

УДК 532.546. 517.925.42
PACS 44.30.+v, 66.10.C-, 05.45.Xt

Синхронизация конвективных течений двухкомпонентной жидкости в смежных ячейках пористой среды

И. В. Тюлькина^{1†}, Д. С. Голдобин^{1,2‡}

¹ Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

² Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

[†] irinatiulkina95@gmail.com

[‡] denis.goldobin@gmail.com

В данной работе исследуется термоконцентрационная конвекция двухкомпонентной жидкости в подогреваемых снизу смежных горизонтальных ячейках пористой среды при наличии поля тяжести. В каждой ячейке возможна длинноволновая колебательная неустойчивость, для описания которой может быть применена фазовая редукция, позволяющая изучить синхронизацию течений. Горизонтальные границы ячеек полагаются непроницаемыми: поток вещества равен нулю; тепловой поток через границы является фиксированным. Вертикальные границы имеют малую теплопроводность. Движения жидкости описываются в приближении Дарси-Буссинеска; учитывается эффект Соре. Дополнительно в рассматриваемой системе есть слагаемое распределенного источника тепла, описывающее теплообмен между ячейками. Таким образом в уравнения вводится связь через температурное поле. Уравнения в длинноволновом приближении выводятся с помощью метода многих масштабов. Поскольку аналитическое описание системы, в рамках слабонелинейного анализа, можно построить только вблизи границы конвективной неустойчивости системы, а вопрос о коллективных эффектах актуален для колебательных режимов, в работе рассматривается исключительно случай колебательной неустойчивости. На основе уравнений для амплитуды колебательных мод со связью выводятся уравнения для фаз колебаний, которые являются ключевыми уравнениями фазового описания. Для этих уравнений найдены значения параметров, при которых в системе существует режим синхронизации течений, также найдено решение для устойчивого синхронного режима.

Ключевые слова: термоконцентрационная конвекция; пористая среда; фазовое описание; синхронизация

Поступила в редакцию 04.05.2023; после рецензии 12.06.2023; принята к опубликованию 15.06.2023

Synchronization of convective currents of a two-component fluid in adjacent porous cells

I. V. Tyulkina^{1†}, D. S. Goldobin^{1,2‡}

¹ Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

² Perm State University, Perm, Russia

[†] irinatiulkina95@gmail.com

[‡] denis.goldobin@gmail.com

In this work, we study the Soret-driven convection of a two-component fluid in adjacent rectangular cells of a porous medium heated from below in the presence of a gravitational field. In each cell, a long-wavelength oscillatory instability is possible; it can be described by means of phase re-

duction, which makes it possible to study the synchronization of currents. The horizontal boundaries of the cells are assumed to be impenetrable (including for impurities), the heat flux is assumed to be fixed. The vertical boundaries have low thermal conductivity. Fluid motions are described by the Darcy-Boussinesq approximation. Additionally, in this system there is a distributed heat source term describing the heat exchange between the cells. In this way, the equations become coupled via the temperature field. The equations within the long-wavelength approximation are derived using the standard method of multiple scales. An analytical description of the system within the framework of a weakly nonlinear analysis can only be constructed near the threshold of the convective instability of the system, and the issue of collective effects is relevant for oscillatory modes; therefore, we restrict our study to the case of an oscillatory instability. On the basis of equations for the amplitudes of the coupled oscillatory modes, we derived equations for the oscillation phases, which are the key equations of the phase description. For these equations, we found the values of the parameters at which the system has the regime of synchronization of currents; the solution for a stable synchronous regime is also reported.

Keywords: Soret-driven convection; porous medium; phase reduction; synchronization

Received 04 May 2023; revised 12 June 2023; accepted 15 June 2023

doi: 10.17072/1994-3598--2023-2-59-68

1. Введение

Фазовое описание использовалось в различных областях науки, но в гидродинамике его применение остается весьма ограниченным. Это связано с тем, что большинство гидродинамических задач – это распределенные системы, для которых полное математическое описание чрезвычайно трудоемко.

Синхронизация ансамблей осцилляторов является важным эффектом для многих областей физики [1]. Для количественной характеристики синхронности вводится понятие фазы колебаний. Изучение синхронизации в гидродинамических системах может дать важные знания об управлении тепло- и массопереносом.

В работах [2, 3] построено коллективное фазовое описание колебательной конвекции в ячейках Хеле-Шоу и описана динамика колебательной конвекции в системе. В работах [4, 5] была решена проблема фазового отклика для синхронизации периодических течений: в частности, описано влияние периодического внешнего воздействия на нестационарный след, возникающий при обтекании цилиндра («дорожка Кармана»).

В данной работе демонстрируется использование фазового описания для колебательной термоконцентрационной конвекции в смежных ячейках пористой среды с учетом эффекта Соре. Все результаты получены аналитически (в работах [2–5] фазовое описание вводится с опорой на численные расчеты).

Рассматриваемая в настоящей работе система была выбрана как достаточно изученная гидродинамическая система [6], удобная для аналитического построения фазового описания. Ранее другими авторами была исследована термоконцен-

трационная конвекция в горизонтальном слое пористой среды [6–9]. В [6] обсуждались конвективные течения в тонком слое пористой среды, вызванные локализованным источником тепла или примеси, а также были изучены режимы поведения системы. В [9] продемонстрировано, что линейная неустойчивость механического равновесия связана с длинноволновыми возмущениями, и аналитически найдена интенсивность конечно-амплитудной конвекции в рамках приближения плоско параллельных течений.

2. Постановка задачи

Рассматривается термоконцентрационная конвекция двухкомпонентной жидкости в подогреваемых снизу смежных горизонтальных ячейках пористой среды (рис. 1). Границы ячеек полагаются непроницаемыми (в том числе для примеси), тепловой поток через горизонтальные границы – фиксированным, вертикальные границы обладают очень низкой теплопроводностью. Тепловая конвекция рассматривается с учетом эффекта Соре (эффект термодиффузии), в данном случае имеется поток концентрации примеси, который выглядит так:

$$\mathbf{j} = -D \left(\nabla C + \alpha_T \frac{C}{T} \nabla T \right),$$

где D и α_T – коэффициент диффузии и константа термодиффузии соответственно.

Предполагается, что выравнивание температуры между жидкостью и твердым скелетом происходит достаточно быстро, и отдельные температуры для них не вводятся. При малых перепадах температуры и концентрации можно допустить, что плотность жидкости зависит от них линейно:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0) + \beta_c(C - C_0)),$$

где C – концентрация тяжелой компоненты, ρ_0 – плотность смеси при температуре T_0 и концентрации C_0 , β – коэффициент теплового расширения жидкости, $\beta_c = \rho_0^{-1}(\partial\rho/\partial C)_{T,p}$ определяет зависимость плотности от концентрации. Для потока концентрации изменения концентрации и температуры учитываются лишь в градиентах. Система координат выбирается таким образом, что плоскость (x, y) горизонтальна, $z = 0$ и $z = h$ – нижняя и верхняя границы слоя (рис. 1).

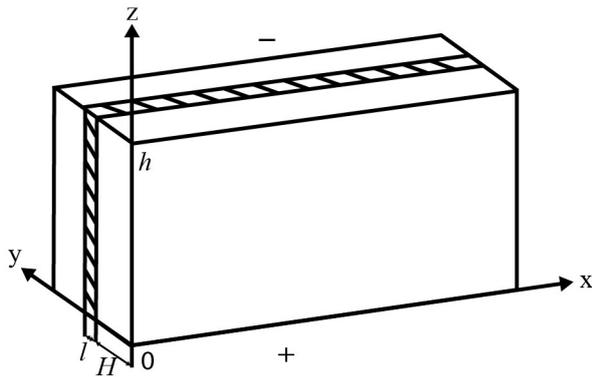


Рис. 1. Геометрия задачи

Для описания поведения системы используется модель Дарси-Буссинеска [10]:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \frac{vm}{K} \mathbf{v}_1 + g(\beta T_1 - \beta_c C_1) \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial C_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) C_1 &= D \Delta C_1 - \frac{\alpha}{T_0} \Delta T_1, \\ \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{1}{b} (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) T_1 &= \chi \Delta T_1 + Q_1, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= 0, \\ z = 0, h: \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} &= A, \quad v_{1z} = 0, \quad j_{1z} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

где \mathbf{v} – средняя скорость (осредненная по масштабам пор) жидкости в порах, m – пористость среды (отношение объема пор в элементе пористой среды к объему этого элемента), K – коэффициент проницаемости, h – высота ячейки, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ – вектор ускорения свободного падения, b – отношение теплоемкости пористой среды, насыщенной жидкостью, к части этой теплоемкости, приходящейся на жидкость в порах ($b > 1$), χ – температуропроводность пористой среды, насыщенной жидкостью, Q – распределенный источник тепла. Индекс 1 означает, что поля относятся к первой ячейке. Аналогичная система уравнений получится для второй ячейки.

Система безразмерных уравнений, описывающая поведение конечных возмущений состояния механического равновесия:

$$T = -z, \quad C = -z$$

имеет вид

$$\begin{aligned} -\nabla p_1 - \mathbf{v}_1 + Ra((1 - Nb)\theta_1 + N\phi_1)\mathbf{e}_z &= 0, \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + (b\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)(\phi_1 - (b-1)\theta_1) &= \\ &= b\Delta\theta_1 + S\Delta(\phi_1 - (b-1)\theta_1), \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\theta_1 &= \Delta\theta_1 + w_1 + Q_1, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_1 &= 0, \\ z = 0, 1: \quad w &= \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

где θ – возмущение поля температуры, ϕ – возмущение поля $\Phi \equiv bT - C$. Безразмерные параметры:

$$N = \frac{(-\alpha_T)\beta_c C_0}{\beta T_0}, \quad Ra = \frac{\beta Ah^2 gK}{mbv\chi}, \quad S = \frac{D}{\chi}, \quad (2.2)$$

где N – параметр плавучести, Ra – число Релея-Дарси, S – обратное число Льюиса; при определении параметра плавучести из соображений удобства явно учтено, что для многих типичных растворов [11, 12] константа термодиффузии $\alpha_T < 0$.

В случае двух смежных тонких ячеек поля скорости и температуры будут зависеть только от координат (x, z) , а теплообмен между ячейками может быть описан посредством источников слагаемого

$$Q = a(\theta_2 - \theta_1). \quad (2.3)$$

Здесь коэффициент связи между пористыми ячейками a определяется как

$$a = \frac{\kappa_b h^2}{\kappa Hl}, \quad (2.4)$$

где κ_b – температуропроводность боковых стенок ячеек, H – толщина ячейки, l – ширина стенки между ячейками (см. рис. 1).

Сделаем замену переменных и параметров:

$$\begin{aligned} \phi^* &= \frac{\phi}{(b - S(b-1))}, \\ Ra^* &= (1 - NS(b-1))Ra, \\ N^* &= \frac{Nb - NS(b-1)}{1 - NS(b-1)}. \end{aligned}$$

Опуская звездочки и переписывая уравнения в терминах вертикальной компоненты скорости w_1 , получаем

$$\Delta w_1 = Ra\Delta_2((1-N)\theta_1 + N\phi_1), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + b\hat{\Gamma}_1(\phi_1 - \tilde{b}\theta_1) = S\Delta\phi_1 + \Delta\theta_1 + \frac{ba(\theta_2 - \theta_1)}{b-S(b-1)}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \hat{\Gamma}_1\theta_1 = \Delta\theta_1 + w_1 + a(\theta_2 - \theta_1), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} = \Delta_2 p_1, \quad (2.8)$$

$$z = 0, 1: \quad w_1 = \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0, \quad (2.9)$$

где $\hat{\Gamma} = w_1 \frac{\partial}{\partial z} - \nabla_2 p_1 \cdot \nabla_2$ – оператор конвективной производной, $\tilde{b} = (b-1)/(b-S(b-1))$.

3. Длинноволновое приближение

В рамках длинноволнового приближения можно предположить малость горизонтальных производных поля скорости по сравнению с вертикальными. Для учета нелинейности уравнений, связанной с конвективной производной, вертикальную компоненту поля скорости нужно считать малой: $w \sim L^{-1} \sim \varepsilon$, где L – характерный горизонтальный масштаб течений. Скалярные поля, в свою очередь, полагаются большими $p, \phi, \theta \sim L \sim \varepsilon^{-1}$.

В пределах данного раздела индексы, указывающие номер ячейки, опущены для краткости обозначений.

Применим метод многих масштабов для системы (2.5)–(2.8) с граничными условиями (2.9), подставляя в нее следующие разложения переменных:

$$\begin{aligned} w &= \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots, \\ p &= \varepsilon^{-1} p^{(-1)} + \varepsilon^0 p^{(0)} + \varepsilon^1 p^{(1)} + \dots, \\ \theta &= \varepsilon^{-1} \theta^{(-1)} + \varepsilon^0 \theta^{(0)} + \varepsilon^1 \theta^{(1)} + \dots, \\ \phi &= \varepsilon^{-1} \phi^{(-1)} + \varepsilon^0 \phi^{(0)} + \varepsilon^1 \phi^{(1)} + \dots, \\ x &= \varepsilon^{-1} x^{(-1)}, \\ \nabla_2 &= \varepsilon^1 \nabla_2^{(1)} = \varepsilon^1 \tilde{\nabla}_2. \end{aligned}$$

В порядке ε^{-1} уравнений (2.6)–(2.7) (ведущий порядок для полей θ и ϕ) находим:

$$\theta^{(-1)} = \mathcal{G}(x, y), \quad \phi^{(-1)} = \varphi(x, y).$$

В порядке ε^1 уравнений (2.5) и (2.8) (ведущий порядок для поля скорости):

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= -\frac{Ra}{12} \tilde{\Delta}_2((1-N)\mathcal{G} + N\varphi)(6z - 6z^2), \\ p^{(-1)} &= -\frac{Ra}{12}((1-N)\mathcal{G} + N\varphi)(6 - 12z) \equiv \\ &\equiv P(x, y)(6 - 12z). \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $P(x, y)$ для амплитуды поля давления.

В порядке ε^0 уравнений (2.6)–(2.7) (первая поправка для θ и ϕ):

$$\theta^{(0)} = \Theta(x, y)(3z^2 - 2z^3),$$

$$\Theta(x, y) = \tilde{\nabla}_2 P \cdot \tilde{\nabla}_2 \mathcal{G},$$

$$\phi^{(0)} = \Phi(x, y)(3z^2 - 2z^3),$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{S} \tilde{\nabla}_2 P \cdot \tilde{\nabla}_2 (b\varphi - (1 + b\tilde{b})\mathcal{G}).$$

В уравнениях для θ и ϕ в порядке ε^1 возникают слагаемые $\hat{\Gamma}^{(1)}\theta^{(0)} + \hat{\Gamma}^{(2)}\theta^{(-1)}$ и $\hat{\Gamma}^{(1)}\phi^{(0)} + \hat{\Gamma}^{(2)}\phi^{(-1)}$, которые можно расписать как:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{(1)}\theta^{(0)} + \hat{\Gamma}^{(2)}\theta^{(-1)} &= w^{(1)}\theta_z^{(0)} + \tilde{\nabla}_2 p^{(-1)}\tilde{\nabla}\theta^{(0)} \\ &\quad + w^{(2)}\theta_z^{(-1)} + \tilde{\nabla}_2 p^{(0)}\tilde{\nabla}\theta^{(-1)}, \\ \hat{\Gamma}^{(1)}\phi^{(0)} + \hat{\Gamma}^{(2)}\phi^{(-1)} &= w^{(1)}\phi_z^{(0)} + \tilde{\nabla}_2 p^{(-1)}\tilde{\nabla}\phi^{(0)} \\ &\quad + w^{(2)}\phi_z^{(-1)} + \tilde{\nabla}_2 p^{(0)}\tilde{\nabla}\phi^{(-1)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Также необходимо учитывать граничные условия (2.9) и уравнение (2.8):

$$\frac{\partial \theta^{(-1)}}{\partial z} = \frac{\partial \phi^{(-1)}}{\partial z} = 0, \quad p^{(0)} = (\tilde{\Delta}_2)^{-1} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z}.$$

Берем интегралы от (3.1), используя равенства выше, и получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\hat{\Gamma}^{(1)}\theta^{(0)} + \hat{\Gamma}^{(2)}\theta^{(-1)}) dz &= \\ &= -\frac{6}{5}(\Theta\tilde{\Delta}_2 P + \tilde{\nabla}_2 \Theta \cdot \tilde{\nabla}_2 P) = -\frac{6}{5}\tilde{\nabla}_2 \cdot (\Theta\tilde{\nabla}_2 P), \\ \int_0^1 (\hat{\Gamma}^{(1)}\phi^{(0)} + \hat{\Gamma}^{(2)}\phi^{(-1)}) dz &= \\ &= -\frac{6}{5}(\Phi\tilde{\Delta}_2 P + \tilde{\nabla}_2 \Phi \cdot \tilde{\nabla}_2 P) = -\frac{6}{5}\tilde{\nabla}_2 \cdot (\Phi\tilde{\nabla}_2 P). \end{aligned}$$

Конечная система уравнений с учетом всех ведущих поправок для некоторого аналога «химического потенциала» φ_1 и температуры \mathcal{G}_1 принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{6b^2}{5S} \nabla_i \left(\nabla_j (\varphi_1 - \tilde{b}\mathcal{G}_1) \nabla_i P_1 \nabla_j P_1 \right) &= \\ &= \frac{ba}{b-S(b-1)} (\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1) + S\Delta\varphi_1 + \Delta\mathcal{G}_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial t} - \frac{6}{5} \nabla_i \left(\nabla_j \mathcal{G}_1 \nabla_i P_1 \nabla_j P_1 \right) =$$

$$= a(\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1) + \Delta\mathcal{G}_1 - \Delta P_1,$$

где используется правило Эйнштейна суммирования по повторяющимся индексам и значок «тильда» опущен. Для краткости уравнения записаны с использованием амплитуды поля давления

$$P_1(x, y) = \frac{Ra}{12}((1-N)\vartheta + N\varphi).$$

Аналогичные выкладки можно проделать для второй ячейки.

4. Фазовое уравнение колебательной конвекции

Аналитическое описание системы, в рамках слабонелинейного анализа, можно построить только вблизи границы конвективной неустойчивости системы (3.2) [6]. Поскольку вопрос о коллективных эффектах актуален для колебательных режимов, далее мы ограничиваемся случаем колебательной неустойчивости (см. карту режимов линейной неустойчивости системы на рис. 2), возникающей выше порогового значения числа Релея–Дарси

$$Ra_0 = \frac{12 + 12S}{1 - N},$$

наблюдаемой при $N_{*1} < N < N_{*2}$, где $N_{*1} = S^2 / (S^2 + S + 1)$, $N_{*2} = 1$. [6]

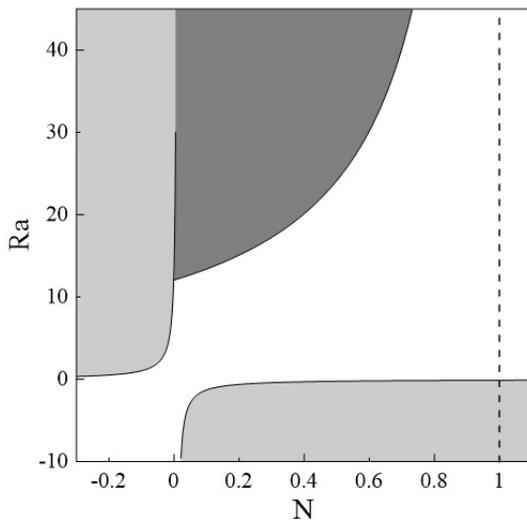


Рис. 2. Карта режимов нелинейной неустойчивости системы (3.1), параметр $S=0.01$

Вблизи границы колебательной неустойчивости системы (3.2) [6], применяя к уравнениям метод многих масштабов, можно получить амплитудные уравнения (см. приложение 8.1):

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_2} = C_R \delta Ra A_1 + C_A a (A_2 - A_1) + C_T |A_1|^2 A_1, \quad (4.1)$$

при этом поля

$$\begin{cases} \varphi \\ \vartheta \end{cases} = \begin{cases} (A_1 e^{i\omega t} + c.c.) \cos kx \\ (-A_1 (S + i\omega/k^2) e^{i\omega t} + c.c.) \cos kx \end{cases},$$

где ω_0 – частота колебаний на границе устойчивости:

$$\frac{\omega_0^2}{k^4} = \frac{N Ra_0}{12} - S^2 = \frac{(1+S)N}{1-N} - S^2.$$

Коэффициенты C_R , C_A , C_T зависят от безразмерных параметров и вычисляются на основе уравнений (3.2).

Из амплитудного уравнения для $A_1 = R_1 e^{i\xi_1}$ можно получить уравнения для динамики амплитуды R_1 и фазы колебаний $\psi_1 = \xi_1 + \omega_0 t$ [13] (см. приложение 8.2):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\psi_2 - \psi_1 + \beta) - \sin \beta), \\ \Omega_0 &= \omega_0 + \left\{ \text{Im } C_R + \text{Re } C_R \frac{\text{Im } C_T}{\text{Re } C_T} \right\} \delta Ra, \\ K &= C_A a, \\ \beta &= \arg(K) = \arg(C_A), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где Ω_0 – частота колебательного течения при $Ra = Ra_0 + \delta Ra$, β – фазовый сдвиг связи, K – сила связи.

В итоге получаем систему связанных уравнений для фазы колебаний вида:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\psi_2 - \psi_1 + \beta) - \sin \beta), \\ \dot{\psi}_2 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\psi_1 - \psi_2 + \beta) - \sin \beta). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Это система типа Курамото–Сакагучи [14] – классическая модель для изучения коллективных колебаний в нелинейной динамике. Для изучения взаимодействий между элементами и изучения коллективных эффектов, к этой системе может быть применен метод круговых кумулянтов [15, 16].

5. Синхронизация колебаний в смежных ячейках

Допустим возможность несовпадения собственных частот колебательного течения в ячейках в связи с их неидеальной идентичностью: $\Omega_{01} \neq \Omega_{02}$. Тогда уравнения (4.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \Omega_{01} + |K|(\sin(\psi_2 - \psi_1 + \beta) - \sin \beta), \\ \dot{\psi}_2 &= \Omega_{02} + |K|(\sin(\psi_1 - \psi_2 + \beta) - \sin \beta). \end{aligned} \quad (5.1)$$

В синхронном режиме $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = \Omega_{00}$ – частота синхронного колебания течений в ячейках. Обозначая разность фаз колебаний $\psi_1 - \psi_2 = \delta\psi$ и записывая уравнения (5.1) через Ω_{00} , получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{00} &= \Omega_{01} + |K|(\sin(-\delta\psi + \beta) - \sin \beta), \\ \Omega_{00} &= \Omega_{02} + |K|(\sin(\delta\psi + \beta) - \sin \beta). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Если взять разность первого и второго уравнений в системе (5.2), получим

$$\sin \delta\psi = \frac{\Omega_{01} - \Omega_{02}}{2|K| \cos \beta}. \quad (5.3)$$

Для суммы уравнений получим

$$\Omega_{00} = \frac{\Omega_{01} + \Omega_{02}}{2} - |K| \sin \beta (1 - \cos \delta\psi), \quad (5.4)$$

для которого (5.3) дает пару решений с различными знаками $\cos \delta\psi$:

$$\cos \delta\psi_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \delta\psi} = \pm \sqrt{1 - \frac{(\Omega_{01} - \Omega_{02})^2}{4|K|^2 \cos^2 \beta}}. \quad (5.5)$$

Отсюда можно получить значения параметров, при которых в системе существует синхронный режим.

6. Устойчивость синхронного режима

Рассмотрим возмущения синхронного режима для анализа его устойчивости:

$$\psi_j = \psi_{0j} + \tilde{\psi}_{0j}, \quad (6.1)$$

где $\psi_{01,02} = \Omega_{00}t \pm \frac{\delta\psi}{2}$ – фазы колебаний в синхронном режиме, $\tilde{\psi}_{01,02}$ – возмущения.

Подставляя ψ_1 в систему (4.3), получим

$$\Omega_{00} + \dot{\tilde{\psi}}_1 = \Omega_{01} + |K| [\sin(\psi_{02} - \psi_{01} + \beta + \tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_1) - \sin \beta].$$

Используем систему (5.2) для сокращения слагаемых в (6.2), а также учтем только линейные возмущения в слагаемом с $|K|$, тогда

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\psi}}_1 &= |K| \cos(-\delta\psi + \beta)(\tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_1), \\ \dot{\tilde{\psi}}_2 &= |K| \cos(\delta\psi + \beta)(\tilde{\psi}_1 - \tilde{\psi}_2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Решая задачу на собственные значения, найдем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda|K| \cos \delta\psi \cos \beta = 0, \quad (6.3)$$

где λ – собственные значения.

Из уравнения (6.3) получаем два корня для λ : $\lambda = 0$ и $\lambda = 2|K| \cos \delta\psi \cos \beta$. Найденные собственные значения λ показывают, что в паре решений (5.3)–(5.5) устойчивое решение соответствует $\cos \delta\psi \cos \beta > 0$, а неустойчивое – $\cos \delta\psi \cos \beta < 0$. По этой причине режимы синхронных колебаний существуют при $|\sin \delta\psi| < 1$ (5.3), когда расстройка частот удовлетворяет неравенству

$$\Omega_{01} - \Omega_{02} < 2|K| \cos \beta. \quad (6.5)$$

Для устойчивого синхронного режима получается

$$\cos \delta\psi = \frac{\sqrt{4|K|^2 \cos^2 \beta - (\Omega_{01} - \Omega_{02})^2}}{2|K| \cos \beta}. \quad (6.6)$$

Из этого следует, что решение для устойчивого синхронного режима описывается выражениями (5.3), (5.4), (6.6).

Уравнение (6.6) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \cos \delta\psi &= \left[1 - \left(\omega_{01} - \omega_{02} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left\{ \operatorname{Im} C_R + \operatorname{Re} C_R \frac{\operatorname{Im} C_T}{\operatorname{Re} C_T} \right\} \left(\delta R a_1 - \delta R a_2 \right) \right) / \right. \\ &\left. / 4|C_A|^2 a^2 \cos^2 \beta \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Выражения (8.6)–(8.8) для коэффициентов C_R , C_A , C_T через безразмерные параметры приводятся в приложении 8.1.

7. Заключение

В данной работе исследованы коллективные эффекты, а именно, синхронизация в смежных горизонтальных ячейках пористой среды в поле тяжести. Рассматривается термоконцентрационная конвекция двухкомпонентной жидкости с учетом эффекта Соре. Связь между ячейками происходит через поле температуры (теплопередача через общую стенку с низкой теплопроводностью).

Выведены уравнения динамики в длинноволновом приближении с использованием метода многих масштабов. Аналитическое описание системы в рамках слабонелинейного анализа строится вблизи границы конвективной неустойчивости. Полученные уравнения для фаз колебаний конвективных течений в двух ячейках являются системой типа Курамото–Сакагучи – одна из классических моделей для изучения коллективных колебаний в нелинейной динамике.

Исследована синхронизация колебаний в ячейках. Ввиду того, что реальные ячейки не могут быть полностью идентичными, вводятся разные частоты колебательного течения в каждой ячейке. Найденны соотношения управляющих параметров системы, при которых существует режим синхронизации течений. Получено решение для устойчивого синхронного режима.

Работа выполнена в рамках бюджетной темы № 121112200078-7.

8. Приложения

8.1. Слабонелинейный анализ на границе колебательной неустойчивости

В настоящем разделе представлен слабонелинейный анализ на границе колебательной неустойчивости для вывода амплитудных уравнений системы (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{6b^2}{5S} \nabla_i \left(\nabla_j (\varphi_1 - \tilde{b} \vartheta) \nabla_i P_1 \nabla_j P_1 \right) = \\ = \frac{ba}{b-S(b-1)} (\vartheta_2 - \vartheta_1) + S \Delta \varphi_1 + \Delta \vartheta_1, \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} - \frac{6}{5} \nabla_i \left(\nabla_j \vartheta_1 \nabla_i P_1 \nabla_j P_1 \right) = \\ = a (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \Delta \vartheta_1 - \Delta P_1, \end{aligned}$$

с помощью метода многих масштабов. Перепишем систему (8.1) как

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} = \hat{L} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix} + a \hat{Q} \begin{Bmatrix} \varphi_2 - \varphi_1 \\ \vartheta_2 - \vartheta_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T_\varphi(\varphi_1, \varphi_2) \\ T_\vartheta(\vartheta_1, \vartheta_2) \end{Bmatrix}. \quad (8.2)$$

Наряду с этим вектор-состояния системы

$$|\Psi_1\rangle = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \vartheta_1 \end{Bmatrix},$$

уравнение (8.2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_1\rangle = \hat{L} |\Psi_1\rangle + a \hat{Q} (|\Psi_1\rangle - |\Psi_2\rangle) \\ + \hat{T} |\Psi_1\rangle |\Psi_1\rangle |\Psi_1\rangle. \end{aligned} \quad (8.3)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L} &\equiv \begin{pmatrix} S \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^2} \\ -\frac{RaN}{12} \frac{\partial}{\partial x^2} & \left(1 - \frac{Ra}{12}(1-N)\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \\ \hat{Q} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & b \\ b-S(b-1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{T} \begin{Bmatrix} f_1 \\ g_1 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} f_2 \\ g_2 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} f_3 \\ g_3 \end{Bmatrix} &\equiv \\ &\equiv \begin{Bmatrix} \frac{6b^2}{5S} \nabla_i \left(\nabla_j \left(f_1 - \frac{(b-1)g_1}{b-S(b-1)} \right) \nabla_i P_2 \nabla_j P_3 \right) \\ \frac{6}{5} \nabla_i \left(\nabla_j g_1 \nabla_i P_2 \nabla_j P_3 \right) \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

где $P_n = \frac{Ra}{12} ((1-N)g_n + Nf_n)$.

На границе колебательной неустойчивости линейризованные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{L} |\Psi\rangle$$

допускают единственное нейтрально устойчивое решение $|\Psi_\omega\rangle$:

$$\hat{L} |\Psi_\omega\rangle = i\omega |\Psi_\omega\rangle.$$

Для эрмитово сопряженной задачи

$$\langle \Psi_\omega^+ | \hat{L} = i\omega \langle \Psi_\omega^+ |, \quad \hat{L}^+ |\Psi_\omega^+\rangle = -i\omega |\Psi_\omega^+\rangle. \quad (8.4)$$

Здесь, для

$$|\Psi_\omega\rangle = \begin{Bmatrix} \varphi_\omega \cos kx \\ \vartheta_\omega \cos kx \end{Bmatrix}, \quad |\Psi_\omega^+\rangle = \begin{Bmatrix} \varphi_\omega^+ \cos kx \\ \vartheta_\omega^+ \cos kx \end{Bmatrix},$$

получаем

$$\hat{L} \equiv \begin{pmatrix} -Sk^2 & -k^2 \\ \frac{RaNk^2}{12} & \left(\frac{Ra}{12}(1-N)-1\right)k^2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}^+ \equiv \begin{pmatrix} -Sk^2 & \frac{RaNk^2}{12} \\ -k^2 & \left(\frac{Ra}{12}(1-N)-1\right)k^2 \end{pmatrix}.$$

Допуская отклонения от границы линейной неустойчивости, перепишем (8.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_1\rangle = \hat{L} |\Psi_1\rangle + \delta \hat{L} |\Psi_1\rangle + \\ + a \hat{Q} (|\Psi_1\rangle - |\Psi_2\rangle) + \hat{T} |\Psi_1\rangle |\Psi_1\rangle |\Psi_1\rangle, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где

$$\delta \hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{Nk^2}{12} & \frac{(1-N)k^2}{12} \end{pmatrix}.$$

Вид уравнений (8.5) диктует иерархию малости параметров и переменных для метода многих масштабов:

$$\delta Ra = \epsilon^2 \delta Ra^{(2)},$$

$$a = \epsilon^2 a^{(2)},$$

$$|\Psi_{1,2}\rangle = \epsilon |\Psi_{1,2}^{(1)}\rangle + \epsilon^2 |\Psi_{1,2}^{(2)}\rangle + \epsilon^3 |\Psi_{1,2}^{(3)}\rangle + \dots,$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots,$$

где ϵ – формальный малый параметр.

В порядке ϵ^1 :

$$\frac{\partial}{\partial t_0} |\Psi_1^{(1)}\rangle = \hat{L} |\Psi_1^{(1)}\rangle;$$

$$|\Psi_1^{(1)}\rangle = A_1^{(1)}(t_1, t_2, \dots) |\Psi_\omega\rangle e^{i\omega t_0} + c.c..$$

В порядке ϵ^2 :

$$\frac{\partial}{\partial t_0} |\Psi_1^{(2)}\rangle + \frac{\partial}{\partial t_1} |\Psi_1^{(1)}\rangle = \hat{L} |\Psi_1^{(2)}\rangle;$$

$$A_1^{(1)} = A_1^{(1)}(t_2, \dots), \quad |\Psi_1^{(2)}\rangle = 0.$$

В порядке ϵ^3 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_0} - \hat{L}\right) |\Psi_1^{(3)}\rangle + \frac{\partial}{\partial t_2} |\Psi_1^{(1)}\rangle = \delta \hat{L}^{(2)} |\Psi_1^{(1)}\rangle + a^{(2)} \hat{Q} (|\Psi_2^{(1)}\rangle - |\Psi_1^{(1)}\rangle) + \hat{T} |\Psi_1^{(1)}\rangle |\Psi_1^{(1)}\rangle |\Psi_1^{(1)}\rangle.$$

Вычисляя скалярное произведение последнего операторного уравнения с решением эрмитово сопряженной задачи (8.4), получаем уравнение для медленной динамики амплитуды возмущения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial t_2} \langle \Psi_\omega^+ | \Psi_\omega \rangle &= A_1^{(1)} \langle \Psi_\omega^+ | \delta \hat{L} | \Psi_\omega \rangle + \\ &+ a^{(2)} (A_2^{(1)} - A_1^{(1)}) \langle \Psi_\omega^+ | \hat{Q} | \Psi_\omega \rangle + \\ &+ A_1^{(1)} |A_1^{(1)}|^2 \langle \Psi_\omega^+ | [\hat{T} | \Psi_\omega \rangle | \Psi_\omega \rangle | \Psi_{-\omega} \rangle + \\ &+ \hat{T} | \Psi_\omega \rangle | \Psi_{-\omega} \rangle | \Psi_\omega \rangle + \hat{T} | \Psi_{-\omega} \rangle | \Psi_\omega \rangle | \Psi_\omega \rangle. \end{aligned}$$

Подставив все выражения, мы приходим к уравнению (4.1):

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_2} = C_R \delta Ra A_1 + C_A a (A_2 - A_1) + C_T |A_1|^2 A_1,$$

где

$$C_R = \frac{k^2 \{Nk^2 + (N-1)(Sk^2 + i\omega_0)\} \{Sk^2 + i\omega_0\}}{RaNk^4 - 12(Sk^2 + i\omega_0)^2}, \quad (8.6)$$

$$C_A = \frac{\{bRaNk^2 - 12(b-S(b-1))(Sk^2 + i\omega_0)\}}{(b-S(b-1))(RaNk^4 - 12(Sk^2 + i\omega_0)^2)} \times \{Sk^2 + i\omega_0\}, \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} C_T &= -\frac{3Ra^2k^8}{40(RaNk^4 - 12(Sk^2 + i\omega_0)^2)} \times \\ &\times \left((N-1) \times \left(S + \frac{i\omega_0}{k^2} \right) + N \right) \times \\ &\times \left(\frac{b^2N(1+S)}{S} \left(\frac{i\omega_0}{k^2} - 3S \right) + \frac{3b^2N(1+S)}{S(1-N)} \right) + \\ &+ \left(\frac{Nb^2(1+S)(1-b)}{S(1-N)(b-S(b-1))} - S - \frac{i\omega_0}{k^2} \right) \times \\ &\times \left(N \left(3S + \frac{i\omega_0}{k^2} \right) - 3(1-N) \left(\frac{\omega_0^2}{k^4} + S^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (8.8)$$

8.2. Вывод уравнения для фазы колебаний пористой ячейки

В данном разделе получим уравнение для фазы колебаний для пористой ячейки на границе колебательной неустойчивости. Из амплитудного уравнения для $A_1 = R_1 e^{i\xi_1}$ можно получить уравнения для динамики амплитуды R_1 и фазы колебаний $\psi_1 = \xi_1 + \omega_0 t$. Введем в уравнении (4.1) новые обозначения:

$$C_R \delta Ra = (\lambda + i\delta\omega_0), \quad C_A a = K,$$

где K – сила связи, ω_0 – частота колебаний на границе устойчивости, $\lambda + i\delta\omega_0$ – отклонение собственного значения линейной задачи от $i\omega_0$, ξ – аргумент комплексной амплитуды, т.е. отклонение фазы колебаний от фазы критической моды. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 e^{i\xi_1} + i\xi_1 R_1 e^{i\xi_1} &= (\lambda + i\delta\omega_0) R_1 e^{i\xi_1} + \\ &+ K (R_2 e^{i\xi_2} - R_1 e^{i\xi_1}) + C_T R_1^3 e^{3i\xi_1}. \end{aligned}$$

Умножая это уравнение на $e^{-i\xi_1}$,

$$\dot{R}_1 + i\xi_1 R_1 = (\lambda + i\delta\omega_0) R_1 + K (R_2 e^{i(\xi_2 - \xi_1)} - R_1) + C_T R_1^3$$

и разделяя вещественную и мнимую части, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= [\lambda - |K| \cos \beta + \text{Re}(C_T) R_1^2] R_1 + \\ &+ |K| R_2 \cos(\xi_2 - \xi_1 + \beta), \\ \dot{\xi}_1 R_1 &= [\delta\omega_0 - |K| \sin \beta + \text{Im}(C_T) R_1^2] R_1 + \\ &+ |K| R_2 \sin(\xi_2 - \xi_1 + \beta). \end{aligned}$$

Здесь β – фазовый сдвиг связи.

Предполагается, что $|K| \ll \lambda$, т.е. связь слабая.

Тогда

$$R_1 \approx \sqrt{\frac{\lambda}{\text{Re} C_T}} = R_2$$

и

$$\dot{\xi}_1 = \delta\omega_0 + \frac{\text{Im} C_T}{\text{Re} C_T} \lambda + |K| (\sin(\xi_2 - \xi_1 + \beta) - \sin \beta).$$

Используя выражение для фазы колебаний $\psi_1 = \xi_1 + \omega_0 t$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \Omega_0 + |K| (\sin(\psi_2 - \psi_1 + \beta) - \sin \beta), \\ \Omega_0 &= \omega_0 + \left\{ \text{Im} C_R + \text{Re} C_R \frac{\text{Im} C_T}{\text{Re} C_T} \right\} \delta Ra, \\ K &= C_A a, \quad \beta = \arg(K) = \arg(C_A). \end{aligned}$$

Для второй ячейки имеем аналогичную систему уравнений.

Список литературы

1. Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М: Техносфера, 2003. 496 с.
2. Kawamura Y., Nakao H. Collective phase description of oscillatory convection // Chaos. 2013. Vol. 23, 043129. DOI: 10.1063/1.4837775
3. Kawamura Y., Nakao H. Phase description of oscillatory convection with a spatially translational mode // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2015. Vol. 295–296. P. 11–29. DOI: 10.1016/j.physd.2014.12.007

4. Taira K., Nakao H. Phase-response analysis of synchronization for periodic flows // *J. Fluid Mech.* 2018. Vol. 846, R2. DOI: 10.1017/jfm.2018.327
5. Nair A., Taira K., Brunton B., Brunton S. Phase-based control of periodic flows // *J. Fluid Mech.* 2021. Vol. 927, A30. DOI: 10.1017/jfm.2021.735
6. Goldobin D. S., Lyubimov D. V. Soret-driven convection of binary mixture in a horizontal porous layer in the presence of a heat or concentration source // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* 2007. Vol. 104. N. 5. P. 830–836. DOI: 10.1134/S1063776107050172
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
8. Mamou M., Vasseur P. Thermosolutal bifurcation phenomena in porous enclosures subject to vertical temperature and concentration gradients // *J. Fluid Mech.* 1999. Vol. 395. P. 61–87. DOI: 10.1017/S0022112099005753
9. Bahloul A., Boutana N., Vasseur P. Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer. // *J. Fluid Mech.* 2003. Vol. 491. P. 325–352. DOI: 10.1017/S0022112003005524
10. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media.* New York: Springer, 1998. 546 p.
11. Costeseque P., Gaillard S., Gachet Y., Jamet Ph. Determination of the apparent negative Soret coefficient of water-10% alcohol solutions by experimental and numerical methods in packed cells // *Philosophical Magazine.* 2003. Vol. 83. N. 17–18. P. 2039–2044. DOI: 10.1080/0141861031000107999
12. Colombani J., Bert J., Dupuy-Philon J. Thermal diffusion in (LiCl, RH₂O) // *The Journal of Chemical Physics.* 1999. Vol. 110. N. 17. P. 8622–8627. DOI: 10.1063/5.0038039
13. Winfree T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators // *Journal of Theoretical Biology.* 1967. Vol. 16. N. 1. P. 15–42. DOI: 10.1016/0022-5193(67)90051-3
14. Sakaguchi H., Kuramoto Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment // *Progress of Theoretical Physics.* 1986. Vol. 76. P. 576–81. DOI: 10.1143/PTP.76.576
15. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott-Antonsen ansatz // *Physical Review Letters.* 2018. Vol. 120, 264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.264101
16. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // *Chaos.* 2018. Vol. 28, 101101. DOI: 10.1063/1.5053576

References

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 453 p.
2. Kawamura Y., Nakao H. Collective phase description of oscillatory convection. *Chaos*, 2013, vol. 23, 043129. DOI: 10.1063/1.4837775
3. Kawamura Y., Nakao H. Phase description of oscillatory convection with a spatially translational mode. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2015, vol. 295–296, pp. 11–29. DOI: 10.1016/j.physd.2014.12.007
4. Taira K., Nakao H. Phase-response analysis of synchronization for periodic flows. *J. Fluid Mech.*, 2018, vol. 846, R2. DOI: 10.1017/jfm.2018.327
5. Nair A., Taira K., Brunton B., Brunton S. Phase-based control of periodic flows. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 927, A30. DOI: 10.1017/jfm.2021.735
6. Goldobin D. S., Lyubimov D. V. Soret-driven convection of binary mixture in a horizontal porous layer in the presence of a heat or concentration source. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2007, vol. 104. no. 5, pp. 830–836. DOI: 10.1134/S1063776107050172
7. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective Stability of Incompressible Fluids.* Jerusalem, Israel: Keter Publishing House, 1976, 330 p.
8. Mamou M., Vasseur P. Thermosolutal bifurcation phenomena in porous enclosures subject to vertical temperature and concentration gradients. *J. Fluid Mech.*, 1999, vol. 395, pp. 61–87. DOI: 10.1017/S0022112099005753
9. Bahloul A., Boutana N., Vasseur P. Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 491, pp. 325–352. DOI: 10.1017/S0022112003005524
10. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media.* New York: Springer, 1998. 546 p.
11. Costeseque P., Gaillard S., Gachet Y., Jamet Ph. Determination of the apparent negative Soret coefficient of water-10% alcohol solutions by experimental and numerical methods in packed cells. *Philosophical Magazine*, 2003, vol. 83, no. 17–18, pp. 2039–2044. DOI: 10.1080/0141861031000107999
12. Colombani J., Bert J., Dupuy-Philon J. Thermal diffusion in (LiCl, RH₂O). *The Journal of Chemical Physics*, 1999, vol. 110, no. 17, pp. 8622–8627. DOI: 10.1063/1.478769
13. Winfree T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 1967, vol. 16, no. 1, pp. 15–42. DOI: 10.1016/0022-5193(67)90051-3
14. Sakaguchi H., Kuramoto Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual

- entertainment. *Progr. Theor. Phys.*, 1986, vol. 76, pp. 576–581. DOI: 10.1143/PTP.76.576
15. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott-Antonsen ansatz. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 120, 264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.264101
16. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators. *Chaos*, 2018, vol. 28, 101101. DOI: 10.1063/1.5053576

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Тюлькина И. В., Голдобин Д. С. Синхронизация конвективных течений двухкомпонентной жидкости в смежных ячейках пористой среды // Вестник Пермского университета. Физика. 2023. № 2. С. 59–68. doi: 10.17072/1994-3598-2023-2-59-68

Please cite this article in English as:

Tyulkina I. V., Goldobin D. S. Synchronization of convective currents of a two-component fluid in adjacent porous cells. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2023, no. 2, pp. 59–68. doi: 10.17072/1994-3598-2023-2-59-68

Сведения об авторах

1. Тюлькина Ирина Валерьевна, аспирант, младший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013
2. Голдобин Денис Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией подземной утилизации углерода, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013. Доцент кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990

Author information

1. Irina V. Tyulkina, Postgraduate Student, Junior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia
2. Denis S. Goldobin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Underground Carbon Sequestration, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Associate Professor at the Department of Theoretical Physics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia