

УДК 532.5.032, 532.13  
PACS 47.55.Dz, 47.50.Gj

## Устойчивость трансляционных колебаний зажатой капли маловязкой жидкости

**А. А. Алабужев**

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия  
Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия  
alabuzhev@icmm.ru

Исследуется колебательная динамика капли маловязкой жидкости, окруженной другой жидкостью, при трансляционном вибрационном малоамплитудном воздействии. Капля равновесной цилиндрической формы зажата между параллельными твердыми плоскостями. Краевые углы прямые и постоянные, линии контакта трех сред свободно скользят по поверхности пластин. На поверхности раздела капля–окружающая жидкость учитывается тонкий вязкий пограничный слой. Рассмотрены собственные и вынужденные колебания капли. В главном порядке разложения по малой амплитуде вибраций получены частоты собственных колебаний невязкой цилиндрической капли. В первом порядке разложения найдена поправка к частоте, которая вызвана диссипацией энергии в вязком пограничном слое. Исследована устойчивость вынужденных колебаний по отношению к малым возмущениям. Параметрический резонанс наступал при выполнении условия синхронизма: частота вибраций равняется сумме частот двух соседних мод собственных колебаний. Найдено выражение, описывающие резонансные области. Показана, что малая вязкость приводит к появлению порога амплитуды вибраций и сдвигу области неустойчивости при сравнении с нулевой вязкостью.

**Ключевые слова:** цилиндрическая капля; собственные колебания; вынужденные колебания; вязкое затухание; параметрическая неустойчивость

*Поступила в редакцию 07.08.2024; после рецензии 20.08.2024; принята к опубликованию 20.08.2024*

## The stability of translational oscillations of a clamped drop of a low-viscosity liquid

**A. A. Alabuzhev**

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia  
Perm State University, Perm, Russia  
alabuzhev@icmm.ru

The study investigates oscillatory dynamics of a drop of a low-viscosity liquid surrounded by another liquid under translational low-amplitude vibration influence. A drop of equilibrium cylindrical shape is sandwiched between parallel solid planes. The contact angles are straight and constant, the contact lines of the three media slide freely along the surface of the plates. At the droplet–surrounding liquid interface, a thin viscous boundary layer is taken into account. Natural and forced oscillations of the drop are considered. In the main order of expansion in terms of small amplitude of vibrations, the natural frequencies of oscillations of an inviscid cylindrical drop were obtained. In the first order of expansion, a correction to the frequency was found, caused by energy

dissipation in the viscous boundary layer. The stability of forced oscillations with respect to small disturbances was studied. Parametric resonance occurred when the synchronism condition was met: the vibration frequency was equal to the sum of the frequencies of two adjacent modes of natural oscillations. An expression describing the resonant regions was found. It is shown that low viscosity leads to the appearance of a vibration amplitude threshold and a shift in the instability region when compared with zero viscosity.

**Keywords:** cylindrical drop; natural vibrations; forced vibrations; viscous damping; parametric instability

Received 07 August 2024; revised 20 August 2024; accepted 20 August 2024

doi: 10.17072/1994-3598-2024-3-50-59

## 1. Введение

При высокочастотных вибрациях вязкость может играть существенную роль только в узких пограничных слоях около поверхностей раздела. Это позволяет рассматривать жидкость в ядре как невязкую и учитывать вязкость только в пограничных слоях [1, 2]. Диссипация энергии в вязком пограничном слое на твердой поверхности вносит существенно больший вклад, чем диссипация в вязком пограничном слое на поверхности раздела двух жидкостей. Строгий учет влияния малой вязкости жидкостей проводился в работе [3] при рассмотрении нелинейной теории возбуждения параметрической неустойчивости возбуждаемых волн на поверхности жидкости. В работе [4] изучались малоамплитудные вибрации сферической капли, помещенной в другую жидкость. Задача рассматривалась в невязкой постановке и в приближении малой вязкости, феноменологически, искусственным добавлением в амплитудные уравнения членов, отвечающих за диссипацию энергии, что приводит к появлению конечного порога по амплитуде вибраций и сдвигу резонансной частоты. При этом оказалось, что случаи нулевой вязкости и вязкости, стремящейся к нулю, не эквивалентны друг другу [4, 5]. При рассмотрении параметрической неустойчивости вибраций полусферической капли маловязкой жидкости [6] и строгом учете малой вязкости был обнаружен подобный эффект. Более детально посмотреть влияние вибраций на устойчивость поверхности раздела можно, например, в работах [7–13].

В работе [14] изучались резонансные колебания одиночной капли жидкости или газового пузыря относительно их равновесной сферической формы, возникающие в результате гармонических поступательных колебаний объема жидкости различной плотности, содержащего такое включение, аналогично [4, 5]. Параметрический резонанс вынужденной поступательной моды с основной резонансной частотой, равной сумме двух соседних собственных частот капиллярных колебаний границы раздела, ранее был обнаружен в невязком приближении [4, 5], также учитывал низкую вяз-

кость с использованием феноменологического подхода. Влияние вязкости на резонанс исследовалось путем строгого учета вязкости в динамическом пограничном слое вблизи границы раздела [14]. Были определены закономерности эволюции резонансных мод вблизи порога возбуждения неустойчивости. Выявлена эквивалентность двух подходов с учетом вязкости: строгого, построенного на методе множественных масштабов, и развитого ранее феноменологического подхода, основанного на искусственном добавлении диссипативных членов в амплитудные уравнения. Влияние осредненных эффектов для сферического газового пузырька исследовалось в работах [15, 16].

В работе [17] рассматривались собственные колебания вязкого капиллярного моста (цилиндрической капли с закрепленной линией контакта) в поле тяжести. Капля маловязкой жидкости, с учетом вязких пограничных слоев на твердой поверхности, в поле осевых вибраций, исследовалась в работе [18]. Резонанс возникал при условии равенства частоты вибраций сумме частот одной азимутальной моды, аналогично случаю сферической капли [4, 5, 14]:

$$\omega = \Omega_{m,k} + \Omega_{m,l},$$

где  $m$  – азимутальное волновое число,  $k, l$  – осевые волновые числа.

При исследовании устойчивости цилиндрической невязкой жидкости со свободной линией контакта (постоянным краевым углом) [10, 19] было показано, что параметрическая неустойчивость возникала при выполнении условия синхронизма:

$$\omega = \Omega_{m,k} + \Omega_{m+1,l}.$$

В данной работе рассматривается влияние малой вязкости на устойчивость вынужденных колебаний цилиндрической капли жидкости в поле трансляционных вибраций.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим поведение капли жидкости плотностью  $\tilde{\rho}_i$ , окруженной другой жидкостью плотно-

стью  $\tilde{\rho}_e$ . Жидкости не смешиваются между собой. В отсутствие действия внешних сил капля имеет форму цилиндра радиусом  $R$ . Вся система ограничена двумя параллельными между собой твердыми поверхностями, перпендикулярными оси цилиндра (рис. 1). При отсутствии вибраций угол между боковой поверхностью капли и ограничивающей плоскостью равен  $90^\circ$ . Расстояние между твердыми поверхностями равно  $h$ . Сосуд замкнуто на бесконечности и совершает высокочастотные малоамплитудные колебания по закону  $\vec{r} = \vec{R} + A\vec{j} \cos \omega t$  ( $\vec{r}$  и  $\vec{R}$  – радиус-векторы произвольной точки поверхности в плоскости  $(x, y)$  при наличии и отсутствии вибраций, соответственно,  $A$  – амплитуда вибраций,  $\vec{j}$  – единичный вектор вдоль оси  $x$ ). На больших расстояниях от капли жидкость в системе отсчета, связанной с сосудом, покоится. Сила тяжести не учитывается, т.е. число Бонда  $B = \tilde{\rho}gR^2 / \sigma$  мало, где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $g$  – гравитационное ускорение.

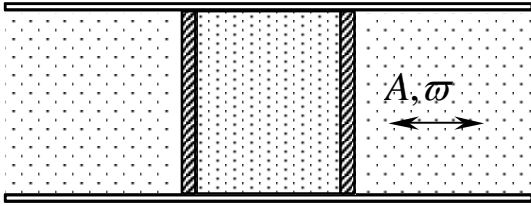


Рис. 1. Геометрия задачи. Вязкие пограничные слои выделены штриховкой

Вязкость играет существенную роль только на поверхностях раздела жидкостей в узких пограничных слоях. Поэтому влияние вязкости будем учитывать в пограничном слое, который окружает невязкие ядра капли и внешней жидкости (рис. 1).

Предполагается, что амплитуда внешних вибраций  $A$  и толщина вязкого пограничного слоя  $\delta$  малы по сравнению с равновесным радиусом  $R$  и высотой капли  $h$ . Контактная линия свободно скользит вдоль твердых поверхностей. Движение капли вызвано колебаниями окружающей жидкости. Краевой угол в процессе движения не изменяется.

Безусловно, это модельная задача. Но из нее легко получить основные эффекты, связанные с диссипацией энергии в вязком пограничном слое.

В цилиндрической системе координат поверхность капли описывается соотношением

$$r = R + \zeta(\alpha, z, t),$$

где  $\zeta$  – отклонение боковой поверхности капли от равновесного значения,  $\alpha$  – азимутальный угол (отчитывается от оси  $x$  в сторону оси  $y$ ).

Запишем уравнение движения и уравнение непрерывности в системе отсчета, связанной с сосудом:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \quad (2.1)$$

$$+ \tilde{\nu} \Delta \vec{v} + A\omega^2 e^{i\omega t} \vec{e}_r \cos \alpha, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

где  $\vec{v} = u\vec{e}_r + v\vec{e}_\alpha$ ,  $\tilde{\nu}$  – кинематическая вязкость.

На поверхности «капля – окружающая жидкость» должны выполняться следующие граничные условия:

$$\text{нормальных компонент скоростей: } [\vec{v}\vec{n}] = 0,$$

$$\text{касательных компонент скоростей: } [\vec{v}\vec{\tau}] = 0,$$

$$\text{кинематическое: } \zeta_t = \vec{v} \cdot \nabla F,$$

$$\text{нормальных напряжений: } [p - \bar{\mu}\vec{n}\vec{n}] = -\sigma \nabla \cdot \vec{n},$$

$$\text{касательных напряжений: } [\bar{\mu}\vec{n}\vec{\tau}] = 0.$$

Здесь квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины при переходе во внутреннюю жидкость из внешней,

$$F = r - R - \zeta(\alpha, z, t),$$

$\bar{\mu}$  – тензор вязких напряжений,  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к боковой поверхности,  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательной к боковой поверхности.

Переходя к безразмерным переменным (выбрав в качестве единиц измерения времени

$$\sqrt{\frac{(\tilde{\rho}_i + \tilde{\rho}_e)R^3}{\sigma}}, \text{ длины } R, \text{ плотности } \tilde{\rho}_i + \tilde{\rho}_e, \text{ отклонения поверхности } A, \text{ скорости}$$

$$A \sqrt{\frac{\sigma}{(\tilde{\rho}_e + \tilde{\rho}_i)R^3}}, \text{ вязкости } \tilde{\nu}_i + \tilde{\nu}_e, \text{ давления } \frac{A\sigma}{R^2},$$

получаем следующую задачу:

$$\vec{v}_t + \varepsilon \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \quad (2.3)$$

$$+ \delta^2 \nu \Delta \vec{v} + \omega^2 e^{i\omega t} \vec{e}_r \cos \alpha, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

$$r = 1 + \varepsilon \zeta : \quad [\vec{v}\vec{n}] = 0, \quad (2.5)$$

$$[\vec{v}\vec{\tau}] = 0, \quad (2.6)$$

$$\zeta_t = \vec{v} \cdot \nabla (r - 1 - \varepsilon \zeta), \quad (2.7)$$

$$\varepsilon [p - \delta^2 \bar{\mu}\vec{n}\vec{n}] = -\nabla \cdot \vec{n}, \quad (2.8)$$

$$[\bar{\mu}\vec{n}\vec{\tau}] = 0. \quad (2.9)$$

Индексы  $t, r, \alpha$  обозначают дифференцирование по соответствующим переменным. Задача содержит следующие безразмерные параметры: малую амплитуду вибраций  $\varepsilon = A/R$ , квадрат малой толщины вязкого пограничного слоя

$$\delta^2 = (\tilde{v}_e + \tilde{v}_i) \sqrt{\frac{\tilde{\rho}_e + \tilde{\rho}_i}{\sigma R}},$$

безразмерную частоту внешних вибраций

$$\omega = \varpi \sqrt{\frac{(\tilde{\rho}_i + \tilde{\rho}_e) R^3}{\sigma}},$$

плотность и кинематическую вязкость внешней жидкости:

$$\rho_e = \frac{\tilde{\rho}_e}{\tilde{\rho}_e + \tilde{\rho}_i}, \quad \nu_e = \frac{\tilde{\nu}_e}{\tilde{\nu}_e + \tilde{\nu}_i},$$

плотность и вязкость жидкости капли:

$$\rho_i = \frac{\tilde{\rho}_i}{\tilde{\rho}_e + \tilde{\rho}_i}, \quad \nu_i = \frac{\tilde{\nu}_i}{\tilde{\nu}_e + \tilde{\nu}_i},$$

$$\rho_e + \rho_i = 1, \quad \nu_e + \nu_i = 1,$$

отношение малой амплитуды вибраций и малой толщины пограничного слоя  $s = \varepsilon / \delta$ .

### 3. Собственные колебания

Рассмотрим собственные колебания одиночной капли. Общая задача (2.3) – (2.9) запишется в виде:

$$\tilde{v}_i = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \delta^2 \nu \Delta \tilde{v}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \tilde{v} = 0, \quad (3.2)$$

$$r = 1 + \varepsilon \zeta : \quad [\tilde{v} \vec{n}] = 0, \quad (3.3)$$

$$[\tilde{v} \vec{\tau}] = 0, \quad (3.4)$$

$$\zeta_i = \tilde{v} \cdot \nabla (r - 1 - \varepsilon \zeta), \quad (3.5)$$

$$\varepsilon [p - \delta^2 \bar{\mu} \bar{n} \bar{n}] = -\nabla \cdot \bar{n}, \quad (3.6)$$

$$[\bar{\mu} \bar{n} \bar{\tau}] = 0. \quad (3.7)$$

В пограничном слое скорость и давление жидкостей могут претерпевать значительные изменения в направлении нормальном к поверхности раздела, что требует введения «быстрой» радиальной координаты [4, 20]

$$r_1 = \frac{r - 1 - \varepsilon \zeta}{\delta}. \quad (3.8)$$

Наличие в правой части (3.8) функции отклонения поверхности обязательно, т.к. в противном случае необходимо будет предполагать, что амплитуда отклонения поверхности мала по сравнению с толщиной вязкого пограничного слоя [4, 20]. Решение уравнения Навье – Стокса (3.1) будем искать в виде суммы потенциальной части  $\nabla \varphi$  для невязкого ядра и вихревой  $\vec{V} = U \vec{e}_r + W \vec{e}_\alpha$  для вязкого пограничного слоя. Уравнение движения (3.1) будет иметь вид:

$$\vec{V}_i = \delta^2 \Delta \vec{V}, \quad (3.9)$$

$$\varphi_i = -\frac{1}{\rho} p. \quad (3.10)$$

Уравнение непрерывности (3.2) запишется в виде:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (3.11)$$

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3.12)$$

Граничные условия на поверхности раздела

$$r = 1 + \varepsilon \zeta : \quad [(\nabla \varphi + \vec{V}) \vec{n}] = 0, \quad (3.13)$$

$$[(\nabla \varphi + \vec{V}) \vec{\tau}] = 0, \quad (3.14)$$

$$\zeta_i = (\nabla \varphi + \vec{V}) \cdot \nabla (r - 1 - \varepsilon \zeta), \quad (3.15)$$

$$\varepsilon [p - \delta^2 \bar{\mu} \bar{n} \bar{n}] = -\nabla \cdot \bar{n}, \quad (3.16)$$

$$[\bar{\mu} \bar{n} \bar{\tau}] = 0. \quad (3.17)$$

Решение задачи (3.9)–(3.17) будем искать в виде разложения в ряд по малому параметру  $\delta$ :

$$\varphi = (\varphi_0(r, \alpha) + \delta \varphi_1(r, \alpha) + \dots) e^{i\Omega t} \quad (3.18)$$

$$\vec{V} = (\vec{V}_0(r, r_1, \alpha) + \delta \vec{V}_1(r, r_1, \alpha) + \dots) e^{i\Omega t} \quad (3.19)$$

$$p = (p_0(r, \alpha) + \delta p_1(r, \alpha) + \dots) e^{i\Omega t} \quad (3.20)$$

$$\zeta = (\zeta_0(\alpha) + \delta \zeta_1(\alpha) + \dots) e^{i\Omega t} \quad (3.21)$$

где  $\Omega$  – частота собственных колебаний.

Подставляя разложение (3.18)–(3.21) в систему (3.9)–(3.17), в главном порядке разложения для невязкого ядра получим следующую задачу:

$$p_0 = -i\Omega \varphi_0, \quad (3.22)$$

$$\Delta \varphi_0 = 0, \quad (3.23)$$

$$r = 1 : \quad [\varphi_{0r}] = 0,$$

$$[p_0] = \zeta_0 + \zeta_{0\alpha\alpha},$$

$$i\Omega \zeta_0 = \varphi_{0r}.$$

Задача (3.22)–(3.23) исследовалась в работе [10], и ее решением являются частоты собственных колебаний свободно скользящей цилиндрической капли [21]

$$\Omega^2 = \frac{m(m^2 - 1)}{\rho_i + \rho_e}. \quad (3.24)$$

Потенциалы скоростей и функцию отклонения поверхности можно представить в виде:

$$\varphi_i = \sum_{m=2} i \frac{\Omega}{m} c_m(t_1, \dots) r^m e^{i\Omega t_0} e^{im\alpha} + c.c.,$$

$$\varphi_e = -\sum_{m=2} i \frac{\Omega}{m} c_m(t_1, \dots) \frac{1}{r^m} e^{i\Omega t_0} e^{im\alpha} + c.c.,$$

$$\zeta_0 = \sum_{m=2} c_m(t_1, \dots) e^{i\Omega t_0} e^{im\alpha} + c.c.,$$

где с.с. обозначают комплексно-сопряженное слабое.

В вязком пограничном слое в главном порядке разложения задача (3.9) – (3.17) будет иметь следующий вид

$$i\Omega \vec{V}_0 = \nu \vec{V}_{0r_1}, \quad (3.25)$$

$$U_{0r} + \frac{1}{r} U_0 + U_{1r_1} + \frac{1}{r} W_{0\alpha} = 0, \quad (3.26)$$

$$r=1, r_1=0: \quad [\varphi_{0r} + U_0] = 0,$$

$$[\varphi_{0\alpha} + W_0] = 0,$$

$$r_1 \rightarrow \infty: \quad \vec{V}_0 \rightarrow 0.$$

Из этих граничных условий следует, что только касательная к поверхности раздела компонента скорости  $\vec{V}_0$  будет отлична от нуля. Из уравнения непрерывности (3.26) можно найти радиальную компоненту скорости для следующего порядка разложения. Ниже приведены компоненты скорости в пограничном слое

$$W_{0i} = \sum_{m=2}^{\infty} d_m e^{i\Omega t} e^{im\alpha} \exp\left(\sqrt{\frac{i\Omega}{\nu_i}} r_1\right),$$

$$W_{0e} = -\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\rho_i \sqrt{\nu_i}}{\rho_e \sqrt{\nu_e}} d_m e^{i\Omega t} e^{im\alpha} \exp\left(-\sqrt{\frac{i\Omega}{\nu_e}} r_1\right),$$

$$U_{1i} = -\frac{1}{r} \sum_{m=2}^{\infty} \sqrt{\frac{\nu_i}{i\Omega}} d_m e^{i\Omega t} e^{im\alpha} \exp\left(\sqrt{\frac{i\Omega}{\nu_i}} r_1\right),$$

$$U_{1e} = \frac{1}{r} \sum_{m=2}^{\infty} \sqrt{\frac{\nu_e}{i\Omega}} d_m e^{i\Omega t} e^{im\alpha} \exp\left(-\sqrt{\frac{i\Omega}{\nu_e}} r_1\right),$$

$$d_m = \frac{2\rho_e \sqrt{\nu_e}}{\rho_e \sqrt{\nu_e} + \rho_i \sqrt{\nu_i}} i\Omega c_m.$$

В первом порядке разложения (3.9) – (3.17) для невязкого ядра получаем

$$i\Omega \varphi_1 + i\omega_1 \varphi_0 + s \frac{1}{2} (\nabla \varphi_0)^2 = -p_1, \quad (3.27)$$

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad (3.28)$$

$$r=1: \quad [\varphi_{1r} + U_1] + s \zeta_0 [\varphi_{0rr}] - s \zeta_{0\alpha} [\varphi_{0\alpha} + W_0] = 0,$$

$$i\Omega \zeta_1 + i\omega_1 \zeta_0 = \varphi_{1r} + U_1 + s \zeta_0 \varphi_{0rr} - s \zeta_{0\alpha} \varphi_{0\alpha},$$

$$[p_1] + s \zeta_0 [p_{0r}] = \zeta_1 + \zeta_{1\alpha\alpha} - s \left( \zeta_0^2 + \zeta_0 \zeta_{0\alpha\alpha} - \frac{1}{2} \zeta_{0\alpha}^2 \right),$$

Комплексная частота  $\omega_1$  является поправкой к основной частоте  $\Omega$  собственных колебаний и связана с наличием процессов диссипации в вязком пограничном слое:

$$\omega_1 = -\frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\Omega} \frac{2m\rho_e \rho_i \sqrt{\nu_e \nu_i}}{\rho_i \sqrt{\nu_i} + \rho_e \sqrt{\nu_e}}.$$

Частный случай этой поправки был получен в работе [22].

#### 4. Вынужденные колебания

Рассмотрим теперь вынужденные колебания капли. Если не учитывать вязкий пограничный слой, то общая задача (2.1)–(2.9) эквивалентна задаче о вынужденных колебаниях свободно скользящей капли при монохроматическом внешнем воздействии, которая рассматривалась в работах [10, 19]. Аналогично рассмотренной в работе задаче, здесь удобно перейти в систему отсчета, связанную с центром масс капли. Тогда

$$i\omega \vec{v} + \varepsilon \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \delta^2 \Delta \vec{v} + i\omega \Psi \vec{e}_r \cos \alpha, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (4.2)$$

$$r \rightarrow \infty: \vec{v} \rightarrow (i\omega e^{i\omega t} - \Psi)(\vec{e}_r \cos \alpha - \vec{e}_\alpha \sin \alpha), \quad (4.3)$$

$$r=1 + \varepsilon \zeta: \quad [\vec{v}\vec{n}] = 0, \quad (4.4)$$

$$[\vec{v}\vec{\tau}] = 0, \quad (4.5)$$

$$i\omega \zeta = \vec{v} \cdot \nabla (r-1 - \varepsilon \zeta), \quad (4.6)$$

$$\varepsilon [p - \delta^2 \vec{\mu} \vec{n} \vec{n}] = -\nabla \cdot \vec{n}, \quad (4.7)$$

$$[\vec{\mu} \vec{n} \vec{\tau}] = 0, \quad (4.8)$$

здесь  $\Psi$  – скорость движения центра масс,  $\omega$  – частота вибраций.

Будем рассматривать отдельно невязкое ядро и вязкий пограничный слой, аналогично задаче о собственных колебаниях. Решение будем искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра  $\delta$ :

$$\varphi = (\varphi_0(r, \alpha, z) + \delta \varphi_1(r, \alpha, z) + \dots) e^{i\omega t}, \quad (4.9)$$

$$\vec{V} = (\vec{V}_0(r, \alpha, z_1) + \delta \vec{V}_1(r, \alpha, z_1) + \dots) e^{i\omega t}, \quad (4.10)$$

$$p = (p_0(r, \alpha, z) + \delta p_1(r, \alpha, z) + \dots) e^{i\omega t}, \quad (4.11)$$

$$\zeta = (\zeta_0(\alpha, z) + \delta \zeta_1(\alpha, z) + \dots) e^{i\omega t}. \quad (4.12)$$

Подставляя разложение (4.9) – (4.12) в задачу (4.1) – (4.8), в главном порядке разложения для невязкого ядра получим следующую задачу:

$$p_0 = -\rho i \omega \varphi_0 - \rho \Psi_r r \cos \alpha, \quad (4.13)$$

$$\Delta \varphi_0 = 0, \quad (4.14)$$

$$r=1: \quad [\varphi_{0r}] = 0,$$

$$[p_0] = \zeta_0 + \zeta_{0\alpha\alpha},$$

$$i\omega\zeta_0 = \varphi_{0r}.$$

Решение задачи (4.13)–(4.14) уже известно из работы [10, 19]:

$$\varphi_{0e} = -i\omega\Pi\omega\left(r + \frac{1}{r}\right)e^{i\omega t} \cos \alpha, \quad (4.15)$$

$$\varphi_{0i} = 0, \quad (4.16)$$

$$\zeta_0 = 0, \quad (4.17)$$

$$\Psi = -2i\omega\rho_e e^{i\omega t}, \quad (4.18)$$

где  $\Pi = \rho_i - \rho_e$ .

В вязком пограничном слое в главном порядке разложения задача (4.1)–(4.8) имеет вид:

$$i\omega\vec{V}_0 = \nu\vec{V}_{0r_1}, \quad (4.19)$$

$$U_{1r_1} + \frac{1}{r}W_{0\alpha} = 0, \quad (4.20)$$

$$r=1, r_1=0: [\varphi_{0r} + U_0] = 0,$$

$$[\varphi_{0\alpha} + W_0] = 0,$$

$$r_1 \rightarrow 0: \vec{V}_0 \rightarrow 0.$$

Решение задачи (4.19)–(4.20) в вязком пограничном слое имеет следующий вид:

$$W_{0i} = fe^{i\omega t} e^{i\alpha} \exp\left(\sqrt{\frac{i\omega}{\nu_i}} r_1\right), \quad (4.21)$$

$$W_{0e} = -\frac{\rho_i \sqrt{\nu_i}}{\rho_e \sqrt{\nu_e}} fe^{i\omega t} e^{i\alpha} \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\nu_e}} r_1\right),$$

$$\text{где } f = \frac{2i\omega\Pi\rho_e \sqrt{\nu_e}}{\rho_e \sqrt{\nu_e} + \rho_i \sqrt{\nu_i}}.$$

Из уравнения непрерывности (4.20) получим в следующем порядке радиальную компоненту скорости в пограничном слое

$$U_{1i} = -\frac{1}{r} \sqrt{\frac{\nu_i}{i\omega}} fe^{i\omega t} e^{i\alpha} \exp\left(\sqrt{\frac{i\omega}{\nu_i}} r_1\right), \quad (4.22)$$

$$U_{1e} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\nu_e}{i\omega}} fe^{i\omega t} e^{i\alpha} \exp\left(-\sqrt{\frac{i\omega}{\nu_e}} r_1\right).$$

## 5. Устойчивость вынужденных колебаний

Вынужденные колебания, описываемые полученными выше формулами (4.15)–(4.17), (4.21) могут оказаться неустойчивыми относительно малых возмущений. При малоаплитудном внешнем воз-

действии возможна только параметрическая неустойчивость. Для нахождения резонансных областей введем возмущения основного состояния в виде:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi + \psi, \quad \zeta' = \zeta + \xi, \\ p' &= p + q, \quad \vec{V}' = \vec{V} + \vec{v}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\varphi'$ ,  $\zeta'$ ,  $p'$ ,  $\vec{V}'$  – возмущенное состояние,  $\varphi$ ,  $\zeta$ ,  $p$ ,  $\vec{V}$  – поля, характеризующие основное состояние,  $\psi$ ,  $\xi$ ,  $q$ ,  $\vec{v}$  – малые нестационарные возмущения. Подставляем возмущенные поля (5.1) в исходную систему (4.1) – (4.8) и линеаризуем по малым возмущениям. Решение будем искать методом многих масштабов.

Как уже отмечалось выше, при монохроматическом вибрационном воздействии для свободно скользящей цилиндрической капли при продольных вибрациях параметрическая неустойчивость для главных резонансов появляется при выполнении условия синхронизма  $\omega = \Omega_m + \Omega_{m+1}$ , где  $m$  – азимутальное волновое число. Чтобы описать близость внешних частот к сумме  $\Omega_m + \Omega_{m+1}$  количественно, введем параметр расстройки  $\gamma = \delta\gamma_1 + \delta^2\gamma_2 + \dots$ , определив его с помощью соотношения:

$$\Omega_m + \Omega_{m+1} = \omega - \delta\gamma_1 - \delta^2\gamma_2 - \dots \quad (5.2)$$

В главном порядке разложения по малому параметру  $\delta$  получаем задачу в невязком ядре, аналогичную задаче (3.22) – (3.23) на собственные колебания:

$$q_0 = -\rho i\Omega \psi_0, \quad (5.3)$$

$$\Delta \psi_0 = 0, \quad (5.4)$$

$$r=1: [\psi_{0r}] = 0,$$

$$[q_0] = \xi_0 + \xi_{0\alpha\alpha}, \quad (5.5)$$

$$i\Omega \xi_0 = \psi_{0r}, \quad (5.6)$$

и в вязком пограничном слое, аналогичную задаче (3.25) – (3.26):

$$i\Omega\vec{V}_0 = \nu\vec{V}_{0r_1}, \quad (5.7)$$

$$U_{0r} + \frac{1}{r}U_0 + U_{1r_1} + \frac{1}{r}W_{0\alpha} = 0, \quad (5.8)$$

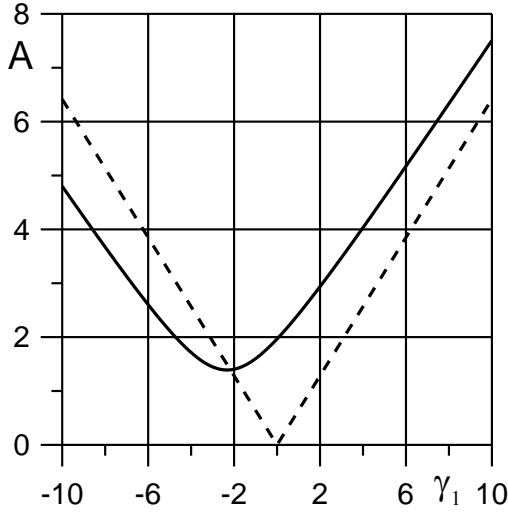
$$r=1, r_1=0: [\varphi_{0r} + U_0] = 0,$$

$$[\varphi_{0\alpha} + W_0] = 0,$$

$$r_1 \rightarrow \infty: \vec{V}_0 \rightarrow 0.$$

Решение задач устойчивости (5.3) – (5.4) и (5.7) – (5.8) в главном порядке разложения совпадает с решением задачи на собственные колебания.

В первом порядке разложения получаем следующую задачу для невязкого ядра:



**Рис. 2.** Зависимость амплитуды колебаний от расстройки в вязком случае (сплошная линия) и невязком (штриховая):  $m = 2$ ,  $\rho_i = 0.57$ ,  $\rho_e = 0.43$ ,  $\nu_i = 0.6$ ,  $\nu_e = 0.4$

$$\rho_i \Omega \psi_1 + \rho_i \omega_1 \psi_0 + s \nabla \varphi_0 \nabla \psi_0 = -q_1, \quad (5.9)$$

$$\Delta \psi_1 = 0, \quad (5.10)$$

$$r = 1: [\psi_{1r} + u_1] + s \xi_0 [\varphi_{0rr}] - s \xi_{0\alpha} [\varphi_{0\alpha} + W_0] = 0,$$

$$i \Omega \xi_1 + i \omega_1 \xi_0 = \psi_{1r} + u_1 - s \xi_{0\alpha} (\varphi_{0\alpha} + W_0).$$

$$[q_1] + s \xi_0 [p_{0r}] = \xi_1 + \xi_{1\alpha\alpha}.$$

В случае отсутствия вязкости такая задача исследовалась в работе [10, 19]. Применяя аналогичные рассуждения, найдем уравнение для определения величины расстройки  $\gamma$  и инкремента  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + b\lambda + c - L_m L_{m+1}^* A_m^2 = 0, \quad (5.11)$$

$$b = K_m + K_{m+1}^* - i\gamma,$$

$$c = (-i\gamma + K_{m+1}^*) K_m,$$

$$K_m = (1+i) \frac{2m \sqrt{\Omega_m} \rho_i \rho_e \sqrt{\nu_i \nu_e}}{\rho_e \sqrt{\nu_e} + \rho_i \sqrt{\nu_i}},$$

$$L_m = -is \omega \Pi \rho_e \left( \frac{1}{2} \rho_i (m+1) \frac{\sqrt{\nu_e} - \sqrt{\nu_i}}{\rho_e \sqrt{\nu_e} + \rho_i \sqrt{\nu_i}} + m \right),$$

$$L_{m+1}^* = is \omega \Pi \rho_e \left( \frac{\rho_i m (\sqrt{\nu_e} - \sqrt{\nu_i})}{2(\rho_e \sqrt{\nu_e} + \rho_i \sqrt{\nu_i})} - (m+1) \frac{\Omega_m}{\Omega_{m+1}} \right).$$

Здесь  $A_m$  – амплитуда вибраций,  $\Omega_m$  – частота  $m$ -й моды.

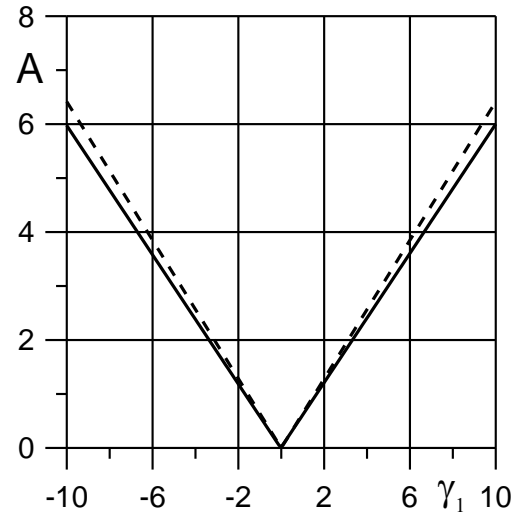
Пороговую амплитуду вибраций можно найти из условия равенства нулю вещественной части инкремента:

$$A_m^2 L_m L_{m+1}^* = -C^2 + C \operatorname{Im}(b) + \operatorname{Re}(c) \quad (5.12)$$

где  $C = \operatorname{Im}(c) / \operatorname{Re}(b)$ .

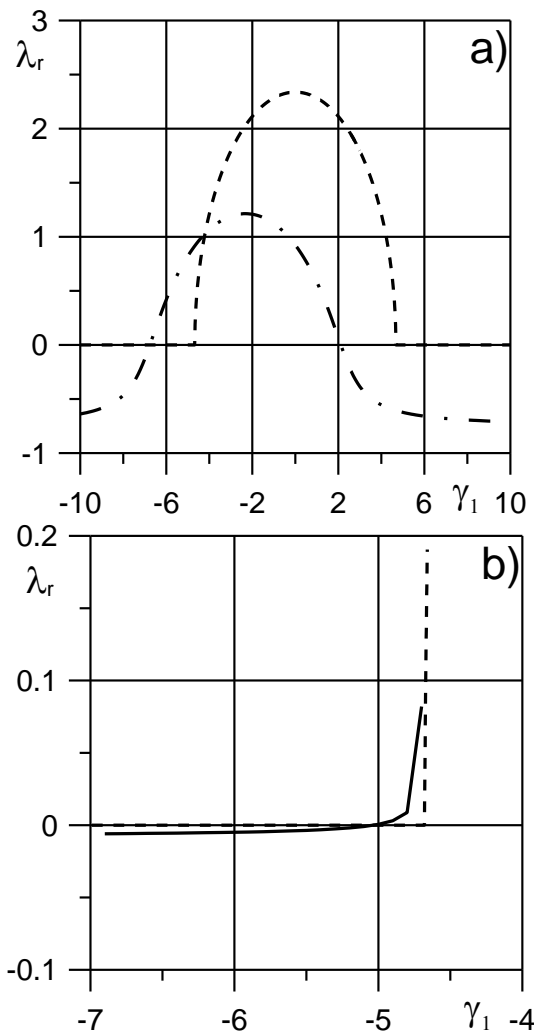
На рис. 2 показана резонансная область параметрической неустойчивости для моды с азимутальным числом  $m = 2$ . Нейтральная кривая, определяемая выражением (5.12), показана сплошной линией. Пороговая амплитуда возбуждения неустойчивости связана с наличием диссипации. Штриховой линией показаны границы области неустойчивости без учета вязкости.

В работах [3, 4] было показано, что случаи нулевой вязкости и вязкости, стремящейся к нулю, не эквивалентны. На рис. 3 построена область неустойчивости, определяемая выражением (5.12) при предельно малой вязкости и область неустойчивости при нулевой вязкости. Действительно, эти области не совпадают даже при строгом учете вязкости. На рис. 4, а построено  $\lambda_r$  (действительная часть инкремента  $\lambda$ , который является решением уравнения (5.11)) при значении амплитуды  $A = 3$  для вязкого и невязкого случая, а на рис. 4, б – для малой вязкости и нулевой вязкости. Из последнего



**Рис. 3.** Область неустойчивости для предельно малой (сплошная линия) и нулевой вязкости (штриховая):  $m = 2$ ,  $\rho_i = 0.57$ ,  $\rho_e = 0.43$

рисунка видно, что для малой вязкости действительная часть инкремента все же отлична от нуля, что и обеспечивает отличие от случая нулевой вязкости.



**Рис. 4.** Зависимость действительной части инкремента от параметра расстройки при  $A = 3$ : а) – без вязкости (штриховая линия), с учетом вязкости (штрих-пунктир); б) – без вязкости (штриховая линия), малая вязкость (сплошная);  $m = 2$ ,  $\rho_i = 0.57$ ,  $\rho_e = 0.43$ ,  $\nu_i = 0.6$ ,  $\nu_e = 0.4$

## 6. Заключение

В данной работе рассматривалась модельная задача, в которой изучалось поведение цилиндрической капли, окруженной другой жидкостью между двумя параллельными плоскостями. На поверхности раздела учитывался тонкий вязкий пограничный слой. Краевой угол постоянный; линия контакта свободно скользит по поверхности подложки.

Рассмотрены собственные колебания капли. Полученные частоты собственных колебаний совпадают с частотами цилиндрического жидкого столба [10, 19, 21]. В первом порядке разложения найдена поправка к частоте, которая вызвана диссипацией энергии в вязком пограничном слое.

Исследована устойчивость вынужденных колебаний по отношению к малым возмущениям. Параметрический резонанс наступал при выполнении условия синхронизма: частота вибраций равняется сумме частот двух соседних мод собственных колебаний. Найдено выражение, описывающие резонансные области. Показана, что малая вязкость приводит к появлению порога амплитуды вибраций и сдвигу области неустойчивости при сравнении с нулевой вязкостью. В результате этого малая вязкость, как видно из рис. 2, приводит к дестабилизации вынужденных колебаний.

Область неустойчивости в предельно малой вязкости не совпадает с областью для невязкого случая (см. рис. 3). Подобный результат был также обнаружен и для сферической [4] и полусферической каплей [6].

Исследована неустойчивость вынужденных колебаний капли по отношению к малым возмущениям. При поперечных вибрациях, как и в первой части, параметрическая неустойчивость возникала при выполнении условия синхронизма [10, 19]:

$$\omega = \Omega_{m,k} + \Omega_{m+1,l}.$$

Напомним, что  $m$  – азимутальное волновое число,  $k$ ,  $l$  – осевые волновые числа. В случае продольных вибраций параметрический резонанс возникал при условии равенства частоты вибраций сумме частот одной моды [18]:

$$\omega = \Omega_{m,k} + \Omega_{m,l}.$$

Для обоих случаев вибрационного воздействия найдены области неустойчивости. Показано, что учет вязкости, как и следовало ожидать, приводит к появлению конечного порога амплитуды вибраций и сдвигу резонансной частоты.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (бюджетная тема No 121031700169-1)

## Список литературы

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учебник для вузов. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: М.: Наука, 1974. 711 с.
3. Любимов Д.В., Черепанов А.А. К нелинейной теории параметрически возбуждаемых волн на поверхности вязкой жидкости // Некоторые задачи устойчивости поверхности жидкости. Препринт / Институт механики сплошных сред УНЦ АН СССР. Свердловск. 1984. С. 54-76.
4. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит. 2003. 216 с.
5. Lyubimov D.V., Lyubimova T. P., Cherepanov A.A. Resonance oscillations of a drop (bubble) in a vibrating fluid // J. Fluid Mech. 2020. Vol. 909. A18.



6. Картавых Н.Н., Шкляев С.В. О параметрическом резонансе полуцилиндрической капли на осциллирующей твердой подложке // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2007. Вып. 1(6). С.23–28.
7. Неволин В.Г. Параметрическое возбуждение поверхностных волн // Инженерно-физический журнал. 1985. Т. 47. С. 1028-1042.
8. Miles J., Henderson D. Parametrically forced surface waves // Annu. Rev. Fluid Mech. 1990. Vol. 22. P. 143-165.
9. Любимов Д.В., Хеннер М.В., Шоц М.М. Об устойчивости поверхности раздела жидкостей при касательных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 1998. N. 3. С. 25–31.
10. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Поведение цилиндрической капли при многочастотных вибрациях // Известия РАН. МЖГ. 2005. №2. С. 18-28.
11. Pototsky A., Bestehorn M. Faraday instability of a two-layer liquid film with a free upper surface // Phys. Rev. Fluids. 2016. Vol. 1, 023901.
12. Bestehorn M., Pototsky A. Faraday instability and nonlinear pattern formation of a two-layer system: A reduced model // Phys. Rev. Fluids. 2016. Vol.1, 063905.
13. Долматова А. В., Голдобин Д. С. Волновая динамика границы раздела в двухслойной системе невязких жидкостей в поле горизонтальных вибраций // Вестник Пермского университета. Физика. 2018. № 4 (42). С. 38–45.
14. Konovalov V.V., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P. Resonance oscillations of a drop or bubble in a viscous vibrating fluid // Phys. Fluids. 2021. Vol. 33, 094107.
15. Клименко Л.С., Любимов Д.В. Генерация среднего течения пульсационным потоком около искривленной свободной поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 1. С. 33-43.
16. Klimenko L.S., Lyubimov D.V. Surfactant effect on the average flow generation near curved interface // Microgravity Science and Technology. 2018. Vol. 30. Iss. 1-2. P. 77-84.
17. Демин В.А. К вопросу о свободных колебаниях капиллярного моста // Известия РАН. МЖГ. 2008. № 4. С. 28–37.
18. Alabuzhev A.A. Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid // Inter. J. Fluid Mech. Res. 2019. Vol. 46, Iss. 5. P. 441-457.
19. Алабужев А. А., Пьянкова М. А. Параметрическая неустойчивость одиночной капли и ансамбля капель при круговых вибрациях // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 3. С. 56–65.
20. Найфе А.Х. Теория возмущений. М.: Мир. 1976. 452 с.
21. Ламб Г. Гидродинамика. М., Л.: ГИТТЛ. 1947. 928 с.
22. Бабский В. Г., Мышкис А. Д. и др. Гидромеханика невесомости / под ред. А. Д. Мышкиса. М.: Наука, 1976. 504 с.

## References

1. Loitsyanskii L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*. Oxford, London, New York etc.: Pergamon Press. 1966. 816 p.
2. Schlichting H., Gersten K. *Boundary-Layer Theory*. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer-Verlag. 2017. 805 p.
3. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A. On the Nonlinear Theory of Parametrically Excited Waves on the Surface of a Viscous Fluid. In: *Some Problems of Stability of a Liquid Surface*. Sverdlovsk, Russia: Institute of Continuous Media Mechanics. 1984, pp. 54-76.
4. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. *Dynamics of Interfaces in Vibration Fields*. Moscow, Russia: FizMatLit. 2003. 216 p. (In Russian)
5. Lyubimov D.V., Lyubimova T. P., Cherepanov A.A. Resonance oscillations of a drop (bubble) in a vibrating fluid. *J. Fluid Mech*, 2020, vol. 909, A18.
6. Kartavih N. N., Shklyaeв S. V. On the parametric resonance of a semi-cylindrical drop on an oscillating solid substrate. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*. 2007. no. 1(6), pp. 23–28. (In Russian).
7. Nevolin, V.G. Parametric excitation of surface waves. *Journal of Engineering Physics*, 1984, vol. 47, pp. 1482–1494.
8. Miles J., Henderson D. Parametrically forced surface waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1990, vol. 22, pp. 143-165.
9. Lyubimov, D.V., Khenner, M.V., Shotz, M.M. Stability of a fluid interface under tangential vibrations. *Fluid Dyn.*, 1998, vol. 33, pp. 318–323.
10. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Behavior of a cylindrical drop under multi-frequency vibration. *Fluid Dynamics*, 2005, vol. 40(2), pp. 183-192.
11. Pototsky A., Bestehorn M. Faraday instability of a two-layer liquid film with a free upper surface. *Phys. Rev. Fluids*, 2016, vol. 1, 023901.
12. Bestehorn M., Pototsky A. Faraday instability and nonlinear pattern formation of a two-layer system: A reduced model. *Phys. Rev. Fluids*, 2016, vol.1, 063905.
13. Dolmatova A. V., Goldobin D. S. Interface wave dynamics in a two-layer system of inviscid liquids subject to horizontal vibrations. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2018, no. 4 (42), pp. 38–45.
14. Konovalov V. V., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P. Resonance oscillations of a drop or

- bubble in a viscous vibrating fluid. *Phys. Fluids*, 2021, vol. 33, 094107.
15. Klimenko L. S., Lyubimov D. V. Generation of an average flow by a pulsating stream near a curved free surface. *Fluid Dynamics*, 2012, vol. 47 (1), pp. 26–36.
16. Klimenko L. S., Lyubimov D. V. Surfactant effect on the average flow generation near curved interface. *Microgravity Science and Technology*, 2018, vol. 30, no. 1–2, pp. 77–84
17. Demin V. A. Problem of the free oscillations of a capillary bridge. *Fluid Dynamics*, 2008, vol. 43, no. 4, pp. 524–532.
18. Alabuzhev A. A. Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid. *J. Fluid Mech. Res.*, 2019, vol. 46, pp. 441–457.
19. Alabuzhev A. A., Pyankova M. A. Parametric instability of a single drop and an ensemble of drops under circular vibrations. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2022, no. 3, pp. 56–65. (In Russian).
20. Nayfeh A. H. *Introduction to Perturbation Techniques*. Weinheim, Germany: John Wiley and Sons. 1981. 536 p.
21. Lamb H. *Hydrodynamics*. N-Y, USA: Dover Publications. 1945. 738 p.
22. Myshkis A. D., Babskii V.G., Kopachevskii N.D. etc. *Low-Gravity Fluid Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Germany: Springer-Verlag. 1987. 584 p.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Алабузhev A. A. Устойчивость трансляционных колебаний зажатой капля маловязкой жидкости // Вестник Пермского университета. Физика. 2024. № 3. С. 50–59. doi: 10.17072/1994-3598-2024-3-50-59

**Please cite this article in English as:**

Alabuzhev A. A. The stability of translational oscillations of a clamped drop of a low-viscosity liquid. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2024, no. 3, pp. 50–59. doi: 10.17072/1994-3598-2024-3-50-59

**Сведения об авторах**

Алексей Анатольевич Алабузhev, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Ак. Королева, 1, Пермь, 614013, профессор кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068

**Author information**

Aleksey A. Alabuzhev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Computational Hydrodynamics, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia.