

УДК 532.72:537.84
PACS 75.50.Mm, 75.50.Ww

О влиянии магнитофореза коллоидных частиц и межчастичных взаимодействий на левитацию постоянного магнита в магнитной жидкости

А. Ф. Пшеничников^a, Е. Н. Буркова^b

^a Институт механики сплошных сред УрО РАН
614013, Пермь, ул. Акад. Королева, 1
email: pshenichnikov@icmm.ru

^b Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: burkova_ekaterin@mail.ru

Численно, в двумерной постановке, решена задача о силах, действующих на постоянный магнит, помещенный в прямоугольную полость с концентрированной магнитной жидкостью. Задача решена с учетом магнитофореза и диффузии частиц, размагничивающих полей и межчастичных взаимодействий. Рассчитаны размагничивающее поле и поле концентрации коллоидных частиц. Приведена зависимость результирующей силы, действующей на магнит, от его смещения из положения равновесия и параметра межчастичных взаимодействий. Продемонстрировано сильное влияние магнитофореза частиц и межчастичных взаимодействий на равновесное положение магнита в полости.

Ключевые слова: магнитная жидкость; постоянный магнит; гидростатическое давление; магнитофорез; диффузия частиц; межчастичные взаимодействия; левитация

Поступила в редакцию 22.10.2016; принята к опубликованию 05.11.2016

On influence of magnetophoresis and interparticle interactions on floating of permanent magnet in magnetic fluid

A. F. Pshenichnikov^a, E. N. Burkova^b

^a Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Science
Academika Koroleva st, 1, 614013, Perm
email: pshenichnikov@icmm.ru

^b Perm State University
Bukireva St. 15, 614990, Perm
email: burkova_ekaterin@mail.ru

The problem of the forces acting on the permanent magnet placed in a rectangular cavity filled concentrated magnetic fluid, was solved in two dimensions. The problem is solved with regard magnetophoresis and diffusion of particles, demagnetizing fields and interparticle interactions. The demagnetizing field and the concentration of colloidal particles were calculated. The dependencies of the resultant force from magnet position and value of the interparticle interactions parameter were

found. A strong magnetophoresis and interparticle interactions influence on the equilibrium position of the magnet in the cavity were demonstrated.

Keywords: magnetic fluid; permanent magnet; hydrostatic pressure; magnetophoresis; interparticle interactions; levitation; segregation

Received 22.10.2016; accepted 05.11.2016

doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-32-41

1. Введение

Задачи о силах, действующих на тело, погруженное в магнитную жидкость, рассматриваются в литературе, начиная с классических работ Розенцвейга (см. [1]), в которых были выведены уравнение Бернулли для магнитной жидкости, магнитный скачок давления на границе намагничивающихся сред и общая формула, связывающая силу, действующую на немагнитное тело, с намагниченностью жидкости. Решение ряда конкретных проблем можно найти, например, в [2–5]. Интерес к этим задачам связан, в частности, с теоретическим обоснованием работы магнитожидкостного сепаратора, разделяющего частицы цветных металлов по плотности, и магнитожидкостного акселерометра, в котором в качестве инерционной массы используются постоянный магнит или немагнитное тело, левитирующие в магнитной жидкости. Главной особенностью почти всех известных нам решений является то, что они получены в рамках приближения разбавленных растворов. В этом случае пренебрегается межчастичными взаимодействиями (стерическими, магнитодипольными и гидродинамическими) и пренебрегается магнитным полем, создаваемым самой жидкостью (т.е. размагничивающим полем). Кроме того, пренебрегается (но не всегда) магнитофорезом (дрейфом коллоидных частиц под действием градиентного магнитного поля), седиментацией (дрейф коллоидных частиц под действием силы тяжести) и процессами диффузии. Все эти предположения накладывают серьезные ограничения на область применения полученных результатов. Так, согласно данным [6–8] межчастичные взаимодействия в концентрированных растворах могут увеличить намагниченность жидкости на десятки процентов, а размагничивающие поля могут привести к сильной дополнительной сегрегации частиц. Пренебрежение магнитофорезом, седиментацией и диффузией частиц означает, что известные решения справедливы только на начальном промежутке времени, малом по сравнению с временем установления равновесного распределения частиц в полости.

Основной целью данной работы является количественная оценка роли этих факторов в задаче о левитации постоянного магнита, помещенного в

прямоугольную полость с магнитной жидкостью. Выбранная геометрия расчетной области соответствует простейшему одноосному магнитожидкостному акселерометру, описанному в [1]. Задача решена численно в двумерной постановке.

2. Постановка задачи

Пусть имеется прямоугольная полость с неподвижной магнитной жидкостью, в которую погружен постоянный магнит. Длина полости вдоль оси y полагается большой по сравнению с шириной a_1 и высотой c_1 . Магнит изготовлен из материала с большой коэрцитивной силой, поэтому его намагниченность M_S можно считать однородной и независимой от свойств жидкости, в которой он находится. Для определенности будем считать, что вектор намагниченности направлен по оси x : $M_S = (M_S, 0, 0)$. Полость находится в гравитационном поле, направленном вдоль оси z (рис. 1). В этом случае на постоянный магнит действуют три силы: сила тяжести, сила Архимеда и квазиупругая сила со стороны магнитной жидкости. Сила тяжести зависит только от плотности материала магнита и его размеров и считается постоянной. Оставшиеся две силы зависят от распределений концентрации частиц и конфигурации магнитного поля в жидкости и изменяются со временем в результате магнитофореза и диффузии. Задача состоит в том, чтобы вычислить результирующую силу, действующую на магнит при его произвольном смещении по вертикальной оси z относительно центра полости, и определить равновесное положение (положение нейтральной плавучести).

Поясним кратко появление квазиупругой силы. Магнитное поле H внутри жидкости складывается из поля H_0 , создаваемого постоянным магнитом и убывающего с расстоянием от полюсов, и собственного поля h , создаваемого жидкостью (т.е. размагничивающего поля)

$$H = H_0 + h. \quad (1)$$

Оба слагаемые в правой части уравнения (1) неоднородны, поэтому неоднородна и магнитная добавка к статическому давлению внутри жидкости. В соответствии с уравнением Бернулли для неподвижной магнитной жидкости (например, [1]) магнитная добавка p_m к давлению является монотонно возрастающей функцией напряженности поля H

$$p_m = \mu_0 \int_0^H M dH + const, \quad (2)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, $M = M(H, \varphi)$ – равновесная намагниченность жидкости, φ – объёмная доля коллоидных частиц, зависящая, в общем случае, от пространственных координат. Из уравнения (2) следует, что любое немагнитное тело, помещенное в магнитную жидкость, будет выталкиваться ею в область с минимальной напряженностью магнитного поля и минимальным статическим давлением. Под «немагнитным» телом здесь и далее понимается тело, намагниченность которого мала по сравнению с намагниченностью жидкости. Роль такого немагнитного тела могут играть, в том числе, и стенки полости, в которой находится магнитная жидкость.

Магнитную силу, действующую на корпус полости с жидкостью, можно найти, проинтегрировав по внутренней поверхности силы давления (2) и приняв во внимание добавки, связанные с магнитным скачком давления на границе двух сред. Согласно [1] имеем:

$$\mathbf{F}_m = \oint_s \left(p_m + \frac{\mu_0}{2} M_n^2 \right) d\mathbf{S}. \quad (3)$$

Сила, действующая на магнит, получается из (3) простой сменой знака в правой части уравнения. Если гравитации нет, а магнит находится в центре полости, заполненной однородной жидкостью ($\varphi = \text{const}$), то распределение давления по ее внутренней поверхности симметричное, и результирующая сила, действующая на магнит, равна нулю. Это положение магнита соответствует минимуму потенциальной (магнитостатической) энергии системы – магнит самоцентрируется. Смещение магнита из положения равновесия нарушает симметричность поля H и приводит к появлению квазиупругой силы. В гравитационном поле равенство нулю суммы квазиупругой магнитной силы, силы тяжести и силы Архимеда определяет условие механического равновесия, т.е. условие левитации. В этом устойчивом положении магнит находится до тех пор, пока не нарушается баланс сил.

Седиментация и магнитофорез частиц вызывают перераспределение частиц в пространстве, изменение локальной плотности и намагниченности жидкости и изменение равновесного положения магнита. Стерические взаимодействия (эффекты исключенного объема) и магнитодипольные взаимодействия существенно влияют как на интенсивность магнитофореза, так и на конкурирующие диффузионные потоки частиц, внося, таким образом, свой вклад в пространственное распределение частиц.

Альтернативный способ вычисления силы, действующей на магнит со стороны магнитной жид-

кости, подразумевает интегрирование по поверхности магнита, но в этом случае к правой части уравнения (3) необходимо добавить объёмные пондеромоторные силы, действующие на магнит, плотность которых равна $\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{M}_s \nabla) \mathbf{H}_s$, где H_s – напряженность поля внутри магнита. Необходимость дополнительных вычислений напряженности H_s делает этот способ более трудоемким. Кроме того, он менее точен при численном решении задачи, т.к. вблизи поверхности магнита создаются большие градиенты напряженности и намагниченности жидкости. По этой причине мы использовали в дальнейшем формулу (3) с интегрированием по внутренней поверхности полости.

В гравитационном поле условием механического равновесия (т.е. условием левитации) будет равенство нулю суммы квазиупругой магнитной силы, силы тяжести и силы Архимеда. В этом устойчивом положении магнит находится до тех пор, пока не нарушается баланс сил. Седиментация и магнитофорез частиц вызывают перераспределение частиц в пространстве, изменение локальной плотности и намагниченности жидкости и изменение равновесного положения магнита. В этих условиях, вообще говоря, архимедова сила должна вычисляться с учетом пространственной неоднородности жидкости. Такая процедура, однако, снова предполагает интегрирование одной из составляющих давления по поверхности магнита и существенно усложняет процесс вычисления. По этой причине ниже используется упрощенный вариант, при котором архимедова сила вычисляется через среднюю по объему плотность жидкости $\langle \rho \rangle$. В этом случае суммарный вклад гравитационного поля в вертикальную компоненту силы, действующей на единицу длины магнита, может быть записан в виде

$$F_g \approx -a_2 c_2 \rho_s g \left(1 - \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_s} \right). \quad (4)$$

В условиях, типичных для лабораторных экспериментов, плотность постоянного магнита ρ_s многократно превышает плотность умеренно концентрированной магнитной жидкости, поэтому итоговая погрешность формулы (4) не превышает нескольких процентов.

Несмотря на кажущуюся простоту формулы (3), ее использование связано с преодолением ряда серьезных вычислительных проблем. Главная проблема состоит в том, что намагниченность, входящая в формулу (3) для искомой силы, сама является неизвестной функцией координат. Она зависит от напряженности поля H и объёмной доли φ коллоидных частиц в жидкости, которые, в свою очередь, зависят от намагниченности. Это означает, вообще говоря, необходимость численного решения системы связанных уравнений, которая включает в себя уравнения Максвелла для напря-

женности и индукции магнитного поля (магнито-статическая задача), динамическое уравнение массообмена для магнитной жидкости, материальное уравнение, связывающее намагниченность жидкости с напряженностью поля и концентрацией частиц, и уравнения, описывающие поле постоянно-го магнита.

3. Поле постоянного магнита

Задача о магнитном поле в окрестности однородно намагниченного магнита в форме прямоугольного параллелепипеда произвольных размеров решена аналитически в [9]. В случае магнита, у которого длина вдоль оси y много больше поперечных размеров, напряженность магнитного поля в произвольной точке $P(x, z)$ определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned} H_{0x} &= \frac{M_{sx}}{2\pi} \text{Arc} - \frac{M_{sz}}{4\pi} Lg, \\ H_{0z} &= -\frac{M_{sz}}{2\pi} \text{Arc} - \frac{M_{sx}}{4\pi} Lg, \\ Lg &= \ln \left[\frac{(rx+a_2/2)^2 + (rz+b_2/2)^2}{(rx+a_2/2)^2 + (rz-b_2/2)^2} \right] + \\ &+ \ln \left[\frac{(rx-a_2/2)^2 + (rz-b_2/2)^2}{(rx-a_2/2)^2 + (rz+b_2/2)^2} \right], \quad (5) \\ \text{Arc} &= \arctg \frac{rx+a_2/2}{rz+b_2/2} + \arctg \frac{rx-a_2/2}{rz-b_2/2} - \\ &- \arctg \frac{rx-a_2/2}{rz+b_2/2} - \arctg \frac{rx+a_2/2}{rz-b_2/2}, \end{aligned}$$

где a_2, c_2 – размеры магнита вдоль осей x и z , соответственно; M_{sx}, M_{sz} – компоненты намагниченности постоянного магнита, $rx = x - x_0, rz = z - z_0$ – проекции радиуса-вектора, проведенного из центра магнита в точку $P(x, z)$. Как уже говорилось выше, в работе полагается $M_{sx} = M_s, M_{sz} = 0$. В этом случае напряженность поля достигает максимальных значений на полюсах магнита $x = x_0 \pm a_2/2$. В частности, в среднем сечении магнита $z = 0$ напряженность на полюсах равна

$$H_p = H_{0x} = \frac{M_s}{\pi} \arctg \left(\frac{2a_2}{b_2} \right), \quad H_{0z} = 0.$$

Значение напряженности H_p в центральной части полюсов магнита удобно выбрать в качестве основного параметра, характеризующего "приложенное магнитное" поле, действующее на магнитную жидкость, и поставить ему в соответствие безразмерный параметр Ланжевена $\xi_0 = \mu_0 m H_p / (k T)$, который определит характерную намагниченность жидкости вблизи полюсов. Здесь m – магнитный момент коллоидной частицы, k – постоянная Больцмана, T – температура. Значение параметра Ланжевена вдали от полюсов (т.е.

безразмерное магнитное поле в произвольной точке, определенное через локальную напряженность поля), будут заведомо меньше ξ_0 и подлежит вычислению. На рис. 1 в качестве примера приведены изолинии магнитного поля (параметра Ланжевена), создаваемого магнитом с отношением сторон 1:3 при $\xi_0 = 13$.

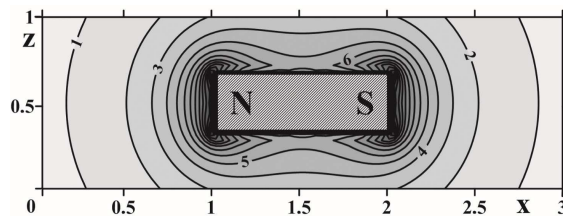


Рис. 1. Напряженность поля, создаваемого постоянным магнитом при $\xi_0 = 13$

4. Собственное поле магнитной жидкости

Напряженность поля внутри магнитной жидкости отличается от напряженности поля, созданного магнитом, в меру поля, создаваемого самой жидкостью, т. е. размагничивающего поля. Размагничивающее поле вычисляется обычно путем решения связанной краевой задачи для некоторой геометрической области, включающей в себя собственно намагниченное тело (магнитную жидкость) и окружающее пространство. Если в намагничивающей среде нет электрических токов, то задача сводится к решению статических уравнений Максвелла и материального уравнения, связывающего намагниченность M с напряженностью поля H внутри вещества. На границе тела накладывается условие непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции $B = \mu_0(H + M)$ и тангенциальных компонент напряженности. Однако при численном решении задачи возникает серьезная проблема, связанная с дальнедействующим характером магнитных полей. Границы внешней области должны быть достаточно удалены от границ полости, чтобы обеспечить затухание магнитного поля, но достаточно близки, чтобы размер массива переменных оставался в разумных пределах и соответствовал возможностям компьютера. Вынужденный компромисс является источником некоторой трудно оцениваемой систематической погрешности.

Эта погрешность отсутствует при использовании метода узкой щели, предложенной в [10]. В этом методе используется то обстоятельство, что в узкой щели, вырезанной в пробной элементарной ячейке и содержащей точку $P(x, z)$, продольная компонента напряженности совпадает с продольной компонентой напряженности в самом теле и такое же соотношение выполняется для поперечной компоненты индукции. Это обстоятельство является прямым следствием граничных условий для

индукции и напряженности магнитного поля. Согласно принципу суперпозиции вклад магнитной жидкости в напряженность H в точке $P(x, z)$ определяется суммированием вкладов ΔH всех элементарных ячеек, содержащих магнитную жидкость, но вклад пробной ячейки с точкой $P(x, z)$ внутри вычисляется отдельно. Если размер элементарной ячейки достаточно мал и намагниченность внутри нее можно считать однородной, то для вычисления ΔH можно использовать формулы, эквивалентные (5), в которых размеры магнита заменены на размеры Δx и Δz элементарной ячейки, а rx и rz заменены на проекции радиуса-вектора, соединяющего центр элементарной ячейки (x_0, z_0) с точкой $P(x, z)$, на координатные оси. Просуммировав вклады ΔH всех внешних (по отношению к точке P) элементарных ячеек, прибавляя к этой сумме вклад пробной ячейки и напряжённость поля магнита, получим выражение для напряжённости поля в магнитной жидкости:

$$\begin{aligned} H_x(x, z) &= H_{0x}(x, z) + \sum_{x \neq x_0} \Delta H_x - \\ &\quad - \frac{2}{\pi} M_x(x, z) \arctan\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right), \\ H_z(x, z) &= H_{0z}(x, z) + \sum_{z \neq z_0} \Delta H_z - \\ &\quad - \frac{2}{\pi} M_z(x, z) \arctan\left(\frac{\Delta x}{\Delta z}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Добавка к внешнему полю в правой части уравнения (6) и есть размагничивающее поле, т.е. поле, создаваемое самой магнитной жидкостью. Если намагниченность среды $M(x, z)$ как функция координат известна, то формулы (5) и (3) однозначно определяют напряжённость магнитного поля как внутри, так и снаружи жидкости. Низкая сходимость итерационного процесса при решении системы (6) в случае высокой магнитной восприимчивости жидкости может быть улучшена стандартными методами [11].

В случае разбавленных растворов эффекты, связанные с магнитодипольными межчастичными взаимодействиями, играют второстепенную роль и ими можно пренебречь. Для учета межчастичных взаимодействий в концентрированной жидкости ее намагниченность M , входящая в правую часть уравнений (6), вычислялась в рамках модифицированной модели эффективного поля второго порядка, справедливой в достаточно широком диапазоне параметров [12]:

$$\begin{aligned} M &= mnL(\xi_e) \frac{H}{H}, \quad \xi_e = \frac{\mu_0 m H_e}{kT}, \\ H_e &= H + \frac{M_L(H)}{3} \left[1 + \frac{1}{48} \frac{dM_L(H)}{dH} \right], \\ M_L &= mnL(\xi), \end{aligned} \quad (7)$$

где $n = 6\varphi / \pi d^3$ – числовая плотность частиц, d – диаметр частицы с защитной оболочкой,

$L(\xi) = \text{cth}(\xi) - 1/\xi$ – функция Ланжевена, M_L – намагниченность жидкости, вычисленная в рамках ланжевенского приближения, H_e – эффективное поле, действующее на частицу. Уравнения (7) многократно проверялись различными методами. Они хорошо согласуются с экспериментальными данными по начальной восприимчивости магнитных жидкостей и с результатами численного моделирования в области малых и умеренных значений энергии магнитодипольных взаимодействий [6, 7, 13]. При решении динамического уравнения массопереноса в магнитной жидкости (см. п. 5) шаг по времени сопровождался уточнением магнитного поля и намагниченности путем последовательного применения уравнений (5)–(7) к каждой элементарной ячейке. В работе использовался двухшаговый итерационный алгоритм, обеспечивающий лучшую сходимость по сравнению с пошаговым алгоритмом.

5. Магнитофорез и диффузия частиц в концентрированных магнитных жидкостях

Под действием магнитного и гравитационного полей первоначально однородная магнитная жидкость со временем становится пространственно неоднородной по концентрации магнитной фазы вследствие магнитофореза частиц (движения частиц под действием неоднородного магнитного поля) и седиментации (движения частиц под действием силы тяжести). При отсутствии конвективного движения единственным фактором, препятствующим этому расслоению, является градиентная диффузия. В концентрированных системах эти процессы описываются нелинейным динамическим уравнением массообмена, содержащим слагаемые, ответственные за магнитофорез и седиментацию, и зависящие от намагниченности и напряжённости поля в веществе. Последнее обстоятельство особенно важно. Оно означает, что магнитная и диффузионная части задачи должны решаться совместно. Главной особенностью этой проблемы является то, что характерное время затухания концентрационных возмущений

$$\tau_D \approx c_1^2 / \pi^2 D$$

минимум на шесть-семь порядков превышает время релаксации магнитного момента

$$\tau_B \approx 3\eta V/kT.$$

Здесь c_1 – высота полости, D – коэффициент диффузии, η – вязкость магнитной жидкости, V – объём коллоидной частицы. По этой причине намагниченность жидкости можно считать термодинамически равновесной с очень хорошей степенью точности, а концентрационное поле – замороженным на этапе вычисления магнитного поля.

Различные варианты уравнения массообмена, отличающиеся полнотой учета межчастичных взаимодействий и анизотропии коэффициентов переноса, предлагались ранее в [14–21]. Нами используется уравнение, полученное в [21], которое описывает изменение объёмной доли φ коллоидных частиц в пространстве и во времени и при отсутствии конвективных течений имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} \left\{ D_0 K(\varphi) \left[\varphi L(\xi_e) \nabla(\xi_e) + \varphi G_\gamma \mathbf{e} - \left[1 + \frac{2\varphi(4-\varphi)}{(1-\varphi)^4} - \varphi \frac{\partial^2(\varphi^2 G)}{\partial \varphi^2} \right] \nabla \varphi \right\}, \quad (8)$$

$$G(\lambda, \varphi) = \frac{4}{3} \lambda^2 \frac{(1+0.04\lambda^2)}{(1+0.308\lambda^2\varphi)} \times \frac{(1+1.28972\varphi+0.72543\varphi^2)}{(1+0.83333\lambda\varphi)}. \quad (9)$$

Здесь $K(\varphi) = b/b_0$, b и b_0 – подвижности частиц в магнитной жидкости и жидкости-носителе, соответственно, $D_0 = b_0 kT$ – эйнштейновское значение коэффициента диффузии, $\lambda = \mu_0 m^2 / 4\pi d^3 kT$ – параметр магнитодипольных взаимодействий (отношение энергии диполь-дипольных взаимодействий при контакте двух частиц к энергии теплового движения), \mathbf{e} – единичный вектор, направленный вдоль ускорения свободного падения, $G_\gamma = \Delta\rho V_s g c_1 / kT$ – обратная высота барометрического распределения в безразмерных координатах (g – ускорение свободного падения, $\Delta\rho$ – разность плотностей твердого ядра частицы и несущей жидкости, V_s – объём твердого ядра), $G(\lambda, \varphi)$ – относительный вклад магнитодипольных взаимодействий в плотность свободной энергии. Первое слагаемое в (8) отвечает за магнитофорез, второе – за седиментацию, третье за диффузию, четвертое – за стерические взаимодействия и последнее – за эффективное притяжение частиц, связанное с магнитодипольными взаимодействиями. Эффективный параметр Ланжевена ξ_e , определяющий интенсивность магнитофореза, задается уравнением (7). Коэффициент при $\nabla\varphi$ в фигурных скобках в правой части (8) можно рассматривать как изотропную часть коэффициента диффузии D коллоидных частиц, зависящую от их объёмной концентрации и энергии магнитодипольных взаимодействий

$$D = D_0 K(\varphi) \left[1 + \frac{2\varphi(4-\varphi)}{(1-\varphi)^4} - \varphi \frac{\partial^2(\varphi^2 G)}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (10)$$

Аппроксимация (9) для свободной энергии обеспечивает хорошее количественное согласие с результатами численных расчетов при $\lambda < 2$. Система уравнений (8), (9) хорошо описывает также результаты численных экспериментов по сегрегации

частиц в области $\lambda < 2$ и $\varphi < 0.4$. При $\lambda > 3$ это количественное согласие нарушается, однако фазовая диаграмма для спиноподобного распада системы, полученная на основе уравнения (9), выглядит вполне реалистично. В частности, критическое значение параметра λ^* , соответствующее спиноподобному распаду магнитной жидкости, находится в интервале значений, определенных другими методами [21].

6. Метод решения и результаты

Связанная система уравнений (6)–(9) решалась численно, методом конечных объемов в двумерной постановке по явной схеме. Система координат соответствовала рис. 1. Уравнение магнитодиффузии было приведено к безразмерному виду. В качестве единицы длины выбиралась высота прямоугольной полости c_1 , а единицы измерения времени – время затухания концентрационных возмущений в разбавленном растворе $\tau = c_1^2/D_0$. Координаты узлов расчетной сетки располагались в центрах прямоугольных элементарных ячеек. Такой подход упрощал расчетную схему и позволял избавиться от проблем, связанных с расходимостью магнитного поля на ребрах постоянного магнита. Устойчивость решения обеспечивалась выбором шага Δt по времени. Этот шаг изменялся в процессе счета в зависимости от максимального значения эффективного коэффициента диффузии D в полости, определяемого формулой (10), который, в свою очередь, зависел от локальной концентрации частиц. В безразмерной форме шаг по времени был равен

$$\Delta t = \frac{0.45}{D_{max}} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)^{-1}.$$

Концентрационная зависимость относительной подвижности частиц аппроксимировалась формулой Рассела $K(\varphi) = (1 - \varphi)^{6.5}$ [22].

Границы полости и постоянного магнита непроницаемы для вещества, поэтому нормальная компонента полного потока частиц на границе равна нулю. Это условие легко выполнить: при численной реализации метода конечных объемов вводится дополнительный слой элементарных ячеек, примыкающий к границам полости снаружи. В этих буферных ячейках концентрация частиц и напряжённость эффективного поля приравниваются к соответствующим величинам в пограничных ячейках внутри полости, что автоматически «зануляет» поток частиц через границу. Недостаток этого приема состоит в том, что он непригоден для внутренних границ с плавающим в жидкости твердым телом, как в данной работе. Поэтому мы использовали другой вариант, при котором для пограничных ячеек записывалось отдельное условие

баланса частиц, в котором изначально отсутствовал локальный поток через границу полости.

В качестве начального условия использовалось однородное распределение частиц, наблюдаемое в реальных условиях сразу после заполнения полости. Равновесное неоднородное распределение частиц в полости устанавливалось через некоторое время в диапазоне от 5 до 50 безразмерных единиц в зависимости от значений параметра магнитодипольных взаимодействий и положения магнита в полости.

Для вычисления силы, действующей на магнит со стороны магнитной жидкости (исключая силу Архимеда), в качестве поверхности интегрирования в (3) выбирались горизонтальные границы полости. Как следует из (2) и (3), элементарное приращение вертикальной компоненты этой силы, соответствующее шагу Δx по горизонтальной координате, равно

$$\Delta F_m = - \left\{ 12\lambda \left[\varphi_2^2 L^2 (\xi_{e2}) \left(\frac{H_z}{H} \right)_2^2 - \varphi_1^2 L^2 (\xi_{e1}) \left(\frac{H_z}{H} \right)_1^2 \right] + p_{m2} - p_{m1} \right\} \Delta x,$$

где нижний индекс 1 соответствует нижней границе полости, а 2 – верхней. Сила тяжести, приходящаяся на единицу длины вытянутого вдоль оси u магнита, в безразмерной форме имеет вид

$$F_g = \frac{\pi g \rho_s V_s d^3}{6c_1^2 kT} = \beta G_\gamma \left(\frac{\rho_s V_s}{\Delta \rho c_1^2} \right) \left(1 - \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_s} \right),$$

где ρ_s и V_s – плотность и объём постоянного магнита, приходящийся на единицу длины вдоль оси u , соответственно, $\Delta \rho = \rho_1 - \rho_0$, $\rho_0 = 0.8 \text{ г/см}^3$ – плотность несущей жидкости, $\rho_1 = 5.2 \text{ г/см}^3$ – плотность твердого ядра коллоидной частицы (магнетита). Средняя по объёму плотность жидкости $\langle \rho \rangle$ определяется через среднюю объёмную долю частиц с учетом защитных оболочек:

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 + \langle \varphi \rangle \frac{\Delta \rho}{\beta},$$

где β – отношение объёмной доли частиц к объёмной доле твердой фазы. Для большинства магнитных жидкостей, стабилизированных олеиновой кислотой, параметр β принимает значения в диапазоне от 2.5 до 3 в зависимости от среднего диаметра частиц. Соотношение сторон полости принималось равным 1:3, а размеры магнита вдоль осей x и z полагались в три раза меньше размеров полости. Предполагалось также, что постоянный магнит выполнен из сплава «неодим-железо-бор» ($NdFeB$) с табличной плотностью $\rho_s = 7.4 \text{ г/см}^3$. В качестве единицы измерения давления принята величина $6kT/\pi d^3$, сопоставимая с максимально возмож-

ным осмотическим давлением коллоидных частиц при отсутствии магнитного поля.

Основными безразмерными параметрами, определяющими интенсивность магнитофореза и структуру концентрационных полей в полости, выступали средняя по объёму концентрация $\langle \varphi \rangle$, параметр Ланжевена ξ_0 , определенный через магнитное поле на торцах магнита, обратная высота барометрического распределения G_γ и параметр магнитодипольных взаимодействий λ . Большинство представленных ниже результатов получено для средней по объёму концентрации частиц $\langle \varphi \rangle = 0.1$, безразмерного магнитного поля на торцах магнита $\xi_0 = 13$, типичных для реальных систем, и обратной высоты барометрического распределения (характеризующей безразмерное гравитационное поле) $G_\gamma = 0.1$. Для более наглядной демонстрации эффектов, связанных с магнитодипольными межчастичными взаимодействиями, параметр λ изменялся в диапазоне от 0 до 2.5, хотя для коммерческих магнитных жидкостей этот параметр обычно не превышает единицы. Отметим, что увеличение параметра λ в два-три раза вполне достижимо в реальных жидкостях [6, 25], а применительно к частицам из магнетита соответствует относительно небольшому увеличению среднего диаметра частиц на 20–30%. Процесс по времени продолжался до тех пор, пока система не достигает стационарного состояния. Динамика процесса подробно не исследовалась, так как рассматриваемая здесь система имеет несколько характерных размеров (ширина и высота полости, размеры зазоров между магнитом и стенками полости), каждому из которых соответствует свое диффузионное время. Кроме того, свое характерное время задает скорость магнитофореза и седиментации. Анализ динамики в таких условиях становится чрезвычайно громоздкой проблемой и выходит за рамки данной работы.

Результаты наших расчетов приведены на рис. 2–4. Решалась система уравнений (2)–(5), (7)–(9). На рис. 2 приведены изолинии равной концентрации при центральном положении магнита в полости. Рисунок демонстрирует роль магнитофореза в пространственном перераспределении частиц. Видно, что эффект очень сильный: концентрация коллоидных частиц вблизи полюсов магнита примерно в три раза превышает концентрацию на периферии. Ясно, что такими сильными эффектами пренебрегать нельзя.

На рис. 3 приведены изолинии размагничивающего поля, созданного магнитной жидкостью в поперечном сечении цилиндра. Размагничивающее поле приведено в безразмерном виде – как значение параметра Ланжевена, определенного через модуль напряжённости. При выбранных параметрах системы ($\lambda = 2$, $\langle \varphi \rangle = 0.1$, $G_\gamma = 0.1$) оно имеет

такие же по порядку величины значения, как и поле постоянного магнита. Структура размагничивающего поля также напоминает структуру поля постоянного магнита (рис. 1). Так как эти поля направлены преимущественно навстречу друг другу, суммарное поле может оказаться в несколько раз меньше поля магнита. Это обстоятельство означает многократное уменьшение квазиупругой силы, действующей на магнит. Слой магнитной жидкости с повышенной концентрацией частиц, примыкающий к торцам магнита, эффективно экранирует его поле. Эффект усиливается с ростом параметра магнитодипольных взаимодействий.

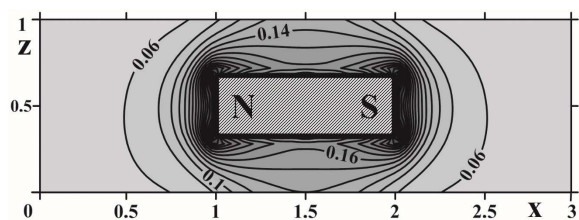


Рис. 2. Изолинии равной концентрации частиц в прямоугольной полости при $\langle \varphi \rangle = 0.1$, $G_\gamma = 0.1$, $\xi_0 = 13$, $\lambda = 2$

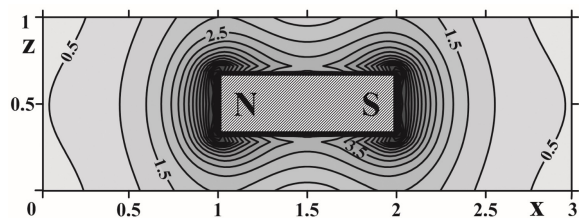


Рис. 3. Изолинии размагничивающего поля в терминах параметра Ланжевена, при $\langle \varphi \rangle = 0.1$, $\xi_0 = 13$, $G_\gamma = 0.1$, $\lambda = 2$

На рис. 4. приведены зависимости безразмерной результирующей силы, действующей на магнит, от координаты его нижней границы при различных значениях параметра магнитодипольных взаимодействий. За положительное направление силы выбрано направление вдоль оси z . Данные кривые, при отсутствии сил тяжести и Архимеда, пересекают ось абсцисс в точке $z = 0.333$, что соответствует центральному положению магнита. Это весьма разумно, так как при таких условиях магнит самоцентрируется. В гравитационном поле эти зависимости смещаются вниз. Положения магнита, при которых зависимости $F = F(z)$ пересекают ось абсцисс, соответствуют положениям механического равновесия.

Отметим особо сильное влияние магнитодипольных взаимодействий на результирующую силу: увеличение параметра магнитодипольных взаимодействий с 0.5 до 2.5 приводит к уменьшению результирующей силы в несколько раз. По мере увеличения параметра магнитодипольных взаимодействий все больше коллоидных частиц скапливается в торцевых зонах магнита, тем самым

ослабляя концентрацию коллоидных частиц в остальном объеме полости. Уменьшение плотности магнитной жидкости под магнитом приводит к тому, то магнит опускается вдоль оси z , а зависимость положения механического равновесия магнита от параметра магнитодипольных взаимодействий становится убывающей (рис. 5). При этом смещение постоянного магнита из центра полости при $G_\gamma = 0.1$ составляет $5.7 \div 15\%$ от высоты полости. Увеличение параметра G_γ до величины $G_\gamma = 0.4$ не изменяет характер кривой, а смещение постоянного магнита составляет $17 \div 31\%$ от размера полости.

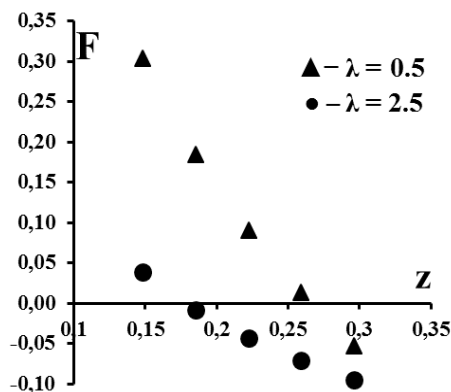


Рис. 4. Результирующая сила, действующая на магнит, в зависимости от координаты его нижней границы

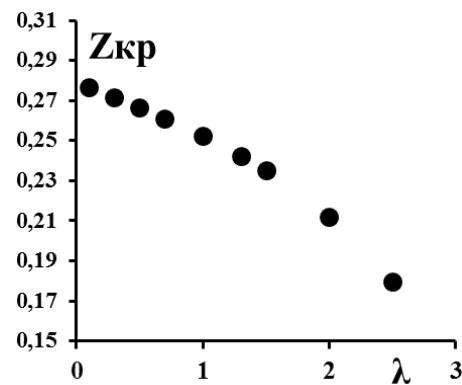


Рис. 5. Положение механического равновесия магнита в зависимости от параметра магнитодипольных взаимодействий. $\langle \varphi \rangle = 0.1$, $G_\gamma = 0.1$, $\xi_0 = 13$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 16-31-00417, № 16-01-00517, № 14-01-96007).

Список литературы

1. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 356 с.
2. Налетова В. А., Шкель И. А. Сила, действующая на тело со стороны магнитной жидкости в неоднородном магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1987. №. 2. С. 67–70.

3. Налетова В. А., Тимонин Г. А., Шкель И. А. О силе, действующей на тело в неоднородно нагретой намагничивающей жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 1989. Т. 26. С. 76–83.
4. Квитанцев А. С., Налетова В. А., Турков В. А. Левитация магнитов и тел из магнитомягких материалов в сосудах, заполненных магнитной жидкостью // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2002. Т. 3. С. 12–20.
5. Налетова В. А., Пелевина Д. А., Турков В. А. Статика магнитной жидкости, содержащей концентраторы магнитного поля // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2009. № 6. С. 3–10.
6. Pshenichnikov A. F., Lebedev A. V. Low-temperature susceptibility of concentrated magnetic fluids // The Journal of Chemical Physics. 2004. Vol. 121. N. 11. P. 5455–5467.
7. Ivanov A. O., Kantorovich S. S., Reznikov E. N., Holm C., Pshenichnikov A. F., Lebedev A. V., Chremos A., Camp P. J. Magnetic measurements as a key for the particle size distribution in ferrofluids: experiment, theory, and computer simulations // Magnetohydrodynamics. 2007. Vol. 43. N. 4. P. 393–399.
8. Pshenichnikov A. F., Burkova E. N. Effect of demagnetizing fields on particle spatial distribution in magnetic fluids // Magnetohydrodynamics. 2012. Vol. 48. N. 3. P. 503–513.
9. Пшеничников А. Ф. Магнитное поле в окрестности уединенного магнита // Магнитная гидродинамика. 1993. № 1. С. 37–40.
10. Pshenichnikov A. F. Computation of demagnetizing fields and particle distribution in magnetic fluid with inhomogeneous density // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2012. Vol. 324. P. 1342–1347.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.
12. Ivanov A. O., Kuznetsova O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids: an influence of interparticle correlations // Physical Review E. 2001. Vol. 64, 041405.
13. Пшеничников А. Ф., Лебедев А. В. Магнитная восприимчивость концентрированных ферроколлоидов // Коллоидный журнал. 2005. Т. 67. № 2. С. 218–230.
14. Лукашевич М. В., Налетова В. А., Цуриков С. Н. Перераспределение концентрации магнитной жидкости в неоднородном магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1988. № 3. С. 64–69.
15. Бувич Ю. А., Зубарев А. Ю., Иванов А. О. Броуновская диффузия в концентрированных ферроколлоидах // Магнитная гидродинамика. 1989. № 2. С. 39–43.
16. Frishfelds V., Blums E. Microconvection and mass transfer near bodies in non-uniformly magnetized ferrofluid // Magnetohydrodynamics. 2005. Vol. 41. P. 361–366.
17. Bashtovoi V. G., Polevnikov V. K., Suprun A. E., Stroots A. V., Beresnev S. A. Influence of Brownian diffusion on static of magnetic fluid // Magnetohydrodynamics. 2007. Vol. 43, N. 1. P. 17–26.
18. Drikis I., Cebers A. Pattern formation at magnetophoretic motion in the self-magnetic field of magnetic colloid // Magnetohydrodynamics. 2011. Vol. 47. N. 1. P. 3–10.
19. Bacri J.-C., Cebers A., Bourdon A., Demouchy G., Heegaard B. M., Kashevsky B., Perzynski R. Transient grating in a ferrofluid under magnetic field: Effect of magnetic interactions on the diffusion coefficient of translation // Physical Review E. 1995. Vol. 52, 3936.
20. Morozov K. I. Gradient diffusion in concentrated ferrocolloids under the influence of a magnetic field // Physical Review E. 1996. Vol. 53, 3841.
21. Pshenichnikov A. F., Elfimova E. V., Ivanov A. O. Magnetophoresis, sedimentation and diffusion of particles in concentrated magnetic fluids // The Journal of Chemical Physics. 2011. Vol. 134. P. 184508.
22. Иванов А. О. Фазовое расслоение магнитной жидкости: дис. на соиск. учён. степ. д.ф.-м.н. Екатеринбург: УГТУ, 1998. 295 с.
23. Ivanov A. S., Pshenichnikov A. F. Magnetophoresis and diffusion of colloidal particles in a thin layer of magnetic fluids // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2010. Vol. 322, N. 17. P. 2575–2580.
24. Bashtovoi V. G., Polevnikov V. K., Suprun A. E., Stroots A. V., Beresnev S. A. The effect of magnetophoresis and Brownian diffusion on the levitation of bodies in a magnetic fluid // Magnetohydrodynamics. 2008. Vol. 44. N. 2. P. 121–126.
25. Mamiya H., Nakatani I., Furubayashi T. Phase transitions of iron-nitride magnetic fluids // Physical Review Letters. 2000. Vol. 84, 6106.

References

1. Rosensweig R. E. *Ferrohydrodynamics*. Cambridge University Press, 1985.
2. Naletova V. A., Shkel I. A. Force exerted on a body by a magnetic liquid in a nonuniform magnetic field. *Magnetohydrodynamics*, 1987, vol. 23, no. 2. pp. 173–175.
3. Naletova V. A., Timonin G. A., Shkel I. A. Force acting on a body in a nonuniformly heated magnetizable fluid. *Fluid Dynamics* 1989, vol. 24, no. 2, pp. 225–231.
4. Kvitancev A. S., Naletova V. A., Turkov V. A. Levitation of magnets and paramagnetic bodies in vessels filled with magnetic fluid. *Fluid Dynamics*, 2002, vol. 3, pp. 361–368.

5. Naletova V. A., Pelevina D. A., Turkov V. A. Statics of a magnetic fluid containing magnetic field concentrators, *Fluid Dynamics*, 2009, vol. 44, no 6, pp. 797–803.
6. Pshenichnikov A. F., Lebedev A. V. Low-temperature susceptibility of concentrated magnetic fluids. *The Journal of Chemical Physics*, 2004, vol. 121, no. 11, pp. 5455–5467.
7. Ivanov A. O., Kantorovich S. S., Reznikov E. N., Holm C., Pshenichnikov A. F., Lebedev A. V., Chremos A., Camp P. J. Magnetic measurements as a key for the particle size distribution in ferrofluids: experiment, theory, and computer simulations. *Magneto hydrodynamics*, 2007, vol. 43, no. 4, pp. 393–399.
8. Pshenichnikov A. F., Burkova E. N. Effect of demagnetizing fields on particle spatial distribution in magnetic fluids. *Magneto hydrodynamics*, 2012, vol. 48, no. 3, pp. 503–513.
9. Naletova V. A., Pelevina D. A., Turkov V. A. Static of a magnetic fluid containing magnetic field concentrators. *Fluid Dynamics*, 2009, vol. 44, no. 6, pp. 797–803.
10. Pshenichnikov A. F. Computation of demagnetizing fields and particle distribution in magnetic fluid with inhomogeneous density. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2012, vol. 324, pp. 1342–1347.
11. Corn G. A., Corn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill Book Co. New York, 1968.
12. Ivanov A. O., Kuznetsova O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids: an influence of interparticle correlations. *Physical Review E*, 2001, vol. 64, 041405.
13. Pshenichnikov A. F., Lebedev A. V. Magnetic susceptibility of concentrated ferrocolloids. *Colloid Journal*, 2005, vol. 6, no 2, pp. 189–200.
14. Lukashevich M. V., Naletova V. A., Tsurikov S. N. Redistribution of the concentration of a magnetic fluid in a nonuniform magnetic field. *Magneto hydrodynamics*, 1988, vol. 24, no 3, pp. 318–323.
15. Buevich Yu. A., Zubarev A. Yu., Ivanov A. O. Brownian diffusion in concentrated ferrocolloids. *Magneto hydrodynamics*, 1989, vol. 25, no 2, pp. 172–176.
16. Frishfelds V., Blums E. Microconvection and mass transfer near bodies in non-uniformly magnetized ferrofluid. *Magneto hydrodynamics*, 2005, vol. 41, pp. 361–366.
17. Bashtovoi V. G., Polevikov V. K., Suprun A. E., Stroots A. V., Beresnev S. A. Influence of Brownian diffusion on static of magnetic fluid. *Magneto hydrodynamics*, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 17–26.
18. Drikis I., Cebers A. Pattern formation at magnetophoretic motion in the self-magnetic field of magnetic colloid. *Magneto hydrodynamics*, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 3–10.
19. Bacri J.-C., Cebers A., Bourdon A., Demouchy G., Heegaard B. M., Kashevsky B., Perzynski R. Transient grating in a ferrofluid under magnetic field: Effect of magnetic interactions on the diffusion coefficient of translation. *Physical Review E*, 1995, vol. 52, 3936.
20. Morozov K. I. Gradient diffusion in concentrated ferrocolloids under the influence of a magnetic field. *Physical Review E*, 1996, 3841.
21. Pshenichnikov A. F., Elfimova E. V., Ivanov A. O. Magnetophoresis, Sedimentation and diffusion of particles in concentrated magnetic fluids. *The Journal of Chemical Physics*, 2011, vol. 134, pp. 184508.
22. Ivanov A. O. *Fazovoe rassloenie magnitnoj zhidkosti* (Phase separation of the magnetic fluid). Doctoral Thesis. Ekaterinburg: Ural Federal University, 1998, 295 p. (In Russian)
23. Ivanov A. S., Pshenichnikov A. F. Magnetophoresis and diffusion of colloidal particles in a thin layer of magnetic fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2010, vol. 322, no 17, pp. 2575–2580.
24. Bashtovoi V. G., Polevikov V. K., Suprun A. E., Stroots A. V., Beresnev S. A. The effect of magnetophoresis and Brownian diffusion on the levitation of bodies in a magnetic fluid. *Magneto hydrodynamics*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 121–126.
25. Mamiya H., Nakatani I., Furubayashi T. Phase transitions of iron-nitride magnetic fluids. *Physical Review Letters*, 2000, vol. 84, 6106.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Пшеничников А. Ф., Буркова Е. Н. О влиянии магнитофореза коллоидных частиц и межчастичных взаимодействий на левитацию постоянного магнита в магнитной жидкости // Вестник Пермского университета. Физика. 2016. № 3 (34). С. 32–41. doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-32-41

Please cite this article in English as:

Pshenichnikov A. F., Burkova E. N. On influence of magnetophoresis and interparticle interactions on floating of permanent magnet in magnetic fluid // Bulletin of Perm University. Physics, 2016, no. 3 (34), pp. 32–41. doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-32-41