

УДК 536.25
PACS 66.30.Xj

О факторе формы при определении температуропроводности твердых и жидких веществ методом регулярного режима

А. Ф. Глухов, Р. М. Хамдиллин

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: glua@mail.ru

Выполнены сравнительные эксперименты по прогреву (остыванию) плексигласовых образцов разной формы (пластина, куб, шар, цилиндр) применительно к определению коэффициента температуропроводности веществ методом регулярного режима. Безразмерные результаты для всех образцов совпадают при использовании коэффициентов формы совместно с числом Фурье. Фактор формы обсуждается также применительно к определению температуропроводности жидкостей. Анализируется влияние конвекции на теплопроводные температурные поля в жидкостях.

Ключевые слова: коэффициент температуропроводности; метод регулярного режима; тепловая конвекция

Поступила в редакцию 28.06.2017; принята к опубликованию 13.07.2017

On the shape factor of the samples in determining thermal diffusivity of solid and liquid substances by the method of regular regime

A. F. Glukhov, R. M. Chamdillin

Perm State University, Bukirev St. 15, 614990, Perm
email: glua@mail.ru

Comparative experiments on the heating (cooling) of plexiglas samples of different shapes (plate, cube, ball, cylinder) with reference to the determination of the coefficient of thermal diffusivity of substances by the regular thermal regime were performed. The dimensionless results for all forms coincide when using the shape coefficients together with the Fourier number. Shape factor is also discussed with reference to the definition of the thermal diffusivity of fluids. The influence of convection on heat-conducting temperature fields in liquids is analyzed.

Keywords: coefficient of thermal diffusivity, method of regular regime, thermal convection

Received 28.06.2017; accepted 13.07.2017

doi: 10.17072/1994-3598-2017-2-49-58

1. Введение

Применение теоретических, численных решений задач гидродинамики к реальным объектам часто ограничивается отсутствием информации о теплофизических и иных параметрах природных или искусственных сред. Задача экспериментального измерения материальных параметров веществ всегда остается актуальной.

Измерение коэффициента теплопроводности веществ методом регулярного режима [1] обычно проводится только для твердых или пастообразных веществ с использованием образцов правильной геометрической формы. В этом случае нестационарные температурные поля при нагреве (остывании) тел можно рассчитать аналитически.

Ограничивающим фактором применимости этого метода в жидкостях является конвекция, которая, вообще говоря, искажает теплопроводные температурные поля. Однако интенсивность конвекции существенно зависит от формы полости, ее размеров, способа нагрева и массы других причин [2].

Известны конвективные течения, в которых теплопроводные температурные поля не искажаются, например, поперечный профиль температуры при течении жидкости в плоском вертикальном слое при нагреве сбоку или вертикальный градиент температуры в каналах при нагреве снизу [2]. Однако если каналы имеют конечную высоту, то вертикальный градиент постояен только в средней части каналов, вдали от верхней и нижней границы и только при небольших числах Релея [3].

Приведенные примеры показывают, что возникает необходимость анализа применения метода регулярного режима к определению теплопроводности жидкостей и оценки вклада конвекции в систематические погрешности.

2. Регулярный режим и эксперименты с твердыми образцами

Поместим твердый образец в термостат и обеспечим его интенсивный теплообмен с окружающей средой. Начнется процесс прогрева или остывания образца. Важно, чтобы теплоотдача с поверхности тела превышала теплопроводные потоки тепла из внутренних частей образца, т.е. число Био $Bi = \alpha L / \kappa$ должно быть достаточно большим $Bi \gg 1$, где α - коэффициент теплоотдачи, L - характерный размер образца, κ - коэффициент теплопроводности материала образца.

Запишем уравнение нестационарной теплопроводности, описывающее прогрев тела

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \chi \Delta \Theta, \quad (1)$$

где Θ - отклонение температуры в произвольной точке тела от температуры окружающей среды, χ -

температуропроводность материала образца. На границах зададим условие $\Theta = 0$ при $t > 0$.

Решение уравнения (1) для твердых тел разной формы известно [1]. Мы будем выписывать решение для каждой формы (пластина, куб, цилиндр и шар), чтобы сравнить результаты расчетов с экспериментом.

2.1. Детали эксперимента



Рис. 1. Экспериментальные плексигласовые образцы (пластина, куб, цилиндр, шар)

В эксперименте изучался прогрев плексигласовых образцов разной формы: пластина, куб, цилиндр и шар (рис.1). В каждом из образцов выполнено тонкое сверление, достигающее центра. В сверлении, в центре образца, помещается спай медь-константановой дифференциальной термопары, изготовленной из проводов диаметром 0.1 мм. Для уменьшения систематической погрешности из-за оттока тепла по проводам низкотеплопроводный воздух в сверлении замещался либо машинным маслом, либо эпоксидной смолой. Второй спай термопары наклеивался на боковую поверхность образца так, чтобы спаи располагались напротив друг друга на минимальном расстоянии.

Термопара подключалась к прибору Термодат 38В1, который представляет собой восьмиканальный микровольтметр. Прибор имеет интерфейс с компьютером по USB порту, разрешение в температурных измерениях 0.01 °C и быстродействие до 10 измерений в секунду. Показания термопары Θ в динамике выводились на экран монитора при помощи программы TermodatNet и записывались в файлы, пригодные для обработки в электронных таблицах Excel.

Отметим, что возможная систематическая погрешность измерения температуры, связанная с оттоком тепла по термопарным проводам [7], в этом эксперименте никак не влияет на искомый результат. Эта погрешность, безусловно, может несколько уменьшать величину измеряемого сигнала и фиксируемый перепад температур Θ , но это практически не влияет на измерение декремента затухания температурного поля λ . В отличие от

экспериментов [5, 7], где требовалось измерять именно температурный перепад между двумя точками в конвективной камере, в настоящей работе измерялся темп «нагрева».

В начале эксперимента образец комнатной температуры помещался в водную среду предварительно разогретого термостата VT-12 и производилась запись термопарного сигнала в виде термограммы. Обычно использовалась температура воды 50°C; во время записи вода интенсивно перемешивалась встроенной мешалкой.

Для проверки применимости метода оценивалось число Био $Bi = \alpha \cdot d / \kappa$. Для этого в некоторых экспериментах на поверхность образца наклеивался спай второй дифференциальной термопары для измерения температуры поверхности образца относительно температуры термостата ΔT . Другой спай размещался на расстоянии ~1 см, от поверхности, т.е. далее толщины температурного пограничного слоя.

Коэффициент теплопроводности плексигласа $\kappa = 0.19 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$. Коэффициент теплоотдачи с поверхности образца α оценивался из анализа эксперимента следующим образом. Вычислялся дефицит тепловой энергии в объеме тела в начале эксперимента:

$$Q = C\rho V\Theta_{\max},$$

где $\rho = 1.19 \text{ г/см}^3$ – плотность тела, V – его объем, $C = 1.5 \text{ кДж/кг/К}$ – удельная теплоемкость оргстекла, Θ_{\max} – разность температур между образцом и термостатом в начале процесса. Эта энергия поступает из термостата через площадь поверхности S за счет разности ΔT между поверхностной температурой тела и температурой жидкости и может быть найдена численным интегрированием термограммы

$$Q = \alpha S \int_0^{\infty} \Delta T dt.$$

Приравнявая оба значения Q , можно в эксперименте оценить коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = \rho V C \Theta_{\max} \left(S \int_0^{\infty} \Delta T dt \right)^{-1}$$

и число Био Bi .

Ниже в описании опытов с некоторыми конкретными образцами будут показаны термограммы $\Delta T(t)$. Коэффициент теплоотдачи при свободноконвективном обмене $\alpha \sim 2 \cdot 10^2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$, а при прогреве в термостате – $\alpha \sim 4 \cdot 10^2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$.

2.2. Прогрев пластины

Рассмотрим процесс прогрева тела в форме пластины размерами $l \times h \times d$ (рис. 2). Будем считать, что толщина пластины d много меньше дли-

ны l и ширины h : $d \ll l$ и $d \ll h$. Поэтому будем рассматривать зависимость Θ только от координаты x поперек пластин.

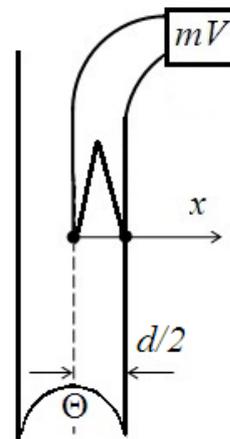


Рис. 2. Схема для расчета температурного поля и для измерения температуры $\Theta(0)$

Таким образом, уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}. \quad (2)$$

В начальный момент времени пластина помещается в среду с другой температурой, принимаемой за начало отсчета. Поэтому температура поверхности пластины за короткое время устанавливается $\Theta = 0$. Граничные условия в последующие моменты времени запишутся в виде

$$\Theta = 0 \text{ при } x = \pm d/2 \text{ для } t > 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (2) известно, в том числе применительно к методу регулярного режима с использованием образца в форме пластины [1]. Поле температуры может быть записано в виде ряда, каждая гармоника которого автоматически удовлетворяет условию (3) на границах пластины:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{d}\right) e^{-\lambda_n t}. \quad (4)$$

Здесь C_n – константы – постоянные амплитуды гармоник ($n = 1, 2, 3, \dots$), зависящие от начального температурного поля в пластине.

Подставляя (4) в (2), получаем декремент затухания каждой из гармоник

$$\lambda_n = \chi \left(\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{d^2} \right). \quad (5)$$

Из формулы (5) видно, что скорость затухания гармоник зависит от пространственного масштаба температурных возмущений. Медленнее всего затухает наиболее крупная гармоника с $n = 1$.

Так как характерное время затухания $\tau_n = \lambda_n^{-1}$, то первая гармоника ($n = 1$) будет иметь время затухания

хания $\tau_1 = d^2 / \pi^2 \chi$, а вторая $\tau_2 = \tau_1 / 9$, т.е. затухает в 9 раз быстрее первой. Амплитуда первой гармоники спустя время τ_1 уменьшается в e раз, а амплитуда второй гармоники за это же время уменьшается на четыре порядка [4]:

$$\frac{A_2(\tau_1)}{A_2(0)} = e^{-\lambda_2 \tau_1} = e^{-\tau_1 / \tau_2} = e^{-9} \approx 10^{-4}.$$

Поскольку следующие гармоники исчезают еще быстрее, то можно с очень хорошей точностью считать, что при $t > \tau_1$ в распределении температуры остается только первое слагаемое ряда (4), т.е. к этому времени остается только самая крупная гармоника – наступает регулярный режим

$$\Theta = C_1 \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) e^{-\lambda_1 t}. \quad (6)$$

Неизвестную константу C_1 для формулы (6) при необходимости можно определить из начальных условий, используя разложение в ряд Фурье температурного поля, имевшегося в пластине на старте опыта. Однако для расчета коэффициента температуропроводности этого не требуется. Достаточно определить декремент затухания $\lambda = \lambda_1$ главной гармоники и через него вычислить χ :

$$\chi = \frac{\lambda d^2}{\pi^2}. \quad (7)$$

Допускаемая при этом систематическая погрешность из-за неучета других размеров пластины может быть легко оценена. Например, неучет размера h дает погрешность не более $\delta \sim (h/d)^2$.

Если использовать для анализа безразмерное время прогрева – модифицированное число Фурье:

$$Fo = t \frac{\chi \pi^2}{d^2} = \frac{t}{\tau},$$

то для пластины при $t = \tau$ число $Fo = 1$.

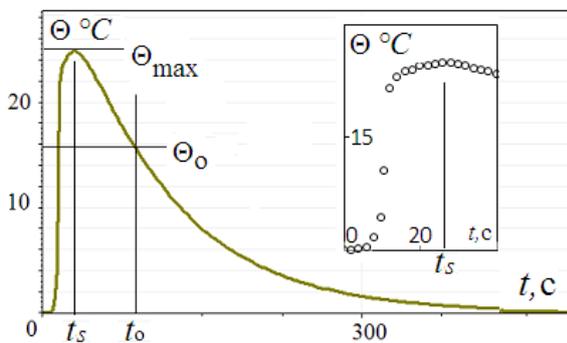


Рис. 3. Термограмма прогрева пластины. На фрагменте показано начало процесса

Для экспериментального тестирования изготовлена пластина из плексигласа размерами $88 \times 40 \times 100$ мм. Расположение спаев термодпары и ее подключение показано на рис. 2.

На рис. 3 изображена термограмма одного эксперимента. После помещения образца в термостат начинается процесс его прогрева.

На фрагменте рис. 3 крупно показан переходный процесс прогрева поверхностного слоя пластины. Переходный процесс длиной ~ 10 с связан, по-видимому, с организацией пограничного слоя вблизи поверхности, через который идет теплообмен с жидкостью.

В соответствии с пп. 2.1 для оценки числа Био используем стартовую разность температур $\Theta_{\max} = 25$ °С. Коэффициент теплоотдачи при интенсивном перемешивании в термостате можно оценить величиной $\alpha \sim 4 \cdot 10^2$ Вт·м⁻²·К⁻¹, и число $Bi \sim 20$. Тонкая ($d = 1$ см) пластина хуже соответствует требованию к методу регулярного режима $Bi > 100$ [1], чем другие образцы. Однако пластину все равно нельзя назвать «термически тонкой», т.е. имеющей при прогреве одинаковую температуру вдоль оси x . Этот второй крайний случай наблюдается, когда $Bi < 0.1$, и это не наш вариант.

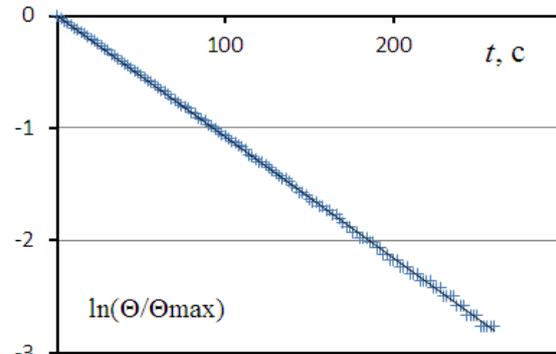


Рис. 4. Логарифм температуры от времени. Обработан фрагмент рис.2, начиная от t_0

На рис. 4 показан фрагмент термограммы в логарифмическом масштабе. Использовался интервал, начиная с момента t_0 . Линейная зависимость $\ln(\Theta/\Theta_0)$ от времени доказывает справедливость формулы (6) и ее пригодность для анализа процесса. Из наклона графика найден декремент $\lambda = 0.0108$ с⁻¹. По формуле (7) определена температуропроводность материала $\chi = 1.09 \cdot 10^{-7}$ м²/с и найдено характерное время прогрева пластины $\tau = d^2 / \pi \chi^2 = 92.6$ с, соответствующее $Fo = 1$.

2.3. Прогрев куба

Теперь рассмотрим процесс нагревания (охлаждения) тела в форме куба стороной d . В этом случае температурное поле является трехмерным, поэтому следует использовать полное уравнение теплопроводности (1). Начало координат поместим в центр куба, а оси направим перпендикулярно граням.

В начальный момент куб помещается в среду с другой температурой. Очень быстро эта же температура устанавливается на его поверхности. Таким образом, граничные условия запишутся в виде

$\Theta = 0$ при $x = \pm d/2, y = \pm d/2, z = \pm d/2$ для $t > 0$.

Решение уравнения (1) ищется в виде ряда, каждое слагаемое которого автоматически удовлетворяет условиям на границах куба [1]

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos k_n x \cos k_n y \cos k_n z e^{-\lambda_n t},$$

где $k_n = (2n - 1)\pi/d$.

Подставляя решение в (1) и, приравнявая правые и левые части отдельно для каждой гармоники, получаем формулу для декрементов затухания n -й пространственной гармоники

$$\lambda_n = 3\chi \left(\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{d^2} \right).$$

Из формулы видно, что, как и в случае пластины, скорость затухания гармоники зависит от ее волнового числа. Регулярный режим характеризуется полем температуры, когда все гармоники затухли и осталась только самая крупная ($n = 1$):

$$\Theta = C_1 \cos \frac{\pi x}{d} \cos \frac{\pi y}{d} \cos \frac{\pi z}{d} e^{-\lambda_1 t}. \quad (8)$$

Чтобы найти температуропроводность, достаточно определить в эксперименте декремент затухания $\lambda = \lambda_1$ и через него вычислить χ

$$\chi = \frac{\lambda d^2}{3\pi^2}. \quad (9)$$

При одинаковой величине d для куба и пластины из этого же материала куб прогревается втрое быстрее $\tau_1 = d^2 / 3\pi^2 \chi$, поэтому для сопоставления прогрева пластины и куба в безразмерном времени число Фурье следует делить на коэффициент формы для куба $F = 3$:

$$\frac{Fo}{F} = \frac{t}{\tau_1}.$$

Для экспериментальной реализации метода использован куб из плексигласа размерами $39 \times 39 \times 39$ мм. В сверление торца куба до середины объема введен спай дифференциальной медь константановой термопары, изготовленной из проводов диаметром 0.1 мм. Для уменьшения систематической погрешности воздух в сверлении заменялся эпоксидной смолой. Второй спай наклеивался на боковую поверхность напротив внутреннего спая. Термопара подключалась к измерительной системе, описанной в разделе 2.1. В эксперименте получена термограмма, вполне аналогичная рис. 3 и рис. 4, но дополнительно записана температура поверхности ΔT относительно воды.

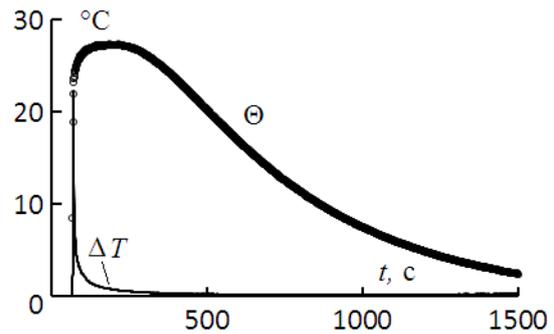


Рис. 5. Термограмма прогрева куба. Тонкая сплошная линия – температура поверхности ΔT

Видно, что в начале процесса отклонение достигает 24°C , а затем достаточно быстро стремится к 0, т.е. температура поверхности стремится к температуре термостата (рис. 5).

Число Био с учетом коэффициента теплоотдачи в баке термостата $\alpha \sim 4 \cdot 10^2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$ можно оценить величиной $Bi \sim 80$.

Из обработки графиков найден декремент $\lambda = 0.0204 \text{ с}^{-1}$. По формуле (9) определена температуропроводность материала $\chi = 1.05 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ и характерное время «прогрева» куба

$$\tau = \frac{d^2}{3\pi^2 \chi} = 490 \text{ с},$$

соответствующее $Fo/F = 1$.

2.4. Прогрев шара

Прогрев шара диаметром d вполне аналогичен прогреву куба. Температурное поле является трехмерным, но аксиально симметричным. Начало координат $r = 0$ поместим в центр шара. Используем уравнение нестационарной теплопроводности в сферических координатах

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \chi \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right),$$

и граничные условия $\Theta = 0$ при $r = d/2$ для $t > 0$.

Решение представляет собой сумму сферических гармоник [1]. Как и для образцов описанных ранее, наиболее крупномасштабная гармоника с наименьшим декрементом затухания описывает наступление регулярного режима

$$\Theta = C \sin \left(\frac{\pi r}{d} \right) \left(\frac{\pi r}{d} \right)^{-1} e^{-\lambda t}.$$

Коэффициент температуропроводности материала шара находится по формуле

$$\chi = \frac{\lambda d^2}{4\pi^2}.$$

Для сопоставления прогрева шара с прогревом пластины безразмерное время – число Фурье следует делить на коэффициент формы $F = 4$.

В эксперименте использован шар, изготовленный в домашних условиях из цилиндрической плексигласовой заготовки диаметром 19.4 мм и высотой 19.8 мм. Для изготовления использовались дрель, шлифовальный круг и наждачная бумага. Качество изготовления довольно грубое (рис. 1), поэтому укажем средний размер и его случайную погрешность $d = 19.6 \pm 0.2$ мм. В сверление диаметром 1 мм до центра шара введен спай дифференциальной медь-константановой термопары, изготовленной из проводов диаметром 0.1 мм. Воздух в сверлении замещался эпоксидной смолой. Второй спай не приклеивался к поверхности, а находился снаружи рядом с шаром. Термопара подключалась к измерительной системе, описанной в разделе 2.1.

В условиях отсутствия термостата эксперимент проводился следующим образом. Шар помещался на 10 мин в горячую воду и принимал ее температуру, затем он переносился в большой сосуд с водой комнатной температуры (объем сосуда $3 \cdot 10^3$ см³, объем шара 4 см³). Это сделано для того, чтобы иметь постоянную температуру вблизи поверхности шара в течение всего опыта. Мешалка в этих опытах не использовалась.

Число Био с учетом коэффициента теплоотдачи за счет свободной конвекции $\alpha \sim 2 \cdot 10^2$ Вт·м⁻²·К⁻¹ можно оценить величиной $Bi \sim 20$.

Из обработки графиков найден декремент $\lambda = 0.0107$ с⁻¹. По формуле (9) определены теплопроводность материала $\chi = 1.04 \cdot 10^{-7}$ м²/с и характерное время «прогрева» шара

$$\tau = \frac{d^2}{4\pi^2 \chi} = 39.5 \text{ с},$$

соответствующее $F_0/F = 1$.

2.5. Прогрев цилиндра

Рассмотрим процесс охлаждения тела в форме цилиндра высотой d и радиусом R . Будем рассматривать только цилиндрически симметричные распределения температуры в образце, т.е. полагаем, что зависимости T от угла φ нет. При таких предположениях уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \chi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right).$$

Начало координат поместим на оси цилиндра посередине высоты $z = 0$. В начале процесса нагретый или охлажденный цилиндр помещается в среду с другой температурой, и эта температура устанавливается на поверхности цилиндра

$$\Theta = 0 \text{ при } r = R \text{ и } z = \pm d/2 \text{ для } t > 0.$$

Используем решение, полученное методом разделения переменных и приведенное в [1] в виде ряда, каждое слагаемое которого автоматически удовлетворяет условию $\Theta = 0$ на торцах цилиндра $z = \pm d/2$ и на боковой поверхности $r = R$:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0 \left(\frac{j_{0n} r}{R} \right) \cos \frac{(2n-1)\pi z}{d} e^{-\lambda_n t},$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка, $j_{0n} = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792 \dots$ нули функции Бесселя. Декремент затухания n -й пространственной гармоники:

$$\lambda_n = \chi \left(\frac{j_{0n}^2}{R^2} + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{d^2} \right).$$

Как и в случае других образцов, видно, что характерное время затухания гармоники зависит от ее порядкового номера n .

При $t > \tau_1$ вклад всех мелкомасштабных гармоник в температурное поле не превышает 0.01%, и поле становится максимально простым и пригодным для анализа в эксперименте – наступает регулярный режим:

$$\Theta = C_1 J_0 \left(\frac{2.405 r}{R} \right) \cos \frac{\pi z}{d} e^{-\lambda_1 t}.$$

Коэффициент теплопроводности цилиндрического образца можно выразить через декремент затухания $\lambda = \lambda_1$ самой крупномасштабной гармоники

$$\chi = \lambda \left(\frac{2.405^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{d^2} \right)^{-1}.$$

Для короткого цилиндра ($d < 2R$) формулу для коэффициента теплопроводности можно записать в стиле формул для пластины, куба и шара следующим образом:

$$\chi = \frac{\lambda d^2}{F \pi^2},$$

где коэффициент формы

$$F = \left(\frac{2.405 d}{\pi R} \right)^2 + 1.$$

Коэффициент F для цилиндра меняется от 1 (тонкая шайба $d \ll R$) до 4 и более. Например, $F = 4$ для цилиндра с отношением высоты к диаметру $d/2R = 1.13$. Понятно, что выбирать в качестве характерного размера d для длинного стержня ($d > 2R$) неправильно, лучше использовать радиус. В этом случае использование F теряет смысл.

Для сопоставления прогрева цилиндра с прогревом пластины безразмерное время – число Фурье следует делить на соответствующий коэффициент формы F для конкретного цилиндра.

В эксперименте использовался цилиндр из плексигласа высотой $d = 45$ мм и радиусом $R = 25$ мм. Вдоль оси цилиндра в сверление до середины объема введен спай дифференциальной медь-константановой термопары, изготовленной из проводов диаметром 0.1 мм. Второй спай наклеивался на боковую поверхность напротив первого спая. Термопара подключалась к измерительной системе, описанной в разделе 2.2. В эксперименте получены термограммы, аналогичные рис. 3 и рис. 4.

Используя коэффициент теплоотдачи в воде термостата $\alpha \sim 4 \cdot 10^2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$, можно оценить число $Bi \sim 10^2$.

Обработкой термограмм найден декремент затухания $\lambda = 0.0204 \text{ с}^{-1}$ и определена температуропроводность материала образца (оргстекло) $\chi = 1.06 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. Характерное время прогрева цилиндра $\tau = 667 \text{ с}$, соответствующее $Fo/F = 1$. Для обсуждаемого образца $F = 2.9$.

2.6. Сравнение результатов по образцам

В таблице приведены экспериментальные тестовые результаты определения температуропроводности для тел разной формы. Результаты в пределах случайных погрешностей эксперимента совпадают и это естественно, т.к. все образцы изготовлены из плексигласа $\chi = 1.06 \pm 0.03 \text{ м}^2/\text{с}$.

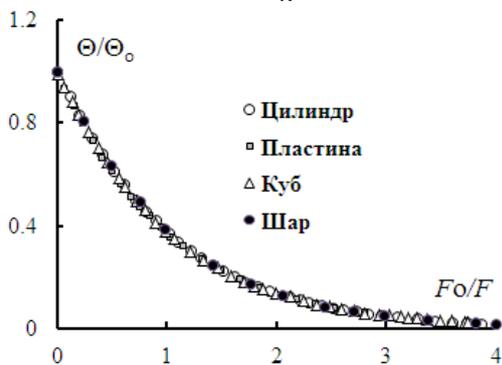


Рис. 6. Обобщенный график прогрева образцов разной формы. Число Фурье $Fo = t \chi \pi^2 / d^2$

Для сравнения результатов прогрева тел разной формы построен обобщенный экспериментальный график (рис. 6) в безразмерных координатах. Для этого время процесса нормировано на время τ затухания главной гармоники для каждого образца, что эквивалентно числу Фурье, делённому на коэффициент формы F :

$$\frac{t}{\tau} = t \frac{\chi \pi^2}{d^2} \frac{1}{F} = \frac{Fo}{F}$$

Амплитуду температурного сигнала нормировали на Θ_0 соответствующего эксперимента.

На рис. 7 приведены времена прогрева тел и показаны значения коэффициентов F для универсальной формулы времени прогрева (остывания):

$$\tau = \frac{d^2}{F \pi^2 \chi}$$

Очень хорошее совпадение всех четырех кривых прогрева для разных тел доказывает справедливость проведенного анализа и разумность применения коэффициентов формы F при сравнении характерных времен прогрева твердых тел разной формы. Также можно отметить, что если тело имеет несколько близких размеров, то в качестве характерного размера можно выбирать минимальный размер, а безразмерное время – число Фурье Fo для сопоставления с другими формами делить на соответствующий коэффициент формы F .

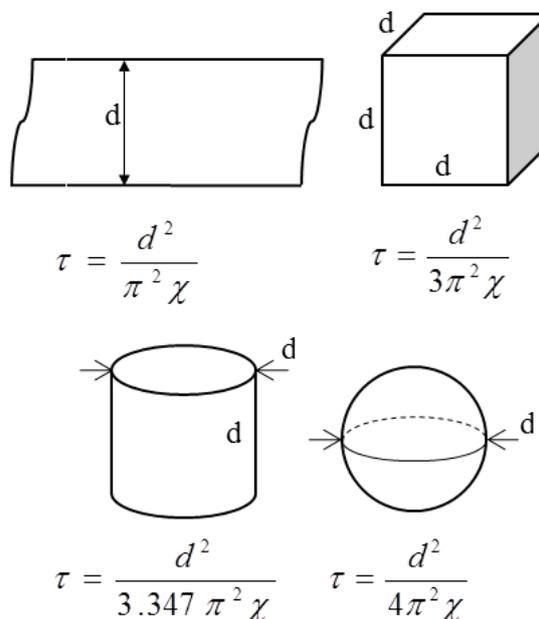


Рис. 7. Время прогрева образцов. Коэффициент формы: пластина – $F = 1$; куб – $F = 3$; цилиндр (при $2R=d$) – $F = 3.347$; шар – $F = 4$

Коэффициент формы образцов, их температуропроводность и время релаксации температурного поля

Форма (размеры в мм)	Коэффициент формы F	$\chi \cdot 10^7$, $\text{м}^2/\text{с}$	τ , с
Пластина 90×40×10.0	1	1.09	92.6
Куб 39×39×39	3	1.05	490
Цилиндр $R = 25$, $d = 45$	2.9	1.06	667
Шар $d = 19.6 \pm 0.2$	4	1.04	93.5

3. Работа с жидкими образцами

Для жидких образцов необходимо оценить степень влияния конвекции на теплопроводные температурные поля. Обычно при решении конвективных задач предполагают наличие искусственно поддерживаемых температурных неоднородностей. Нас же интересует переходный процесс, в котором температурные неоднородности неизбежно затухают со временем до нуля, т.е. в конце процесса конвекция заведомо отсутствует. Поэтому будем оценивать меру конвекции в начале процесса, когда жидкий образец помещается в нагретый термостат. Число Релея – это параметр, который позволяет спрогнозировать интенсивность конвекции:

$$Ra = \frac{g\beta}{\nu\chi} \Theta_0 d^3.$$

Здесь g , β , ν – ускорение свободного падения, температурный коэффициент плотности и кинематическая вязкость соответственно. В качестве температурных неоднородностей используем начальную разницу температур Θ_0 между образцом и термостатом. Учтем также размер образца d .

Оценку числа Релея следует сравнить с характерными для данной формы полости значениями, например, с критическим пороговым числом Релея Ra_c для возникновения конвекции при подогреве снизу. Ясно, что если наша оценка близка Ra_c , то конвекцию в полости нельзя считать слабой. Однако это будет довольно грубой оценкой сверху.

Проведем оценку влияния конвекции для цилиндрического сосуда, в котором мы хотим измерить теплопроводность жидкости методом регулярного режима. Критическое число Релея для возникновения конвекции при нагреве снизу в таком сосуде $Ra_c \approx 10^4$ [2, 5].

В условиях нагрева сбоку, при малых $Ra < Ra_c$ отклонения δT от теплопроводного температурного поля в цилиндре пропорциональны числу Релея:

$$\frac{\delta T}{\Delta T} \approx 10^{-4} Ra,$$

здесь ΔT – перепад температур между торцами цилиндра [5–7]. Таким образом, при $Ra \sim 10^2$ практически гарантируется отсутствие конвекции в полости, и мы имеем всего лишь ~1% конвективных искажений теплопроводного поля.

Если говорить только о порядках величин, то сказанное оценочно можно применить также к кубической и шаровой полости.

Число Релея $Ra < 100$ дает гарантию применимости метода регулярного режима для жидкостей в цилиндрической, кубической или сферической полостях. Однако можно заметить, что обеспечить это условие нелегко. Например, жидкость типа воды с конвективным параметром $g\beta/\nu\chi \sim 10^4 \text{ K}^{-1} \text{ см}^{-3}$, при $\Theta \sim 10 \text{ K}$ и размере $d \sim 1 \text{ см}$ будет характеризоваться числом Релея $\sim 10^5$, т.е. конвекция будет

весьма сильна и ни о каком методе регулярного режима вести речь не следует. Только для очень вязких жидкостей в обсуждаемых полостях можно обеспечить приемлемые числа Релея.

3.1. Вертикальные каналы

Течения в вертикальных каналах при нагреве снизу замечательны тем, что траектории жидких частиц при слабой конвекции прямолинейны. Это, в случае бесконечных по высоте каналов, автоматически приводит к постоянству вертикального температурного градиента, равного заданному, и к тому, что линейные уравнения конвекции описывают не только малые, но и конечноамплитудные течения [2]. Конечность высоты каналов нарушает это утверждение, так как тепло накапливается в верхней части каналов – появляются наведенные конвекцией вертикальные неоднородности [3]. Однако отголоски постоянного градиента температуры сохраняются в средней части каналов при небольших надкритичностях.

Если длинную вертикальную трубку, заполненную изучаемой жидкостью поместить в нагретый термостат, то начнется ее прогрев в радиальном направлении. Жидкость придет в движение, но прямолинейные траектории жидких частиц будут направлены вдоль изотерм, поэтому это не приводит к искажению теплопроводного температурного поля поперек канала. Говоря языком уравнений конвекции, можно отметить, что в уравнении передачи тела будут отсутствовать слагаемые вида $v_r (\partial\Theta/\partial r)$ и $v_z (\partial\Theta/\partial z)$ как раз по причине отсутствия либо радиальной скорости, либо вертикального температурного градиента. По этой же причине в уравнении для скорости можно опустить нелинейный член:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v + g\beta\Theta,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \chi \Delta \Theta,$$

здесь Δ – плоский лапласиан. Для упрощения анализа рассмотрим канал квадратного сечения $d \times d$, поместив начало координат в его центр и направив оси x и y перпендикулярно боковым стенкам. На стенках канала:

$$x = \pm \frac{d}{2}, \quad y = \pm \frac{d}{2} : \quad \Theta = 0, \quad v = 0.$$

Из уравнений видно, что температурное поле поперек канала не зависит от скорости конвекции и находится точно также, как и в разделе 2.3. Регулярный режим характеризуется двумерным полем температуры

$$\Theta = C_1 \cos \frac{\pi x}{d} \cos \frac{\pi y}{d} e^{-\lambda t}.$$

Чтобы найти температуропроводность жидкости, достаточно определить в эксперименте декремент затухания $\lambda = \lambda_1$ и через него вычислить χ :

$$\chi = \frac{\lambda d^2}{2\pi^2}. \quad (9)$$

Время прогрева жидкости в канале квадратного сечения $\tau = d^2 / 2\pi^2 \chi$, что соответствует $Fo/F = 1$, так как для обсуждаемого канала $F = 2$.

Поле скорости не влияет на искомую величину χ , но при необходимости может быть найдено. Например, если канал включить в замкнутый контур так, чтобы замыкающая правая часть контура находилась во время эксперимента при стартовой температуре, т.е. эта часть контура не размещается в термостате. Пусть сечение замыкающего канала заведомо больше, чем сечение измерительного квадратного канала, так что его гидравлическим сопротивлением мы пренебрегаем. Интегрируя уравнение для скорости по замкнутому контуру, можно исключить градиент давления:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \Delta v + g \beta \Theta.$$

Дополнительно учтем следующее обстоятельство: жидкости, как правило, имеют число Прандтля заметно больше единицы $Pr = \nu/\chi > 1$. Т.е. гидродинамические возмущения затухают значительно быстрее температурных полей (у воды быстрее в семь раз, так как $Pr = 7$). Ясно, что ко времени организации регулярного режима ($t > \tau_1$) мелкомасштабные гармоники поля скорости уже затухли – осталась только самая крупная:

$$v = \frac{d^2}{2\pi^2} \frac{g\beta\Theta(0)}{\nu} \cos \frac{\pi x}{d} \cos \frac{\pi y}{d},$$

которая квазистатически меняется вместе с температурным полем Θ . Например, в канале с $d = 2$ мм скорость течения воды при $\Theta(0) = 10$ К составит ~ 0.3 см/с, что соответствует числу Рейнольдса $Re = 6$, т.е. течение следует признать ламинарным. Число Релея, определенное через полутолщину канала, близко по порядку величины, приведенному в разделе 3:

$$Ra = \frac{g\beta}{\nu\chi} \Theta_0 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \sim 10^2.$$

Если рассматривать одиночный, закрытый сверху и снизу канал, то к уравнениям конвекции следует добавить условие нулевого расхода жидкости через любое сечение канала. Профиль скорости теперь будет иным, а величина скорости будет меньше приведенной выше оценки, т.к. в канале образуются встречные потоки, чтобы обеспечить нулевой расход жидкости. Однако это никак не повлияет на справедливость формул для экспериментального определения коэффициента температуропроводности.

Для вертикальной трубки радиусом R , т.е. для канала круглого сечения рассуждения о температурном поле поперек канала аналогичны разделу

2.5, только следует учесть, что канал бесконечен по высоте

$$\Theta = C_1 J_0 \left(\frac{2.405r}{R} \right) e^{-\lambda_1 t}.$$

Температуропроводность жидкости находится через экспериментально определяемый декремент затухания $\lambda = \lambda_1$:

$$\chi = \frac{\lambda d^2}{2.405^2}.$$

Время прогрева жидкости в канале круглого сечения $\tau = R^2 / 2.405^2 \chi$. Вопрос о профиле скорости более сложен, поэтому оставим его за рамками настоящей статьи.

3.2. Тестовый эксперимент

Экспоненциальный процесс прогрева столба жидкой бинарной смеси отмечался в эксперименте и численном расчете в работе [8], однако количественного определения температуропроводности раствора в эксперименте не проводилось.

На рис. 8 показан результат тестового эксперимента с прогревом воды в вертикальном канале кругового сечения. Использовалась полиэтиленовая трубка внешним диаметром 6 мм, длиной 12 см и толщиной стенки 0.1 мм. В центр трубки помещался спай медь-константановой термопары. Второй спай размещался напротив первого, но на наружной стороне трубки. В начале процесса трубка в вертикальном положении помещалась в камеру разогретого термостата VT-12.

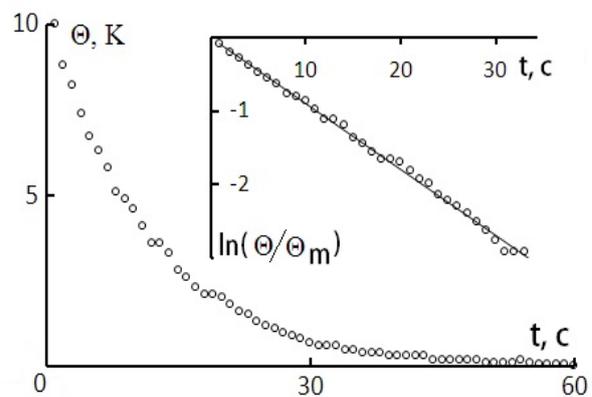


Рис. 8. Прогрев воды в трубке диаметром 6 мм и длиной 120 мм, Θ – разность температур между стенкой трубки и ее центром. На врезке то же, но в логарифмическом масштабе

Для записи процесса использовалась описанная в разделе 2.2 измерительная система. На рис. 8 показан график зависимости показаний термопары от времени. Экспоненциальный закон прогрева подтверждается линейным фрагментом графика в логарифмическом масштабе.

Из графика найден декремент затухания $\lambda = 0.09$ с⁻¹ и величина $\chi = 1.4 \cdot 10^{-7}$ м²/с, кото-

рая оказалась близка к табличному значению температуропроводности воды.

4. Основные результаты

Выполнены тестовые эксперименты прогрева образцов разной формы (пластина, куб, цилиндр, шар), но из одного материала (плексиглас). Благодаря этому удалось показать, что количественного подобия процессов прогрева (остывания) тел разной формы можно достичь путем использования в качестве безразмерного времени – модифицированного числа Фурье Fo , нормированного на коэффициент формы тела F .

Проанализирована возможность измерения коэффициента температуропроводности жидкостей методом регулярного режима в тонкостенных сосудах названной формы, где мешающим фактором выступает тепловая конвекция.

Проведен анализ роли конвекции при измерении температуропроводности жидкостей с использованием вертикальных трубок. Показано, что конвекция, возникающая в трубках при их внезапном всестороннем обогреве, не препятствует применению метода регулярного режима.

Список литературы

1. Цветков Ф. Ф., Григорьев Б. А. Теплообмен. М.: МЭИ, 2005. 550 с.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Glukhov A. F., Zorin S. V., Putin G. F., Petukhova E. S. Thermal convection in connected vertical channels of finite height // Heat transfer. Soviet research. 1988. Vol. 20. N. 2. pp. 167–173.
4. Пшеничников А. Ф., Глухов А. Ф., Порошин Д. В. Определение коэффициента температуропроводности веществ методом регулярного режима. Пермь: Изд-во ПГНИУ. 32 с.
5. Глухов А. Ф., Дуракова Н. В. Лабораторное моделирование конвекции в условиях микрогравитации // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2013. Вып. 1 (23). С. 5–13.
6. Babushkin I. A., Bogatyrev G. P., Glukhov A. F., Putin G. F., Avdeev A. V., Ivanov A. I., Maksimova M. M. Investigation of thermal convection and low-frequency microgravity by the DACON

sensor aboard the Mir orbital complex. // Cosmic Research. 2001. Vol. 39. № 2. pp. 161–169.

7. Глухов А. Ф., Котельникова М. В. Лабораторное моделирование течений в камере датчика конвекции // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2014. Вып. 1 (26). С. 43–48.
8. Глухов А. Ф., Демин В. А., Третьяков А. В. О влиянии термодиффузии на перераспределение примеси при остывании столба бинарной жидкости // Известия ТПУ. 2015. № 11. С. 118–127.

References

1. Tsvetkov F. F., Grigorev B. A. *Teplomassoobmen* (Heat and mass transfer). M.: MEI, 2005. 500 p. (In Russian).
2. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids*. Jerusalem. Keterpress, 1976. 330 p.
3. Glukhov A. F., Zorin S. V., Putin G. F., Petukhova E. S. Thermal convection in connected vertical channels of finite height. *Heat transfer. Soviet research*, 1988, vol. 20, no. 2, pp. 167–173.
4. Pshenichnikov A. F., Glukhov A. F., Poroschin D. V. *Opredeleniye koeffitsiyenta temperaturoprovodnosti veshchestv metodom regulyarnogo rezhima* (Determination of thermal diffusivity coefficient by regular regime method). Perm: Perm University Press, 2005. p. 32 (In Russian).
5. Glukhov A. F., Durakova N. V. Laboratory modeling of thermal convection in conditions of microgravity. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*. 2013, no. 1 (23), pp. 5–13. (In Russian).
6. Babushkin I. A., Bogatyrev G. P., Glukhov A. F., Putin G. F., Avdeev A. V., Ivanov A. I., Maksimova M. M. Investigation of thermal convection and low-frequency microgravity by the DACON sensor aboard the Mir orbital complex. *Cosmic Research*. 2001, vol. 39, no. 2, pp. 161–169.
7. Glukhov A. F., Kotelnikova M. V. Laboratory modeling of flows in the cavity of sensor convection. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*. 2014, no. 1(26), pp. 43–48. (In Russian)
8. Glukhov A. F., Demin V. A., Tretyakov A. V. On thermodiffusion influence on the dopant distribution during the freezing of binary liquid column. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 2015, vol. 326. no. 11, pp. 118–127 (In Russian).

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Глухов А. Ф., Хамдиллин Р. М. О факторе формы при определении температуропроводности твердых и жидких веществ методом регулярного режима // Вестник Пермского университета. Физика. 2017. № 2 (36). С. 49–58. doi: 10.17072/1994-3598-2017-2-49-58

Please cite this article in English as:

Glukhov A. F., Chamdillin R. M. On the shape factor of the samples in determining thermal diffusivity of solid and liquid substances by the method of regular regime. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2017, no. 2 (36), pp. 49–58. doi: 10.17072/1994-3598-2017-2-49-58