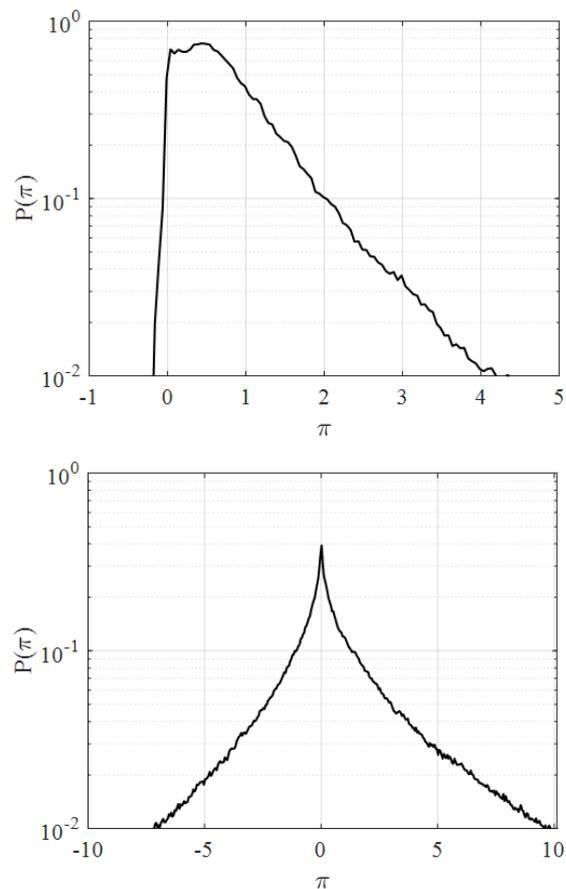


Рис. 3. Функция распределения плотности вероятности спектрального потока энергии $P(\pi)$ в середине инерционного интервала для моделей GOY (вверху) и ND-C (внизу), $\langle \pi \rangle \approx 1$

Рисунок 3 свидетельствует о принципиально разной структуре спектрального потока энергии в двух моделях. В модели (4) функция распределения вероятности уходит в область отрицательных значений, но плотность вероятности в отрицательной области быстро падает, а отрицательные значения не превышают значения -0.2 . Максимальное

значение потока достигает 4.2. Наиболее вероятное значение составляет порядка 0.5 и максимум достаточно пологий. Модель (5) дает значительно более широкий разброс значений потока (примерно от -7 до +10), причем плотность вероятности имеет острый максимум при $\pi \sim 0$. Следует подчеркнуть, что средний поток при этом в обеих моделях одинаковый, $\langle \pi \rangle = 1$.

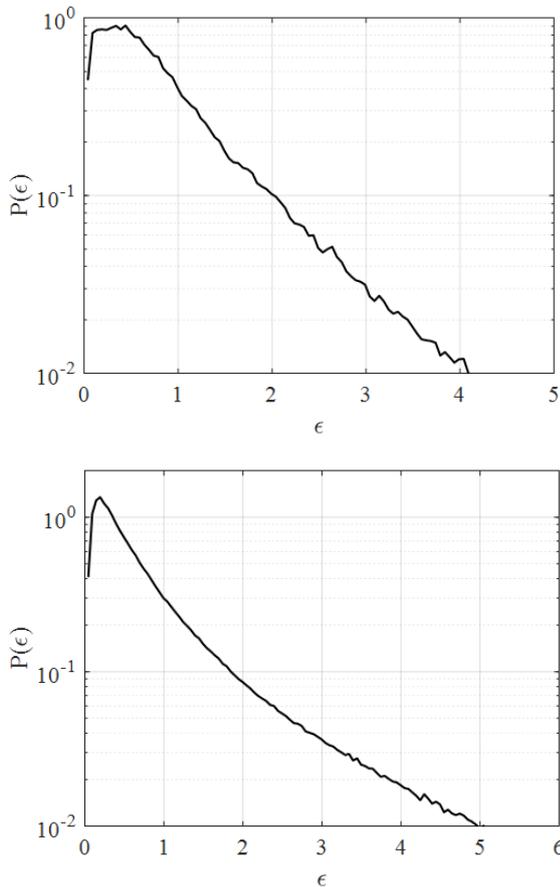


Рис. 4. Функция распределения плотности вероятности скорости диссипации энергии $P(\varepsilon)$ для модели GOY (вверху) и ND-C (внизу), $\langle \varepsilon \rangle \approx 1$

На рис. 4 показаны распределения плотности вероятности скорости диссипации энергии. В этом случае результаты, полученные двумя моделями, различаются не столь существенно. Скорость диссипации энергии всегда положительна и ее среднее значение в обеих моделях одинаково. Разброс значений в модели (5) несколько больше (максимальные значения достигают 5, а в модели (4) – примерно 4), а максимум более острый. Нужно напомнить, что каскадные модели являются спектральными моделями и не описывают пространственное распределение каких-либо величин. Поэтому значения скорости диссипации энергии, получаемые суммированием диссипации по всем масштабам, оказывается существенно более сла-

женной величиной, чем спектральный поток энергии.

Сравнение распределений плотностей вероятности обеих величин, полученное в разных каскадных моделях турбулентности позволяет сделать вывод о том, что конкретный вид нелинейного слагаемого определяет характер пульсаций спектрального потока энергии (несмотря на то, что скейлинг структурных функций модели дают практически идентичный). В модели ND-C размах пульсаций значительно выше (коэффициент эксцесса равен 550 против значения 130 в модели GOY) – устойчивый средний поток энергии к малым масштабам формируется на фоне сильных флуктуаций, в которых максимальные значения обратного (инверсного) потока энергии значительно превышают его среднее значение.

5. Заключение

Проведен статистический анализ характеристик пульсаций поля скорости, спектрального потока энергии и скорости диссипации энергии в рамках двух типов каскадных моделей развитой турбулентности. Показано, что функция распределения вероятности спектрального потока энергии $P(\pi)$ у рассмотренных моделей отличается принципиально – в модели GOY поток энергии флуктуирует, но остается в основном положительным, с очень небольшой долей отрицательных значений, в то время как в модели ND-C размах флуктуаций значительно шире и вероятность отрицательных значений сопоставима с вероятностью положительных. Для одинаковых начальных условий совпадает только статистический момент первого порядка $\langle \pi \rangle$. Остальные статистические моменты, коэффициенты асимметрии, эксцесса и т.д. не совпадают. Качественное совпадение демонстрирует функция распределения скорости диссипации энергии $P(\varepsilon)$, но и в этом случае количественные различия имеют место, хотя момент первого порядка $\langle \varepsilon \rangle$ также совпадает. Важно, что, не смотря на столь разные статистические свойства каскадного потока энергии, обе модели одинаково хорошо воспроизводят статистику моментов высокого порядка для пульсаций поля скорости. Этот факт заслуживает внимания, так как считается, что поведение структурных функций высокого порядка определяется функцией распределения вероятности поля скорости диссипации энергии и/или поля плотности спектрального потока энергии.

Список литературы

1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады

- Академии наук СССР. 1941. Т. 30. С. 9–13. DOI: 10.3367/UFNr.0093.196711h.0476.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
 3. Frisch U. Turbulence. Legacy of Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press. 1995. 296 p.
 4. Фрик П. Г. Турбулентность: подходы и модели. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 332 с.
 5. Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at High Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1962. Vol. 13 P. 82–85.
 6. She Z. S., Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence // *Physical Review Letters*. 1994. Vol. 72. P. 336–339. DOI: 10.1103/PhysRevLett.72.336.
 7. Dubrulle B. Intermittency in fully developed turbulence: log-Poisson statistics and generalized scale covariance // *Physical Review Letters*. 1994. Vol. 73. P. 959–962. DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.959.
 8. Обухов А. М. О некоторых общих свойствах уравнений динамики атмосферы // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1971. № 7. С. 695–704.
 9. Lorenz E. N. Low order models representing realizations of turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. 1972. Vol. 55. P. 545–563. DOI: 10.1017/S0022112072002009.
 10. Yamada M., Okhitani K. Lyapunov spectrum of a chaotic model of three-dimensional turbulence // *J. Physical Society of Japan*, 1987. Vol. 56. P. 4210–4219. DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.983.
 11. Гледзер Е. Б. Система динамического типа, допускающая два квадратичных интеграла движения // *Доклады Академии наук СССР*. 1973. Т. 209. N. 5. С. 1046–1048.
 12. Plunian F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence // *Physics Reports*. 2013. Vol. 523. N. 1. P. 1–60. DOI: 10.1016/j.physrep.2012.09.001.
 13. Frick P., Dubrulle B., Babiano A. Scaling properties of a class of shell models // *Physical Review E*. 1995. Vol. 51. N. 6. P. 5582–5593. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.5582.
 14. Шестаков А. В., Степанов Р. А., Фрик П. Г. О механизмах каскадного переноса энергии в конвективной турбулентности // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016. Т. 9. № 2. С. 125–134. DOI 10.7242/1999-6691/2016.9.2.11.
 15. Benzi R., Ciliberto S., Tripiccone R., Baudet C., Massaioli F., Succi S. Extended self-similarity in turbulent flows // *Physical Review E*. 1993. Vol. 48. P. R29–R32. DOI: 10.1103/PhysRevE.48.R29.

References

1. Kolmogorov A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Doklady Akad. Sci. USSR*, 1941, vol. 30, no. 4, pp. 299–303. DOI: 10.1070/PU1968v010n06ABEH003710.
2. Landau L. D., Lifshitz E. M. Course of Theoretical Physics, vol. 6. *Fluid Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987. 554 p.
3. Frisch U. Turbulence. Legacy of Kolmogorov. Cambridge: Cambridge University Press. 1995. 296p.
4. Frick P. G. *Turbulentnost: podkhody i modeli*. [Turbulence: Approaches and Models. Regular Chaotic Dynamics], Moscow-Izhevsk: Publ. House “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, 2010. 332 p. (In Russian).
5. Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at High Reynolds number. *J. Fluid Mech*, 1962, vol. 13, pp. 82–85.
6. She Z. S., Leveque E. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Physical Review Letters*, 1994, vol. 72, pp. 336–339. DOI: 10.1103/PhysRevLett.72.336.
7. Dubrulle B. Intermittency in fully developed turbulence: log-Poisson statistics and generalized scale covariance. *Physical Review Letters*, 1994, vol. 73, pp. 959–962. DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.959.
8. Obukhov A.M. O nekotorykh obshchikh kharakteristikakh uravneniy dinamiki atmosfery [Some general characteristic equations of the dynamics of the atmosphere]. *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Atmospheric and Oceanic Physics*, 1971, vol. 7, no. 7, pp. 695–704 (In Russian).
9. Lorenz E. N. Low order models representing realizations of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, vol. 55, pp. 545–563. DOI: 10.1017/S0022112072002009.
10. Yamada M., Okhitani K. Lyapunov spectrum of a chaotic model of three-dimensional turbulence. *J. Physical Society of Japan*, 1987. vol. 56, pp. 4210–4219. DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.983.
11. Gledzer E. B. System of hydrodynamic type admitting two quadratic integrals of motion. *Doklady Physics*, 1973, vol. 18, p. 216.
12. Plunian F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence. *Physics Reports*, 2013, vol. 523, no. 1, pp. 1–60.

- DOI: 10.1016/j.physrep.2012.09.001.
13. Frick P., Dubrulle B., Babiano A. Scaling properties of a class of shell models. *Physical Review E*, 1995, vol. 51, no. 6, pp. 5582–5593. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.5582.
14. Shestakov A. V., Stepanov R. A., Frick P. G. On cascade energy transfer in convective turbulence. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2017, vol. 58, no. 7, pp. 1171–1180. DOI: 10.1134/S0021894417070094.
15. Benzi R., Ciliberto S., Tripicciono R., Baudet C., Massaioli F., Succi S. Extended self-similarity in turbulent flows. *Physical Review E*, 1993. vol. 48, pp. R29–R32. DOI: 10.1103/PhysRevE.48.R29.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Шестаков А. В., Фрик П. Г. О статистических свойствах каскадных моделей турбулентности // Вестник Пермского университета. Физика. 2024. № 4. С. 38–44. doi: 10.17072/1994-3598-2024-4-38-44

Please cite this article in English as:

Shestakov A. V., Frick P. G. On statistical properties of shell models of turbulence. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2024, no. 4, pp. 38–44. doi: 10.17072/1994-3598-2024-4-38-44

Сведения об авторах

1. Александр Владимирович Шестаков, канд. физ.-мат. наук, с.н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, ул. Академика Королева 1, 614013.
2. Фрик Петр Готлобович, д-р. физ.-мат. наук, зав. отделом физической гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, ул. Академика Королева 1, 614013.

Author information

1. Aleksandr V. Shestakov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia.
2. Peter G. Frick, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia