

УДК 532.5.013.4  
PACS 47.55.P-

## Устойчивость равновесия и конвективные режимы наносuspензии на основе сложного носителя

**А. И. Меньшиков**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: sasha\_m.9494@mail.ru

Численно исследована устойчивость механического равновесия плоского слоя наносuspензии на основе сложного носителя относительно нейтральных нормальных возмущений, не затухающих и не нарастающих с течением времени. Конвективная система находится в статическом гравитационном поле. Термодиффузия и седиментация учитываются как наиболее значимые эффекты. Для описания конвективного течения была использована математическая модель, основанная на уравнениях для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. Во внимание не принималась зависимость вязкости среды от концентрации наночастиц, но учитывались эффекты термодиффузии молекулярных компонентов жидкости-носителя и седиментации наночастиц. Изучено поведение нейтральных кривых при изменении управляющих параметров задачи – числа Больцмана, характеризующего седиментацию, и безразмерного термодиффузионного параметра. Решение безразмерной системы уравнений для амплитуд нейтральных возмущений производилось при помощи численного метода стрельбы, который позволяет свести краевую задачу к серии задач Коши с различными граничными условиями. Численное интегрирование поперек слоя проводилось при помощи метода Рунге-Кутты-Фельберга 4-5-го порядка точности. При изменении параметра Больцмана было обнаружено немонотонное поведение критического числа Рэлея для других параметров жидкости во всем рассмотренном диапазоне значений. Первоначально при увеличении числа Больцмана критическое число Рэлея убывает, однако далее наблюдался его рост. Также было продемонстрировано, что изменение параметров, отвечающих за седиментацию и термодиффузию, вносит наибольший вклад в изменение значений критических параметров. Показано, что “включение” данных механизмов приводит к уплощению нейтральных кривых, за счет чего ожидается большее разнообразие конвективных режимов в области малой надкритичности.

**Ключевые слова:** тепловая конвекция; термодиффузия; седиментация

*Поступила в редакцию 22.06.2017; принята к опубликованию 14.07.2017*

## Stability of equilibrium and convective regimes of nanosuspension on the base of binary molecular medium

**A.I. Menshikov**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: sasha\_m.9494@mail.ru

The stability of mechanical equilibrium of horizontal layer filled with nanosuspension on the base of binary molecular medium is investigated numerically. Convective system is subjected to the influence of the static gravity field. The linear stability is considered relatively to the normal neutral disturbances. The effects of thermal diffusion and sedimentation are taken into account over the calculations. The mathematical model of the problem is based on the system of the differential equations for the incompressible fluid in the Boussinesq approximation and permits to describe the convective stability. The behavior of the neutral curves has been studied when the governing parameters of the problem are changed. The shooting technique in combination with Runge-Kutta-Feldberg method of numerical integration across the layer is applied to solve the spectral amplitude problem. It has been found that the main parameters of the problem are the Boltzmann number and the dimensionless thermal diffusion parameter. Non-monotonous behaviour of the critical Rayleigh number in dependence on Boltzmann number has been received in our model for whole range of governing parameters. Initially, when the Boltzmann number is increased the critical Rayleigh number decreases but further growth of this parameter is observed. It is also demonstrated that the change in Boltzmann number and thermodiffusion parameter makes the largest contribution to the change of the critical parameters. It is shown that the "inclusion" of these mechanisms leads to the broadening of the neutral curves, due to which a large variety of convective regimes in the field of small values of supercriticality are expected.

**Keywords:** convection; thermal diffusion; sedimentation

Received 22.06.2017; accepted 14.07.2017

doi: 10.17072/1994-3598-2017-2-33-39

## 1. Введение

Конвективные течения в жидкостях и газах, которые возникают при неоднородном пространственном распределении величин, характеризующих состояние рассматриваемой сплошной среды, могут быть вызваны множеством факторов [1,2]. В поле тяжести, например, источником конвекции может являться неоднородность плотности, связанная с неравномерным нагревом жидкости и эффектом теплового расширения (термогравитационная конвекция). В другом случае, когда жидкость имеет сложный состав, конвекция может быть вызвана неравномерным распределением примеси (концентрационная конвекция) [3].

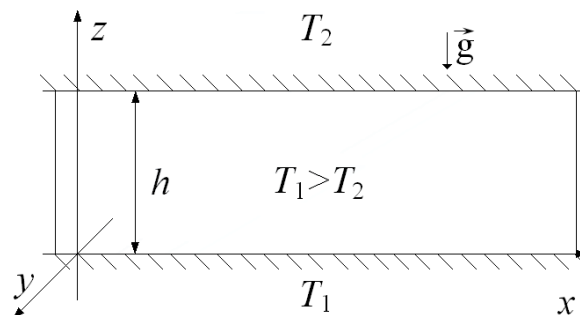
В последнее время описанию тепло- и массопереноса в жидких многокомпонентных средах уделяется огромное внимание как в отечественной, так и зарубежной научной литературе [4-14]. Актуальность тематики связана с многочисленными приложениями в самых разных отраслях промышленности и в первую очередь химической [9]. В роли многокомпонентных жидких сред могут выступать молекулярные смеси или коллоидные растворы. Механизмы тепломассопереноса в этих средах весьма разнообразны – естественная конвекция, продув, теплопроводность, диффузия, термодиффузия или седиментация.

С физической точки зрения имеются существенные различия между молекулярными смесями и коллоидными растворами. В многокомпонентных молекулярных смесях возникновение конвекции осложнено термодиффузионным эффектом, обусловленным связью между градиента-

ми температуры и концентрации. В коллоидных суспензиях, содержащих в жидкости-носителе частицы от нано- до микроразмеров, перераспределение частиц происходит в первую очередь за счет седиментации в поле тяжести.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим горизонтальный слой наносуспензии со сложным по молекулярному составу носителем толщиной  $h$ . Слой ограничен сверху и снизу твердыми границами, которые являются непроницаемыми для вещества и обладают идеальной теплопроводностью. Нижняя граница поддерживается при температуре  $T_1$ , а верхняя – при температуре  $T_2$ . В дополнение пусть  $T_1 > T_2$ , что соответствует подогреву снизу. Слой находится в поле действия силы тяжести  $\mathbf{g}$  (рис.1).



**Рис. 1.** Геометрия задачи. Горизонтальный слой жидкости.

Для описания конвективного течения рассматриваемой многокомпонентной смеси использова-

лась математическая модель, основанная на уравнениях для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска, при этом не принималась во внимание зависимость вязкости среды от концентрации наночастиц, зато учитывалась термодиффузия молекулярных компонентов в жидкости-носителе и седиментация наночастиц. Используем безразмерные переменные на основе следующих масштабов: для расстояния – толщина слоя  $d$ , времени –  $d^2/\nu$ , скорости –  $\nu/d$ , температуры –  $Ah$  ( $A$  – равновесный размерный градиент температуры), концентрации –  $Ah(\beta_i/\beta_c)$ , давления –  $\rho\nu^2/d^2$ , концентрации наножидкости –  $Ah(\beta_i/\beta_\phi)$ , где  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\beta_c, \beta_\phi$  – концентрационные коэффициенты плотности, описывающие зависимость плотности элемента жидкости от концентрации тяжелого компонента жидкости и наночастиц.

Полная система уравнений тепловой конвекции в безразмерной форме, с учетом термодиффузии и седиментации в безразмерных переменных принимает вид [11]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Ra \frac{H}{Pr} (T - C - \phi) \cdot \mathbf{k}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) C = \frac{1}{Sc} (\Delta C + \varepsilon \Delta T), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \phi = \frac{1}{Sc_\phi} (\Delta \phi + Bl \nabla \phi \cdot \mathbf{k}), \quad (2.4)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{k}$  – единичный вектор, направленный вертикально вверх,  $Pr = \nu/\chi$  – число Прандтля,  $Ra = g\beta_i A d^4 / \chi \nu$  – число Рэлея,  $Bl = \Delta \rho g V_0 d / k_b \langle T \rangle$  – число Больцмана,  $\varepsilon = \alpha \beta_c / \beta_i$  – термодиффузионный параметр,  $Sc = \nu/D$  – число Шмидта для тяжелого молекулярного компонента жидкости,  $Sc_\phi = \nu/D_\phi$  – число Шмидта для наночастиц,  $\chi$  – эффективная теплопроводность среды,  $U$  – скорость оседания наночастиц. Также имеем  $D$  – коэффициент молекулярной диффузии,  $D_\phi$  – коэффициент диффузии частиц,  $\alpha$  – коэффициент термодиффузии. С их помощью описываются эффекты, связанные с неоднородностью молекулярного состава несущей жидкости.

### 3. Линейный анализ

Рассмотрение устойчивости в линейном приближении проводилось методом анализа поведения малых возмущений. Для этого все поля были представлены в виде

$$T = T_0 + T', \quad C = C_0 + C', \quad p = p_0 + p',$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}', \quad \phi = \phi_0 + \phi'. \quad (3.1)$$

Штрихом обозначены отклонения полей от равновесных значений. Равновесное распределение температуры, концентрации тяжелого компонента и концентрации наночастиц в безразмерной форме имеет следующий вид:

$$T_0 = -z, \quad (3.2)$$

$$C_0 = \varepsilon z, \quad (3.3)$$

$$\phi_0 = \frac{\bar{\phi}_0 Bl}{1 - e^{-Bl}} e^{-Blz}. \quad (3.4)$$

Решение линеаризованной системы уравнений будем искать в виде:

$$(v, T, p, C, \phi) = (u, \theta, q, c, \varphi) e^{-\sigma t} e^{ikx}, \quad (3.5)$$

где  $k$  – вещественное волновое число,  $\sigma$  – декремент затухания,  $u, q, \varphi, \theta, c$  – функции, являющиеся функцией координаты  $z$ . В данной задаче рассматривались нейтральные возмущения, не затухающие и не нарастающие с течением времени, что имеет место при  $\sigma = 0$ . Для удобства решения линеаризованной системы уравнений была введена новая переменная

$$F = c + \varepsilon \theta,$$

а для упрощения граничных условий сделана замена

$$\varphi = e^{-zBl} f(z).$$

Линеаризованная система уравнений для малых нормальных возмущений примет вид

$$u^{IV} - 2k^2 u'' + k^4 u - \frac{RaH}{Pr} k^2 (\theta(1 + \varepsilon) - F - f \cdot e^{-zBl}) = 0. \quad (3.6)$$

$$u + \frac{1}{Pr} (\theta'' - k^2 \theta) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\varepsilon}{Pr} (\theta'' - k^2 \theta) + \frac{1}{Sc} (F'' - k^2 F) = 0, \quad (3.8)$$

$$u \frac{f_0 Bl^2}{e^{-Bl} - 1} + \frac{1}{Sc_\phi} (f'' - Bl f' - k^2 f) = 0. \quad (3.9)$$

Граничные условия для амплитуды поперечной компоненты скорости записываются в следующей форме:

$$z = 0, 1: \quad u = 0, \quad u' = 0. \quad (3.10)$$

Для температуры, а также поля концентрации молекулярной примеси и наночастиц используются следующие краевые условия:

$$z = 0, 1: \quad \theta = 0, \quad \partial F / \partial z = 0, \quad \partial f / \partial z = 0. \quad (3.11)$$

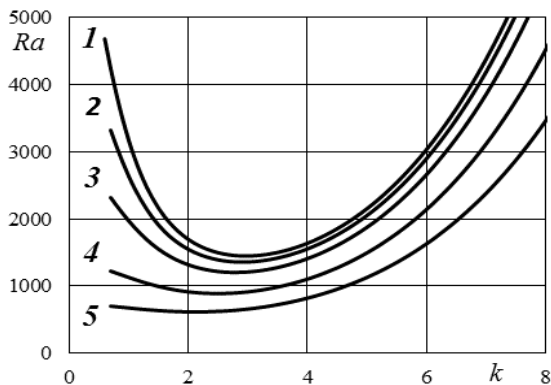
#### 4. Метод решения

При решении системы уравнений для амплитуд нейтральных возмущений (3.6)–(3.9) с граничными условиями (3.10), (3.11) использовался численный метод стрельбы [15].

Он позволяет свести краевую задачу к серии задач Коши с различными начальными условиями. Суть алгоритма процедуры пристрелки заключается в пробном задании недостающих граничных условий на начальной границе интервала и решении затем полученной задачи Коши уже известными методами численного интегрирования. В ходе численного интегрирования задач Коши использовался метод Рунге–Кутты–Фельдберга 4-5-го порядка точности с автоматическим подбором шага. Особенностью метода является то, что в нем производится шестикратное вычисление правых частей. Также, благодаря расчетным формулам 4- и 5-го порядков, имеется возможность получить оценку точности метода. Программа была реализована на языке программирования Fortran-90.

#### 5. Результаты

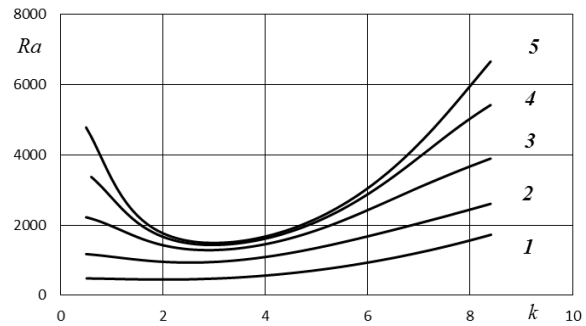
Первоначально исследовалось поведение нейтральных кривых в зависимости от безразмерного параметра, отвечающего за седиментацию – числа Больцмана. Результаты вычислений, представленные на рис. 2, 3, были получены при следующих модельных значениях параметров:  $Pr = 5$ ,  $Sc = 29$ ,  $Sc_\phi = 60$ ,  $\varepsilon = 0.01$ .



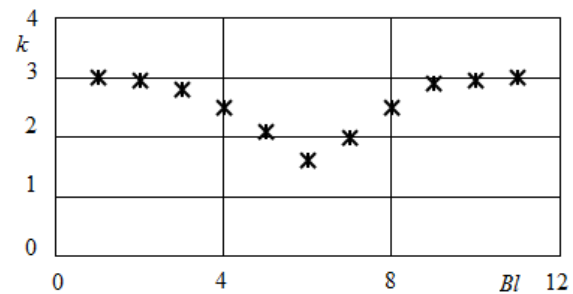
**Рис. 2.** Семейство нейтральных кривых для разных чисел Больцмана. Номера кривых соответствуют значениям параметра  $Bl$ : 1 – 0.05, 2 – 0.1, 3 – 0.2, 4 – 0.5, 5 – 1

Как видно из графиков, представленных на рис. 2, при изменении параметра Больцмана первоначально наблюдается уменьшение критического Рэлея, а также смещение критического волнового числа в длинноволновую область (рис. 4). Нейтральные кривые в области минимума уплощаются с ростом  $Bl$ , за счет чего в области малой надкритичности

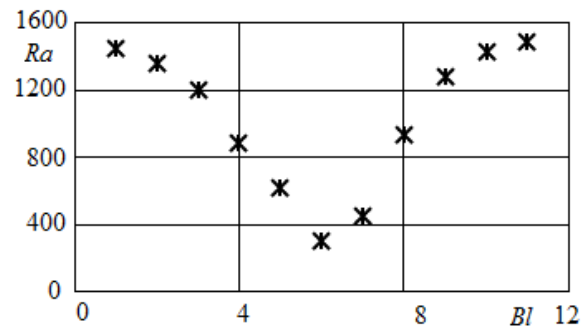
ожидается конкуренция мод и, как следствие, большее разнообразие режимов.



**Рис. 3.** Семейство нейтральных кривых для разных чисел Больцмана. Номера кривых соответствуют следующим значениям параметра  $Bl$ : 1 – 10, 2 – 20, 3 – 30, 4 – 40, 5 – 50



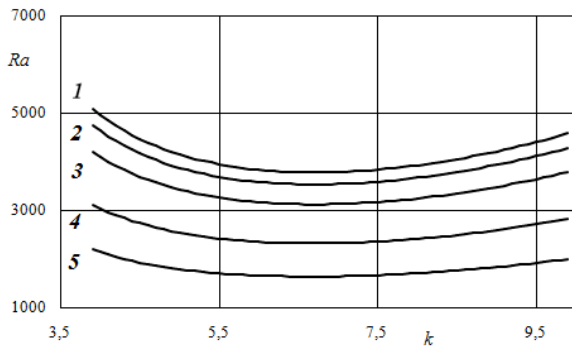
**Рис. 4.** Зависимость критического волнового числа от числа Больцмана



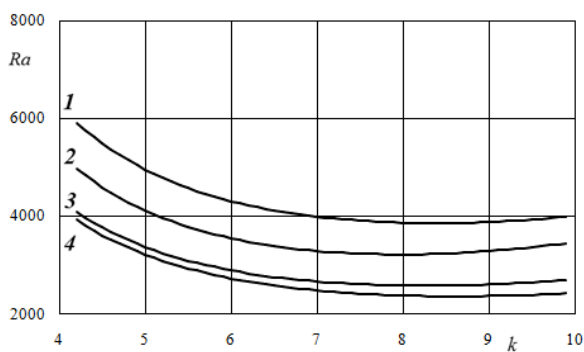
**Рис. 5.** Зависимость минимального числа Рэлея от числа Больцмана

Критическое число Рэлея ведет себя немонотонно, как это следует из сравнения рис. 2, 3 и 5. Сначала имеет место уменьшение критического числа Рэлея, а затем оно растет. Таким образом, первоначально равновесие дестабилизируется, что, по-видимому, является следствием конкуренции термодиффузионного и седиментационного механизмов неустойчивости, а потом оно опять становится более устойчивым.

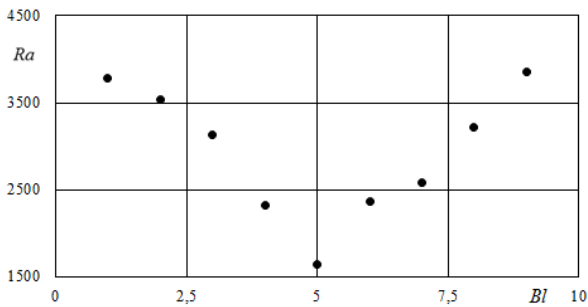
Аналогичное поведение было обнаружено и при значениях параметрах близких к реальным жидкостям  $Pr = 7$ ,  $Sc = 1000$ ,  $Sc_\phi = 2000$ ,  $\varepsilon = 0.01$  (рис.6–8).



**Рис. 6.** Семейства нейтральных кривых для разных чисел Больцмана. Номера кривых соответствуют значениям параметра  $Bl$ : 1 – 0.05, 2 – 0.1, 3 – 0.2, 4 – 0.5, 5 – 1



**Рис. 7.** Семейство нейтральных кривых для разных чисел Больцмана. Номера кривых соответствуют значениям параметра  $Bl$ : 1 – 30, 2 – 20, 3 – 10, 4 – 5

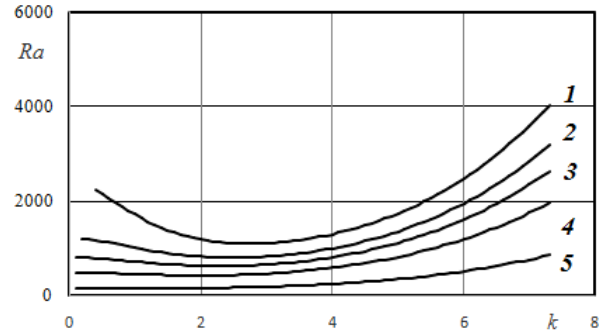


**Рис. 8.** Зависимость минимального числа Рэлея от числа Больцмана

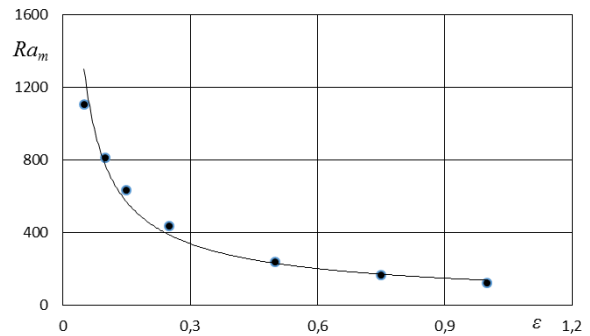
Также было изучено поведение нейтральных кривых при варьировании безразмерного параметра термодиффузии (рис. 9). Указанная серия вычислений проводилась при следующих значениях параметров:  $Pr = 5$ ,  $Sc = 29$ ,  $Sc_\phi = 60$ ,  $Bl = 0.01$ . В ходе расчетов параметр  $\varepsilon$  всегда соответствовал положительной термодиффузии, что объясняется типом рассматриваемых сред. Очевидно, что в случае отрицательной термодиффузии картина устойчивости была бы явно неполной без анализа колебательных возмущений.

С ростом термодиффузионного параметра  $\varepsilon$  нейтральные кривые опять сильно уплощаются в

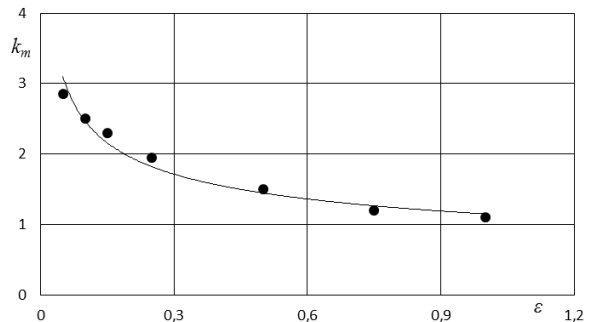
области минимума. Критическое волновое число  $k_m$  стремится в длинноволновую область по степенному закону  $k_m \sim \varepsilon^{-1/3}$ , а критическое число Рэлея  $Ra_m$  убывает согласно закону  $Ra_m \sim \varepsilon^{-3/4}$  (рис. 10, 11).



**Рис. 9.** Семейство нейтральных кривых для разных значений термодиффузионного параметра. Номера кривых соответствуют значениям параметра  $\varepsilon$ : 1 – 0.05, 2 – 0.1, 3 – 0.15, 4 – 0.25, 5 – 0.75



**Рис. 10.** Зависимость минимального числа Рэлея от  $\varepsilon$



**Рис. 11.** Зависимость критического волнового числа от  $\varepsilon$

Из выполненных расчетов можно предположить, что наибольший вклад в конвективное течение вносят термодиффузия и седиментация, так как при изменении соответствующих параметров свойства нейтральных кривых меняются наиболее заметно. Так, при изменении параметра  $Bl$  от 0.05 до 5 критическое число Рэлея уменьшается приблизительно в 4 раза. При увеличении параметра  $\varepsilon$ , соответствующего термодиффузии, от 0.01 до 1 критическое число Рэлея изменялось в 10 раз.

## 6. Выводы

В ходе решения поставленной задачи линейной устойчивости было обнаружено немонотонное поведение критического числа Рэлея при изменении параметра, характеризующего интенсивность седиментации. Сначала при увеличении числа Больцмана критическое число Рэлея убывает, а далее наблюдается его рост. Для термодиффузионного параметра выявлено следующее поведение: с ростом его значения наблюдается смещение критического волнового в длинноволновую область и имеет место уменьшение критического числа Рэлея. Также было обнаружено, что изменение числа Больцмана и термодиффузионного параметра вносит наибольший вклад, нежели варьирование чисел Шмидта. «Включение» термодиффузионного и седиментационного механизмов приводит к уплощению нейтральных кривых, за счет чего ожидается большее разнообразие конвективных режимов в области малой надкритичности.

## Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. 731 с.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Шапошников И. Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси // Прикладная математика и механика. 1953. Т. 17. № 5. С. 604–606.
4. Глухов А. Ф., Демин В. А., Путин Г. Ф. О разделении смесей в связанных каналах // Прикладная механика и техническая физика. 2009. № 1. С. 56–65.
5. Глухов А. Ф., Демин В. А., Путин Г. Ф. Конвекция бинарной смеси в узких каналах при подогреве снизу // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 2. С. 13–23.
6. Глухов А. Ф., Демин В. А., Третьяков А. В. О влиянии термодиффузии на перераспределение примеси при остывании столба бинарной жидкости // Известия ТПУ. 2015. № 11. С. 118–127.
7. Shliomis M. I., Smorodin B. L. Onset of convection in colloids stratified by gravity // Physical Review E. Vol. 71. 2005, 036312.
8. Черепанов И. Н. Тепловая конвекция коллоидной суспензии: дис. на соиск. учён. степ. к.ф.-м.н. Пермь, 2013. 153 с.
9. Розенцвейг Р. Е. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 358 с.
10. Глухов А. Ф., Путин Г. Ф. Конвекция магнитных жидкостей в связанных каналах при подогреве снизу // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2010. № 5. С. 41–48.

11. Глухов А. Ф., Демин В. А., Попов Е. А. Тепловая конвекция магнитной наносуспензии в узких каналах // Известия РАН. Механика жидкости и газа. № 1. 2013. С. 41–51
12. Казанцев М.Ю., Колчанов Н.В. О гравитационной конвекции в коллоидах // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2012. № 4. С. 79–83.
13. Колчанов Н. В., Калинина М. А. Режимы конвекции многокомпонентной молекулярной углеводородной смеси // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2015. № 2. С. 19–24.
14. Kolchanov N. V., Putin G. F. Gravitational convection of magnetic colloid in a horizontal layer // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 89. P. 90–101.
15. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер М. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.

## Reference

1. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of Theoretical Physics, vol. 6. Fluid dynamics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987. 552 p.
2. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids*. Jerusalem. Keterpress, 1976. 330 p.
3. Shaposhnikov I.G. К теории конвективных явлений в бинарной смеси (To the theory of convective phenomena in a binary mixture). *Prikladnaya matematika i mekhanika* (Journal of Applied Mathematics and Mechanics), 1953, vol. 17, no. 5, pp. 604–606. (In Russian).
4. Glukhov A. F., Demin V. A., Putin G. F. Separation of mixture in connected channels. *Journal of Applied mechanics and technical physics*, 2009, vol. 50, no. 1, pp. 58–65.
5. Glukhov A. F., Demin V. A., Putin G. F. Binary-mixture convection in connected channels heated from below. *Fluid Dynamics*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 160–169.
6. Glukhov A. F., Demin V. A., Tretyakov A. V. On thermodiffusion influence on the dopant distribution during the freezing of binary liquid column. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 2015, vol. 326. no. 11, pp. 118–127 (In Russian).
7. Shliomis M. I., Smorodin B. L. Onset of convection in colloids stratified by gravity. *Physical Review E*, 2005, vol. 71, 036312.
8. Cherepanov I. N. *Тепловоа конвектсия коллоидной суспензии* (Thermal convection of colloidal suspension). PhD Thesis, Perm: Perm State University, 2013, 153 p. (In Russian).
9. Rosensweig R. E. *Ferrohydrodynamics*. Cambridge University Press, 1985. 344 p.

10. Glukhov A. F., Putin G. F. Convection of magnetic fluids in connected channels heated from below. *Fluid Dynamics*, 2010, vol. 45, no. 5, pp. 713–718.
11. Glukhov A. F., Demin V. A., Popov E. A. Thermal magnetic nanosuspension convection in narrow channels. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, no. 1, pp. 36–45.
12. Kazantsev M. Y., Kolchanov N. V. On gravitational convection in colloids. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*. 2012, no. 4. pp. 79–83 (In Russian).
13. Kolchanov N. V., Kalinina M. A. Regimes of convection in a multicomponent molecular hydrocarbon mixture. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2015, no. 2, pp. 19–24 (In Russian).
14. Kolchanov N. V., Putin G. F. Gravitational convection of magnetic colloid in a horizontal layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2015, vol. 89, pp. 90–101.
15. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1977. 270 p.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Меньшиков А. И.. Устойчивость равновесия и конвективные режимы наносuspension на основе сложного носителя // Вестник Пермского университета. Физика. 2017. № 2 (36). С. 33–39. doi: 10.17072/1994-3598-2017-2-33-39

**Please cite this article in English as:**

Menshikov A. I. Stability of equilibrium and convective regimes of nanosuspension on the base of binary molecular medium. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2017, no. 2 (36), pp. 33–39. doi: 10.17072/1994-3598-2017-2-33-39