

УДК 538.915
PACS 72.15.Eb

Нестационарные одномерные течения электронов в гидродинамическом режиме

Е. И. Ковычева¹, К. Б. Циберкин²

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

¹ ekaterinakovycheva@yandex.ru

² kbtsiberkin@psu.ru

Рассматривается движение электронов в проводнике в постоянном электрическом поле при условиях реализации гидродинамического режима (эффекта Гуржи), когда движение может быть описано уравнением типа Дарси–Бринкмана. Изучены процессы установления стационарного тока в проводнике без учёта и с учётом вязкости электронов после включения продольного электрического поля. Помимо решений с постоянным полем, рассмотрено воздействие на электронную систему монохроматической волны электрического поля. Кроме того, произведена оценка устойчивости малых возмущений стационарного течения методом Галеркина в простейшем приближении, которая показала, что течение устойчиво при параметрах, соответствующих протеканию тока в проводнике.

Ключевые слова: гидродинамика электронов; эффект Гуржи; уравнение Дарси–Бринкмана

Поступила в редакцию 09.08.2023; после рецензии 21.09.2023; принята к опубликованию 09.10.2023

Nonstationary one-dimensional electron flows in a hydrodynamic mode

E. I. Kovycheva¹, K. B. Tsiberkin²

Perm State University, Perm, Russia

¹ ekaterinakovycheva@yandex.ru

² kbtsiberkin@psu.ru

In this paper, we consider the motion of electrons in a constant electric field in a certain temperature range, when the motion can be described by an equation of the Darcy–Brinkman type. We studied the onset of the stationary current flow in a conductor with and without taking into account the viscosity of electrons after switching on a longitudinal electric field. Solutions with an alternating electric field and a solution in the form of a traveling wave are also considered. In addition, we analyzed small perturbations of the stationary flow by the Galerkin method, which confirmed that the flow is stable at parameters corresponding to the flow of current through the conductor.

Keywords: electron hydrodynamics; Darcy–Brinkman equation

Received 09 August 2023; revised 21 September 2023; accepted 09 October 2023

doi: 10.17072/1994-3598-2023-4-22-27

1. Введение

Эффект Гуржи – это явление уменьшения электронного сопротивления R проводника конечных размеров с повышением его температуры, противоречащее типичному поведению материала. Повышение качества кристалла и понижение его тем-

пературы обуславливают переход электронного транспорта в баллистический режим. Но такое приближение перестает работать, если взаимодействие электронов становится достаточно сильным, и электроны начинают эффективно обмениваться импульсами между собой – их движение становится похожим на поток жидкости. При этом длина свободного пробега частиц должна быть такой,

чтобы наиболее вероятными стали столкновения электронов между собой, а не со стенками или фононами, распространяющиеся в кристаллической решётке (рис. 1) [1]. При таких условиях движение электронов эффективно описывается уравнениями гидродинамики типа Дарси–Бринкмана [2–4].

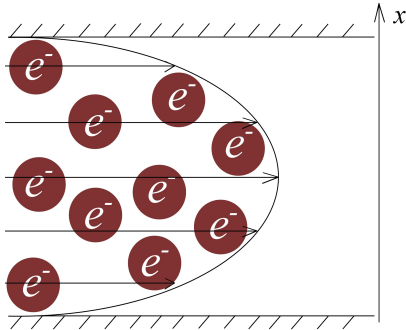


Рис. 1. Схематическое изображение течения Пуазейля при гидродинамическом транспорте электронов

Длительное время после теоретического предсказания проявления эффекта Гуржи не удавалось обнаружить ввиду необходимости создания высококачественного материала с низкой плотностью дефектов. Развитие технологий, в том числе создание двумерных материалов, позволило в последние годы получить прямые экспериментальные свидетельства существования гидродинамического режима протекания тока вплоть до генерации вихрей при особой конфигурации проводника [2, 3, 5, 6].

Остаётся открытым вопрос об условиях устойчивости описанного течения. В данной работе рассмотрен ряд простейших движений электронов в постоянном электрическом поле в условиях гидродинамического транспорта, и анализируется устойчивость стационарного режима.

2. Уравнение Навье–Стокса

В настоящей работе используется формулировка гидродинамической модели, описанная в [8]. В стандартной форме закон Ома:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

где σ – проводимость, \mathbf{E} – напряженность электрического поля, и \mathbf{J} – объёмная плотность тока, которая может быть переписана в терминах средней скорости дрейфа электронов:

$$\mathbf{J} = Ne\mathbf{v}, \quad (2.2)$$

где N – концентрация, e – заряд, \mathbf{v} – скорость.

В нестационарном гидродинамическом режиме закон Ома дополняется релаксационным членом теории Друде, а также вязкими силами. С учетом силы Лоренца уравнение движения электронов принимает следующий вид:

$$Nm \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{F} + \nabla p = Ne(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - N \frac{m}{\tau} \mathbf{v}, \quad (2.3)$$

где N – объёмная концентрация электронов. Это модифицированное уравнение Навье–Стокса [4, 7]. Последнее слагаемое в правой части – слагаемое Дарси – взаимодействие электронов с решеткой с характерным временем релаксации τ . Второе слагаемое в левой части описывает силу трения. Третье слагаемое слева – аналог гидродинамического давления, первое слагаемое справа – закон Ома.

Полное ускорение в общем случае расписывается как стандартная конвективная производная, хотя ожидается, что нелинейный вклад пренебрежимо мал:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.4)$$

Сила трения расписывается следующим образом:

$$\mathbf{F} = -\mu \left(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \mathbf{v}) \right), \quad (2.5)$$

где μ – коэффициент сдвиговой вязкости. Слагаемым $\nabla (\nabla \mathbf{v}) / 3$ можно пренебречь в пределе несжимаемого течения жидкости. Таким образом, \mathbf{F} включает только слагаемое Навье (Бринкмана).

В результате уравнение для гидродинамического режима электронов принимает следующий вид:

$$Nm \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = Ne(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - N \frac{m}{\tau} \mathbf{v}. \quad (2.6)$$

Уравнение дополняется условием несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.7)$$

В пренебрежении нелинейным слагаемым с учётом, что массовая плотность электронов $\rho = Nm$ равна, окончательно запишем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{Ne}{\rho} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{Nm}{\rho \tau} \mathbf{v}, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Простейший вид граничных условий для электронов в вязком режиме эквивалентен условиям прилипания жидкости [1, 8]. Нормальная и тангенциальная компоненты скорости стремятся к нулю на твердых границах:

$$v_n = 0, \quad v_{tg} = 0. \quad (2.9)$$

Соответственно, нормальная и тангенциальная компоненты плотности тока также стремятся к нулю на границах:

$$J_n = 0, \quad J_{tg} = 0.$$

Далее анализируются простейшие одномерные решения сформулированной задачи.

3. Постоянное электрическое поле

3.1. Релаксация без учета вязкости

Если давление и плотность среды слабо меняются вблизи некоторых средних значений, их можно представить в виде сумм соответствующих средних и малых отклонений:

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}',$$

где $p' \ll p_0$ и $\rho' \ll \rho_0$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \approx \frac{1}{\rho_0}.$$

Система (2.8) с учетом описанных разложений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \mathbf{v}' + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{v}'}{\tau}, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0.$$

Чтобы убедиться, что гидродинамическая модель корректно описывает предельный случай протекания тока в соответствии с законом Ома, пренебрежем вязкостью. Тогда второе слагаемое слева исчезнет, а из граничных условий (2.9) необходимо оставить только условия непротекания. Для простоты рассмотрим случай без магнитного поля ($B = 0$). Электрическое поле представляется в виде потенциала $\psi = \psi(x, t)$, $\mathbf{E} = -\nabla \psi$. Давление также входит в уравнение под знаком градиента что позволяет переопределить электрический потенциал, включив в него вклад давления. Полагая, что релаксация давления, обусловленная распространением возмущений электрического поля в решётке, происходит много быстрее времени τ , получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{e}{m} \nabla \psi - \frac{v}{\tau} = 0.$$

Принимая $E = \text{const}$, получаем линейное однородное уравнение для скорости потока:

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} - \frac{e}{m} E + \frac{v(t)}{\tau} = 0. \quad (3.2)$$

При начальном условии $v(0) = 0$, решение:

$$v(t) = \frac{Ee\tau}{m} + \frac{e^{-t/\tau} Ee\tau}{m}. \quad (3.3)$$

Получаем зависимость скорости от времени после включения поля. В этом решении не учитывается вязкость, поэтому профиль Пуазейля здесь не реализуется. Решение показывает релаксацию тока при изменении электрического поля.

В результате расчетов были получены графики для скорости электронного потока. В случае без учета вязкости получен график зависимости потенциала скорости от времени (рис. 2).

Реализуется ожидаемое экспоненциальное установление стационарного протекания тока с характерным временем релаксации τ .

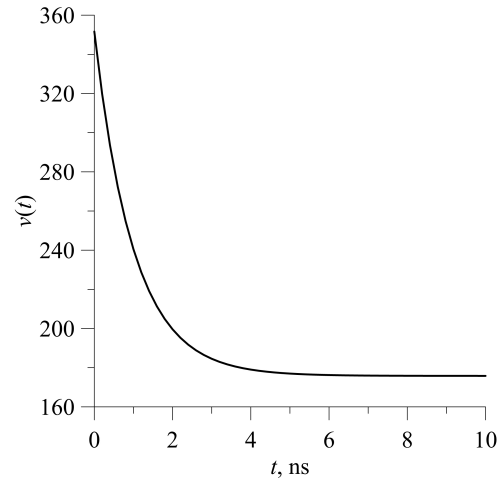


Рис. 2. Зависимость скорости от времени

3.2. Влияние вязкости

Теперь учтём вклад вязкого слагаемого. По-прежнему будет рассматриваться случай без магнитного поля при $E = \text{const}$. Тогда система (2.8) в терминах отклонений полей скорости и давления от средних приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \mathbf{v}' = \frac{e}{m} E - \frac{1}{\tau} \mathbf{v}', \quad (3.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0,$$

с полными граничными условиями (2.9).

Пусть существует только продольная компонента скорости $v = v(x, t)$, где ось x перпендикулярна направлению тока. Тогда уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически, и задача сводится к параболическому уравнению с неоднородностью:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - \frac{eE}{m} + \frac{1}{\tau} v(x, t) = 0. \quad (3.5)$$

Решение задачи (3.5) будем искать с помощью разделения переменных стандартным способом $v(x, t) = X(x)T(t)$, рассматривая отдельно однородную и неоднородную части решения [9]. Исключая слагаемое с E и используя решение задачи Штурма–Лиувилля для $X(x)$ и $T(t)$ с учётом граничных условий (2.9), получим:

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n x}{h}, \quad T_n(t) = C_n \exp(-a_n t),$$

$$a_n = \frac{1}{\tau_0} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2.$$

Таким образом, общее решение однородной задачи имеет вид:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a_n t} \sin \frac{\pi n x}{h}. \quad (3.6)$$

Неоднородная часть решения определяется с помощью функции Грина $G(x, \zeta, t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, t) &= \int_0^t d\tau \int_0^h d\xi F(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau), \\ G(x, \xi, t - \tau) &= \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t - \tau) X_n(x) X_n(\xi) = \\ &= \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n(t-\tau)} \sin \frac{\pi n x}{h} \sin \frac{\pi n \xi}{h}. \end{aligned}$$

Явное вычисление интегралов дает:

$$\tilde{v}(x, t) = \frac{2eE}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} (1 - (-1)^n) \frac{1 - e^{-a_n t}}{a_n} \sin \frac{\pi n x}{h}.$$

Общее решение неоднородной задачи:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a_n t} \sin \frac{\pi n x}{h} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2eE}{\pi n m} (1 - (-1)^n) \frac{1 - e^{-a_n t}}{a_n} \sin \frac{\pi n x}{h}. \end{aligned}$$

Применим к решению начальное условие $t = 0$: $\tilde{v} = 0$. Тогда второе слагаемое занулится, а экспонента в первом слагаемом обращается в единицу:

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{h} = v_0(x).$$

Коэффициенты A_n находятся как члены разложения в ряд Фурье:

$$A_n = \frac{2}{h} \int_0^h v_0(x) \sin \frac{\pi n x}{h} dx.$$

В простейшем частном случае $v(x, 0) = v_0 = const$, коэффициенты A_n равны

$$A_n = -\frac{2}{h} v_0 \cos \pi n.$$

Самый значимый вклад вязкость потока дает в слагаемые с $n=1$.

В случае с вязкостью были построены графики зависимости старшей гармоники скорости от поперечной координаты x . На рис. 3 изображены 7 кривых, соответствующих различным моментам времени t (рис. 3). Здесь виден параболический профиль скорости электронов, который, как и предыдущее решение, релаксирует к стационарному течению.

Время релаксации для слагаемых с разными n в решении оказывается различным. Члены с $n = 1$ затухают наиболее медленно и поэтому являются определяющими в установлении стационарного режима течения. Соответствующее им время релаксации равно

$$\tau_1 \sim a_1^{-1} = \left[\frac{1}{\tau_0} + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\pi n}{h} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (3.7)$$

Видно, что вязкость только ускоряет время релаксации системы к стационарному течению, способствуя подавлению возмущений.

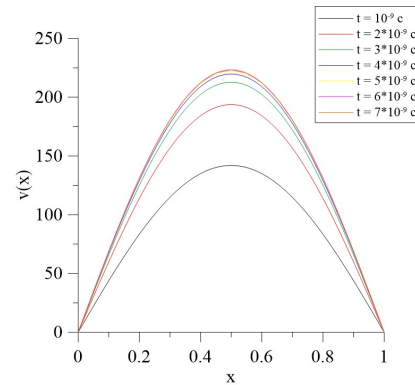


Рис. 3. Профиль скорости при различных фиксированных значениях времени t

4. Переменное электрическое поле

Ранее были рассмотрены решения уравнения типа Дарси–Бринкмана для электронов в постоянном электрическом поле. Теперь же рассмотрим ситуацию, когда электрическое поле зависит от времени. Примем, что $E = E_0 e^{i\omega t}$. Тогда неоднородная часть общего решения будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, t) &= \frac{2eE}{\pi n m a_n} (1 - (-1)^n) \sin \left(\frac{\pi n x}{h} \right) e^{-a_n t} \times \\ &\times E_0 \left(e^{i\omega t} - \frac{1}{(a_n + i\omega)} i\omega e^{t(a_n + i\omega)} \right), \end{aligned}$$

а однородная часть решения совпадает с (3.6). В результате воздействия переменного поля скорость пока электронов осциллирует с некоторой амплитудой, зависящей от частоты ω . На рис. 4 представлен график зависимости модуля скорости от частоты, построенный для следующих размерных величин: ширина проводника 1 см, вязкость $1 \text{ м}^2/\text{с}$, амплитуда напряжённости поля 1 В/м, время релаксации $\tau = 1 \text{ нс}$ [3, 5].

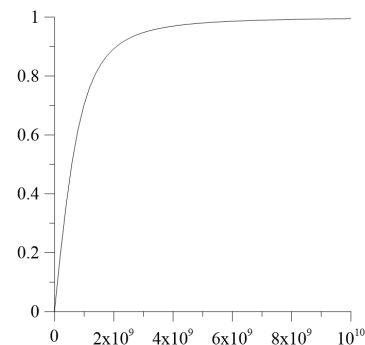


Рис. 4. Зависимость относительной амплитуды скорости от частоты переменного поля

На графике видно, что при достижении определенной частоты порядка в $9 \cdot 10^9$ Гц амплитуда скорости достигает некоторого максимального значения и перестаёт существенно изменяться.

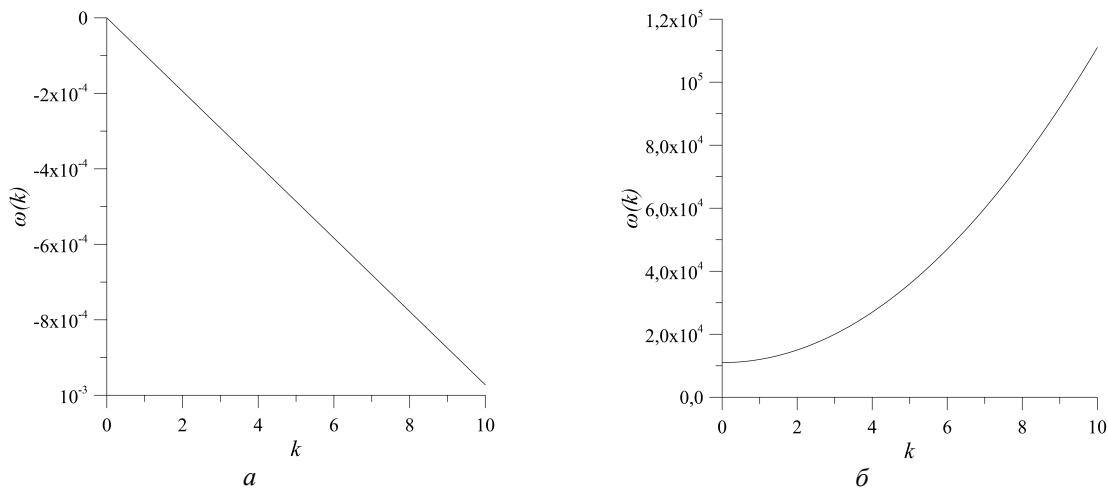


Рис. 5. Дисперсионное соотношение возмущений: а – действительная; б – мнимая часть

5. Малые возмущения стационарного потока

На данном этапе, чтобы сопоставить характерные режимы течения с известными результатами об устойчивости течения Пуазейля и Дарси–Пуазейля, было произведено обезразмеривание уравнений. Выбраны следующие масштабы: $[x]=h$ (ширина проводника), $[t]=h/V$ (характерное гидродинамическое время), масштаб скорости $[V]=(eEh/m)^{1/2}$ подобран так, чтобы исключить амплитуду электрического поля E . В ходе обезразмеривания в системе осталось два параметра: безразмерное время релаксации τ_0 и число Рейнольдса $\text{Re} = Vh\rho/\mu$.

Стационарное плоскопараллельное решение задачи (2.8) без этих факторов известно:

$$U(x) = \frac{\tau_0}{\text{sh } \lambda} (\text{sh } \lambda(x-1) - \text{sh } \lambda x + \text{sh } \lambda), \quad (5.1)$$

$$\lambda = (\text{Re}/\tau_0)^{1/2}.$$

Удобно представить электрическое поле в виде градиента скалярного потенциала, который будет играть роль давления в системе. Введём нормальные возмущения скорости и электрического поля:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(x)e^{i(\omega t - ky)}, \quad E = -\nabla \varphi(x)e^{i(\omega t - ky)}.$$

Система уравнений для амплитуд малых возмущений принимает следующий вид:

$$i\omega v_{0x} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial x^2} - k^2 u_0 \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{u_{0x}}{\tau} - \text{B} v_{0x} + U i k v_{0x} = 0,$$

$$i\omega v_{0y} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_{0y}}{\partial y^2} - k^2 u_0 \right) - \frac{u_{0y}}{\tau} + i k \varphi + \text{B} v_{0y} + U i k v_{0y} + v_{0x} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (5.2)$$

$$-i k v_{0y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Для анализа устойчивости необходимо получить дисперсионное соотношение $\omega(k)$. Для этого было использовано простейшее приближение метода Галеркина с базисными функциями, отвечающими нулевым граничным условиям для компонент скорости и электрического потенциала:

$$v_{0x}(x), v_{0y}(x), \varphi(x) \sim x(x-1).$$

После произведенных вычислений получаем дисперсионное соотношение вида:

$$\omega(k) = Ak + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{10 + k^2}{\text{Re}} \right) i. \quad (5.3)$$

Здесь A – некоторый множитель, пропорциональный величине стационарной скорости. Он не приводится в силу громоздкости. Кроме того, в рамках использованного приближения оказалось, что магнитное поле B не оказывает влияния на течение электронов в канале при данных условиях.

На рис. 5 изображены графики для действительной и мнимой частей дисперсионного соотношения. Видно, что мнимая часть частоты всегда положительна, что определяет быстрое затухание возмущений стационарного течения. Для информативности графиков заданы следующие величины управляющих параметров системы: $\tau_0 = 10^{-3}$, $\text{Re} = 10^{-3}$. Важно, что при подстановке реалистичных значений параметров проводника характерная зависимость числа Рейнольдса от напряжённости поля составляет $\text{Re} \sim 10^{-14} \sqrt{E}$. Таким образом, даже при величинах поля, близких к пробойным, число Рейнольдса заведомо не превышает критического и остаётся далеко под порогом устойчивости течения.

6. Заключение

Рассмотрены процессы установления стационарного тока в плоском проводнике без учёта и с учётом вязкости электронов после включения продольного электрического поля. В обоих случаях наблюдается релаксация потока электронов, соот-

ветствующая теории Друде. Однако наличие вязкости электронного потока обуславливает ускорение процесса релаксации, время которой дополняется диффузионным вкладом и возрастает пропорционально ему. Наибольший вклад в ускорение процесса релаксации вносят слагаемые низшего порядка в разложении решения в ряд Фурье. Поведение потока электронов в переменном электрическом поле также соответствует теории Друде. По мере роста частоты воздействия значение скорости электронов достигает некоторого предельного значения и перестаёт зависеть от частоты при периоде поля, меньшем времени релаксации.

Простейший анализ поведения малых возмущений в системе показывает её высокую устойчивость. Малые характерные числа Рейнольдса обуславливают преобладание ламинарного режима течения в широкой области параметров вплоть до предпробойных значений напряжённости поля.

Список литературы

1. Gurzhi R. N. Minimum of resistance in impurity-free conductors // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1963. Vol. 17. P. 521–522.
2. Shavit M., Shytov A., Falkovich G. Freely flowing currents and electric field expulsion in viscous electronics // *Physical Review Letters*. 2019. Vol. 123. N. 2, 026801.
3. Polini M., Geim A. K. Viscous electron fluids // *Physics Today*. 2020. Vol. 73. N. 6. P. 28–34.
4. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Cham: Springer, 2017. 988 p.
5. Berdyugin A. I. et al. Measuring Hall viscosity of graphene's electron fluid // *Science*. 2019. V. 364. N. 6436. P. 162–165.
6. Narozhny B. N. Hydrodynamic approach to two-dimensional electron systems // *La Rivista del Nuovo Cimento*. 2022. V. 45. N. 10. P. 661–736.

7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001.
8. Jaggi R. Electron-fluid model for DC size effect // *Journal of Applied Physics*. 1991. 69, 816.
9. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

References

1. Gurzhi R. N. Minimum of resistance in impurity-free conductors. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1963, vol. 17, pp. 521–522.
2. Shavit M., Shytov A., Falkovich G. Freely flowing currents and electric field expulsion in viscous electronics. *Physical Review Letters*, 2019, vol. 123., no. 2, 026801.
3. Polini M., Geim A. K. Viscous electron fluids. *Physics Today*, 2020, vol. 73, no. 6, pp. 28–34.
4. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Cham: Springer, 2017. 988 p.
5. Berdyugin A. I. et al. Measuring Hall viscosity of graphene's electron fluid. *Science*, 2019, vol. 364, no. 6436, pp. 162–165.
6. Narozhny B. N. Hydrodynamic approach to two-dimensional electron systems. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 2022, vol. 45, no. 10, pp. 661–736.
7. Jaggi R. Electron-fluid model for DC size effect. *Journal of Applied Physics*. 1991. 69, 816.
8. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of Theoretical Physics*, vol. 6. Fluid Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987. 554 p.
9. Polyenin A. D. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Boca Raton: CRC Press, 2002. 800 p.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Ковычева Е. И., Циберкин К. Б. Нестационарные одномерные течения электронов в гидродинамическом режиме // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2023. № 4. С. 22–27. doi: 10.17072/1994-3598-2023-4-22-27

Please cite this article in English as:

Kovycheva E. I., Tsiberkin K. B. Nonstationary one-dimensional electron flows in a hydrodynamic mode. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2023, no. 4, pp. 22–27. doi: 10.17072/1994-3598-2023-4-22-27

Сведения об авторах

1. Ковычева Екатерина Игоревна, студент, инженер кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068
2. Циберкин Кирилл Борисович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики, доцент, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068

Author information

1. Ekaterina I. Kovycheva, Student, Engineer, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia
2. Kirill B. Tsiberkin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia