

УДК 532.5.032
PACS 47.55.Ca

О вибрационной неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для жидкостей сравнимых вязкостей

Г. Л. Хилько^{1†}, А. О. Иванцов¹, Т. П. Любимова^{1,2}

¹ Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

² Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

†khilko.g@icmm.ru

Рассматривается поведение двумерной системы несмешивающихся несжимаемых вязких жидкостей, помещенных в замкнутый прямоугольный сосуд, при горизонтальных гармонических высокочастотных вибрациях. В этой системе под действием пульсационных движений жидкости возможно развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, приводящей к образованию на поверхности раздела квазистационарного рельефа в виде застывшей волны. В работе проведено прямое численное моделирование формирования рельефа с использованием программного пакета ANSYS Fluent и исследовано влияние соотношения вязкостей на параметры застывшей волны и генерируемые ей вблизи поверхности раздела течения. Построены зависимости характеристик волнового рельефа от надкритичности, частоты вибраций для различных соотношений вязкостей жидкостей. В результате сравнения полученных численных результатов с аналитической теорией для идеальной жидкости получено хорошее согласие для случая вибрационного воздействия высокой частоты. Для более низких частот наблюдаемая длина волны волнового рельефа оказывается заметно больше теоретических значений. Для высоких частот вибраций с ростом надкритичности длина волны растет монотонно, в то время как для низких частот она монотонно уменьшается. Высота рельефа растет по мере увеличения интенсивности вибрационного воздействия, при значительной надкритичности она превышает теоретические значения, полученные в приближении идеальной жидкости. Показан возможный разворот вихрей осредненных течений, генерируемых вибрациями вблизи поверхности раздела, при уменьшении вязкости верхней жидкости. При этом течения в верхней и нижней жидкостях оказываются направлены в противоположные стороны и происходит заметное уменьшение интенсивности генерации средних течений вблизи поверхности раздела.

Ключевые слова: застывшая волна; вибрационная неустойчивость Кельвина Гельмгольца; квазистационарный рельеф

Поступила в редакцию 15.09.2023; после рецензии 23.09.2021; принята к опубликованию 28.09.2023

On oscillatory Kelvin-Helmholtz instability of liquids with comparable viscosities

G. L. Khilko^{1†}, A. O. Ivantsov¹, T. P. Lyubimova^{1,2}

¹ Institute of Continous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

² Perm State University, Perm, Russia

†khilko.g@icmm.ru

We study the behavior of a two-dimensional system of immiscible incompressible viscous liquids in a rectangular cavity under horizontal harmonic high-frequency vibrations. In this system, influence of pulsating motions of the liquids causes the development of Kelvin-Helmholtz instability leading to the formation of a quasi-stationary relief on the interfacial surface in the form of a fro-

zen wave. A direct numerical modeling of the relief formation was carried out with the use of ANSYS Fluent software; the influence of the viscosity ratio on the parameters of the frozen wave and the flow generated by vibrations near the interface was investigated. The dependencies of the characteristics of the wave relief on supercriticality and vibration frequency are plotted for different ratios of liquid viscosities. In the cases of vibrations with sufficiently high frequency, the obtained numerical results are consistent with analytical theory developed for ideal liquids. For lower frequencies, the observed relief wavelength turns out to be noticeably longer than the theoretical predictions. For high vibration frequencies, with increasing supercriticality the wavelength increases monotonically, while for low frequencies it decreases monotonically. The relief height increases as the intensity of vibration influence increases; with significant supercriticality, it exceeds the theoretical values obtained in the ideal fluid approximation. The generation of reverse averaged flow by vibrations near the interface is found when viscosity of the upper fluid is low. In this case, the flows in the upper and lower liquids are directed opposite to each other and a noticeable decrease in the average flow generation intensity is observed.

Keywords: frozen wave; oscillatory Kelvin-Helmholtz instability; quasi-stationary relief

Received 15 September 2023; revised 23 September 2023; accepted 28 September 2023

doi: 10.17072/1994-3598-2023-3-60-68

1. Введение

В двумерной постановке исследуется поведение системы несмешивающихся несжимаемых вязких жидкостей при горизонтальных гармонических высокочастотных вибрациях в прямоугольном сосуде, полностью заполненном жидкостями.

В рассматриваемой системе помимо пульсационных движений жидкости с частотой, совпадающей с частотой вибраций сосуда, возникает ряд осредненных эффектов, среди которых возможное образование волнового рельефа на поверхности раздела в центральной части сосуда. Этот рельеф пространственно периодичен, поэтому в литературе нередко называется «застывшей волной». Другое распространенное название этого явления «квазистационарный рельеф», так как при почти неподвижной в среднем поверхности раздела пульсационные движения жидкости значительны.

Природа этого явления аналогична неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, приводящей к образованию волн на воде при достаточной скорости ветра, поэтому другим распространенным в литературе названием эффекта является «вибрационная неустойчивость Кельвина-Гельмгольца», хотя развитие этой неустойчивости не всегда ведет к появлению «застывшей волны», так что термины не тождественны. Неустойчивость развивается, если перепад амплитуд скорости вибраций потоков жидкостей возле границы раздела превышает некоторое пороговое значение.

Помимо вибрационной неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, в системе возможен параметрический резонанс, также являющийся пороговым эффектом. В настоящей работе исследуется застывшая волна, которую параметрический резонанс разрушает.

Первым известным описанным в научной литературе экспериментом, показывающих возникновение квазистационарного рельефа, является эксперимент Вольфа [1].

В [2] теоретически рассмотрена устойчивость поверхности раздела бесконечно глубоких слоев несмешивающихся идеальных жидкостей, показано сведение задачи к уравнению Матье при достаточно общем виде внешней инерционной силы.

Для слоев жидкостей конечной глубины и горизонтальных вибраций малой амплитуды в [3] была аналитически получена граница устойчивости к возникновению застывшей волны. Вибрации полагались высокочастотными, что позволило пренебречь эффектами вязкой диссипации в жидкостях. Амплитуда вибраций полагалась малой по сравнению с размерами сосуда и характерными пространственными масштабами волновых структур. При этом скорость вибраций (произведение амплитуды на частоту) оказывается конечной. Показано, что для достаточно тонких слоев жидкостей вибрационная неустойчивость Кельвина-Гельмгольца носит длинноволновый характер, т.е. вместо формирования застывшей волны более вероятно разбиение системы жидкостей на вертикальные страты или опрокидывание системы жидкостей набок.

В работе [4] получено уравнение Матье для случая слоев равной конечной глубины. В [5] в аналитические расчеты был добавлен малый демпфирующий член, связанный с вязкостью жидкостей. Показано, что малая вязкость сильнее влияет на параметрический резонанс, чем на моду Кельвина-Гельмгольца.

В [6] выполнены расчеты для жидкостей с малыми вязкостями, аналитически получены характеристики формы рельефа и осредненных течений.

При теоретическом рассмотрении основные аналитические результаты до сих пор были получены либо для идеальных жидкостей, либо в пределе малой вязкости, когда связанный с вязкостью параметр является малой величиной.

Образование застывшей волны после [1] было экспериментально исследовано в ряде работ разных авторов [7–12]. За исключением [9], они ка-

саются систем жидкостей, одна из которых имеет высокую вязкость. Это связано с тем, что вязкие диссипативные эффекты сильнее подавляют коротковолновый параметрический резонанс, чем воздействуют на вибрационную неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. В [9] система состояла из жидкого и газообразного углекислого газа вблизи критической точки; в этих условиях как жидкая, так и газообразная фазы имеют малую вязкость, но застывшая волна формировалась. Предположительно, параметрический резонанс в [9] был подавлен диссипативными эффектами, связанными с переходом вещества между газовой и жидкой фазами, особенно активным из-за близости критической точки. В работах [10–12] показано, что помимо подавления параметрического резонанса вязкость воздействует на неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, причем для жидкостей с сильно различающимися вязкостями порог возбуждения в экспериментах несколько ниже теоретического предсказания.

В [13] численно с использованием спектрального метода получена нейтральная кривая для системы вязких жидкостей, описывающая как подавление параметрического резонанса, так и изменение моды Кельвина-Гельмгольца. В [14] с помощью численно-аналитического метода уточнено, при каких условиях неустойчивость Кельвина-Гельмгольца имеет длинноволновый характер.

Прямое численное моделирование многофазных систем несмешивающихся жидкостей сложно вследствие трудностей, связанных с описанием динамики поверхности раздела фаз. Одним из вариантов решения этого является метод сквозного счета [15]. Основной идеей данного метода является введение специальной маркерной функции, которая определяет положение границы раздела. В современных программных пакетах часто реализованы усовершенствованные методы, как Volume of Fluid и Level-set [16]. Численное моделирование возникновения волнового рельефа в системе жидкостей с сильно различающимися коэффициентами вязкостей, описано в [17].

В настоящей работе проводится прямое численное моделирование при помощи программного пакета ANSYS Fluent для системы жидкостей с достаточно высокими, но сравнимыми между собой вязкостями, тогда как в экспериментальных работах [7–8, 10–12] контраст вязкостей всегда был значительным. Исследуется, настолько хорошо аналитические зависимости характеристик застывшей волны, указанные в [3, 6], применимы в исследуемой области параметров.

2. Теория Любимова-Черепанова

Для идеальной жидкости в [3] рассмотрена задача линейной устойчивости двух бесконечно протяженных слоев жидкостей равной толщины к

нормальным возмущениям. Получена следующая нейтральная кривая:

$$B_{cr}(k) = \frac{(1 + L_{cap}^2 k^2)(\rho_2 + \rho_1)^4}{2L_{cap} k \rho_1 \rho_2 (\rho_2 - \rho_1)^2} th(kh), \quad (1)$$

где вибрационный параметр

$$B = \frac{A^2 \omega^2 (\rho_2 + \rho_1)}{gL_{cap} (\rho_2 - \rho_1)}, \quad (2)$$

A – амплитуда вибраций, g – ускорение свободного падения, ω – циклическая частота вибраций, ρ – плотность; здесь и далее индексы 1 и 2 обозначают верхнюю и нижнюю жидкости, соответственно; h – высота слоя одной жидкости, k – волновое число рассматриваемых нормальных возмущений, а

$$L_{cap} = \sqrt{\frac{\gamma}{g(\rho_2 - \rho_1)}} \quad (3)$$

капиллярно-гравитационный пространственный масштаб, γ – коэффициент поверхностного натяжения.

Нас интересует случай достаточно толстых слоев жидкостей $h \gg L_{cap}$. При этом согласно [3] минимум нейтральной кривой $B_{cr}(k)$ должен достигаться при $k \approx 1/L_{cap}$, а L_{cap} становится естественным пространственным масштабом задачи.

В теории [3] используется предположение $A \ll L_{cap}$, что позволяет разделять осредненные и пульсационные члены уравнений. Кроме этого, в [3] предполагается, что для любой из жидкостей вязкость является малой

$$\nu \ll \omega L_{cap}^2, \quad (4)$$

в этом случае можно исключить вязкие члены для пульсационных полей.

Для корректности модели несжимаемой жидкости необходимо также выполнение физических условий

$$c \gg A\omega, \quad (5)$$

$$\lambda_s \gg L_{cap}, \quad (6)$$

где c – скорость звука, а λ_s – длина волны для звуковых волн с частотой, сравнимой с частотой вибраций сосуда.

В предположении малой надкритичности в [6] было выведено выражение, описывающее форму застывшей волны:

$$\eta(x) = L_{cap} Q(\sqrt{B/B_0 - 1}) \sin\left(\frac{x}{L_{cap}}\right), \quad (7)$$

$$Q(\sqrt{B/B_0 - 1}) = \sqrt{\frac{B/B_0 - 1}{5 - 16 \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\right)^2}}, \quad (8)$$

где $B_0 = B_{cr}(1/L_{cap})$.

В [6] для случая малой надкритичности помимо описания вида застывшей волны был также прове-

ден расчет осредненного течения за пределами пограничного динамического слоя возле поверхности раздела. Это решение учитывало резкое изменение касательных напряжений и касательных скоростей в пограничном слое, описываемое модифицированными граничными условиями для эффектов Доре и Шлихтинга соответственно. Функции тока для осредненных скоростей за пределами пограничных слоев пропорциональны:

$$\Psi_1 \sim \frac{\rho_1 \rho_2}{k \delta} \sqrt{\frac{v_1 v_2}{2}} + \frac{3}{2} v_2 \rho_2 (\rho_1 \sqrt{v_1} - \rho_2 \sqrt{v_2}), \quad (9)$$

$$\Psi_2 \sim \frac{\rho_1 \rho_2}{k \delta} \sqrt{\frac{v_1 v_2}{2}} - \frac{3}{2} v_1 \rho_1 (\rho_1 \sqrt{v_1} - \rho_2 \sqrt{v_2}), \quad (10)$$

где δ – безразмерная толщина пограничного динамического слоя. Отметим, что в уравнениях (9)–(10) все величины безразмерные [6] в отличие от остальной части настоящей статьи.

Из вида уравнений (9)–(10) следует, что при фиксированной сумме кинематических вязкостей, варьируя одну из них, можно при определенном значении добиться обращения в нуль правой части (9), что будет означать остановку находящихся за границами пограничного слоя вихрей в верхней жидкости. При дальнейшем изменении вязкости вихрь средней скорости меняет направление. Аналогично возможны остановка и далее смена направления вихря в нижней жидкости по мере изменения вязкости.

Боковые стенки сосуда из-за вибраций генерируют пульсационные волны, распространяющиеся от стенок к центральной части сосуда и разрушающие квазистационарный рельеф. По этой причине для численных экспериментов требуется подобрать такие жидкости, чтобы вязкость хотя бы одной из них была достаточно велика, чтобы подавить эти бегущие от боковых стенок волны. Необходимость использовать вязкие жидкости приводит к невыполнению или хотя бы к нестрогому выполнению условия (4). Подбор же жидкостей с большим капиллярно-гравитационным размером или установление для вибраций слишком высокой частоты нарушает другие условия применимости модели [3, 6]. Таким образом, некоторое несоответствие экспериментальных результатов теоретическим значениям ожидаемо.

Тем не менее представляет интерес, какие из предсказанных в [3, 6] эффектов могут наблюдаться для вязких жидкостей, в частности, нас интересуют характеристики застывшей волны.

3. Численный эксперимент

3.1. Используемые модели

Численно моделировалось движение несжимаемых несмешивающихся жидкостей равных объемов, полностью заполняющих прямоугольную полость с твердыми стенками.

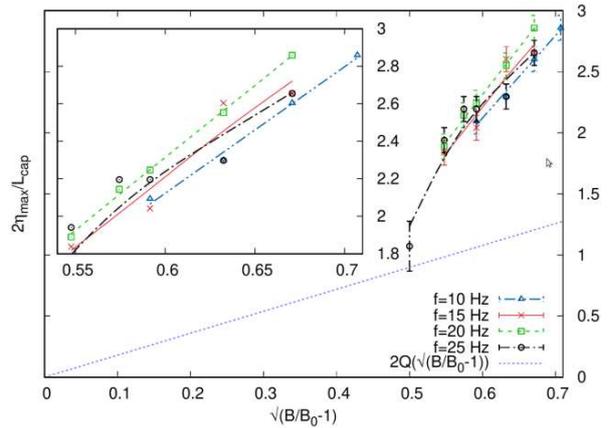


Рис. 1. Зависимость высоты квазистационарного рельефа от надкритичности для различных частот вибраций

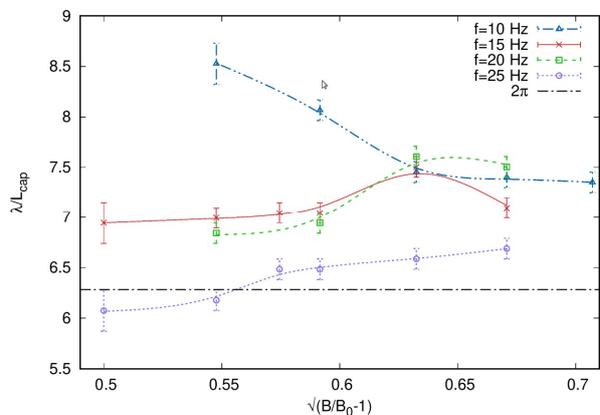


Рис. 2. Зависимость длины волны квазистационарного рельефа от надкритичности для различных частот вибраций

Для определения динамики поверхности раздела в ANSYS Fluent реализована модель Volume of Fluid. Для Volume of Fluid было использовано неявное задание объемной силы и явный шаг по времени. Уравнение для давления и скорости решались совместно (использовалась схема coupled). Пространственное разрешение импульса описывалось моделью MUSCL третьего порядка, динамика маркерной функции – моделью Geo-Reconstruct, и разрешение давления – моделью взвешенных объемных сил.

Пакет использует метод конечных объемов. В расчетах была использована сетка 40×170 с адаптивным разбиением ячеек в области значимого перепада физических полей. По мере счета и перестройки сетки, типичным было наличие более 50000 ячеек при изначальных 6800. Дополнительная дискретизация была сконцентрирована у поверхности раздела.

Начальное положение жидкостей было с плоской поверхностью раздела, и при запуске со временем вибрационные силы приводили эту поверхность к формированию застывшей волны.

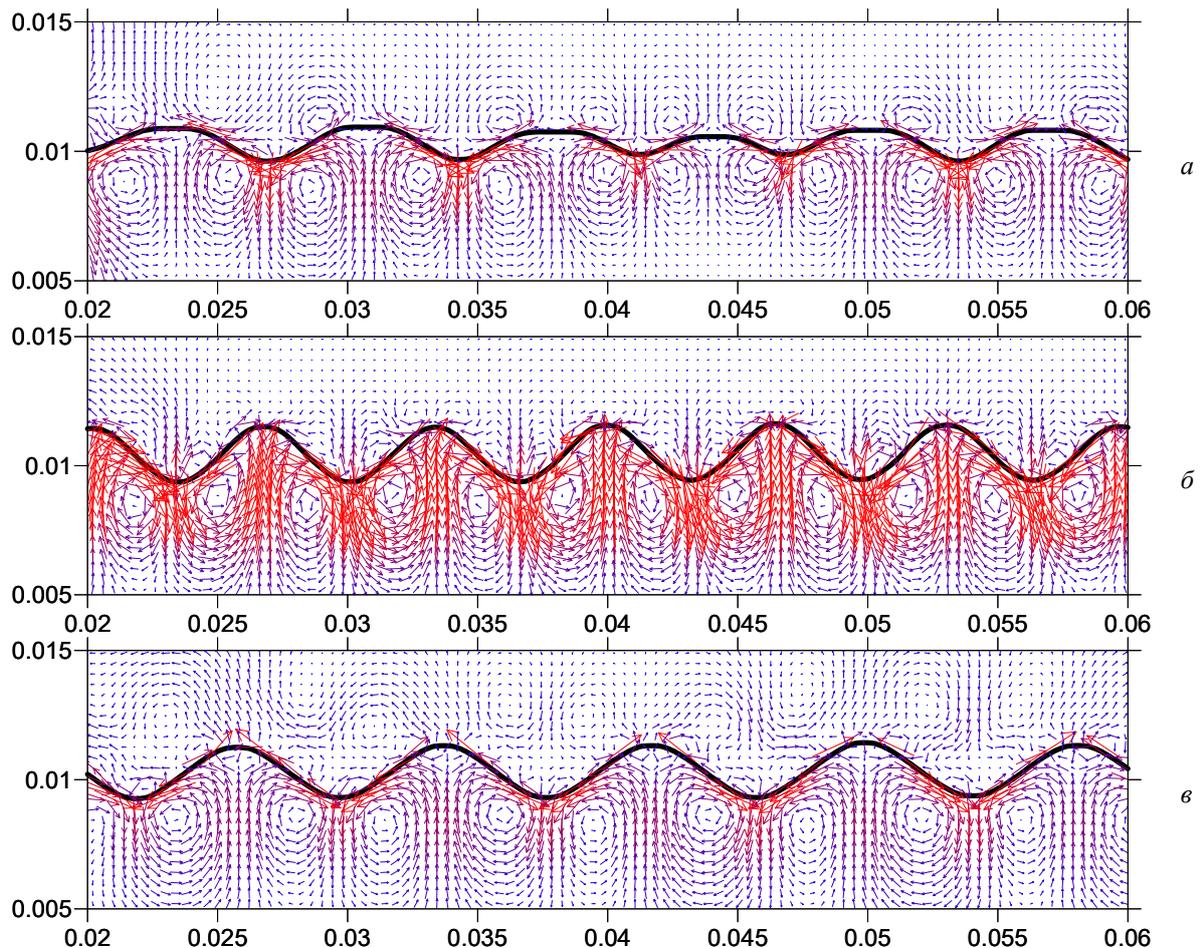


Рис. 3. Средняя форма поверхности раздела и векторное поле средней скорости при частоте вибраций 20 Гц и надкритичности $B/B_0=1.3$ для различных значений отношения кинематических вязкостей верхней жидкости к нижней: а – 1; б – 9; в – 1/9. Максимальная длина стрелок соответствует средней скорости 1 см/с. По осям отмечены координаты (в метрах) в системе, связанной с сосудом, где 0 по горизонтальной оси – левая боковая стенка, а 0 по вертикальной оси – дно сосуда.

3.2. Физические параметры системы

Использовалась полость с размерами 8.5 см х 2.0 см. Параметры жидкостей задавались близкими к параметрам воды: $\rho_1=0.9 \text{ г/см}^3$, $\rho_2=1.0 \text{ г/см}^3$, $\gamma=1.0 \text{ дин/см}$, $g=10^3 \text{ см/с}^2$. Частоты, амплитуды и вязкости варьировались. Таким образом, размерные параметры не соответствуют каким-либо реальным жидкостям, а выбираются так, чтобы обеспечить требуемые значения безразмерных величин, при которых ожидаются нетривиальные эффекты. Капиллярно-гравитационный масштаб, следовательно, был $L_{cap}=0.1 \text{ см}$; толщина динамического пограничного слоя $\nu^{1/2}\omega^{-1/2}$ в разных жидкостях в разные запуски от 0.05 см до 0.7 см. В последнем случае о пограничном слое говорить уже некорректно.

Квазистационарный рельеф был выражен достаточно, чтобы можно было описать его характеристики при надкритичности $B/B_0 \approx 1.3$, и полностью разрушался пульсационными волнами, создаваемыми боковыми стенками при $B/B_0 \approx 1.7$.

Частоты вибраций задавались 10 Гц, 15 Гц, 20 Гц, 25 Гц в разных запусках.

Шаг по времени был постоянным, для разных запусков составляя от 0.0005 с до 0.001 с.

3.3. Эволюция квазистационарного рельефа при росте надкритичности

Порог возникновения вибрационной неустойчивости Кельвина-Гельмгольца непросто определить в ходе прямого численного моделирования, поскольку, что вблизи порога неустойчивость развивается очень медленно. Кроме того, определению порога устойчивости с достаточной точностью мешает ограниченная разрешающая способность сетки.

Вибрационный параметр B , полученный в ходе численного моделирования, сравнивался с пороговым значением для идеальной жидкости B_0 [3]. Для надкритичностей B/B_0 в диапазоне от 1.3 до 1.6 установление квазистационарного рельефа в центральной части сосуда происходит менее чем за 100 периодов вибраций. При этом возле боковых стенок на расстоянии, сравнимом с высотой сосу-

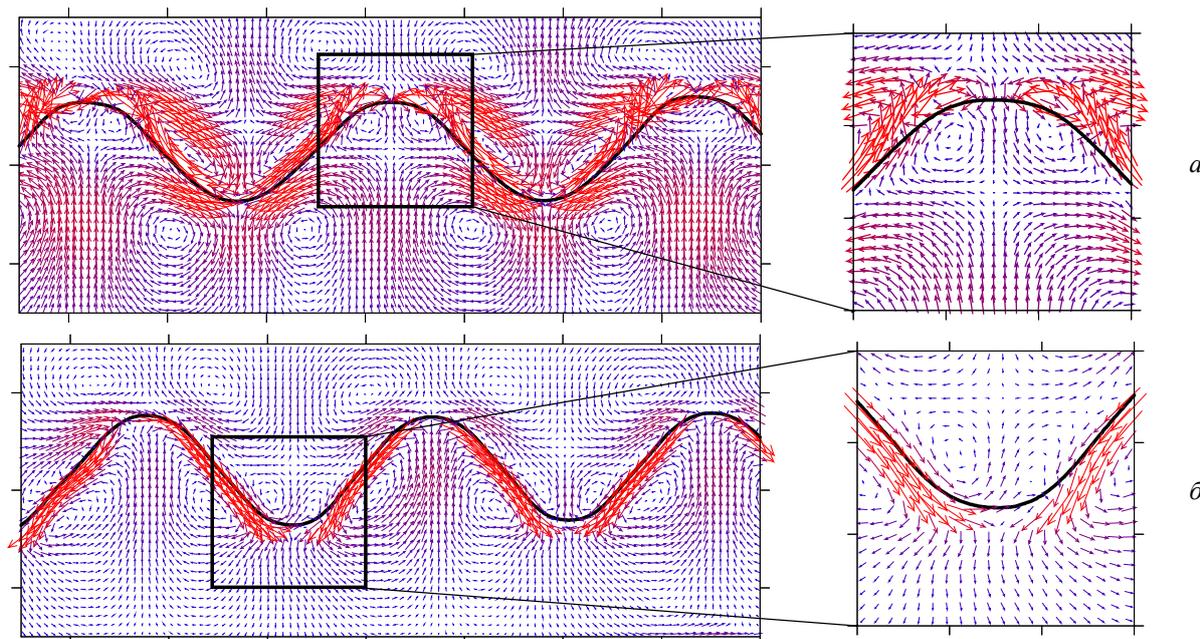


Рис. 4. Средняя форма поверхности раздела и векторное поле средней скорости при частоте вибраций 10 Гц и надкритичности $V/B_0=1.4$ для различных значений отношения кинематических вязкостей верхней жидкости к нижней: а – 1/9; б – 9. Максимальная длина стрелок соответствует средней скорости 1 см/с (а), 2 см/с (б).

да, есть область, где генерируемые стенками пульсационные волны не дают формироваться рельефу.

При проведении расчетов, описанных в настоящем разделе, значения кинематических вязкостей были выбраны равными $\nu_1=0.0267 \text{ см}^2/\text{с}$, $\nu_2=0.02 \text{ см}^2/\text{с}$.

Как показали расчеты, высота рельефа монотонно растет с увеличением надкритичности (рис. 1). Для идеальной жидкости предполагается зависимость по корневому закону (7). Для вязких жидкостей при всех рассмотренных частотах наблюдается аналогичное поведение, но увеличение высоты рельефа происходит в несколько раз быстрее теоретического значения и не начинается из точки $B=B_0$.

Зависимость длины волны рельефа от надкритичности (рис. 2) хорошо соответствует теории для идеальной жидкости [3] при частоте 25 Гц. С ростом надкритичности растет и длина волны, хотя в целом для такой частоты наблюдается хорошее соответствие теоретическому значению $2\pi L_{cap}$. Для частоты 10 Гц длина волны значительно выше теоретической и уменьшается с ростом надкритичности. Для частот 15 Гц и 20 Гц зависимости немонотонны – сначала длина волны растет, потом уменьшается.

3.4. Поведение крупномасштабных вихрей осредненных течений

Помимо исследования изменения характеристик квазистационарного рельефа с ростом надкритичности проводились также расчеты, направленные на описание осредненного течения

и сопоставления его с [6]. При этом во всех расчетах была зафиксирована суммарная кинематическая вязкость $\nu_1+\nu_2=0.0467 \text{ см}^2/\text{с}$, при этом вязкости каждой из жидкостей менялись.

Картины течений качественно схожи с теми, которые были предсказаны в работе [6]. Структура осредненного течения, как и средняя форма поверхности раздела, периодична по горизонтали. В вертикальном сечении имеются крупномасштабные вихри в верхней и нижней жидкостях, а также либо один очень интенсивный вихрь – в пограничном слое в одной из жидкостей, либо два вихря – по одному в каждой из жидкостей в пограничном слое возле поверхности раздела (рис. 3, 4).

Смена направления вихрей за пределами пограничного слоя становится заметной при отношении вязкостей несколько выше значений, предсказанных в (9)–(10). По-видимому, это связано с тем, что теоретические формулы получены для малых надкритичностей, в то время как проведение численного моделирования оказалось возможно только при B/B_0 порядка 1.3. При меньших значениях надкритичности время численного счета и требования к расчетной сетке значительно возрастают. Так, для частоты 20 Гц (рис. 3) ожидалась остановка и затем смена направления вихря в верхней жидкости при $\nu_1=0.0257 \text{ см}^2/\text{с}$, а в нижней при значении $\nu_1=0.0279 \text{ см}^2/\text{с}$. Смена направления в верхней жидкости произошла при больших значениях ν_1 , а в нижней жидкости смены направления вихря с ростом ν_1 не наблюдалось вообще.

Физически, если происходит остановка вихря, то при дальнейшем варьировании вязкости вихрь в

пограничном слое начинает занимать всю толщину слоя жидкости, при этом самая интенсивная его часть все еще находится вблизи поверхности раздела. Или имеет место обратная ситуация: вихрь, занимавший всю толщину жидкости, переходит в пограничный слой, оставляя в основной части жидкости пространство для появления крупного, но малоинтенсивного вихря противоположного направления.

Таким образом, численно подтвержден разворот вихрей осредненных течений, генерируемых вибрациями вблизи поверхности раздела, при уменьшении вязкости верхней жидкости (см. рис. 4, а). Течения в верхней и нижней жидкостях оказываются направлены в противоположные стороны и происходит заметное уменьшение интенсивности генерации средних течений. В результате, при уменьшении вязкости в нижней жидкости, в ней происходит значительное усиление интенсивности средних течений (см. рис. 3, б, 4, б). Однако при уменьшении вязкости верхней жидкости усиления средних течений не наблюдается (см. рис. 3, в, 4, а). Кроме того, интересно, что интенсивность осредненного течения в нижней жидкости существенно не подавляется с повышением ее вязкости нижней жидкости.

4. Заключение

Проведена серия численных экспериментов по формированию квазистационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей сравнимых конечных вязкостей.

Для разных частот вибраций изучено влияние надкритичности на характеристики квазиравновесного рельефа. Найдено, что высота рельефа монотонно растет с надкритичностью. Длина волны рельефа монотонно уменьшается с ростом надкритичности при малых частотах и монотонно растет при высоких частотах. При промежуточных частотах длина волны сначала растет до некоторого максимума, затем убывает.

Показано, что периодическая структура вихрей осредненной скорости может претерпевать изменения при модификации вязкости с возможной остановкой и сменой направления вихрей.

При проведении работ был использован суперкомпьютер «Уран» ИММ УрО РАН. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (бюджетная тема № 121031700169-1).

Список литературы

1. *Wolf G.H.* The dynamic stabilization of Rayleigh-Taylor instability and corresponding dynamic equilibrium // *Z. Physik.* 1969. V. 227. P. 291-300. DOI: 10.1007/BF01397662
2. *Kelly R. E.* The stability of an unsteady Kelvin-Helmholtz flow. Part 3 // *J. Fluid Mech.* 1965. V. 22. P. 547-560. DOI: 10.1017/S0022112065000964
3. *Любимов Д. В., Черепанов А. А.* О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // *Изв. РАН Механика жидкости и газа.* 1986. N. 6. С. 8-13
4. *Любимов Д. В., Хеннер М. В., Шоц М. М.* Об устойчивости поверхности раздела жидкостей при касательных вибрациях // *Изв. РАН Механика жидкости и газа.* 1998. N. 3. С. 25-31
5. *Khenner M. V., Lyubimov D. V., Belozeroва T. S., Roux B.* Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system // *Eur. J. Mech. B/Fluids.* 1999. V. 18. P. 1085-1101. DOI: S0997-7546(99)00143-0
6. *Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. // М.: Физматлит, 2003. 216 с.
7. *Shyh C.K., Munson B.R.* Interfacial stability of an oscillating shear layer // *J. Fluid Eng.* 1986. V. 108. P. 89-92 DOI: 10.1115/1.3242549
8. *Bezdenezhnykh N.A., Briskman V.A., Lapin A.Y., Lyubimov D.V., Tcherepanov A.A., Zakharov I.V.* The influence of high frequency tangential vibrations on the stability of the fluid interface in microgravity // *Int. J. for Microgravity Research and Applications.* 1991. V. IV. N. 2. P. 96-97 DOI: 10.1007/978-3-642-50091-6_14
9. *Wunenburger R., Evesque P., Chabot C., Garra-bos Y., Fauve S., Beysens D.* Frozen wave induced by high frequency horizontal vibrations on a CO₂ liquid-gas interface near the critical point // *Phys. Rev.* 1999. V. E59. P. 5440-5445 DOI: 10.1103/PhysRevE.59.5440
10. *Иванова А.А., Козлов В.Г. Эвекс П.* Динамика границы раздела несмешивающихся жидкостей при горизонтальных вибрациях // *Изв. РАН Механика жидкости и газа.* 2001. N. 3. С. 28-35
11. *Talib E., Jalikop S.V., Juel A.* The influence of viscosity on the frozen wave instability: theory and experiment // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 584. P. 45-68.
12. *Yoshikawa H., Wesfreid J. E.* Oscillatory Kelvin-Helmholtz instability. Part 1. // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 675. P. 234-248. DOI: 10.1017/S0022112017000140
13. *Talib E., Juel A.* Instability of a viscous interface under horizontal oscillation // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19, 092102. DOI: 10.1017/S0022112007006283
14. *Lyubimov D. V., Khilko G. L., Ivantsov A. O., Lyubimova T. P.* Viscosity effect on the longwave instability of a fluid interface subjected to horizon-

- tal vibrations // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 814. P. 24–41. DOI: 10.1017/jfm.2017.28
15. Любимов Д. В., Любимова Т. П. Об одном методе сквозного счета для решения задач с деформируемой поверхностью раздела // *Моделирование в механике.* 1990. Т. 4 (21) N. 1 С. 136–140.
 16. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Иванцов А. О., Черепанова А. А. Использование метода сквозного счета для моделирования динамики систем с поверхностями раздела // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2008. Т. 1, N. 2. С. 53–62.
 17. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Ivantsov A. O., Khilko G. L. Numerical modeling of frozen wave instability in fluids with high viscosity contrast // *Fluid Dynamics Research.* 2016. V. 48. N. 6, 061415.
- ### References
1. Wolf G.H. The dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium. *Z. Physik*, 1969, vol. 227, pp. 291–300. DOI: 10.1007/BF01397662
 2. Kelly R. The stability of an unsteady Kelvin-Helmholtz flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1965, vol. 22(3), pp. 547–560. DOI: 10.1017/S0022112065000964
 3. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A. Development of a steady relief at the interface of fluids in a vibrational field. *Fluid Dyn.*, 1986, no. 21, pp. 849–854. DOI: 10.1007/BF02628017
 4. Lyubimov D.V., Khenner M.V., Shotz M.M. Stability of a fluid interface under tangential vibrations. *Fluid Dyn.*, 1998, vol. 33, pp. 318–323. DOI: 10.1007/BF02698179
 5. Khenner M. V., Lyubimov D. V., Belozeroва T. S., Roux B. Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 1999, vol. 18, no. 6, pp. 1085–1101. DOI: S0997-7546(99)00143-0
 6. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. *Dinamika poverkhnostei razdela v vibratsionnykh poliakh* [Dynamics of Interface Surfaces in Vibration Fields]. M.: FIZMATLIT, 2003. 216 p. (In Russian).
 7. Shyh C. K., Munson B. R. Interfacial instability of an oscillating shear layer. *J. Fluids Eng.*, 1986, vol. 108, pp. 89–92. DOI: 10.1115/1.3242549
 8. Bezdenezhnykh N. A. et al. The influence of high frequency tangential vibrations on the stability of the fluid interfaces in microgravity. In: Rath H. J. (ed.) *Microgravity Fluid Mechanics.* International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1992. DOI: 10.1007/978-3-642-50091-6_14
 9. Wunenburger R., Evesque P., Chabot C., Garra-bos Y., Fauve S., Beysens D. Frozen wave induced by high frequency horizontal vibrations on a CO₂ liquid-gas interface near the critical point. *Phys. Rev.*, 1999, vol. E 59, pp. 5440–5445. DOI: 10.1103/PhysRevE.59.5440
 10. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Evesque P. Interface dynamics of immiscible fluids under horizontal vibration. *Fluid Dynamics*, 2001, vol. 36, pp. 362–368. DOI: 10.1023/A:1019223732059
 11. Talib E., Jalikop S., Juel A. The influence of viscosity on the frozen wave instability: Theory and experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 2007, vol. 584, pp. 45–68. DOI: 10.1017/S0022112007006283
 12. Yoshikawa H., Wesfreid J.E. Oscillatory Kelvin-Helmholtz instability. Part 1. A viscous theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, vol. 675, pp. 223–248. DOI: 10.1017/S0022112011000140
 13. Talib E., Juel A. Instability of a viscous interface under horizontal oscillation. *Physics of Fluids*, 2007, vol. 19 (9), 092102. DOI: 10.1017/S0022112007006283
 14. Lyubimov D., Khilko G., Ivantsov A., Lyubimova T. Viscosity effect on the longwave instability of a fluid interface subjected to horizontal vibrations. *Journal of Fluid Mechanics*, 2017, vol. 814, pp. 24–41. DOI: 10.1017/jfm.2017.28
 15. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P. Ob odnom metode skvoznogo scheta dlia resheniia zadach s deformiruemoi poverkhnost'iu razdela [On a level set method for solving problems with a deformable interface]. *Modelirovanie v mekhanike*, 1990, vol. 4 (21), no. 1, pp. 136–140. (In Russian).
 16. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Ivantsov A. O., Cherepanova A. A. Implementation of the level set method for modeling the dynamics of systems with fluid interfaces. *Computational Continuum Mechanics*, 2008, vol. 1 (2), pp. 53–62. DOI: 10.7242/1999-6691/2008.1.2.15
 17. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Ivantsov A. O., Khilko G. L. Numerical modeling of frozen wave instability in fluids with high viscosity contrast // *Fluid Dynamics Research.* 2016. V. 48. N. 6, 061415.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Хилько Г. Л., Иванцов А. О., Любимова Т. П. О вибрационной неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для жидкостей сравнимых вязкостей. 2023. № 3. С. 60–68. doi: 10.17072/1994-3598-2023-3-60-68

Please cite this article in English as:

Khilko G. L., Ivantsov A. O., Lyubimova T. P. On oscillatory Kelvin-Helmholtz instability of liquids with comparable viscosities. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2023, no. 3, pp. 60–68. doi: 10.17072/1994-3598-2023-3-60-68

Сведения об авторах

1. *Григорий Леонидович Хилько*, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории Вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской Академии Наук, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013
2. *Андрей Олегович Иванцов*, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории Вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской Академии Наук, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013
3. *Татьяна Петровна Любимова*, д-р. физ.-мат. наук, профессор, заведующая лабораторией Вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской Академии Наук, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013; профессор кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068

Author information

1. *Grigoriy L. Khilko*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Laboratory for Computational Fluid Dynamics, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia
2. *Andrey O. Ivantsov*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Laboratory for Computational Fluid Dynamics, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia
3. *Tatiana P. Lyubimova*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory for Computational Fluid Dynamics, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia