

УДК 532.516
PACS 47.15.Rq, 47.27.Te

Двумерное течение Пуазейля ньютоновской жидкости с вязкостью, зависящей от температуры

Д. В. Князев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия
dvk@icmm.ru

Задача о двумерном течении Пуазейля ньютоновской жидкости с вязкостью, экспоненциально зависящей от температуры, под действием продольных градиентов давления и температуры сведена к двухпараметрической краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка относительно безразмерной неизвестной, характеризующей изменение температуры поперёк канала. В области отрицательных значений безразмерного продольного градиента температуры решение имеет две ветви. Смыкаясь, ветви образуют границу на плоскости параметров, за пределами которой течения пуазейлевского типа не существуют. Решения, принадлежащие различным ветвям, отличаются расходом и интенсивностью отдачи тепла жидкостью через твёрдые границы. Последнее обстоятельство влечёт за собой торможение потока в пристеночных областях. В области положительных значений безразмерного продольного градиента температуры решение единственно. С увеличением упомянутого параметра растёт тепловой поток к жидкости от стенок, что влечёт за собой формирование более наполненного, по сравнению с изотермическим случаем, профиля скорости. При достаточно больших значениях продольного градиента температуры возникает «стержневое» течение с однородным распределением скорости всюду кроме узких зон вблизи твёрдых границ. Показано, что расход жидкости пропорционален отношению плотностей поперечного и продольного потоков тепла. Приведены явные выражения для полей давления и касательных напряжений. Исследованы свойства монотонности профилей скорости и температуры как функций поперечной координаты. В частности, показано, что независимо от значений безразмерных параметров задачи скорость имеет максимум на центральной оси канала и монотонно убывает до нулевого значения на твёрдой границе.

Ключевые слова: течение Пуазейля; зависимость вязкости от температуры; стационарные решения

Поступила в редакцию 15.09.2023; после рецензии 19.09.2023; принята к опубликованию 22.09.2023

Two-dimensional Poiseuille flow of a Newtonian fluid with temperature-dependent viscosity

D. V. Knyazev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

The problem of a two-dimensional Poiseuille flow of a Newtonian fluid with a viscosity exponentially dependent on temperature under the influence of longitudinal pressure and temperature gradients is reduced to a two-parameter boundary value problem for a third-order ordinary differential equation with respect to a dimensionless unknown characterizing the change in temperature across the channel. In the range of negative values of the dimensionless longitudinal temperature gradient, the solution has two branches. By closing, the branches form a boundary on the parameter plane

beyond which Poiseuille-type flows do not exist. The solutions belonging to different branches differ in the flow rate and intensity of heat transfer by the liquid through solid boundaries. The latter circumstance entails deceleration of the flow in the near-wall areas. In the region of positive values of the dimensionless longitudinal temperature gradient, the solution is unique. With an increase in the mentioned parameter, the heat flow to the liquid from the walls increases, which entails the formation of a more bulged velocity profile compared to the isothermal case. At sufficiently large values of the longitudinal temperature gradient, there appears a 'stick' flow with a uniform velocity distribution everywhere except for narrow layers near solid boundaries. It is shown that the rate is proportional to the ratio of the densities of the transverse and longitudinal heat flows. Explicit expressions for the pressure and shear stress fields are given. The properties of monotonicity of the velocity and temperature profiles as functions of the transverse coordinate have been studied. It is shown that, regardless of the values of the dimensionless parameters of the problem, the velocity has a positive maximum on the central axis of the channel and monotonically decreases to zero at the solid boundary.

Keywords: Poiseuille flow; temperature dependence of viscosity; steady solutions

Received 15 September 2023; revised 19 September 2023; accepted 22 September 2023

doi: 10.17072/1994-3598-2023-3-54-59

1. Введение

В ряде случаев зависимость коэффициента вязкости от температуры может существенно влиять на течения жидкостей и расплавов. Универсального закона, связывающего коэффициент вязкости произвольной жидкости с температурой $\eta(T)$, по-видимому, не существует. Поэтому в теоретических исследованиях и практических расчётах применяется большое количество выведенных теоретически и эмпирически зависимостей [1]. Как правило, коэффициент вязкости среды убывает с ростом температуры. В таких случаях нередко используются степенной или показательный законы.

В значительной части работ, посвящённых течениям термовязкой жидкости, исследуются напорные и сдвиговые потоки жидкости в трубах и каналах в условиях различных режимов нагрева границ, что продиктовано практической важностью такого рода движений. В настоящем кратком обзоре основное внимание уделено работам, где получены точные решения уравнений гидродинамики и постановки задач, близких к исследуемой в дальнейшем.

В [2] рассмотрено течение Куэтта между однородно нагретыми цилиндрами разной температуры для произвольной зависимости $\eta(T)$. Напорное течение Пуазейля в таких же допущениях относительно температуры границ и общем законе $\eta(T)$ исследовано в [3]. Одним из результатов этой работы является теоретическая демонстрация возможности возникновения теплового взрыва в термовязком потоке при учёте объёмного тепловыделения за счёт внутреннего трения.

В работе [4] описываются двумерные и осесимметричные течения жидкости с вязкостью, экспоненциально зависящей от температуры, без кон-

кретизации граничных условий. Получены явные выражения для давления и касательных напряжений. В работе [5], при некоторых допущениях, была показана возможность исчезновения решения в задаче о течении в трубе жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры.

В [6] рассмотрен ряд задач о напорных течениях термовязких и неньютоновских жидкостей. В том числе исследовано двумерное течение в канале с неоднородным распределением температуры на границах и степенной зависимостью вязкости от температуры. Численно была продемонстрирована неединственность решения этой задачи.

Использование приближения Буссинеска в [7] позволило описать и исследовать устойчивость конвективного течения жидкости с линейной зависимостью вязкости от температуры в вертикальном канале. В рамках таких же допущений в работе [8] изучены форма и область существования одно- или двухвихревого стационарного конвективного движения жидкости, возникающего при малых надкритичностях, в подогреваемой снизу ячейке Хеле-Шоу.

2. Постановка задачи

Рассматривается установившееся двумерное течение ньютоновской жидкости в длинном канале ширины $2h$ с коэффициентом динамической вязкости, зависящим от температуры. Движение индуцируется разностью давлений Δp в нормальных сечениях $z = 0$, $z = L$ и неоднородным распределением температуры $T_0(z)$ вдоль твёрдых границ канала $x = \pm h$. По аналогии с изотермическим течением Пуазейля предполагается, что скорость направлена вдоль оси потока z и зависит только от поперечной координаты x . В этих условиях тензор вязких напряжений имеет две ненулевые компо-

ненты $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ и гидродинамические уравнения принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}, \quad \sigma_{xz} = \eta(T) \frac{dv_z}{dx} \quad (2.1)$$

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right].$$

Кроме коэффициента вязкости η , все величины, характеризующие физические свойства жидкости, считаются постоянными, включая плотность и коэффициент температуропроводности χ . На центральной оси канала и твёрдой границе выполняются условия

$$x = 0: \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \Delta p = p(0,0) - p(0,L) > 0; \quad (2.2)$$

$$x = h: \quad v_z = 0, \quad T = T_0(z).$$

Задача (2.1), (2.2) разрешима не для всех видов зависимостей $\eta(T)$, $T_0(z)$. Далее предполагается, что

$$\eta(T) = \eta_0 e^{-\lambda T}, \quad T_0(z) = B + Az, \quad \eta_0, \lambda > 0. \quad (2.3)$$

Решение системы (2.1) - (2.3) ищется в виде

$$v_z = \frac{L \Delta p}{\eta_0} w(\xi), \quad p = \Delta p \frac{P(\xi) e^{a(1-\xi)} - 1}{e^a - 1}, \quad (2.4)$$

$$\lambda T = b + \theta(\xi) + a\xi,$$

где $0 \leq \xi = x/h \leq 1$, $0 \leq \zeta = z/L \leq 1$ – безразмерные поперечная и продольная координаты; $a = \lambda AL$, $b = \lambda B$. Следует отметить, что здесь T – отклонение от температуры, при которой $\eta = \eta_0$.

Новая безразмерная неизвестная $P(\xi)$ подчиняется линейной системе

$$P'' - \alpha^2 P = 0, \quad P(0) = 1, \quad P'(0) = 0,$$

так что

$$P(\xi) = \text{ch}(\alpha\xi) \geq 1, \quad P'(\xi) = \alpha \text{sh}(\alpha\xi) \geq 0. \quad (2.5)$$

Штрихом обозначается производная по переменной ξ . Безразмерный параметр $\alpha = a\delta$ характеризует величину продольного градиента температуры на твёрдой стенке с учётом отношения поперечного и осевого масштабов $0 < \delta = h/L < 1$. При $\alpha < 0$ температура стенки уменьшается вдоль рассматриваемого участка канала, при $\alpha > 0$ – растёт.

Для безразмерной скорости $w(\xi)$ и её производной из (2.1) - (2.5) следуют выражения

$$\alpha \delta \text{Re} w = \theta'', \quad w' = \frac{-\delta e^b}{1 - e^{-\alpha/\delta}} e^\theta \text{sh}(\alpha\xi) \leq 0, \quad (2.6)$$

где $\text{Re} = L^2 \Delta p / (\eta_0 \chi) > 0$ – число Пекле. Неравенство $w'(\xi) \leq 0$ вытекает из свойств монотонности и нечётности функции $\text{sh}(t)$.

Вследствие (2.6) и граничных условий неизвестная $\theta(\xi)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\theta''' = -\beta e^\theta \text{sh}(\alpha\xi), \quad (2.7)$$

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(1) = 0, \quad \theta''(1) = 0,$$

содержащей два параметра

$$\alpha, \beta = \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha/\delta}} e^b \delta^2 \text{Re} > 0.$$

Таким образом, задача (2.1)–(2.3) с помощью (2.4) сводится к системе (2.7).

3. Анализ задачи и расчёты

Результаты (2.5), (2.6) дают возможность судить о поведении ряда гидродинамических величин до решения задачи (2.7).

Формулы (2.5), (2.6) позволяют выписать явные выражения для давления и поля касательных напряжений

$$\frac{p}{\Delta p} = \frac{\text{ch}(\alpha\xi) e^{a(1-\xi)/\delta} - 1}{e^{a/\delta} - 1}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\sigma_{xz}}{\Delta p} = -\frac{e^{-\alpha\xi/\delta}}{1 - e^{-\alpha/\delta}} \text{sh}(\alpha\xi) \leq 0.$$

В фиксированном поперечном сечении $\zeta = \text{const}$ давление растёт от центра канала к стенкам при $\alpha > 0$. В случае $\alpha < 0$ давление максимально на оси потока и убывает по мере приближения к твёрдым границам. Касательные напряжения равны нулю на оси симметрии канала и нарастают по абсолютной величине в направлении стенок.

Вследствие неравенства (2.6) скорость $w(\xi) \geq 0$ максимальна на оси потока и монотонно убывает до нулевого значения на твёрдой границе.

Из первого уравнения (2.6) следует, что

$$\alpha \theta' = \frac{\alpha^2 \delta \text{Re}}{\xi} \int_0^\xi w(t) dt \geq 0,$$

поэтому функция $\theta(\xi) \leq 0$ минимальна на оси симметрии и монотонно растёт до нуля на границе канала при $\alpha > 0$. Функция $\theta(\xi) \geq 0$ максимальна на оси и монотонно убывает до нуля на твёрдой границе при $\alpha < 0$. Так как $\eta \sim \exp(-\theta)$, при

$\alpha > 0$ коэффициент вязкости максимален в центре потока и минимален на твёрдой границе. В случае $\alpha < 0$ коэффициент вязкости – растущая функция поперечной координаты.

В случае термовязкого течения потоки массы и тепла связаны между собой. Вектор плотности потока тепла

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T = -\frac{\kappa}{\lambda h} (\theta' \mathbf{e}_r + \alpha \mathbf{e}_z)$$

зависит от $\theta'(\xi)$ и α . В частности $\gamma = \theta'(1)$ характеризует плотность теплового потока через твёрдую границу. Тепло подводится к жидкости через боковую границу канала при $\gamma > 0$ и отводится наружу при $\gamma < 0$. Величины γ и α входят в выражение для расхода

$$Q = 2 \int_0^h v_z dx = 2\chi \frac{\gamma}{\alpha} > 0.$$

Безразмерный расход $G = Q/(2\chi)$ и γ зависят от двух параметров задачи (2.7), т.е. $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$, $G = \gamma(\alpha, \beta)/\alpha$. Анализ этих зависимостей, рассчитанных при фиксированных значениях параметра β , показывает, что в случае отвода тепла через твёрдую стенку решение задачи (2.7) перестаёт существовать при $\alpha < \alpha_1(\beta) < 0$. Это означает, что стационарное однонаправленное течение пуазейлевского типа (2.4) не может быть реализовано если отрицательный безразмерный продольный градиент температуры α меньше критического значения α_1 . Абсолютная величина

критического градиента уменьшается с ростом параметра β . Каждому $\alpha_1 < \alpha < 0$ соответствуют два решения с одинаковыми полями давления и вязких напряжений (3.1), но с разными значениями γ (рис. 1, а) и расхода G (рис. 1, б). Таким образом, можно говорить о двух ветвях решения.

Ветвь I (рис. 1) продолжима в область положительных значений α и γ (тепло подводится к жидкости через твёрдую боковую границу). Здесь ветвь I ведёт себя монотонно. В то же время кривая безразмерного расхода $G(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = \alpha_2(\beta) > 0$ (рис. 1, б). Следовательно, в некоторой окрестности этого минимума имеются два различных режима течения с одинаковыми расходами, но различными плотностями радиального и осевого тепловых потоков. По мере роста параметра β положение минимума сдвигается вправо и вверх вдоль осей α и G .

Ветвь II существует только при $\alpha \in (\alpha_1; 0)$. Во всех проведённых расчётах зависимость расхода γ от α монотонна (рис. 1).

Для малых α приближённое решение задачи (2.7), принадлежащее ветви I, можно представить в виде разложения (рис. 2, штриховые кривые 3):

$$\begin{aligned} \theta &\approx -\frac{\alpha\beta}{24}(\xi^4 - 6\xi^2 + 5) + \\ &+ \frac{(\alpha\beta)^2}{40320}(5\xi^8 - 84\xi^6 + 350\xi^4 - 980\xi^2 + 709), \\ \delta \text{Re } w &\approx \frac{\beta}{2}(1 - \xi^2) + \frac{\alpha\beta^2}{144}(\xi^6 - 9\xi^4 + 15\xi^2 - 7). \end{aligned}$$

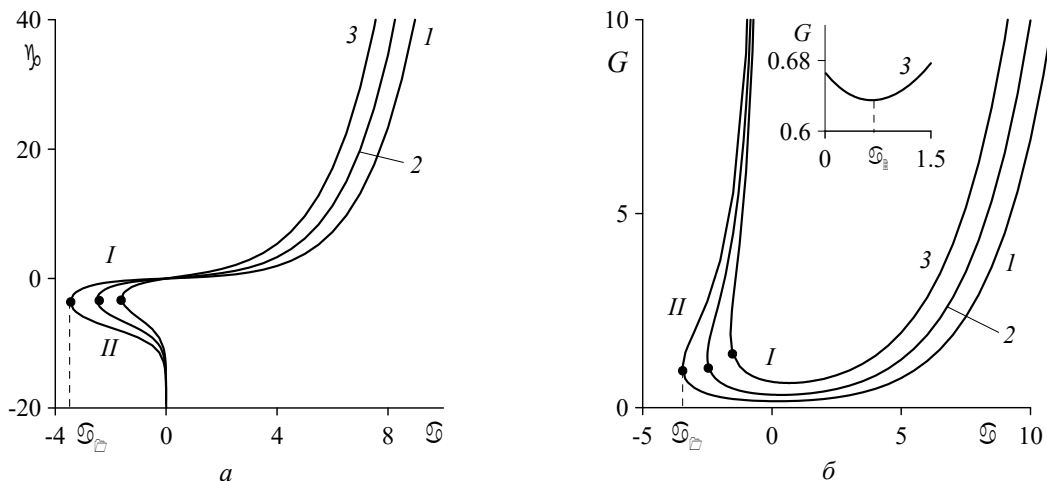


Рис. 1. Безразмерные зависимости: а – плотности потока тепла через твёрдую границу; б – расхода, от продольного градиента температуры α при различных значениях параметра β : 1 – $\beta = 0.5$, $\alpha_1 = -3.461$, $\alpha_2 = 0.189$; 2 – $\beta = 1$, $\alpha_1 = -2.489$, $\alpha_2 = 0.366$; 3 – $\beta = 2$, $\alpha_1 = -1.603$, $\alpha_2 = 0.665$

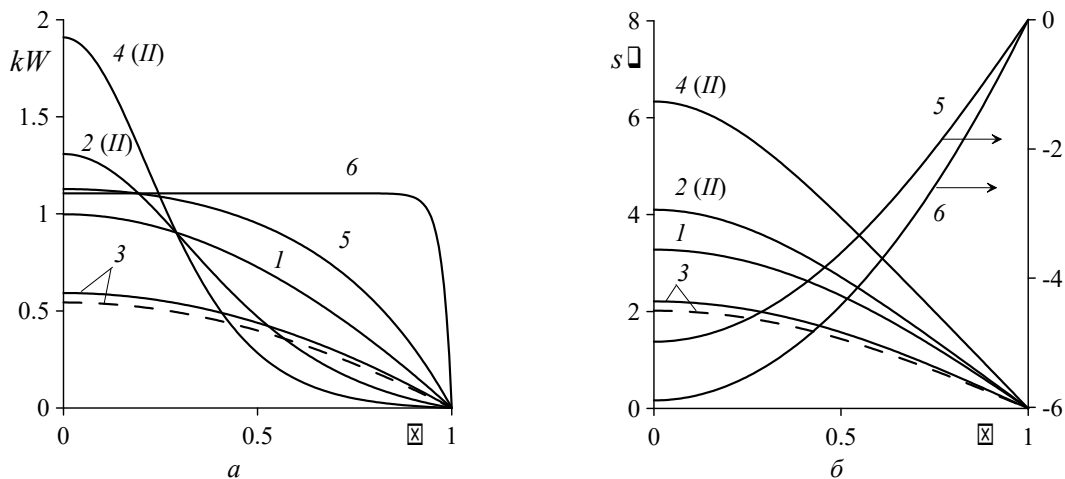


Рис. 2. Безразмерные профили скорости: $a - W(\xi) = \delta \text{Re} w(\xi)$, $b - \theta(\xi)$ для $\beta = 1$ и различных значений параметра α : 1 – $\alpha = -2$, $k=1$, $s=4$; 2 – $\alpha = -2$, $k=1/5$, $s=1$ (ветвь II); 3 – $\alpha = -0.9$, $k=1$, $s=10$; 4 – $\alpha = -0.9$, $k=1/15$, $s=1$ (ветвь II); 5 – $\alpha = 2$, $k=2$, $s=10$; 6 – $\alpha = 8$, $k=1/4$, $s=1/3$

Если дополнительно потребовать малости параметров a и b , то выражение для безразмерной скорости стремится к решению Пуазейля для изотермического течения $w = \delta^2 (1 - \xi^2) / 2$.

Для малых β можно искать решения задачи (2.7), принадлежащие ветви I, в виде разложения по этому параметру. Его главные члены имеют вид

$$\theta \approx \frac{\beta}{\alpha^3} \left[\text{ch} \alpha - \text{ch}(\alpha \xi) - \frac{\alpha^2}{2} \text{ch} \alpha (1 - \xi^2) \right],$$

$$\delta \text{Re} w \approx \beta \frac{\text{ch} \alpha - \text{ch}(\alpha \xi)}{\alpha^2}.$$

На ветви I, при небольших и умеренных значениях параметра α , профиль скорости близок к параболическому (рис. 2, a , кривые 1, 3, 5). С ростом $\alpha > 0$ и увеличением подвода тепла к жидкости через боковую границу, профиль скорости становится всё более «наполненным». В результате течение принимает вид однородного потока с узким пограничным слоем у стенки, где скорость быстро падает до нуля (рис. 2, a , кривая 6). Такого рода течения называют «стержневыми».

Для решений, принадлежащих ветви II, характерен быстрый рост скорости в приосевой области (рис. 2, a , кривые 2, 4), где коэффициент вязкости значительно меньше, чем вблизи твёрдой границы. Последнее обстоятельство является причиной сильного торможения потока в периферийной области. Размер этой области растёт по мере интенсификации отвода тепла от жидкости через границу. Внутри неё изменение температуры близко к линейному (рис. 2, b , кривые 2, 4).

4. Заключение

Показано, что двумерное течение Пуазейля термовязкой жидкости обладает рядом особенностей, связанных с неоднородным тепловым воз-

действием на поток. В частности, установлено, что расход жидкости прямо пропорционален плотности теплового потока через твёрдые стенки и обратно пропорционален заданному однородному продольному градиенту температуры.

В области отрицательных значений последнего параметра есть граница, за пределами которой решение задачи не существует. Внутри области существования решение имеет две ветви. Решения, соответствующие одинаковым наборам безразмерных параметров задачи, принадлежащие разным ветвям, характеризуются идентичными полями давления и касательных напряжений, но существенно отличаются профилями скорости и температуры, а также интенсивностью теплоотдачи на твёрдых границах и расходом.

В области положительных значений продольного градиента температуры решение единственно. С увеличением этого градиента растёт величина теплового потока к жидкости через твёрдые стенки. При этом кривая, описывающая зависимость расхода от безразмерного продольного градиента температуры, имеет локальный минимум. Благодаря поглощению тепла жидкостью профиль скорости становится более наполненным по сравнению с изотермическим случаем и по мере увеличения степени неоднородности температурного воздействия принимает вид «стержневого» течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (тема № 121031700169-1).

Список литературы

1. Kulikov Yu. M., Son E. E. Fluid flow with abrupt viscosity-temperature dependence // High Temperature. 2014. Vol. 52. N. 5. P. 723–729. DOI: 10.1134/S0018151X14050216

2. Регирер С. А. Влияние теплового эффекта на вязкое сопротивление в установившемся одномерном течении капельной жидкости // Прикладная математика и механика. 1958. Т. 33. Вып. 3. С. 412-414.
3. Каганов С. А. Об установившемся ламинарном течении несжимаемой жидкости в плоском канале и круглой цилиндрической трубе с учетом теплоты трения и зависимости вязкости от температуры // Прикладная механика и техническая физика. 1962. N. 3. С. 96-99.
4. Найдёнов В. И. Об автомодельности одной задачи конвективного теплообмена // Прикладная механика и техническая физика. 1974. N. 5. С. 152-153.
5. Найдёнов В. И., Полянин А. Д. О некоторых нелинейных конвективно-тепловых эффектах в теории фильтрации и гидродинамике // Доклады АН СССР. 1984. Т. 279. N. 3. С. 575-579.
6. Скульский О. И., Аристов С. Н. Механика аномально вязких жидкостей. М.-И.: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. 156 с.
7. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
8. Демин В.А., Петухов М.И. О влиянии зависимости вязкости от температуры на стационарные конвективные течения в ячейке Хеле – Шоу // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Физика. Т. 9, № 2, 2017, с. 47-54.
- liquid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 22, no. 3, pp. 580-586. DOI: 10.1016/0021-8928(58)90075-3
3. Kaganov S. A. Ob ustanovivshemsya laminarnom techenii neszhimayemoy zhidkosti v ploskom kanale i krugloy tsilindricheskoy trube s uchetom teploty treniya i zavisimosti vyazkosti ot temperatury [On the steady laminar flow of an incompressible fluid in a flat channel and a round cylindrical pipe taking into account the heat of friction and the dependence of viscosity on temperature]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1962, no. 3, pp. 99-96. (In Russian)
4. Naidenov, V.I. Self-similarity of a convective heat-transfer problem. *J Appl Mech Tech Phys*, 1974, vol. 15(5), pp. 713-715. DOI: 10.1007/BF00851537
5. Naidenov V. I., Polyinin A. D. O nekotorykh nelineynykh konvektivno-teplovykh effektakh v teorii fil'tratsii i gidrodinamike [On some nonlinear convective-thermal effects in the theory of filtration and hydrodynamics]. *Doklady AN SSSR*, 1984, vol. 279, no. 3, pp. 575-579. (In Russian).
6. Skul'skiy O. I., Aristov S. N. Mekhanika anomal'no vyazkikh zhidkostey [Mechanics of abnormally viscous liquids]. М.-И.: *Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika*, 2003. 156 p. (In Russian).
7. Gershuni G.Z., Zhukhovitskiy Ye.M., Nepomnyashchiy A.A. Ustoychivost' konvektivnykh techeniy [Stability of convective flows]. М.: Nauka, 1989. 320 p. (In Russian).
8. Demin V.A., Petukhov M.I. The effect of temperature dependence of the viscosity on stationary convective flows in Hele – Shaw cell. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 47-54. DOI: 10.14529/mmph170206

References

1. Kulikov Yu. M., Son E. E. Fluid flow with abrupt viscosity-temperature dependence. *High Temperature*, 2014, vol. 52, no. 5, pp. 723-729. DOI: 10.1134/S0018151X14050216
2. Regirer S. A. The influence of thermal effects on the viscous resistance of a steady uniform flow of

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Князев Д. В. Двумерное течение Пуазейля ньютоновской жидкости с вязкостью, зависящей от температуры // Вестник Пермского университета. Физика. 2023. № 3. С. 54–59. doi: 10.17072/1994-3598-2023-3-54-59

Please cite this article in English as:

Knyazev D. V. Two-dimensional Poiseuille flow of a Newtonian fluid with temperature-dependent viscosity. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2023, no. 3, pp. 54-59. doi: 10.17072/1994-3598-2023-3-54-59

Сведения об авторах

Князев Денис Вячеславович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва 1, Пермь, 614013

Author information

Denis V. Knyazev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia