

УДК 532.72:537.84  
PACS 75.50.Mm, 75.50.Ww

## Сегрегация частиц в магнитной жидкости при совместном действии магнитного и гравитационного полей

А. Ф. Пшеничников<sup>a,b</sup>, Е. Н. Буркова<sup>a</sup>, А. Н. Кондрашов<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

<sup>b</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1  
email: burkova\_ekaterin@mail.ru

Численно, методом контрольных объемов, решена динамическая задача о сегрегации частиц в полости квадратного сечения при совместном действии магнитного и гравитационного полей. Показано, что в процессе перехода системы из начального однородного состояния в стационарное неоднородное возникают долгоживущие пальцеобразные структуры с непрерывно увеличивающимся волновым числом. Для ограничения волнового числа в уравнение магнитодиффузии введено дополнительное слагаемое Кана-Хилларда. Появление пальцеобразных структур объясняется конкуренцией гравитационных и магнитостатических сил в тонком диффузионном слое между областями с низкой и высокой концентрацией частиц. Наблюдаемое явление, таким образом, является диффузионным аналогом неустойчивости Розенцвейга свободной границы магнитной жидкости в вертикально ориентированном магнитном поле.

**Ключевые слова:** магнитная жидкость, магнетофорез, диффузия частиц, межчастичные взаимодействия

*Поступила в редакцию 07.11.2017; принята к опубликованию 09.01.2017*

## Segregation of particles in a magnetic fluid under the combined effect of magnetic and gravitational fields

A. F. Pshenichnikov<sup>a,b</sup>, E. N. Burkova<sup>a</sup>, A.N. Kondrashov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

<sup>b</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 614013, Perm, Acad. Korolev st. 1  
email: burkova\_ekaterin@mail.ru

Transient problem of magnetic nanoparticles segregation under gravity and direct magnetic field action was solved by the method of control volumes. It was shown, that during the transition of the system from initial uniform state to the inhomogeneous stationary one, the long-live finger-like structures with a continuously increasing wave number are formed. To limit it, an additional Kahn-Hillard term was introduced into the magnetodiffusion equation. The appearance of finger-like structures is explained by the competition between gravitational and magnetostatic forces in a thin diffusion layer between regions with a low and high concentration of particles. The observed phenomenon is a diffusion analogue of the Rosenzweig instability of the free boundary of a magnetic fluid in a vertically directed magnetic field.

**Keywords:** magnetic fluid, magnetophoresis, interparticle interactions, segregation

*Received 07.11.2017; accepted 09.01.2017*

doi: 10.17072/1994-3598-2018-1-5-16

## 1. Введение

Первоначально однородная магнитная жидкость под действием внешних силовых полей становится неоднородной по концентрации коллоидных частиц вследствие их дрейфа (сегрегации). В неоднородном магнитном поле происходит магнитофорез частиц, а в гравитационном – седиментация. В отсутствие конвективного движения единственным механизмом, выравнивающим концентрацию, является градиентная диффузия. Сегрегация частиц под действием гравитационного поля обычно намного слабее магнитофореза и ее не учитывают. Однако, при длительном хранении магнитной жидкости, её центрифугировании, а также при изучении тепловой конвекции в магнитной жидкости седиментацией частиц пренебрегать нельзя. В последнем случае даже очень слабое расслоение жидкости по концентрации частиц может привести к качественно новым эффектам [1–3]. В случае разбавленной магнитной жидкости, в которой межчастичные взаимодействия несущественны, установившееся распределение частиц описывается формулой [4, 5]

$$\varphi = \langle \varphi \rangle \frac{\frac{\sinh \xi}{\xi} \exp[G(z \cos \alpha + x \sin \alpha)]}{\frac{1}{V} \int \frac{\sinh \xi}{\xi} \exp[G(z \cos \alpha + x \sin \alpha)] dv}. \quad (1)$$

Здесь безразмерный параметр Ланжевена  $\xi_0 = \mu_0 m H_p / (k T)$ , который является функцией координат  $x, y, z$ ;  $G_\gamma = \Delta \rho V_s g a / k T$  – гравитационный параметр (обратная высота барометрического распределения),  $\alpha$  – угол между осью  $z$  и вектором силы тяжести  $g$ , находящимся в плоскости  $xOz$  и  $\langle \varphi \rangle$  – средняя объемная доля частиц. В предельно слабых полях ( $\xi \ll 1$ ) уравнение (1) совпадает с барометрической формулой. В противном случае ( $\xi \gg 1, Ga \ll 1, a$  – характерная высота полости с магнитной жидкостью) это уравнение описывает распределение, аналогичное барометрическому, при условии, что градиент магнитного поля (например,  $\partial H / \partial z$ ) несущественно изменяется внутри полости. В этом случае «высота барометрического распределения» определяется как:

$$z^* = \frac{kT}{\mu_0 m} \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)^{-1}.$$

Главный недостаток уравнения (1) заключается в том, что оно не учитывает влияния межчастичных взаимодействий (стерических, магнитодипольных и Ван-дер-Ваальсовых взаимодействий) и, следовательно, не может быть использовано для концентрированных жидкостей, включая ситуации, при которых высокие концентрации частиц обнаруживаются только в некоторых частях полости. В

силу того, что уравнение (1) справедливо только для равновесного состояния системы, оно не содержит кинетических коэффициентов. По этой причине его можно использовать для полостей произвольной формы (включая трехмерные задачи) и магнитных полей произвольной геометрии. Решение некоторых частных задач по магнитофорезу и диффузии частиц в магнитных жидкостях в приближении разбавленных растворов можно найти также в [6–8], а в работе Кракова [9] учтены гидродинамические взаимодействия, проявляющиеся в концентрационной зависимости вязкости коллоидного раствора и подвижности частиц.

Известно, что учет размагничивающего поля, создаваемого самой жидкостью, магнитодипольных, Ван-дер-Ваальсовых и стерических взаимодействий между коллоидными частицами приводит к новым и достаточно сильным эффектам. Так, например, размагничивающие поля являются причиной образования лабиринтных и гребенчатых структур в тонких слоях магнитной жидкости [10–12], неустойчивости свободной поверхности в ортогональном поле [13–15] и самоорганизации капель, на которые разбивается тонкий горизонтальный слой магнитной жидкости со свободной поверхностью [16]. Размагничивающие поля вызывают сегрегацию частиц в магнитной жидкости (пространственную неоднородность концентрации частиц) даже в том случае, когда внешнее магнитное поле однородно [17]. Согласно расчетам [5] стерические взаимодействия способны многократно уменьшить коэффициент сегрегации. Двукратное уменьшение седиментационной активности, связанное с межчастичными взаимодействиями, было зафиксировано в экспериментах [18]. Силы Ван-дер-Ваальса могут приводить к образованию квазисферических агрегатов с малым коэффициентом диффузии, но более высокой скоростью дрейфа в силовых полях. Поэтому в частично агрегированной жидкости профиль концентрации устанавливается более медленно, но равновесный перепад концентрации оказывается на один – два порядка больше, нежели в жидкости без агрегатов [19]. Благодаря магнитофорезу частиц и межчастичным взаимодействиям многократно уменьшается сила, действующая со стороны магнитной жидкости на погруженный в нее постоянный магнит [20].

Данная работа посвящена численному решению задачи о пространственном перераспределении частиц в прямоугольной полости при совместном действии магнитного и гравитационного полей. Особенностью работы является учет магнитных полей, создаваемых самой жидкостью, стерических и магнитодипольных взаимодействий, но процессы агрегирования не учитываются. Седиментация частиц в гравитационном поле обычно слабо влияет на динамику магнитной жидкости и ее обычно не учитывают. Однако можно указать,

по крайней мере, три ситуации, когда седиментацией пренебрегать нельзя. Это хранение магнитной жидкости в сосудах с характерной высотой в несколько сантиметров и больше, описание процессов центрифугирования и тепловой конвекции в магнитной жидкости. В последнем случае даже очень слабое расслоение жидкости по концентрации частиц может привести к качественно новым эффектам [1–3].

## 2. Учет размагничивающего поля в магнитной жидкости

Рассмотрим длинный цилиндр квадратного сечения с непроницаемыми границами, заполненный магнитной жидкостью. Поместим его во внешние гравитационное и магнитное поля, ориентированные перпендикулярно оси цилиндра. Напряженность поля внутри магнитной жидкости отличается от напряженности внешнего поля в меру поля, создаваемого самой жидкостью, т. е. размагничивающего поля. Размагничивающее поле вычисляется обычно путем решения связанной краевой задачи для некоторой геометрической области, включающей в себя собственно намагниченное тело (магнитную жидкость) и окружающее пространство. Если в намагничивающейся среде нет электрических токов, то задача сводится к решению статических уравнений Максвелла и материального уравнения, связывающего намагниченность  $\mathbf{M}$  с напряженностью поля  $\mathbf{H}$  внутри вещества. На границе тела накладывается условие непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  и тангенциальных компонент напряженности. Однако при численном решении задачи возникает серьезная проблема, связанная с далекодействующим характером магнитных полей. Границы внешней области должны быть достаточно удалены от границ полости, чтобы обеспечить затухание магнитного поля, но достаточно близки, чтобы размер массива переменных оставался в разумных пределах и соответствовал возможностям компьютера. Вынужденный компромисс является источником некоторой трудно оцениваемой систематической погрешности.

Эта погрешность отсутствует при использовании метода узкой щели, предложенной в [21]. В этом методе учитывается, что в узкой щели, вырезанной в пробной элементарной ячейке и содержащей точку  $P(x, z)$ , продольная компонента напряженности совпадает с продольной компонентой напряженности в самом теле и такое же соотношение выполняется для поперечной компоненты индукции. Это обстоятельство является прямым следствием граничных условий для индукции и напряженности магнитного поля. Согласно принципу суперпозиции вклад магнитной жидкости в напряженность  $H$  в точке  $P(x, z)$  определяется суммированием вкладов  $\Delta\mathbf{H}$  всех элементарных

ячеек, содержащих магнитную жидкость, но вклад пробной ячейки с точкой  $P(x, z)$  внутри вычисляется отдельно. Если размер элементарной ячейки достаточно мал и намагниченность внутри нее можно считать однородной, то для вычисления  $\Delta\mathbf{H}$  можно использовать формулы из [22]. В частном случае плоской задачи и прямоугольной формы элементарных ячеек вклад отдельного элемента  $\Delta V = \Delta x \Delta z$  в напряженность поля в точке  $P(x, z)$  определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \Delta H_x &= \frac{M_x}{2\pi} \Delta \text{Arc} - \frac{M_z}{4\pi} \Delta Lg, \\ \Delta H_z &= -\frac{M_z}{2\pi} \Delta \text{Arc} - \frac{M_x}{4\pi} \Delta Lg, \\ \Delta Lg &= \ln \frac{\left[ (rx + \Delta x / 2)^2 + (rz + \Delta z / 2)^2 \right]}{\left[ (rx + \Delta x / 2)^2 + (rz - \Delta z / 2)^2 \right]} + \\ &+ \ln \frac{\left[ (rx - \Delta x / 2)^2 + (rz - \Delta z / 2)^2 \right]}{\left[ (rx - \Delta x / 2)^2 + (rz + \Delta z / 2)^2 \right]}, \\ \Delta \text{Arc} &= \arctg \frac{rx + \Delta x / 2}{rz + \Delta z / 2} + \arctg \frac{rx - \Delta x / 2}{rz - \Delta z / 2} - \\ &- \arctg \frac{rx - \Delta x / 2}{rz + \Delta z / 2} - \arctg \frac{rx + \Delta x / 2}{rz - \Delta z / 2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $rx = x - x_0$ ,  $rz = z - z_0$  – проекции радиус-вектора, соединяющего центр элемента  $\Delta V(x_0, z_0)$  с точкой  $P(x, z)$ , на координатные оси. Просуммировав вклады  $\Delta\mathbf{H}$  всех внешних (по отношению к точке  $P$ ) элементарных ячеек, прибавляя к этой сумме вклад пробной ячейки и напряженность внешнего поля, получим выражение для напряженности поля в магнитной жидкости:

$$\begin{aligned} H_x(x, z) &= H_{0x}(x, z) + \sum_{x \neq x_0} \Delta H_x - \\ &- \frac{2}{\pi} M_x(x, z) \arctg \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} \right), \\ H_z(x, z) &= H_{0z}(x, z) + \sum_{z \neq z_0} \Delta H_z - \\ &- \frac{2}{\pi} M_z(x, z) \arctg \left( \frac{\Delta x}{\Delta z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Добавка к внешнему полю в правой части уравнения (3) и есть размагничивающее поле, т.е. поле, создаваемое самой магнитной жидкостью. Если намагниченность среды  $\mathbf{M}(x, z)$  как функция координат известна, то формулы (2) и (3) однозначно определяют напряженность магнитного поля как внутри, так и снаружи жидкости.

В случае разбавленных растворов эффекты, связанные с магнитодипольными межчастичными взаимодействиями, играют второстепенную роль и ими можно пренебречь. Для учета межчастичных

взаимодействий в концентрированной жидкости ее намагниченность  $M$ , входящая в правую часть уравнений (3), вычислялась в рамках модифицированной модели эффективного поля второго порядка, справедливой в достаточно широком диапазоне параметров [23]:

$$\begin{aligned} M &= mnL(\xi_e) \frac{H}{H}, \\ \xi_e &= \frac{\mu_0 m H_e}{kT}, \\ H_e &= H + \frac{M_L(H)}{3} \left[ 1 + \frac{1}{48} \frac{dM_L(H)}{dH} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$M_L = mnL(\xi),$$

где  $n = 6\varphi / \pi d^3$  – числовая плотность частиц,  $d$  – диаметр частицы с защитной оболочкой,  $L(\xi) = \text{cth}(\xi) - 1/\xi$  – функция Ланжевена,  $M_L$  – намагниченность жидкости, вычисленная в рамках ланжевеновского приближения,  $H_e$  – эффективное поле, действующее на частицу. Уравнения (4) многократно проверялись различными методами. Они хорошо согласуются с экспериментальными данными по начальной восприимчивости магнитных жидкостей и с результатами численного моделирования в области малых и умеренных значений энергии магнитодипольных взаимодействий [24–26]. При решении динамического уравнения массопереноса в магнитной жидкости (см. следующий раздел) шаг по времени сопровождался уточнением магнитного поля и намагниченности путем последовательного применения уравнений (2), (3) и (4) к каждой элементарной ячейке. В работе использовался двухшаговый итерационный алгоритм, обеспечивающий лучшую сходимость по сравнению с пошаговым алгоритмом.

### 3. Седиментация частиц в гравитационном и магнитных полях

Под действием внешних полей первоначально однородная магнитная жидкость со временем становится пространственно неоднородной по концентрации магнитной фазы вследствие магнитофореза частиц (движения частиц под действием неоднородного магнитного поля) и седиментации (движения частиц под действием силы тяжести). В концентрированных системах эти процессы описываются нелинейным динамическим уравнением массообмена, различные варианты которого предлагались в работах [5–7, 27–30]. Нами используется уравнение, полученное в [5], которое описывает изменение объёмной доли  $\varphi$  коллоидных частиц в пространстве и во времени и в отсутствие конвективных течений имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\text{div} \left\{ D_0 K(\varphi) \left[ \varphi L(\xi_e) \nabla(\xi_e) + \varphi G_\gamma \mathbf{e} - \left( 1 + \frac{2\varphi(4-\varphi)}{(1-\varphi)^4} - \varphi \frac{\partial^2(\varphi^2 G)}{\partial \varphi^2} \right) \nabla \varphi \right] \right\}, \quad (5)$$

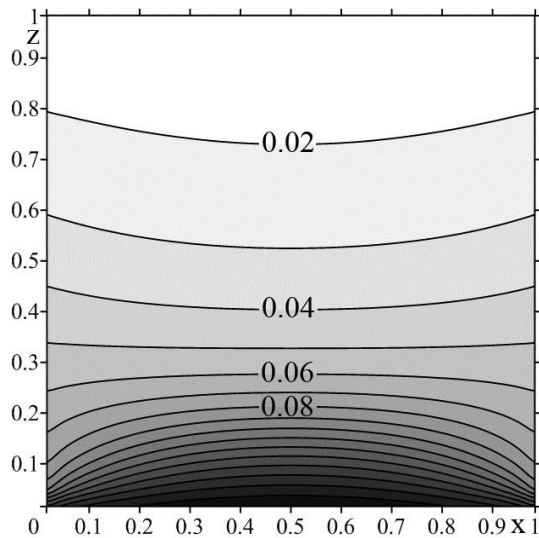
$$\begin{aligned} G(\lambda, \varphi) &= \frac{4}{3} \lambda^2 \frac{(1+0.04\lambda^2)}{(1+0.308\lambda^2\varphi)} \times \\ &\times \frac{(1+1.28972\varphi+0.72543\varphi^2)}{(1+0.83333\lambda\varphi)}. \end{aligned}$$

Здесь  $K(\varphi) = b/b_0$ ,  $b$  и  $b_0$  – подвижности частиц в магнитной жидкости и жидкости-носителя, соответственно,  $D_0 = b_0 kT$  – эйнштейновское значение коэффициента диффузии,  $\lambda = \mu_0 \mu^2 / 4\pi d^3 kT$  – параметр магнитодипольных взаимодействий (отношение энергии диполь-дипольных взаимодействий при контакте двух частиц к энергии теплового движения),  $\mathbf{e}$  – единичный вектор, направленный вдоль ускорения свободного падения,  $G_\gamma$  – обратная высота барометрического распределения в безразмерных координатах (т.е. отношение высоты полости к размерной высоте барометрического распределения),  $G(\lambda, \varphi)$  – относительный вклад магнитодипольных взаимодействий в плотность свободной энергии. Гравитационная седиментация частиц приводит к неоднородному распределению частиц по высоте (которое переходит в барометрическое распределение в пределе разбавленных растворов), а наложение магнитного поля существенно усложняет эту картину.

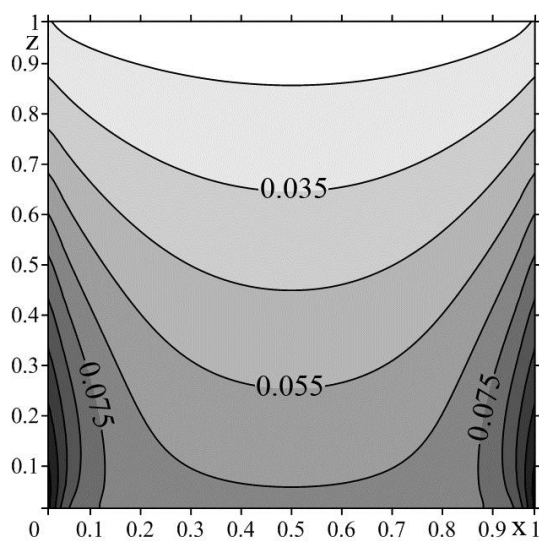
Результаты расчетов приведены на рис. 1 и 2 при одинаковых значениях параметров системы и внешних полей ( $G_\gamma = 2$ ,  $\xi_0 = 4$ ,  $\lambda = 2.8$ ) и относительно невысокой концентрации ( $\langle \varphi \rangle = 0.05$ ). Расчеты показали, что в зависимости от взаимной ориентации двух полей магнитное поле может как усиливать, так и ослаблять концентрационную неоднородность. На рис. 1 для примера представлена картина изолиний концентрации при горизонтальном направлении внешнего однородного магнитного поля. По причине возникновения размагничивающего поля результирующее магнитное поле приобретает максимальное значение на горизонтальных границах полости. К этим границам и дрейфуют частицы магнитной жидкости в результате магнитофореза. Гравитационное поле, в свою очередь, смещает частицы к нижней границе. Это приводит к тому, что в полости устанавливается градиентное распределение частиц магнитной жидкости, напоминающее барометрическое, но с существенно большим коэффициентом сегрегации.

При вертикальной ориентации полей возникает «конкуренция» за частицы. Результирующее магнитное поле достигает максимального значения на вертикальных границах полости, где в отсутствие гравитационного поля возникает тонкий пограничный слой с высокой концентрацией частиц. При

наличии гравитационного поля частицы из верхней части полости смещаются вниз и в центральной части устанавливается аналог барометрического распределения. Пограничный слой с высокой концентрацией частиц деформируется и остается лишь в нижней части полости (рис. 2).



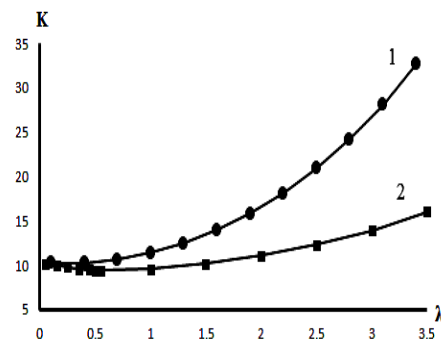
**Рис. 1.** Изолинии концентрации в полости квадратного сечения при горизонтальной ориентации магнитного поля:  $G_y = 2$ ,  $\xi_0 = 4$ ,  $\lambda = 2.8$ ,  $\langle \varphi \rangle = 0.05$



**Рис. 2.** Изолинии концентрации в полости квадратного сечения при вертикальной ориентации магнитного поля:  $G_y = 2$ ,  $\xi_0 = 4$ ,  $\lambda = 2.8$ ,  $\langle \varphi \rangle = 0.05$

Сложная картина изолиний концентрации наблюдается не только в вертикальных однородных магнитном и гравитационном полях, но и в отсутствие гравитационного поля при неоднородном магнитном. Структуры концентрационных полей в этих двух случаях могут быть очень схожими несмотря на, казалось бы, качественное различие внешних условий.

На рис. 3 приведена зависимость коэффициента сегрегации  $K = \varphi_{\max}/\varphi_{\min} - 1$  от параметра агрегирования для полости в вертикальных магнитном и гравитационном полях. При больших значениях параметра  $\lambda$  магнитодипольные взаимодействия многократно усиливают разделение, однако увеличение магнитного поля уменьшает его. Причина такого поведения системы обусловлена конкуренцией между гравитационной седиментацией и размагничивающими полями. Оседание частиц в поле тяжести уменьшает толщину «атмосферы» из коллоидных частиц и гравитационную составляющую потенциальной энергии, но увеличивает размагничивающее поле и магнитостатическую энергию системы. Увеличение магнитного поля препятствует оседанию частиц в поле тяжести, что и демонстрирует рис. 3.



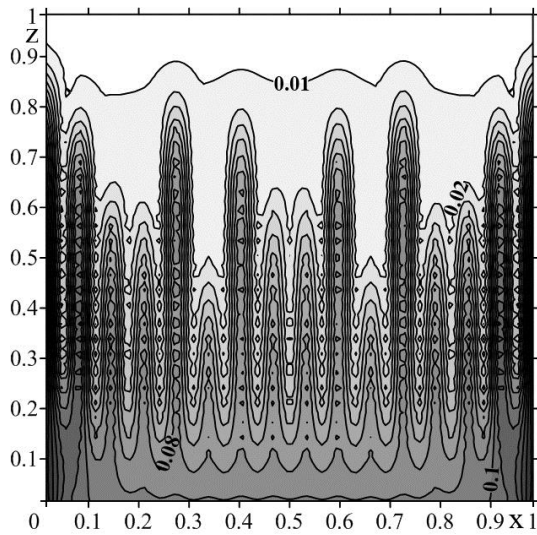
**Рис. 3.** Коэффициент сегрегации частиц в зависимости от параметра агрегирования в вертикальных магнитном и гравитационном полях:  $\langle \varphi \rangle = 0.1$ ,  $G_y = 5$ . Кривая 1 соответствует  $\xi_0 = 2$ ; 2 –  $\xi_0 = 4$

#### 4. Динамические квазипериодические структуры

В отсутствие внешнего магнитного поля в процессе седиментации частиц в магнитной жидкости формируются два горизонтальных слоя с различной концентрацией и большим вертикальным градиентом концентрации на диффузной границе между ними. При наложении вертикального магнитного поля эта диффузная граница ведет себя подобно свободной границе магнитной жидкости: она становится неустойчивой и сменяется волнообразным квазистатическим рельефом. В классической задаче Розенцвейга об устойчивости свободной границы этот рельеф существует сколь угодно долго, а критическое волновое число определяется простой формулой

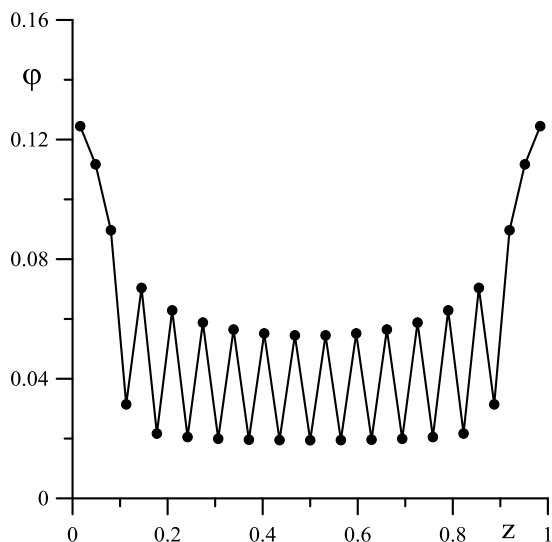
$$k^* = \sqrt{\frac{\rho g}{\alpha}},$$

где  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения на свободной границе жидкости [15]. Отличие нашей задачи состоит в размытости границы раздела между слоями с разной концентрацией и в отсут-

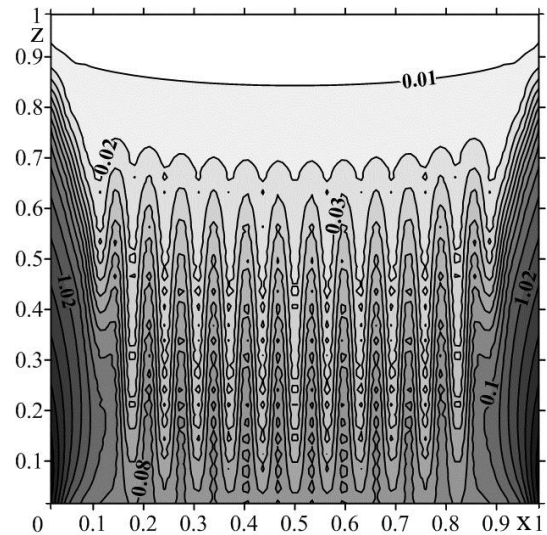


**Рис. 4.** Изолинии концентрации в полости квадратного сечения при вертикальной ориентации **однородного** магнитного поля:  $\lambda = 4.1$ ,  $G_\gamma = 5$ ,  $\langle \varphi \rangle = 0.05$ ,  $\xi = 5$ . Сетка  $31 \times 31$

ствии поверхностного натяжения как такового. Эти две особенности имеют важное следствие, проявляющееся при численном моделировании: волновое число, случайно возникших возмущений непрерывно увеличивается, пока период пространственных возмущений не сравняется с периодом расчетной сетки. Этот очевидный артефакт может быть устранен модификацией уравнения массообмена в магнитной жидкости, путем введения в него дополнительных слагаемых, моделирующих поверхностное натяжение на диффузной границе, как это делается для тонких пленок [31].



**Рис. 6.** Профиль концентрации в центральной части полости квадратного сечения при вертикальной ориентации **неоднородного** магнитного поля:  $\lambda = 4.5$ ,  $\langle \varphi \rangle = 0.05$ ,  $G_\gamma = 0$ ,  $\xi_{z=1} = 0.5$ ,  $\xi_{z=0} = 6.5$ . Сетка  $31 \times 31$



**Рис. 5.** Изолинии концентрации в полости квадратного сечения при вертикальной ориентации **неоднородного** магнитного поля:  $\lambda = 4.5$ ,  $G_\gamma = 0$ ,  $\langle \varphi \rangle = 0.05$ ,  $\xi_{z=1} = 0.5$ ,  $\xi_{z=0} = 6.5$ . Сетка  $31 \times 31$

Типичный вид периодических концентрационных структур в присутствии гравитационного  $G_\gamma = 5$  и магнитного  $\xi_0 = 5$  полей приведен на рис. 4. Аналогичная картина изолиний концентрации наблюдается при градиентном магнитном поле в отсутствие гравитационного (рис. 5). Магнитное поле принимает максимально значение на нижней границе полости, а на верхней стремится к нулю  $\xi_{z=1} = 0.5$ ,  $\xi_{z=0} = 6.5$ . С увеличением параметра магнитодипольного взаимодействия пики стремятся вытянуться и уменьшить свою ширину, в связи с отсутствием максимального волнового числа пространственных возмущений. Минимальный период возмущений ограничен только периодом расчетной сетки, используемой в численном эксперименте, что демонстрирует рис. 6.

## 5. Модификация уравнения диффузии

В процессе разделения фаз между ними формируется тонкая граница, толщина которой в рамках приближения сплошных сред предполагается пренебрежимо малой, а сама граница обладает поверхностным натяжением. В этом случае физические параметры, относящиеся к разным фазам, такие как плотность, вязкость, коэффициент теплопроводности, оказываются разрывными на границе, а для потоков импульса, тепла и массы записываются условия непрерывности. К концу девятнадцатого века Пуассон, Максвелл и Гиббс признали, что межфазная граница на самом деле имеет конечную толщину и в этом случае ее можно называть диффузионным слоем [32–34]. Физические величины в этом слое претерпевают очень быстрый, но в то же время плавный переход. На сегодняшний день модель диффузионного слоя применяется для изучения различных физических

проблем, таких как конвекция Марангони, разделение фаз бинарных жидкостей, смешивание потоков жидкостей [35].

В отсутствие макропотока частиц процесс спинодального распада бинарной смеси может быть описан теорией Кана-Хилларда [36]. Она основана на минимизации функционала свободной энергии и хорошо работает для тонких пленок [31]. Однако в жидких системах влияние потока значительно и может изменять динамику разделения фаз. Для описания такой системы, кроме уравнений неразрывности и Навье-Стокса, используется модифицированное уравнение Кана-Хилларда [37–39].

Для учета диффузного слоя в магнитной жидкости мы взяли соответствующее слагаемое из модифицированного уравнения Кана-Хилларда [35], для изотермической квази-несжимаемой жидкости, и добавили его в уравнение магнитодиффузии (5). Эта добавка имеет вид

$$\mathbf{j} = k_h \nabla \left[ \frac{1}{\varphi} \nabla (\varphi \nabla \varphi) \right] \quad (6)$$

и связана с возрастанием свободной энергии при появлении градиента концентрации. Она хорошо работает для тонких пленок, размер которых составляет порядка сотен размеров частиц.

При малых градиентах концентрации слагаемое (6) вносит незначительный вклад в поток частиц и его можно не учитывать, как это делалось ранее. Однако при высоких градиентах концентрации и больших значениях параметра агрегирования, когда коэффициент диффузии достаточно мал, эту добавку необходимо учитывать.

С учетом добавки (6) уравнение (5) превращается в уравнение четвертого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & -\operatorname{div} \left\{ D_0 K(\varphi) \left[ \varphi L(\xi_e) \nabla(\xi_e) + \varphi G_y \mathbf{e} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( 1 + \frac{2\varphi(4-\varphi)}{(1-\varphi)^4} - \varphi \frac{\partial^2 (\varphi^2 G)}{\partial \varphi^2} \right) \nabla \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + k \nabla \left( \frac{1}{\varphi} \nabla (\varphi \nabla \varphi) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

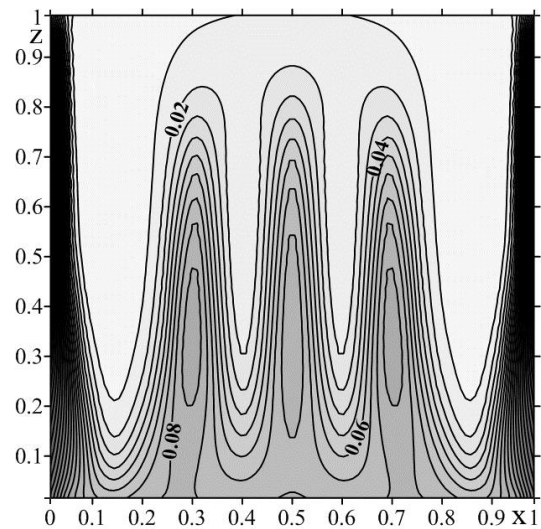
После обезразмеривания уравнения (7) в его правую часть войдет (вместо коэффициента Кана-Хилларда) безразмерный комплекс

$$K_h = \frac{k_h}{a^2 D_0},$$

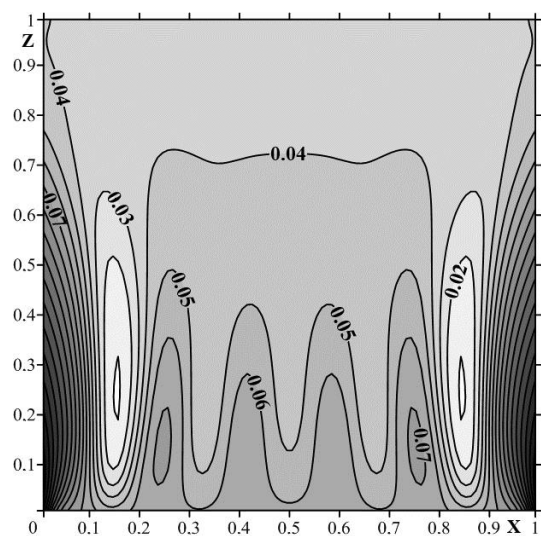
представляющий собой отношение потока Кана-Хилларда (6) к диффузионному потоку. Оценку коэффициента  $k_h$  по порядку величины для магнитных жидкостей можно получить из данных о толщине диффузионного слоя при фазовом переходе первого рода в системе взаимодействующих диполей [40]. Оценка дает  $k_h \approx 10^{-17}$  см<sup>4</sup>/с, которому

соответствует  $K_h \approx 10^{-8}$  при толщине слоя один мм и типичном коэффициенте диффузии для коллоидных частиц  $D_0 \approx 10^{-7}$  см<sup>2</sup>/с. Ясно, что такой слабый эффект не может оказать заметного воздействия на реальные системы с магнитными жидкостями. Исключение составляет случай, когда магнитодипольные и/или Ван-дер-Ваальсовы межчастичные взаимодействия приводят к фазовому переходу и в системе возникает диффузионный слой с характерной толщиной в десятки доли микрометра.

Ниже проведены расчеты для модельной ситуации, соответствующей  $K_h \approx 10^{-4}$  с единственной целью – продемонстрировать роль дополнительного слагаемого в процессах магнитодиффузии и формировании квазипериодических структур.

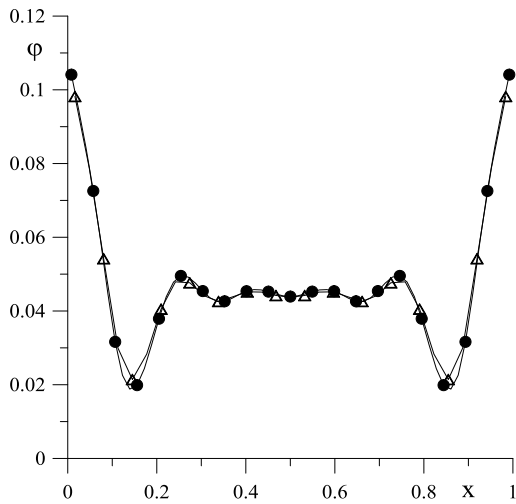


**Рис. 7.** Изолинии концентрации при однородных внешних полях:  $\lambda = 4.1$ ,  $\langle \varphi \rangle = 0.05$ ,  $G_y = 5$ ,  $\xi_0 = 5$ . Сетка  $31 \times 31$

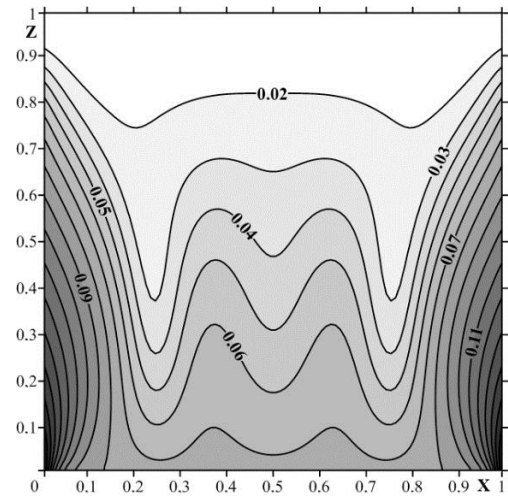


**Рис.8.** Изолинии концентрации при неоднородном внешнем магнитном поле:  $\lambda = 4.5$ ,  $\langle \varphi \rangle = 0.05$ ,  $G_y = 0$ ,  $\xi_{z=1} = 0.000001$ ,  $\xi_{z=0} = 6.0$ . Сетка  $31 \times 31$

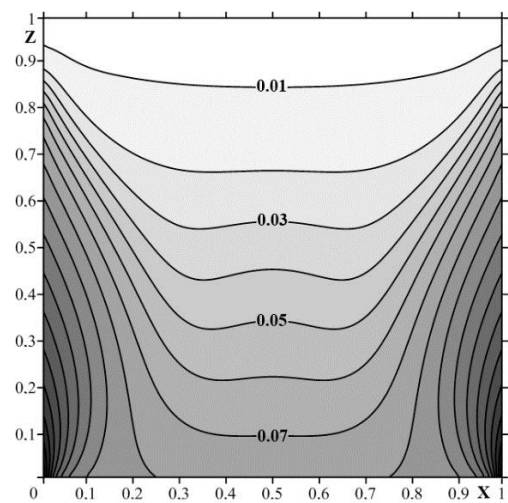




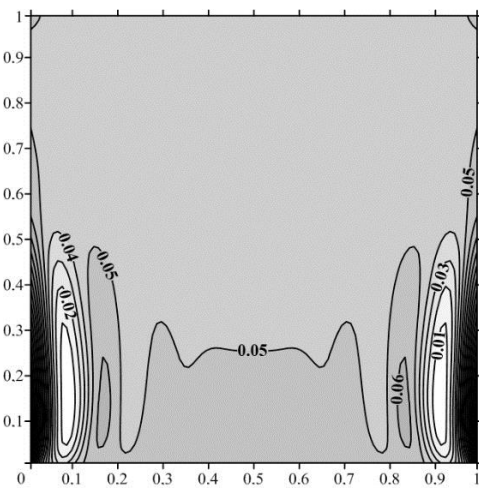
**Рис. 9.** Профиль концентрации в центральной части полости квадратного сечения при вертикальной ориентации неоднородно магнитного поля:  $\lambda = 4.5$ ,  $\langle \varphi \rangle = 0.05$ ,  $G_y = 0$ ,  $\xi_{z=1} = 10^{-6}$ ,  $\xi_{z=0} = 6.0$ .  $\Delta$  – сетка  $31 \times 31$ ,  $\bullet$  – сетка  $61 \times 61$



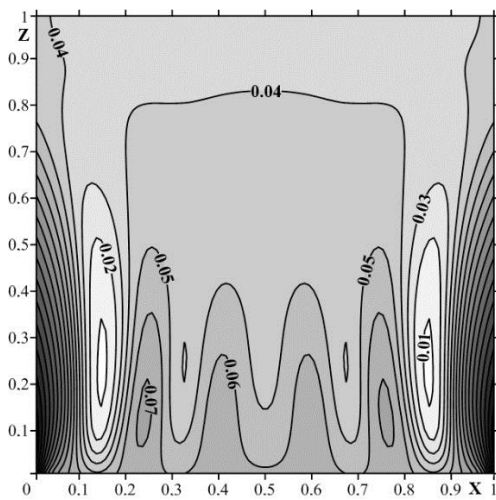
c)



d)



a)



b)

**Рис. 10.** Изолинии концентрации в отсутствие гравитационного поля при неоднородном магнитном:  $\lambda = 4.5$ ,  $\langle \varphi \rangle = 0.05$ ,  $G_y = 0$ ,  $\xi_{z=1} = 10^{-6}$ ,  $\xi_{z=0} = 6.0$  в разные моменты времени: a –  $t = 0.01$ , b –  $t = 0.05$ , c –  $t = 0.2$ , d –  $t = 1$

После модификации уравнения магнитодиффузии картина изолиний существенно изменяется. В результате в полости возникают пространственные образования, на размер и количество которых теперь влияют лишь значения внешних полей и параметра агрегирования, что демонстрируют рис. 7 и 8. Если ранее (рис. 6) один пик формировался на основании трех значений концентрации (два минимальных и одно максимальное), то после модификации уравнения (5) (рис. 9) для формирования одного пика необходимо от 6 до 7 значений, при аналогичной сетке. Увеличение плотности сетки не приводит к росту количества пиков, а позволяет получить более плавные профили концентрации.

Межфазные явления в жидкости недолговечны: спустя некоторое время диффузионные процессы разрушают (размывают) локальные образования, и



система приходит к равновесному распределению. Динамика развития структур показана на рис. 10.

К полученным результатам нужно относиться философски: не стоит ожидать, что в полости с магнитной жидкостью появятся именно такие неоднородности. Например, у структур, которые получили название «цветок Розенцвейга», будет иное волновое число. Однако предложенная методика позволяет разрешить проблему моделирования пространственно неоднородных образований при высоких значениях параметра агрегирования.

### Выводы

Решена динамическая задача о сегрегации частиц в полости квадратного сечения при совместном действии магнитного и гравитационного полей. Показано, что в процессе перехода системы из начального однородного состояния в стационарное неоднородное возникают долгоживущие пальцеобразные структуры с непрерывно увеличивающимся волновым числом. Рост волнового числа может быть ограничен введением в уравнение магнитодиффузии дополнительного слагаемого Кана-Хилларда. Появление пальцеобразных структур объясняется конкуренцией гравитационных и магнитостатических сил в диффузионном слое между областями с низкой и высокой концентрацией частиц. Наблюдаемое явление, таким образом, является диффузионным аналогом неустойчивости Розенцвейга свободной границы магнитной жидкости в вертикально ориентированном магнитном поле.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00517).

### Список литературы

1. *Shliomis M. I., Smorodin B. L.* Convective instability of magnetized ferrofluids // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2002. Vol. 252. P. 197–202. DOI: 10.1016/S0304-8853(02)00712-6.
2. *Shliomis, M. I., Smorodin B. L., Kamiyama S.* The onset of thermomagnetic convection in stratified ferrofluids // *Philosophical Magazine*. 2003. Vol. 83, N. 17–18. P. 2139–2153. DOI: 10.1080/0141861031000107908.
3. *Bozhko A. A., Putin G. F., Sidorov A. S., Suslov S. A.* Convection in a vertical layer of stratified magnetic fluid // *Magnetohydrodynamics*. 2013. Vol. 49, N. 1–2. P. 143–152.
4. *Ivanov A.S., Pshenichnikov A.F.* Magnetophoresis and diffusion of colloidal particles in a thin layer of magnetic fluids // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2010. V. 322. N. 17. P. 2575–2580. DOI: 10.1016/j.jmmm.2010.03.023.
5. *Pshenichnikov A. F., Elfimova E. V., Ivanov A. O.* Magnetophoresis, sedimentation and diffusion of particles in concentrated magnetic fluids // *The Journal of Chemical Physics*. 2011. Vol. 134, 184508. DOI: 10.1063/1.3586806.
6. *Frishfelds V., Blums E.* Microconvection and mass transfer near bodies in non-uniformly magnetized ferrofluid // *Magnetohydrodynamics*. 2005. Vol. 41. P. 361–366.
7. *Bashtovoi V. G., Polevikov V. K., Suprun A. E., Stroots A. V., Beresnev S. A.* Influence of Brownian diffusion on static of magnetic fluid // *Magnetohydrodynamics*. 2007. Vol. 43. N. 1. P. 17–25.
8. *Bashtovoi V. G., Polevikov V. K., Suprun A. E., Stroots A. V., Beresnev S. A.* The effect of magnetophoresis and Brownian diffusion on the levitation of bodies in a magnetic fluid // *Magnetohydrodynamics*. 2008. Vol. 44, N. 2. P. 121–126.
9. *Krakov M. S., Nikiforov I. V.* Effect of diffusion of magnetic particles on the parameters of the magnetic fluid seal: a numerical simulation // *Magnetohydrodynamics*. 2014. Vol. 50, N. 1. P. 35–43.
10. *Tsebers A. O., Maiorov M. M.* Magnetostatic instabilities in plane layers of magnetizable liquids. // *Magnetohydrodynamics*. 1980. Vol. 16, N. 1. P. 21–27.
11. *Rosensweig R. E., Zahn M., Shumovich R.* Labyrinthine instability in magnetic and dielectric fluids. // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 1983. Vol. 39. P. 127–132. DOI: 10.1016/0304-8853(83)90416-X.
12. *Tsebers A. O., Maiorov M. M.* Comb like instability in thin layers of a magnetic liquid. // *Magnetohydrodynamics*, 1980. Vol. 16. No. 2. P. 126–130.
13. *Cawley M.D., Rosensweig R.E.* The interfacial stability of a ferromagnetic fluids // *Journal of Fluid mechanics*. 1967. Vol. 80, N. 4. P. 671–688. DOI: 10.1017/S0022112067001697.
14. *Zaitsev V. M., Shliomis M. I.* Характер неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в постоянном поле // *Доклады АН СССР*. 1969. Т. 188. №. 6. С. 1261–1262.
15. *Шлиомис М. И.* Магнитные жидкости // *Успехи физических наук*. 1974. Т. 112. Вып. 3. С. 427–458.
16. *Berkovsky B. M., Medvedev V. F., Krakov M. S.* *Magnetic fluids*. Oxford Univ. Press, 1993.
17. *Pshenichnikov A. F., Burkova E. N.* Effect of demagnetizing fields on particle spatial distribution in magnetic fluids // *Magnetohydrodynamics*. 2012. Vol. 48. N. 3. P. 503–513.
18. *Mezulis A., Blums E., Maiorov M., Lickrastina A.* Sedimentation of interacting nanoparticles. // *Magnetohydrodynamics*. 2013. Vol. 49, N. 3-4. P. 416–420.
19. *Pshenichnikov A. F. Ivanov A. S.* Magnetophoresis of particles and aggregates in concentrated magnet-

- ic fluids. // *Physical Review E* 2012 Vol. 86, 051401.  
DOI: 10.1103/PhysRevE.86.051401.
20. Пиеничников А. Ф., Буркова Е. Н. О силах, действующих на постоянный магнит, помещенный в прямоугольную полость с магнитной жидкостью // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Vol. 7, N 1. P. 5–14.
  21. Pshenichnikov A. F. Computation of demagnetizing fields and particle distribution in magnetic fluid with inhomogeneous density // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2012. Vol. 324. P. 1342–1347.  
DOI: 10.1016/j.jmmm.2011.11.028.
  22. Пиеничников А. Ф. Магнитное поле в окрестности уединенного магнита // *Магнитная гидродинамика*. 1993. № 1. С. 37–40.
  23. Ivanov A. O., Kuznetsova O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids: an influence of interparticle correlations // *Physical Review E*. 2001. Vol. 64, 041405.  
DOI: 10.1103/PhysRevE.64.041405.
  24. Pshenichnikov A. F., Lebedev A. V. Low-temperature susceptibility of concentrated magnetic fluids. // *The Journal of Chemical Physics*. 2004. Vol. 121, N. 11. P. 5455–5467.  
DOI: 10.1063/1.1778135.
  25. Ivanov A. O., Kantorovich S. S., Reznikov E. N., Holm C., Pshenichnikov A. F., Lebedev A. V., Chremos A., Camp P. J. Magnetic measurements as a key for the particle size distribution in ferrofluids: experiment, theory, and computer simulations // *Magnetohydrodynamics*. 2007. Vol. 43. N. 4. P. 393–399.
  26. Пиеничников А. Ф., Лебедев А. В. Магнитная восприимчивость концентрированных ферроколлоидов // *Коллоидный журнал*. 2005. Т. 67. № 2. С. 218–230.
  27. Лукашевич М. В., Налетова В. А., Цуриков С. Н. Перераспределение концентрации магнитной жидкости в неоднородном магнитном поле // *Магнитная гидродинамика*. 1988. № 3. С. 64–69.
  28. Drikis I., Cebers A. Pattern formation at magnetophoretic motion in the self-magnetic field of magnetic colloid // *Magnetohydrodynamics*. 2011. Vol. 47, N. 1. P. 3–10.
  29. Vacri J. C., Cebers A., Bourdon A., Demouchy G., Heegaard B. M., Kashevsky B., Perzynski R. Transient grating in a ferrofluid under magnetic field: Effect of magnetic interactions on the diffusion coefficient of translation // *Physical Review E*. 1995. Vol. 52. N. 4. P. 3936–3942.  
DOI: 10.1103/PhysRevE.52.3936.
  30. Pshenichnikov A. F., Kuznetsov A. A. Sedimentation of particles in concentrated magnetic fluids: numerical simulation // *Magnetohydrodynamics*. 2015. Vol. 51. N. 3. P. 551–560
  31. Краснюк И. Б., Стефанович Л. И., Юрченко В. М. Колебания концентрации в ограниченных бинарных смесях с учетом поверхностных эффектов // *Журнал технической физики*. 2007. Т. 77, вып. 11. С. 55–62.
  32. Gibbs J. W. On the equilibrium of heterogeneous substances // *American Journal of Science*. 1878. N 96. P. 441–458.
  33. Maxwell J. C. Capillary action // *Encyclopaedia Britannica*. 1876. Vol. 5, P. 56–71.
  34. Poisson S. D. Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris : Bachelier père et fils, 1831. 300 p.
  35. Anderson D. M., McFadden G. B., Wheeler A. A. Diffuse interface methods in fluid mechanics // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1998. Vol. 30, N. 1. P. 139–165.  
DOI: 10.1146/annurev.fluid.30.1.139.
  36. Cahn J. W. Hilliard J. E. Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy *J. Chem. Phys.* 1958. Vol. 28, N. 2. P. 258–267.
  37. Verschuieren M. F., van de Vosse N., Meijer H. E. H. Modeling of structure development during flow using a diffuse-interface method // *Eindhoven University of Technology*. 1999. P. 81.
  38. Lowengrub J., Truskinovsky L. Quasi-incompressible Cahn–Hilliard fluids and topological transitions // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1998. Vol. 454, N. 1978. P. 2617–2654.
  39. Frolovskaya O. A. Nepomnyashchy A. A. Influence of density stratification on stability of a two-layer binary-fluid system with a diffuse interface // *European Physical Journal Special Topics*. 2013. Vol. 219, N. 1. P. 33–43. DOI: 10.1140/epjst/e2013-01778-2.
  40. Пиеничников А. Ф., Смолова Ю. А. О роли магнитодипольных взаимодействий в спонтанном расслоении магнитных жидкостей // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2010. Вып. 1 (38). С. 17–21.

## References

1. Shliomis M. I., Smorodin B. L. Convective instability of magnetized ferrofluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2002, vol. 252, pp. 197–202.  
DOI: 10.1016/S0304-8853(02)00712-6.
2. Shliomis, M. I., Smorodin B. L., Kamiyama S. The onset of thermomagnetic convection in stratified ferrofluids. *Philosophical Magazine*, 2003, vol. 83, no. 17–18, pp. 2139–2153.  
DOI: 10.1080/0141861031000107908.
3. Bozhko A. A., Putin G. F., Sidorov A. S., Suslov S. A. Convection in a vertical layer of stratified magnetic fluid. *Magnetohydrodynamics*, 2013, vol. 49, no. 1, 2. pp. 143–152.

4. Ivanov A. S., Pshenichnikov A. F. Magnetophoresis and diffusion of colloidal particles in a thin layer of magnetic fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2010, vol. 322, no 17, pp. 2575–2580. DOI: 10.1016/j.jmmm.2010.03.023.
5. Pshenichnikov A. F., Elfimova E. V., Ivanov A. O. Magnetophoresis, Sedimentation and diffusion of particles in concentrated magnetic fluids. *The Journal of Chemical Physics*, 2011, vol. 134, pp. 184508. DOI: 10.1063/1.3586806.
6. Frishfelds V., Blums E. Microconvection and mass transfer near bodies in non-uniformly magnetized ferrofluid. *Magnetohydrodynamics*, 2005, vol. 41, pp. 361–366.
7. Bashtovoi V. G., Polevikov V. K., Suprun A. E., Stroots A. V., Beresnev S. A. Influence of Brownian diffusion on static of magnetic fluid. *Magnetohydrodynamics*, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 17–25.
8. Bashtovoi V. G., Polevikov V. K., Suprun A. E., Stroots A. V., Beresnev S. A. The effect of magnetophoresis and Brownian diffusion on the levitation of bodies in a magnetic fluid. *Magnetohydrodynamics*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 121–126.
9. Krakov M. S., Nikiforov I. V. Effect of diffusion of magnetic particles on the parameters of the magnetic fluid seal: a numerical simulation. *Magnetohydrodynamics*, 2014, vol. 50, no. 1, pp. 35–43.
10. Tsebers A. O., Maiorov M. M. Magnetostatic instabilities in plane layers of magnetizable liquids. *Magnetohydrodynamics*, 1980, vol. 16, no. 1, pp. 21–27.
11. Rosensweig R.E., Zahn M., Shumovich R. Labyrinthine instability in magnetic and dielectric fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 1983, vol. 39, pp. 127–132. DOI: 10.1016/0304-8853(83)90416-X.
12. Tsebers A. O., Maiorov M. M. Comb like instability in thin layers of a magnetic liquid. *Magnetohydrodynamics*, 1980, vol. 16, no. 2, pp. 126–130.
13. Cawley M. D., Rosensweig R. E. The interfacial stability of a ferromagnetic fluids. *Journal of Fluid mechanics*, 1967, vol. 80, no.4, pp. 671–688. DOI: 10.1017/S0022112067001697.
14. Zaitsev V. M., Shliomis M. I. Nature of the instability of the interface between two fluids in a constant field. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1969, vol. 188, no. 6, p. 1261 (In Russian).
15. Shliomis M. I. Magnetic fluids. *Physics Uspekhi*, 1974, vol. 17, no. 2, pp. 153.
16. Berkovsky B. M., Medvedev V. F., Krakov M. S. *Magnetic fluids*. Oxford University Press, 1993.
17. Pshenichnikov A. F., Burkova E. N. Effect of demagnetizing fields on particle spatial distribution in magnetic fluids. *Magnetohydrodynamics*, 2012, vol. 48, no. 3, pp. 503–513.
18. Mezulis A., Blums E., Maiorov M., Lickrastina A. Sedimentation of interacting nanoparticles. *Magnetohydrodynamics*, 2013, vol. 49, no. 3–4, pp. 416–420.
19. Pshenichnikov A. F. Ivanov A. S. Magnetophoresis of particles and aggregates in concentrated magnetic fluids. *Physical Review E*, 2012, vol. 86, 051401. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.051401.
20. Pshenichnikov A. F., Burkova E. N. Forces acting on a permanent magnet placed in a rectangular cavity with a magnetic fluid. *Computational continuum mechanics*. 2014, vol. 7, no. 1, pp. 5–14. (in Russian).
21. Pshenichnikov A. F. Computation of demagnetizing fields and particle distribution in magnetic fluid with inhomogeneous density. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2012, vol. 324, pp. 1342–1347. DOI: 10.1016/j.jmmm.2011.11.028.
22. Pshenichnikov A. F. Magnetic field in the vicinity of a single magnet. *Magnetohydrodynamics*, 1993, vol. 29, no. 1, pp. 37–40.
23. Ivanov A. O., Kuznetsova O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids: an influence of interparticle correlations. *Physical Review E*, 2001, vol. 64, no. 4, 041405. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.041405.
24. Pshenichnikov A. F., Lebedev A. V. Low-temperature susceptibility of concentrated magnetic fluids. *The Journal of Chemical Physics*, 2004, vol. 121, no. 11, pp. 5455–5467. DOI: 10.1063/1.1778135.
25. Ivanov A. O., Kantorovich S. S., Reznikov E. N., Holm C., Pshenichnikov A. F., Lebedev A. V., Chremos A., Camp P. J. Magnetic measurements as a key for the particle size distribution in ferrofluids: experiment, theory, and computer simulations. *Magnetohydrodynamics*, 2007, vol. 43, no. 4, pp. 393–399.
26. Pshenichnikov A. F., Lebedev A. V. Magnetic susceptibility of concentrated ferocolloids. *Colloid Journal*, 2005, vol. 6, no. 2, pp. 189–200.
27. Lukashevich M. V., Naletova V. A., Tsurikov S. N. Redistribution of the concentration of a magnetic fluid in a nonuniform magnetic field. *Magnetohydrodynamics*, 1988, vol. 24, no 3, pp. 318–323.
28. Drikis I., Cebers A. Pattern formation at magnetophoretic motion in the self-magnetic field of magnetic colloid. *Magnetohydrodynamics*, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 3–10.
29. Bacri J. C., Cebers A., Bourdon A., Demouchy G., Heegaard B. M., Kashevsky B., Perzynski R. Transient grating in a ferrofluid under magnetic field: Effect of magnetic interactions on the diffusion coefficient of translation *Physical Review E*, 1995, vol. 52, no. 4, pp. 3936. DOI: 10.1103/PhysRevE.52.3936.
30. Pshenichnikov A. F., Kuznetsov A. A. Sedimentation of particles in concentrated magnetic fluids: numerical simulation. *Magnetohydrodynamics*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 551–560.

31. Krasnyuk I. B., Stefanovich L. I., Yurchenko V. M. Analysis of oscillation of concentration in bounded binary mixtures taking into account surface effects. *Technical Physics*, 2007, vol. 52, no. 11, pp. 1445–1452. DOI: 10.1134/S1063784207110096.
32. Gibbs J. W. On the equilibrium of heterogeneous substances. *American Journal of Science*, 1878, no. 96, pp. 441–458.
33. Maxwell J. C. *Capillary Action*, Scientific papers of James Clerk Maxwell, Cambridge University Press, 1890.
34. Poisson S. D. *Nouvelle théorie de l'action capillaire*. Paris: Bachelier père et fils, 1831, 300 p.
35. Anderson D. M., McFadden G. B., Wheeler A. A. Diffuse interface methods in fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1998, vol. 30, no. 1, pp. 139–165. DOI: 10.1146/annurev.fluid.30.1.139.
36. Cahn J. W., Hilliard J. E. Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy. *The Journal of chemical physics*, 1958, vol. 28, no. 2, pp. 258–267.
37. Verschueren M. F., van de Vosse N., Meijer H. E. H. Modeling of structure development during flow using a diffuse-interface method. *Eindhoven University of Technology*, 1999, p. 81.
38. Lowengrub J., Truskinovsky L. Quasi-incompressible Cahn–Hilliard fluids and topological transitions. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1998, vol. 454, no. 1978, pp. 2617–2654.
39. Frolovskaya O. A., Nepomnyashchy A. A. Influence of density stratification on stability of a two-layer binary-fluid system with a diffuse interface. *European Physical Journal Special Topics*, 2013, vol. 219, no. 1, pp. 33–43. DOI: 10.1140/epjst/e2013-01778-2.
40. Pshenichnikov A. F., Smolova Yu. A. Role of magnetodipole interactions in spontaneous separation of magnetic fluids. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2010, vol. 1 (38), pp. 17–21. (In Russian).

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Пшеничников А. Ф., Буркова Е. Н., Кондрашов А. Н. Сегрегация частиц в магнитной жидкости при совместном действии магнитного и гравитационного полей // Вестник Пермского университета. Физика. 2018. № 1 (39). С. 5–16. doi: 10.17072/1994-3598-2018-1-5-16

**Please cite this article in English as:**

Pshenichnikov A. F., Burkova E. N., Kondrashov A. N. Segregation of particles in a magnetic fluid under the combined effect of magnetic and gravitational fields. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2018, no. 1 (39), pp. 5–16. doi: 10.17072/1994-3598-2018-1-5-16