

УДК 517.938  
PACS 05.45.-a

## Статистика времен возвращения при анализе хаоса в динамических системах

Р. С. Окатьев<sup>1,2†</sup>, П. Г. Фрик<sup>1,2‡</sup>

<sup>1</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

<sup>2</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

† okatev.r@icmm.ru

‡ frick@icmm.ru

Предложен метод разграничения в пространстве параметров областей существования периодических, квазипериодических и хаотических решений динамических систем, основанный на анализе выборки времен прохождения фазовой точки от предыдущего пересечения плоскости Пуанкаре до последующего (или от одного локального максимума до последующего). Построен алгоритм формирования выборки времен возвращения с последующим анализом гистограммы полученной выборки. Простая мера наполнения гистограммы позволяет разделить периодические и хаотические режимы, а также оценить степень хаотичности промежуточных режимов. На простых модельных сигналах показано, что распределение времен возвращения дает информацию, не содержащуюся в спектральных плотностях сигнала. Затем на примере классической системы Лоренца показано, как простая мера наполнения гистограммы времен возвращения позволяет получить наглядную карту режимов. Проведен сравнительный анализ спектральной плотности мощности и гистограмм времен возвращения для различных режимов, реализующихся в системе Лоренца при различных значениях управляющего параметра (числа Релея).

**Ключевые слова:** динамический хаос; спектральные плотности; времена возвращения

*Поступила в редакцию 10.07.2024; после рецензии 15.08.2024; принята к опубликованию 20.08.2024*

## Recurrence time statistics for chaos analysis in dynamical systems

R. S. Okatev<sup>1,2</sup>, P. G. Frick<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

<sup>2</sup> Perm State University, Perm, Russia

† okatev.r@icmm.ru

‡ frick@icmm.ru

We propose a method of delimiting the existence domains of periodic, quasi-periodic and chaotic solutions of dynamical systems in the parameter space. The method is based on an analysis of the sampling of the times of passing a phase point from the previous intersection of the Poincaré plane to the next one (or from one local maximum to the next). An algorithm for generating a sample of recurrence times with subsequent analysis of the histogram of the obtained sample is constructed. A simple measure of histogram filling allows us to separate periodic and chaotic modes, as well as to estimate the degree of chaoticity of intermediate modes. On simple model signals it is shown that the distribution of recurrence times gives information not contained in the spectral densities of the signal. Then, on the example of the classical Lorentz system, it is shown how a simple measure of filling the histogram of recurrence times allows us to obtain a visual map of modes. The paper presents the results of a comparative analysis of power spectral density and histograms of recurrence times for different modes realized in the Lorentz system at different values of the control parameter (Rayleigh number).

**Keywords:** dynamic chaos; spectral densities; recurrence times

Received 10 July 2024; revised 15 August 2024; accepted 20 August 2024

doi: 10.17072/1994-3598-2024-3-19-27

## 1. Введение

Вопрос однозначного разделения периодических и хаотических режимов в различных нелинейных системах на практике часто оказывается далеко не тривиальным, причем проблемы возникают как из-за структуры самого сигнала, так и в результате наложения шума различной природы. Даже ограничиваясь сигналами, возникающими при решении динамических систем (систем ОДУ небольшой размерности), для которых шум определяется точностью интегрирования и на практике не учитывается, можно найти огромное число методов и алгоритмов, направленных на идентификацию и/или классификацию всего спектра возникающих периодических, квазипериодических и хаотических решений. При этом базовыми подходами для оценки сложности (complexity) возникающих решений являются подходы, основанные на оценках фрактальной размерности, показателей Ляпунова и информационной энтропии [1, 2]. Наиболее многочисленны методы, относящиеся к последнему подходу, существенным преимуществом современных вариантов которых является как раз устойчивость к шуму, принципиальная при обработке реальных сигналов. Среди них можно отметить методы, основанные на понятии перестановочной энтропии (permutation entropy) [3]. Не претендуя на какой-либо обзор существующей обширной литературы, отметим методический обзор [4] и сравнительный анализ информационных оценок в обзоре [5]. Выбор конкретного метода оценки сложности наблюдаемого режима определяется, прежде всего, целями анализа, а также трудоемкостью и робастностью алгоритма. На практике важно и то, насколько понятен физический смысл вычисляемого параметра.

Описываемая в данной статье попытка добавить еще один метод оценки к имеющемуся множеству обусловлена двумя факторами. Во-первых, не пытаясь даже кратко охарактеризовать все используемые методы, отметим тот факт, что ключевым моментом во многих из них является выбор временного масштаба (временной сдвиг при построении фазового пространства при оценке размерности аттрактора по методу Такенса [6], шаг выборки при оценке энтропии [5] или время задержки при построении перестановочных комбинаций в методе Бандта-Помпа [3]). Мы пытаемся построить метод, основанный на статистике набора характерных времен, присущих самому решению, т. е. исключить необходимость выбора какого-либо характерного времени. Во-вторых, мы предлагаем метод, основанный на анализе конечного множества точек, являющихся характерными для самой системы, т. е. снижаем объем множества за счет

того, что каждый его элемент уже характеризует относительно большой интервал сигнала.

При анализе поведения динамических систем широко используются различные способы снижения размерности анализируемых множеств. Идеи большинства подходов являются модификациями метода сечений Пуанкаре [7, 8], предложившего изучать не фазовые траектории в пространстве переменных, а только множество точек, образованное пересечениями фазовых траекторий с некоторой поверхностью. Так, вариантом метода Пуанкаре является и предложенный Лоренцем для анализа знаменитой системы, носящей его имя, метод отображения последовательности точек, определяющих локальные максимумы одной из переменных  $(Z_{\max})_{n+1} = f((Z_{\max})_n)$ . Именно анализ функции  $f$  (названной лямбда-функцией) позволил понять механизм хаотизации решений знаменитого триплета

Принципиальным шагом при анализе временного поведения возникающих в системе решений является переход к величинам, отображающим не топологию множества точек в пространстве, а свойства множества неких характерных времен эволюции системы. Поскольку аттрактор диссипативной системы сосредоточен в ограниченной области пространства, то можно говорить о «времени возвращения», понимая под ним, например, время прохождения фазовой точки от предыдущего пересечения плоскости Пуанкаре до последующего. Такой подход для анализа поведения системы Лоренца был предложен в работе [9] с целью выделения последовательности повторяющихся фрагментов фазовых траекторий и построения по ним прогностических моделей.

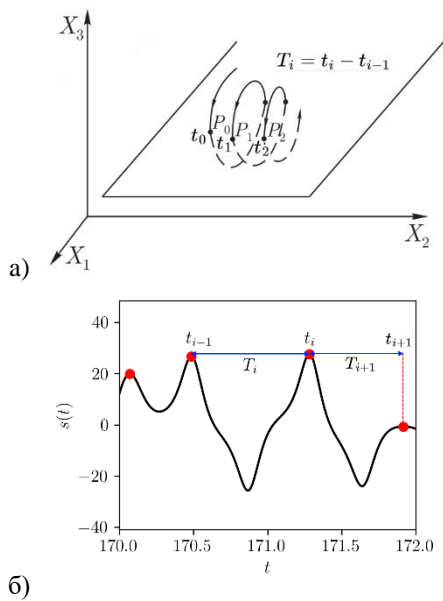
В данной работе мы возвращаемся к анализу свойств множества времен возвращения, но с целью разграничения в пространстве параметров областей существования различных периодических, квазипериодических и хаотических решений. Для начала мы проиллюстрируем на простых модельных сигналах, что распределение времен возвращения дает информацию, не содержащуюся в спектральных плотностях сигнала. Затем на примере все той же системы Лоренца покажем, как простая мера наполнения гистограммы времен возвращения позволяет получить наглядную карту режимов.

## 2. Метод

Идея метода состоит в анализе всего набора характерных времен рассматриваемой системы. Аттрактор диссипативной системы локализован в ограниченной области пространства и, если решение хаотическое, то фазовая траектория представляет собой запутанную, но не пересекающуюся с собой линию. Выделив в фазовом пространстве некую поверхность, можно, следуя Пуанкаре, изучать последовательность точек пересечения (рис. 1, а).

Мы будем анализировать не последовательность точек, а интервалы времени, затраченные системой на прохождение от одной точки Пуанкаре до следующей, которые будем называть «временем возвращения». Статистический анализ выборки времен возвращения позволяет охарактеризовать режим решения.

На практике, алгоритм анализа заключается в следующем. В исследуемом сигнале  $X(t)$  выделяются все локальные максимумы и фиксируются соответствующие им моменты времени  $t_i$  (см. рис. 1, б). Затем составляется полный набор времен возвращения  $T_i = t_i - t_{i-1}$ .



**Рис. 1.** Метод анализа: а) – иллюстрация последовательности точек пересечения, получаемая с помощью сечения Пуанкаре; б) – определение времени возвращения по точкам максимума

Для анализа статистических свойств времен возвращения системы используется метод гистограмм. Для их построения диапазон возможных значений времен возвращения  $[T_{\min}, T_{\max}]$  разбивается на  $N$  равных интервалов:

$$\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N-2} < \tau_{N-1}$$

шириной  $\delta = (T_{\max} - T_{\min})/N$ . Тогда

$$\tau_k = T_{\min}(1 + \delta k), \quad k = 0..N - 1.$$

Гистограммой будем называть набор значений  $\{n_k\}$

$$n_k = \sum_i I_{[\tau_{k-1}, \tau_k]}(T_i),$$

где  $I$  – индикаторная функция

$$I_{[\tau_{k-1}, \tau_k]}(T_i) = \begin{cases} 1, & T_i \in [\tau_{k-1}, \tau_k], \\ 0, & T_i \notin [\tau_{k-1}, \tau_k]. \end{cases}$$

В качестве количественной величины, по значению которой можно будет судить о периодическом

или хаотическом поведении системы, используется число ненулевых значений  $\{n_k\}$  в полученной гистограмме распределения

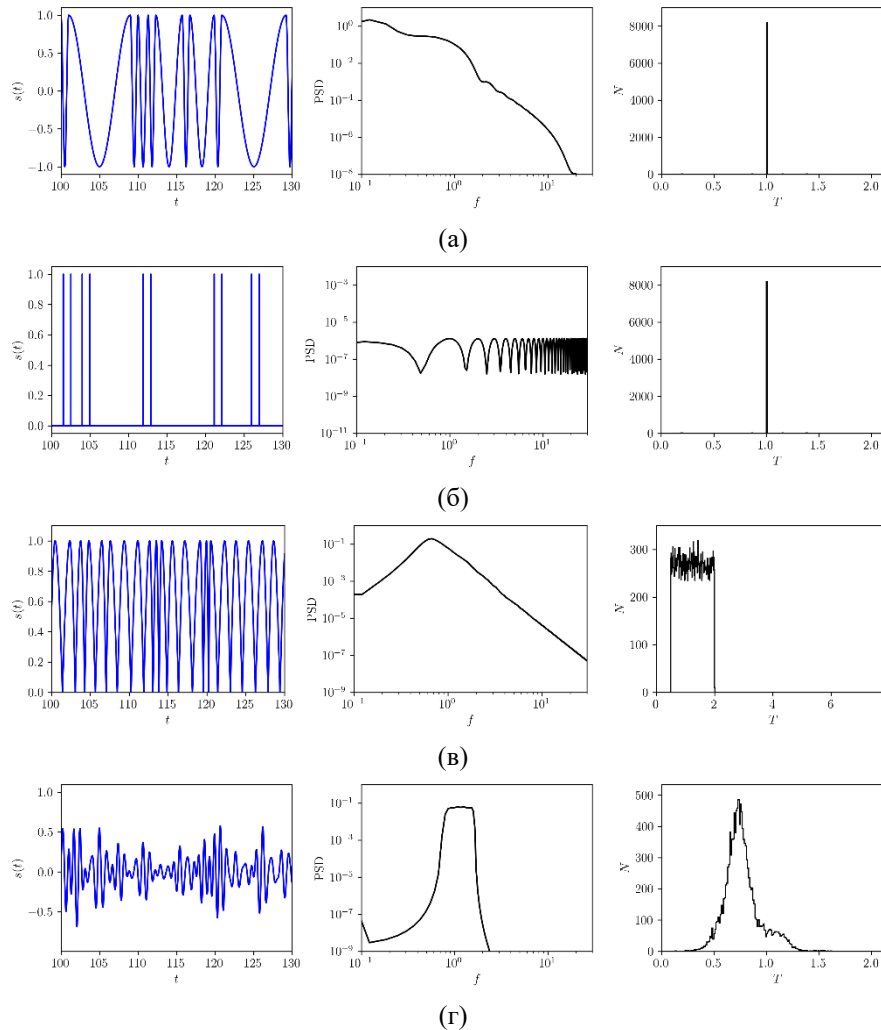
$$N_T = N(n_k | n_k \neq 0).$$

Поведение предлагаемой характеристики легко понять на примере предельных случаев. Если сигнал представляет собой чисто периодическую функцию с одним максимумом в каждом периоде, то в гистограмме времен возвращения будет заполнен только один интервал и  $N_T = 1$ . В более сложных периодических режимах в гистограмме присутствует несколько заполненных ячеек. В хаотическом сигнале заполняется конечная полоса (не обязательно одна), и параметр  $N_T$  растет по мере расширения заполненной области времен.

Важным при построении такой меры является выбор ширины интервала  $\delta$  в гистограмме. Зачастую при построении гистограмм для определения функции распределения какой-либо случайной величины ширину ячейки (или количество ячеек) стараются подобрать таким образом, чтобы результирующая гистограмма не содержала пробелов, но в то же время была представительна. Существуют различные оценки, позволяющие определить число интервалов по размеру выборки случайной величины. Отправной точкой для таких оценок обычно служит предположение о нормальном распределении случайной величины. В контексте статистики времен возвращения это предположение едва ли применимо. К тому же, при построении меры  $N_T$  наличие пустых ячеек необходимо. По этой причине имеет смысл использовать достаточно маленькие  $\delta$  (ограничение снизу при численных расчетах можно получить из частоты дискретизации сигнала). Влияние ширины интервала на чувствительность меры  $N_T$  будет продемонстрировано в дальнейшем.

Стоит отметить, что идея использования выборки времен между соседними локальными экстремумами использовалась в методе [10], предложенном для оценки времени запаздывания при построении модели на основе известного временного ряда. По сути, метод основан на том, чтобы найти наиболее вероятное время между экстремумами и использовать его в качестве времени запаздывания в математической модели. Понятно, что метод работает хорошо, если есть один доминирующий пик. Кроме того, поскольку метод нацелен на обработку реальных измеряемых сигналов, то на первый план выходит непростой для него вопрос об устойчивости алгоритма к шуму [11].

Отметим, что вопрос устойчивости к шуму предлагаемого метода (робастность) в этой работе не обсуждается. Его имеет смысл обсуждать при постановке конкретной задачи, так как возможные методы регуляризации алгоритма существенно зависят от свойств шума и целей анализа.



**Рис. 2.** Модельные сигналы (слева), их спектры (по центру) и гистограммы времен возвращения (справа): а) – сигнал из фрагментов косинусов с разным периодом; б) – сигнал из единичных пиков; в) – сигнал со случайным периодом в интервале  $0.5 < T < 2$ ; г) – сигнал со спектром в полосе частот  $0.5 < f < 2$

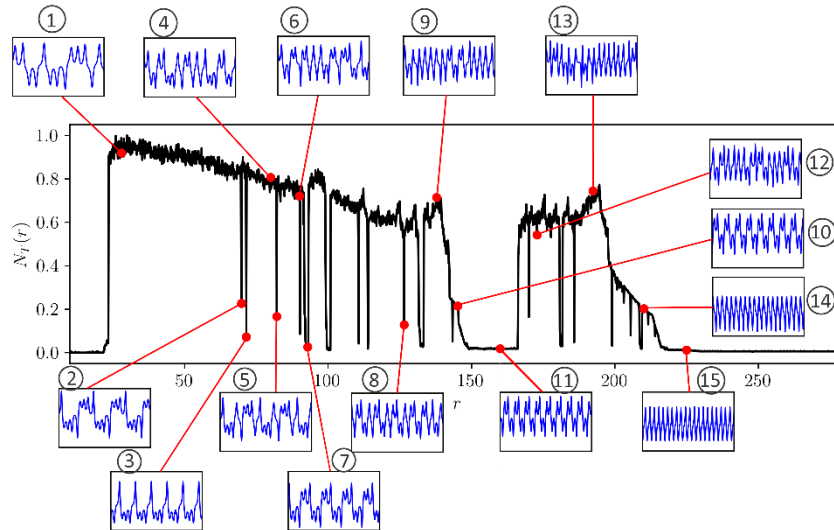
### 3. Модельные сигналы

В природе и технике часто приходится иметь дело с системами, демонстрирующими явное хаотическое поведение, но обладающими при этом набором характерных времен, которые могут приводить к существованию выделенной периодичности (чаще квазипериодичности), доминирующей в спектре (как это имеет место, например, в солнечной активности [12]). Эти времена могут и не проявляться в спектре, оставаясь тем не менее выделенными для динамики системы. Именно на анализ таких систем и направлен предлагаемый подход, возможности которого продемонстрируем сначала на простых модельных сигналах.

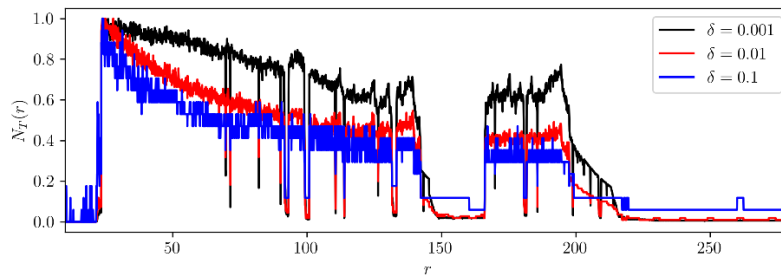
Предположим, что система в половине случаев совершает некий цикл за фиксированное время (примем его за единицу), а в другой половине случаев проходит цикл за случайное время ( $0.1 < T < 10$ ). При этом сигнал в каждом цикле

изменяется либо по косинусоиду (без разрыва производной), либо представляет собой одиночный импульс. Фрагменты соответствующих сигналов показаны в первом и втором рядах на рис. 2 вместе со спектрами и гистограммами времен возвращения. Спектр первого сигнала монотонно затухает с частотой (примерно как  $f^{-3}$ ), демонстрируя слабую выпуклость в районе частоты  $f = 1$ . Спектр второго представляет собой белый шум, модулированный всеми гармониками, кратными единице. Гистограммы времен возвращения в обоих случаях идентичны – половина времен  $T_i$  равна единице, а остальные значения дают слабый однородный пьедестал.

В качестве следующего академического примера рассмотрим два сигнала, для которых применен полосовой фильтр, но в одном случае вырезана полоса в пространстве времен (сигнал на рис. 2, в представляет случайную последовательность циклов с периодом от  $1/2$  до  $2$ ), а в другом взят белый



**Рис. 3.** Зависимость меры заполнения гистограммы колебаний  $N_T(r)$  от параметра  $r$  для системы Лоренца и фрагменты сигналов для 15 выделенных режимов. Значения меры получены при ширине интервала  $\delta = 0.001$



**Рис. 4.** Влияние ширины интервала гистограммы на вид зависимости  $N_T(r)$  для системы Лоренца

шум, пропущенный через полосовой фильтр, пропускающий частоты от  $1/2$  до  $2$  (рис. 2,  $z$ ). Очевидно, что сигналы совсем различны, и прямоугольному спектру соответствует остроконечная гистограмма, а при прямоугольной гистограмме спектр (в логарифмических координатах) имеет вид треугольника.

#### 4. Распределение времен возвращения и его мера в системе Лоренца

Рассмотрим в качестве примера одну из наиболее популярных и детально изученных динамических систем – систему Лоренца [13], которая описана во многих книгах (например, [1, 14, 15]) и может быть воспроизведена без комментариев:

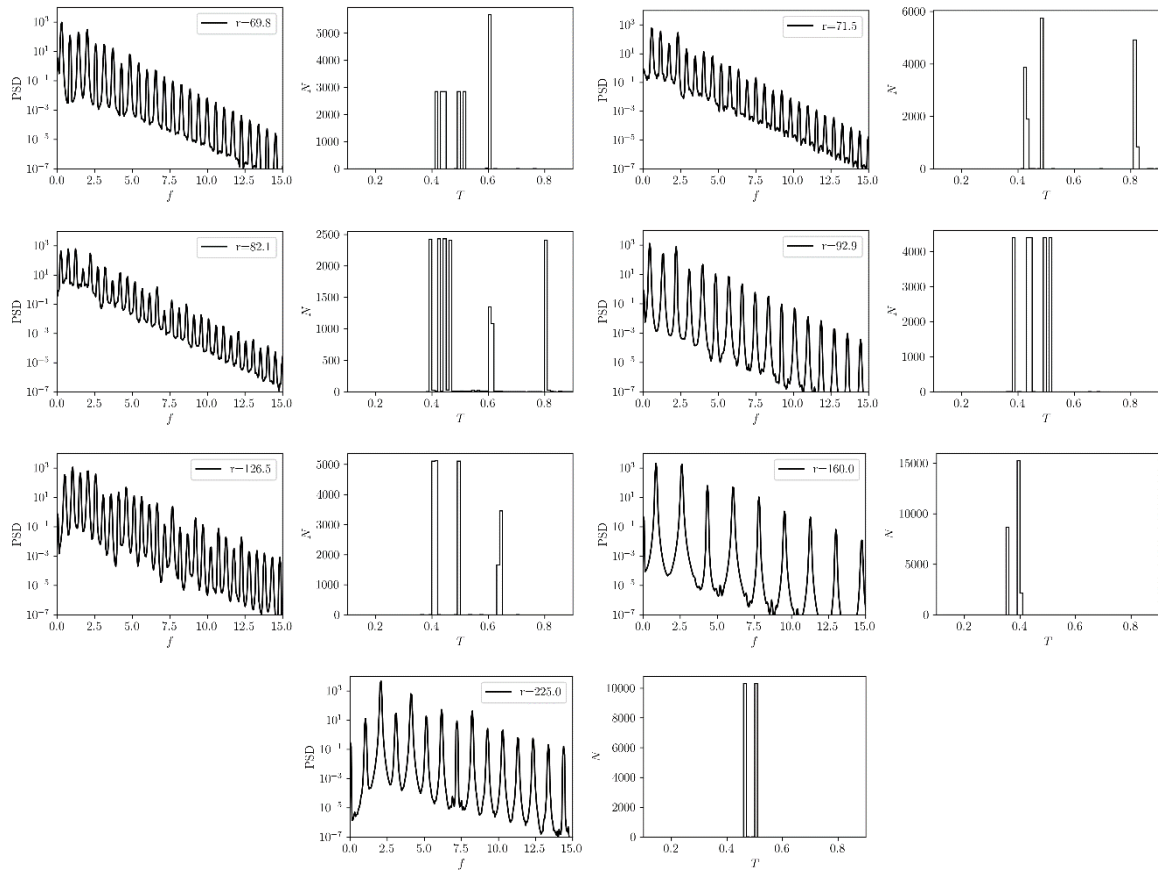
$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} = XY - \beta Z. \end{cases} \quad (1)$$

Основным управляющим параметром системы является нормированное число Релея  $r$  ( $r = 1$  соответствует потере конвективной устойчивости подогреваемого снизу слоя жидкости). Два других параметра, число Прандтля  $\sigma$  и геометрический параметр  $\beta$ , фиксируем, приняв значения из оригинальной работы [13]:  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ .

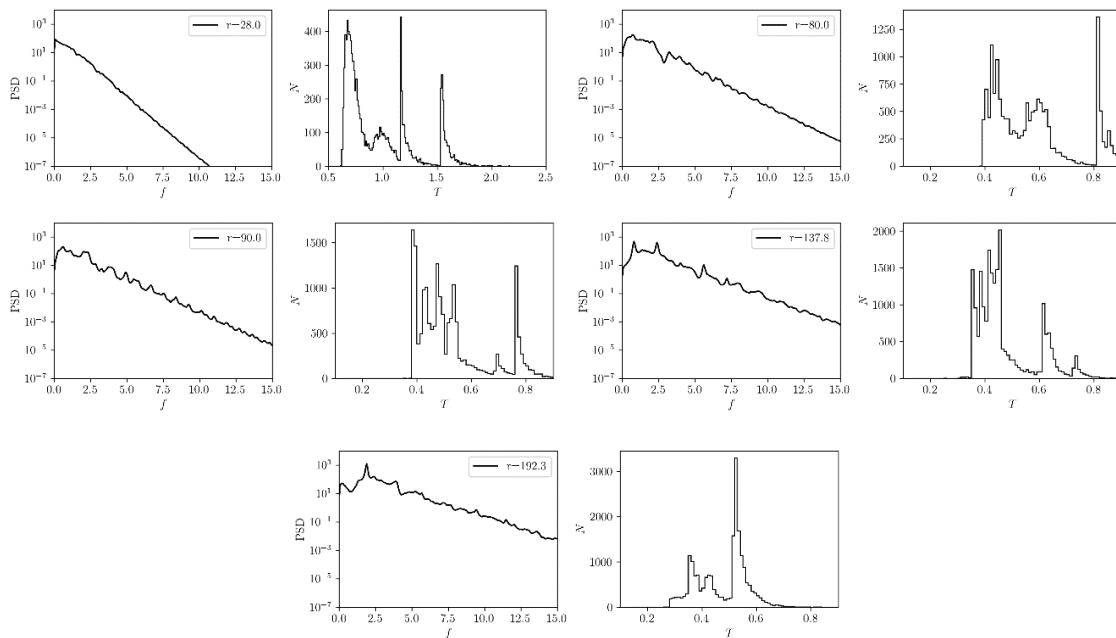
Мы провели численное интегрирование системы (1) методом Рунге-Кутты четвертого порядка для диапазона значений чисел Релея, включающего все значения, при которых возникают хаотические режимы, а именно,  $10 < r < 300$  (известно, что при  $r > 216$  хаос в системе не наблюдается), изменяя число Релея с шагом  $0.1$ . Для каждого значения параметра рассчитывалась реализация длиной  $t = 10000$  и фиксировалась выборка времен возвращения  $T_i$  (характерное число элементов в выборке составляло 20000).

На рис. 3 показана зависимость  $N_T(r)$  для всего рассмотренного диапазона значений числа Релея. Можно видеть, что введенная простая мера наполненности гистограммы времен возвращения не только точно отделяет хаотические режимы от периодических (точно идентифицируя все известные окна периодичности), но и позволяет выделить промежуточные режимы (например, в области значений параметра, в которой реализуется субгармонический каскад). Более того, мера заполнения гистограммы  $N_T$  хорошо чувствует все, даже самые узкие окна.

Рис. 4 показывает зависимость предложенной меры от выбора ширины ячейки при построении гистограммы. На нем представлены зависимости  $N_T(r)$  для значений  $\delta=0.1, 0.01$  и  $0.001$ . Очевидно,



**Рис. 5.** Спектры (слева) и гистограммы времен возвращения (справа) периодических режимов (режимы 2, 3, 5, 7, 8, 11, 15 – нумерация слева направо и сверху вниз)

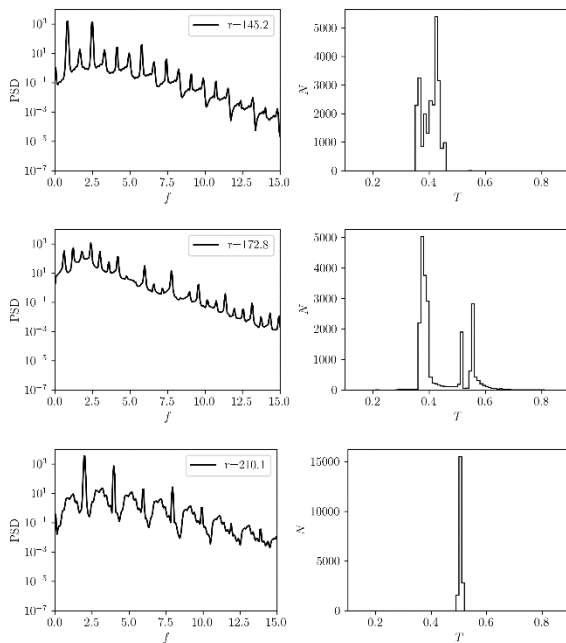


**Рис. 6.** Спектры (слева) и гистограммы времен возвращения (справа) хаотических режимов (режимы 1, 4, 6, 9, 13 – нумерация слева направо и сверху вниз)

что зависимость становится более гладкой при уменьшении ширины ячейки. Тем не менее из соображений наглядности все приведенные далее гистограммы нарисованы для  $\delta = 0.01$ .

Для иллюстрации всего спектра реализующихся в системе режимов на рис. 3 показано 15 фрагментов осциллограмм величины  $X(t)$ . Для всех 15 режимов на рис. 5–7 приведены спектральные плотности мощности пульсаций величины  $X(t)$  и гистограммы времен возвращения  $T_i$ .

Периодические режимы (точную границу указать сложно – в качестве оценки можно взять  $N_T \approx 0.25$ ) представлены на рис. 5 (на рис. 3 это режимы 2, 3, 5, 7, 8, 11, 15). Можно отметить, что спектры для всех режимов имеют сходную структуру, представляя собой монотонно спадающую последовательность пиков, являющихся кратными гармониками основной частоты. В режимах с простой структурой колебаний (примеры 11 и 15) шумовая подложка ниже, а амплитуда пиков выше. Представленные гистограммы времен возвращений существенно разнообразнее, показывая, сколько и каких циклов имеется в каждом из периодических режимов. Наибольшее число отдельных пиков (семь) содержит гистограмма режима 5. Стоит отметить, что ни одно из представленных в гистограмме времен не соответствует основной частоте в спектре.



**Рис. 7.** Спектры (слева) и гистограммы времен возвращения (справа) промежуточных режимов (режимы 10, 12, 14)

Хаотические режимы характеризуются заполненными (относительно гладкими) спектрами и наполненными гистограммами времен возвращения (с той же мерой строгости примем  $N_T \approx 0.75$ ). На рис. 6 приведены пять примеров хаотических

режимов (режимы 1, 4, 6, 9, 13). Первый пример относится к случаю  $r = 28$ , исследованному Лоренцем в его пионерской работе. Спектр в этом случае практически гладкий, но гистограмма указывает на наличие трех доминирующих характерных времен возвращения (в гистограмме три пика с достаточно острыми максимумами, хотя есть и четвертый – плавный максимум). Остальные приведенные на рис. 6 примеры характеристик хаотических режимов подтверждают наличие как достаточно гладких спектров, так и наличие в каждом примере набора выделенных времен, что соответствует природе малоразмерного хаоса.

Примеры спектров и гистограмм промежуточных режимов (режимы 10, 12, 14) показаны на рис. 6. И спектры, и гистограммы представляют собой что-то среднее между тем, что наблюдалось в периодических и хаотических режимах. Спектры сплошные, с гребенкой пиков, но амплитуда их не столь велика, а структура не столь однородна, как это наблюдалось в периодических режимах. Соответственно и гистограммы времен возвращения стали более наполненными ( $0.25 \approx N_T \approx 0.75$ ), а имеющиеся максимумы расплылись. Обратим внимание на режимы 10 и 11, фрагменты сигналов для которых кажутся практически одинаковыми, но и гистограммы, и спектры существенно отличаются.

## 5. Заключение

Показано, что при анализе хаотических режимов, возникающих в системах с низкой размерностью, полезно анализировать заполненность спектра не только в пространстве частот, но и в пространстве времен. Предложен алгоритм формирования выборки времен возвращения с последующим анализом гистограммы полученной выборки. Простая мера наполнения гистограммы (доля не пустых ячеек в гистограмме  $N_T$ ) позволяет разделить периодические и хаотические режимы, а также уровень хаотичности каждого режима.

Введенная величина  $N_T$  является некоторой мерой хаотичности поведения системы, аналогичной информационным мерам «сложности» решения [5]. Очевидно, что, имея функцию распределения плотности вероятности (точнее, ее оценку по конечной выборке – гистограмму), мы можем оценить и другие статистические характеристики анализируемого множества. В частности, по полученной гистограмме можно посчитать энтропию

$$H_T = \sum_j \frac{n_j}{\sum_k n_k} \ln \frac{n_j}{\sum_k n_k}.$$

Величину  $n_j / \sum_k n_k$  можно интерпретировать как вероятность того, что в системе воспроизведется колебание с периодом, попадающим в соответствующий интервал гистограммы. Значения энтропии  $H_T(r)$  для всего рассмотренного набора решений системы Лоренца показаны на рис. 8 вместе с величиной  $N_T$ . Можно видеть, что энтропия

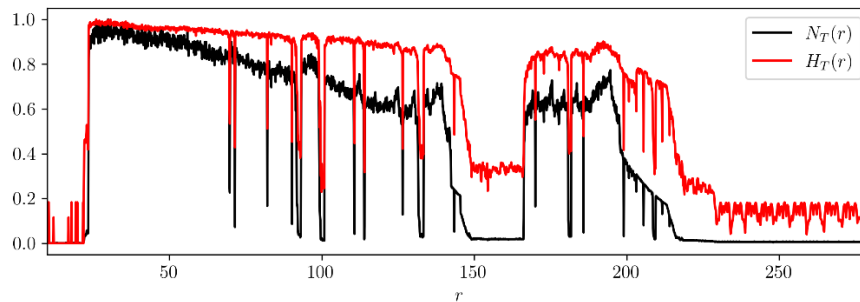


Рис. 8. Мера заполнения гистограммы  $N_T(r)$  и соответствующая ей энтропия  $H_T(r)$

времен возвращения не пропускает узкие окна периодичности, в отличие от перестановочной энтропии [4]. При этом, помимо лучшей чувствительности к характеру решения, преимуществом введенной меры по сравнению с классической энтропией Колмогорова–Синяя [2, 8, 16], как и с упомянутой перестановочной энтропией Бандта–Помпа [3], является относительная простота вычисления.

В заключение отметим, что развернутое сопоставление введенной меры со всеми известными вариантами информационных мер сложности решений требует дополнительного детального анализа. Систематического исследования требуют и вопросы устойчивости и регуляризации алгоритма при работе с зашумленными данными.

## Список литературы

1. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение. М.: Мир, 1988. 248 с.
3. Bandt C., Pompe B. Permutation entropy: a natural complexity measure for time series // *Physical Review Letters*. 2002. Vol. 88. N. 17, 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.174102
4. Cao Y., Tung W., Gao J., Protopopescu V., Hively L. Detecting dynamical changes in time series using the permutation entropy // *Physical Review E*. 2004. Vol. 70, 046217. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.046217
5. Xiong H., Shang P., He J., Zhang Y. Complexity and information measures in planar characterization of chaos and noise // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 100. P. 1673–1687. DOI: 10.1007/s11071-020-05560-3
6. Takens R. Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand D., Young L.-S. (eds.) *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer, 1981, pp. 366–381.
7. Гукенхаймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.

8. Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 448 с.
9. Фрик П. Г. Система Лоренца и пространственно-временные спектры турбулентности. // *Процессы тепло- и массопереноса вязкой жидкости*, Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 10–15.
10. Bezruchko B., Karavaev A., Ponomarenko V., Prokhorov M. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // *Physical Review E*. 2001. Vol. 64, 056216. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.056216
11. Zunino L., Soriano M., Fischer I., Rosso O., Mirasso C. Permutation-information-theory approach to unveil delay dynamics from time-series analysis // *Physical Review E*. 2010. Vol. 82, 046212. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.046212
12. Frick P., Sokoloff D., Stepanov R., Pipin V., Usoskin I. Spectral characteristic of mid-term quasi-periodicities in sunspot data // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2020. Vol. 491. P. 5572–5578. DOI: 10.1093/mnras/stz3238
13. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // *Journal of Atmospheric Sciences*. 1963. Vol. 20. N. 2. P. 130–148.
14. Рабинович М. И. Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
15. Фрик П. Г. Турбулентность: модели и подходы. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. 332 с.
16. Ito K. Chaos in the Rikitake two-disc dynamo system // *Earth and Planetary Science Letters*. 1980. Vol. 51. N. 2. P. 451–456. DOI: 10.1016/0012-821X(80)90224-1

## References

1. Bergé P., Pomeau Y., Vidal C. *Order within Chaos: Towards a Deterministic Approach to Turbulence*. New York: Wiley, 1986. 329 p.
2. Schuster H. G. *Deterministic Chaos. An Introduction*. Weinheim: Wiley, 1988. 270 p.
3. Bandt C., Pompe B. Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, no. 17, 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.174102



4. Cao Y., Tung W., Gao J., Protopopescu V., Hively L. Detecting dynamical changes in time series using the permutation entropy. *Physical Review E*, 2004, vol. 70, 046217. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.046217
5. Xiong H., Shang P., He J., Zhang Y. Complexity and information measures in planar characterization of chaos and noise, *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 100, pp. 1673–1687. DOI: 10.1007/s11071-020-05560-3
6. Takens R. Detecting strange attractors in turbulence. In: Rand D., Young L.-S. (eds.) *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980. Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer, 1981, pp. 366–381.
7. Guckenheimer J., Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York, USA: Springer, 1983. 462 p.
8. Kuznetsov S. P. *Dinamicheskii khaos i giperbolicheskie attractory: ot matematiki k fizike* [Dynamical Chaos and Hyperbolic Attractors: from Mathematics to Physics]. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Research, 2013. 448 p. (In Russian)
9. Frick P. G. Sistema Lorentsa i prostranstvenno-vremennye spektry turbulentnosti [The Lorenz system and spatial-temporal spectra of turbulence]. In: Briskman V. A., Myznikova B. I., Slavnov E. V. (eds.) *Protsessy teplo- i massoperenosa vязkoi zhidkosti* [Processes of heat and mass transfer in a viscous fluid]. Sverdlovsk: Ural Research Center of the Academy of Sciences of the USSR, 1986, pp. 10–15 (In Russian).
10. Bezruchko B., Karavaev A., Ponomarenko V., Prokhorov M. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series. *Physical Review E*, 2001, vol. 64, 056216. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.056216
11. Zunino L., Soriano M., Fischer I., Rosso O., Mirasso C. Permutation-information-theory approach to unveil delay dynamics from time-series analysis. *Physical Review E*, 2010, vol. 82, 046212. DOI: 10.1103/PhysRevE.82.046212
12. Frick P., Sokoloff D., Stepanov R., Pipin V., Usoskin I. Spectral characteristic of mid-term quasi-periodicities in sunspot data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2020, vol. 491, pp. 5572–5578. DOI: 10.1093/mnras/stz3238
13. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130–148.
14. Rabinovich M. I., Trubetskov D. I. *Oscillations and waves in linear and nonlinear systems*. Dordrecht, Netherlands: Springer Dordrecht, 1989. 578 p.
15. Frick P. G. *Turbulentnost': modeli i podkhody* [Turbulence: Models and Approaches]. Moscow-Izhevsk: Regular and chaotic dynamics, 2010. 332 p.
16. Ito K. Chaos in the Rikitake two-disc dynamo system. *Earth and Planetary Science Letters*, 1980, vol. 51, no. 2, pp. 451–456. DOI: 10.1016/0012-821X(80)90224-1

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Окательев Р. С., Фрик П. Г. Статистика времен возвращения при анализе хаоса в динамических системах // Вестник Пермского университета. Физика. 2024. № 3. С. 19–27. doi: 10.17072/1994-3598-2024-3-19-27

**Please cite this article in English as:**

Okatev R. S., Frick P. G. Recurrence time statistics for chaos analysis in dynamical systems. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2024, no. 3, pp. 19–27. doi: 10.17072/1994-3598-2024-3-19-27

**Сведения об авторах**

1. Роман Сергеевич Окательев, младший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614018; аспирант кафедры общей физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990
2. Пётр Готлобович Фрик, д-р. физ.-мат. наук, профессор, заведующий лабораторией физической гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614018; профессор кафедры общей физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990

**Author information**

1. Roman S. Okatev, Junior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Postgraduate Student, Department of General Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia.
2. Peter G. Frick, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Physical Hydrodynamics, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Professor, Department of General Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia.