

УДК 532.6, 532.5
PACS 47.55.D-, 47.55.dr

Неустойчивость ансамбля капель и динамические режимы в вибрационном поле

А. А. Алабужев^{1,2*}, М. А. Пьянкова³

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

²Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

³МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия

* alabuzhev@mail.ru

Исследуется параметрическая неустойчивость ансамбля взаимодействующих капель жидкости в вибрационном поле. В положении равновесия капли имеют форму цилиндров вращения, ограниченных в осевом направлении двумя параллельными твердыми поверхностями и окруженных несмешивающейся жидкостью. Рассматривается как линейная, так и нелинейная устойчивость вынужденных колебаний капель такого ансамбля. Получены области параметрической неустойчивости и исследованы нелинейные подкритические и надкритические состояния. В случае ненулевого взаимодействия основные моды более опасны при наличии расстройки частоты. Продемонстрировано существование трех различных динамических режимов.

Ключевые слова: ансамбль капель жидкости, параметрический резонанс, линейная неустойчивость, нелинейная неустойчивость, вынужденные колебания

Поступила в редакцию 15.09.2023; после рецензии 05.10.2023; принята к опубликованию 05.10.2023

Instability of an ensemble of drops and dynamic regimes in a vibrational field

A. A. Alabuzhev^{1,2*}, M. A. Pyankova³

¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

²Perm State University, Perm, Russia

³MIREA - Russian Technological University, Moscow, Russia

* alabuzhev@mail.ru

The parametric instability of an ensemble of interacting droplets of liquid in a vibration field is studied. In the equilibrium position, the drops have the form of cylinders of rotation limited in the axial direction by two parallel solid surfaces and surrounded by an immiscible liquid. Both linear and nonlinear stability of forced oscillations of droplets of such an ensemble are considered. Regions of parametric instability are obtained, nonlinear subcritical and supercritical regimes are studied. In the case of non-zero interaction, the main modes are more dangerous in the presence of frequency disorder. The existence of three different dynamic regimes is demonstrated.

Keywords: ensemble of liquid drops; parametric resonance; linear instability; nonlinear instability; forced vibrations

Received 15 September 2023; revised 05 October 2023; accepted 05 October 2023

doi: 10.17072/1994-3598-2023-3-16-20

© Алабужев А. А., Пьянкова М. А., 2023



распространяется на условиях лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Параметрический резонанс является одним из наиболее часто встречающихся типов неустойчивости при вибрационном воздействии на физическую систему [1]. Особенно ярко это проявляется при воздействии на горизонтальную поверхность раздела жидкость-газ поперечных вибраций (неустойчивость (рябь) Фарадея) [2-4] или касательных [5, 6], а также на каплю или пузырек в жидкости [7-10]. В работах [8, 11] при исследовании вынужденных колебаний цилиндрической капли было показано, что при трансляционных линейных вибрациях параметрический резонанс возникает при равенстве частоты внешнего воздействия сумме частот двух соседних азимутальных мод собственных колебаний. При вибрациях, продольных оси симметрии капли, резонанс возникает на удвоенной частоте осесимметричной моды подобно случаю сферической капли [7].

Системы взаимодействующих осцилляторов обладают более сложным и богатым поведением благодаря различным коллективным взаимодействиям. Линейный анализ устойчивости системы параметрических возбуждаемых осцилляторов проводился в работах [12-14]. В работе [15] исследовалась неустойчивость слабо нелинейных осцилляторов, параметрически возбуждаемых синусоидальным сигналом. Было показано, что учет взаимодействия приводит к возникновению режима бегущей волны, который с увеличением амплитуды трансформируется в синхронизованное состояние.

При исследовании вынужденных колебаний цилиндрической капли в поле эллиптических вибраций [11] была предложена модель, описывающая ансамбль таких взаимодействующих капель (рис. 1). Кроме того, было обнаружено существование трех разных областей неустойчивости.

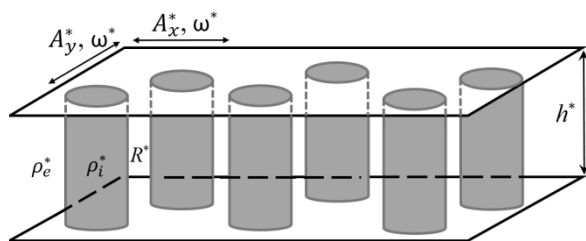


Рис. 1. Геометрия ансамбля капель

Капли плотностью ρ_i^* имеют равновесную форму цилиндра вращения радиуса R^* и высотой h^* . Капли окружены несмешивающейся жидкостью плотностью ρ_e^* . На систему действуют эллиптические вибрации частотой ω^* и амплитудами A_x^* и A_y^* .

Каждая капля в ансамбле является осциллятором, взаимодействие между ними происходит через окружающую жидкость. Предполагается, что параметры всех капель одинаковые, но параметрическое возбуждение имеет разные фазы τ для раз-

ных осцилляторов. В работе [11] по аналогии с рассмотренными вынужденными колебаниями одиночной капли была записана следующая система уравнений (урав. (8)-(9) в [11]) для ансамбля взаимодействующих капель с учетом трения и нелинейных слагаемых для амплитуд a двух соседних азимутальных мод при параметрическом возбуждении:

$$\frac{\partial a_m^j}{\partial t} = A e^{-i\tau_j} a_{m+1}^j - r_m a_m^j - i\omega a_m^j + \quad (1)$$

$$+ i\alpha_m a_m^j |a_m^j|^2 + i\beta_m a_m^j |a_{m+1}^j|^2 - i\kappa_m \langle a_m \rangle,$$

$$\frac{\partial a_{m+1}^j}{\partial t} = A e^{i\tau_j} a_m^j - r_{m+1} a_{m+1}^j + i\omega a_{m+1}^j +$$

$$+ i\alpha_{m+1} a_{m+1}^j |a_{m+1}^j|^2 + i\beta_{m+1} a_{m+1}^j |a_m^j|^2 - \quad (2)$$

$$- i\kappa_{m+1} \langle a_{m+1} \rangle,$$

$$\tau_j = \frac{2\pi}{N} j, \quad j = 1..N, \quad |\kappa_{m+1}| \ll |\kappa_m|,$$

$$\langle a_m \rangle = \sum_{j=1}^N a_m^j = \sum_j \operatorname{Re}(a_m^j) + i \sum_j \operatorname{Im}(a_m^j),$$

где j – номер капли, r_m – коэффициент трения, A – амплитуда, τ_j – сдвиг фазы, ω – частота внешнего воздействия, α_m и β_m – коэффициенты, характеризующие консервативное взаимодействие, κ_m – параметр взаимодействия капли с ансамблем. Фазы возбуждения τ_j распределены равномерно на отрезке $[0, 2\pi)$. Капли взаимодействуют друг с другом через влияние на течение в окружающей их жидкости.

Уравнения (1)–(2) были записаны в терминах «пространственных» гармоник Фурье-пространства для исследования линейной неустойчивости:

$$\begin{cases} \dot{A}_0 = (-r_m - i(\gamma + \kappa)) A_0 + A B_1, \\ \dot{B}_1 = (-r_{m+1} + i\gamma) B_1 + A A_0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{A}_{-1} = (-r_m - i\gamma) A_{-1} + A B_0, \\ \dot{B}_0 = (-r_{m+1} + i(\gamma + \kappa)) B_0 + A A_{-1}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{A}_{k-1} = (-r_m - i\gamma) A_{k-1} + A B_k, \\ \dot{B}_k = (-r_{m+1} + i\gamma) B_k + A A_{k-1}, \end{cases} \quad (5)$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_m(\tau) e^{-ik\tau} d\tau,$$

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{m+1}(\tau) e^{-ik\tau} d\tau,$$

$\gamma = \omega - \Omega_m - \Omega_{m+1}$, $\langle a_m \rangle = A_0$, $\langle a_{m+1} \rangle = B_0$. Здесь Ω_m – частота m -й азимутальной моды собственных колебаний, γ – расстройка частоты. Полученная система (3)–(5) определяет области неустойчивости (см. [11] с указанием на существование трех

различных режимов аналогично [15]), границы которых можно найти из равенства нулю собственных значений λ для $A_k, B_k \sim e^{\lambda t}$ (нейтральных кривых), соответственно:

$$\lambda = -\frac{1}{2}(r_m + r_{m+1} \mp i\kappa_m) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + (r_{m+1} - r_m \pm i(2\gamma + \kappa_m))^2}, \quad (6)$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}(r_m + r_{m+1} \pm i\kappa_{m+1}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + (r_m - r_{m+1} \pm i(2\gamma - \kappa_{m+1}))^2}, \quad (7)$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}(r_m + r_{m+1}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4A^2 + (r_{m+1} - r_m \pm 2i\gamma)^2}. \quad (8)$$

Области неустойчивости для различных параметров задачи приведены на рис. 2 с указанием областей решений (3)–(5) и нейтральных кривых (6)–(8). С увеличением значений коэффициентов трения r_m растет пороговая амплитуда (ср. рис. 2, а и 2, б). С изменением параметров взаимодействия κ_m (ср. рис. 2, а и 2, в) неустойчивость для первых двух пар A_0, B_1 (3) и A_{-1}, B_0 (4) (т.е. для $k=0$) возникает раньше, чем для остальных гармоник (5) ($k \neq 0$). Без учета взаимодействия ($\kappa_m = \kappa_{m+1} = 0$) решения (6)–(8) одинаковые.

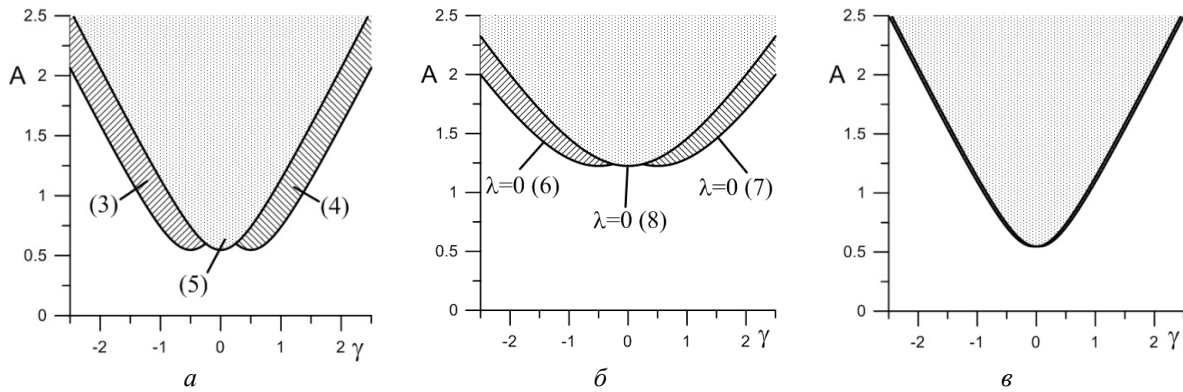


Рис. 2. Области параметрического резонанса ансамбля капель: а – $r_m = 0.5, r_{m+1} = 0.6,$

$\kappa_m = \kappa_{m+1} = 1$; б – $r_m = 2.5, r_{m+1} = 0.6, \kappa_m = \kappa_{m+1} = 1$; в – $r_m = 0.5, r_{m+1} = 0.6, \kappa_m = \kappa_{m+1} = 0.1$

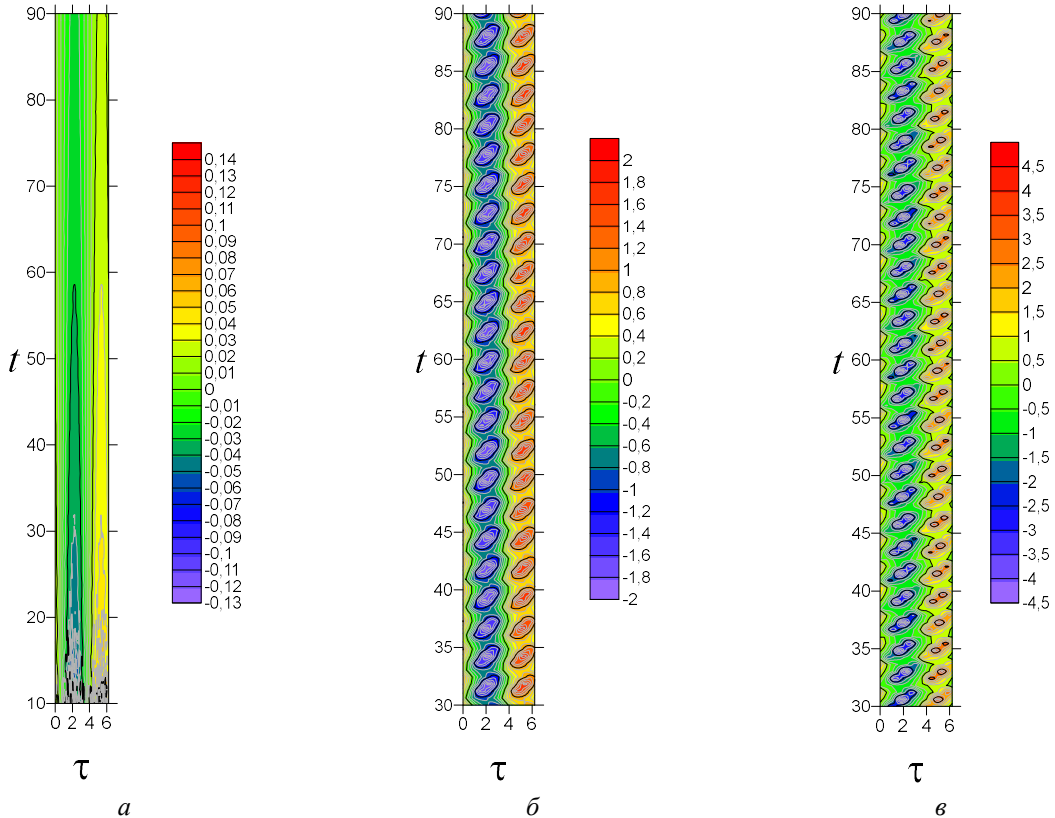


Рис. 3. Нелинейные режимы ($r_m = 2.5, r_{m+1} = 0.6, \alpha_m = 0.1, \alpha_{m+1} = 0.2, \beta_m = 0.3, \beta_{m+1} = 0.4,$

$\kappa_m = \kappa_{m+1} = 1, \gamma = 2.45$): а – $A = 1.98$; б – $A = 2.2$; в – $A = 2.45$

Рассмотрим теперь подробнее нелинейные подкритические и надкритические режимы, описываемые полной системой (1)–(2), которые упоминались в [11]. Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1)–(2) решалась численно методом Адамса. На рис. 3 приведены динамические режимы для трех разных значений амплитуды вибраций A с произвольными начальными условиями в системе из 50 капель. В надкритической области вблизи нейтральной кривой (рис. 3, *a*) возмущения затухают, т.е. нелинейность стабилизирует систему. При увеличении амплитуды в области неустойчивости основной гармоники появляется режим бегущей волны (рис. 3, *б*). Этот режим с дальнейшим ростом амплитуды разрушается и переходит в режим строгой синхронизации, где капли ведут себя одинаковым образом.

Список литературы

1. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука. 1972. 470 с.
2. *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces // *Philos. Trans. R. Soc. London*. 1831. V. 121. P. 319–340.
3. *Неволин В. Г.* Параметрическое возбуждение поверхностных волн // *Инженерно-физический журнал*. 1985. Т. 47. С. 1028–1042.
4. *Miles J., Henderson D.* Parametrically forced surface waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1990. V. 22. P. 143–165.
5. *Любимов Д. В., Хеннер М. В., Шоц М. М.* Об устойчивости поверхности раздела жидкостей при касательных вибрациях // *Изв. РАН. МЖГ*. 1998. № 3. С. 25–31.
6. *Хилько Г. Л.* Устойчивость поверхности раздела тонких слоев жидкости при касательных высокочастотных вибрациях. Вычислительная механика сплошных сред, 2019. Т. 12, № 4. С. 366–377.
7. *Коновалов В. В.* Влияние вибраций на поведение пузырей и капель // Дис. на соиск. учён. степ. к.ф.-м.н. Пермь: ИМСС УрО РАН. 2003. 115 с.
8. *Алабужев А. А., Любимов Д. В.* Поведение цилиндрической капли при многочастотных вибрациях // *Известия РАН. МЖГ*. 2005. № 2. С. 18–28.
9. *Картавых Н. Н., Шкляев С. В.* О параметрическом резонансе полуцилиндрической капли на осциллирующей твердой подложке // *Вестник Пермского университета*. 2007. № 1 (6). С. 23–28.
10. *Klimenko L.S., Lyubimov D.V.* Surfactant effect on the average flow generation near curved interface // *Microgravity Science and Technology*. 2018. V. 30. N. 1-2. P. 77–84.

11. *Алабужев А. А., Пьянкова М. А.* Параметрическая неустойчивость одиночной капли и ансамбля капель при круговых вибрациях // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2022. № 3. С. 56–65.
12. *Bena I., Van den Broeck C.* Coupled parametric oscillators // *Europhys. Lett.* 1999. V. 48. P. 498–504.
13. *Copelli M., Lindenberg K.* Phase-induced stability in a parametric dimer // *Phys. Rev. E*. 2001. V. 63, 036605.
14. *Bena I., Van den Broeck C., Kawai R., Copelli M., Lindenberg K.* Collective behavior of parametric oscillators // *Phys. Rev. E*. 2002. V. 65, 036611.
15. *Goldobin D., Pikovskiy A.* Collective modes in parametrically excited oscillator arrays // *Europhys. Lett.* 2002. V. 59. P. 193–198.

References

1. *Mandelstam L. I.* *Lectures on the Theory of Oscillations*. Moscow: Nauka, 1972. 470 p. (In Russian)
2. *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact with vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. London*, 1831, vol. 121, pp. 319–340.
3. *Nevolin V. G.* Parametric excitation of surface waves. *Journal of Engineering Physics*. 1984, vol. 47, pp. 1482–1494.
4. *Miles J., Henderson D.* Parametrically forced surface waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1990, vol. 22, pp. 143–165.
5. *Lyubimov D. V., Khenner M. V., Shotz M. M.* Stability of a fluid interface under tangential vibrations // *Fluid Dyn.*, 1998, vol. 33, pp. 318–323.
6. *Khilko G. L.* Stability of the interface between two thin liquid layers under tangential high frequency vibrations. *Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12(4), pp. 366–377. (In Russian).
7. *Konovalev V. V.* Vliyaniye vibratsiy na povedeniye puzyrey i kapel' [Influence of vibrations on the behavior of bubbles and drops]. PhD Thesis. Perm: ICMM UB RAS, 2003. 115 p. (In Russian).
8. *Alabuzhev A. A., Lyubimov D. V.* Behavior of a cylindrical drop under multi-frequency vibration. *Fluid Dyn.*, 2005, vol. 40(2), pp. 183–192.
9. *Kartavykh N. N., Shklyayev S. V.* On the parametric resonance of a semi-cylindrical drop on an oscillating solid substrate. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2007, no. 1(6), pp. 23–28. (In Russian).
10. *Klimenko L.S., Lyubimov D.V.* Surfactant effect on the average flow generation near curved interface. *Microgravity Science and Technology*, 2018, vol. 30, nos. 1-2, pp. 77–84.
11. *Alabuzhev A. A., Pyankova M. A.* Parametric instability of a single drop and an ensemble of drops under circular vibrations. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2022, no. 3, pp. 56–65.

12. Bena I., Van den Broeck C. Coupled parametric oscillators. *Europhys. Lett.*, 1999, vol. 48, pp. 498–504.
13. Copelli M., Lindenberg K. Phase-induced stability in a parametric dimer. *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 63, 036605.
14. Bena I., Van den Broeck C., Kawai R., Copelli M., Lindenberg K. Collective behavior of parametric oscillators. *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 65, 036611.
15. Goldobin D., Pikovsky A. Collective modes in parametrically excited oscillator arrays. *Europhys. Lett.*, 2002, vol. 59, pp. 193–198.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Алабужев А. А., Пьянкова М. А. Неустойчивость ансамбля капель и динамические режимы в вибрационном поле // Вестник Пермского университета. Физика. 2023. № 3. С. 16–20. doi: 10.17072/1994-3598-2023-3-16-20

Please cite this article in English as:

Alabuzhev A. A., Pyankova M. A. Instability of an ensemble of drops and dynamic regimes in a vibrational field. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2023, no. 3, pp. 16–20. doi: 10.17072/1994-3598-2023-3-16-20

Сведения об авторах

1. Алексей Анатольевич Алабужев, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Ак. Королева, 1, Пермь, 614013, профессор кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068
2. Марина Анатольевна Пьянкова, ассистент кафедры компьютерного дизайна, МИРЭА - Российский технологический университет, пр. Вернадского, 78, ЦФО, г. Москва, 119454

Author information

1. Aleksey A. Alabuzhev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Laboratory of Computational Fluid Dynamics, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia.
2. Marina A. Pyankova, Teaching Assistant, Department of Computer Design, MIREA – Russian Technological University; 78, prospekt Vernadskogo, Moscow, 119454, Russia