

УДК 532.546.6; 532.72; 532.5.013.4
PACS 47.10.ad, 47.11.-j

О горизонтальной напорной фильтрации смеси через пористую среду с учетом закупорки

Б. С. Марышев

Институт механики сплошных сред УрО РАН
614013, Пермь, ул. Акад. Королева, 1
email: bmaryshev@mail.ru

Рассматривается медленная фильтрация смеси, состоящей из несущей жидкости и тяжелой примеси в горизонтальном канале пористой среды. На боковых стенках канала задается перепад давления, определяющий фильтрационный поток. Поскольку примесь тяжелая, наблюдается гравитационное распределение концентрации. Концентрация примеси вблизи нижней стенки больше, чем вблизи верхней. Кроме того, учтено, что перенос любой нерастворимой примеси в пористой среде сопровождается процессом ее осаждения на стенки пор – иммобилизацией. Иммобилизация замедляет перенос, изымая часть примеси из потока. Осажденная примесь занимает часть объема пор, уменьшая при этом пористость и проницаемость среды, т.е. приводя к ее закупорке. Оказывается, что при слабом влиянии гравитации (узкий канал или небольшое отличие плотностей жидкости и примеси) наблюдается практически плоский фронт распространения примеси, а скорость распространения уменьшается с уменьшением перепада давления и увеличением влияния иммобилизации. Течение смеси при этом практически однородно, и довольно быстро устанавливается однородное поле концентрации в канале. При усилении влияния гравитации фронт существенно искривляется, значительная доля примеси собирается у нижней стенки канала. Примесь интенсивно осаждается на стенки пор, закупоривая пористую среду, тем самым блокируя течение. Как следствие, уменьшается поток смеси через фильтр, и поле концентрации долгое время остается сильно неоднородным.

Ключевые слова: транспорт в пористой среде; закупорка; концентрационная конвекция

Поступила в редакцию 17.10.2016; принята к опубликованию 28.10.2016

On the horizontal pressure filtration of the mixture through a porous medium with clogging

B. S. Maryshev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS
Koroleva St. 1, 614013, Perm
email: bmaryshev@mail.ru

The problem under consideration is the slow filtration of the mixture, which consists of the carrier fluid and heavy solute into the horizontal channel of the porous medium. The pressure drop is prescribed on the side walls of the channel, which determines the filtration flow. The solutes distribute into the channel by the gravitational distribution because the solute is the heavier than fluid. The so-

lute concentration near the bottom wall is greater than near the top. We take into account that the transfer of any solutes into the porous medium is accompanied by the process of its deposition to the solid matrix of media. This process is frequently named immobilization. Immobilization slows the transport by removing the solute from the flow. The immobilized solute occupies part of the pore volume, thus it reduces the porosity and permeability of the medium, i.e. the solute clogs the media. It is obtained that the flat front of solute propagation is observed at weak influence of gravity (a narrow channel or a small difference between the fluid density and impurities). The speed of propagation decreases with decreasing pressure drops and increasing the influence of immobilization. In this case, the flow of the mixture homogeneous and uniform concentration field is formed quickly. In the case of significant influence of gravity the front of solute propagation becomes curved. The large part of solute accumulates at the bottom of the channel. Solute intensively immobilizes in the solid matrix of porous media and thereby the speed of flow through channel is decreased. This effect results to significant heterogeneity of concentration field and the reducing of mixture flow through the filter.

Keywords: transport in porous media, pore clogging, solutal convection

Received 17.10.2016; accepted 28.10.2016

doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-12-21

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию влияния конвекции на горизонтальное напорное фильтрационное течение в канале пористой среды. Если на боковых границах канала задан перепад давления, то в соответствии с законом Дарси [1] возникает горизонтальный фильтрационный поток. В рассматриваемой задаче происходит фильтрация смеси, состоящей из тяжелой примеси и легкой несущей жидкости, которая насыщает пористую среду. Если пренебречь влиянием силы тяжести, то распространение примеси будет описываться в рамках одномерной диффузионной задачи. Эта задача описывает распространение плоского диффузионного фронта в горизонтальном направлении. При учете гравитации приходится решать двумерную задачу, поскольку примесь под влиянием тяжести будет собираться у нижней стенки канала. К искривлению фронта приводит конвективное течение смеси, которое и порождает неустойчивость плоского фронта. Описанная ситуация аналогична конвективному течению, возникающему при нагреве сбоку. Известно [2], что механическое равновесие и однородное течение при нагреве с боку неустойчивы.

Течение в горизонтальном слое при продольном градиенте температуры впервые было исследовано в [3]. Его устойчивость и анализ формы критических возмущений были исследованы в серии работ [4–6]. Исследованию конвекции в замкнутой области при подогреве сбоку посвящены работы [7, 8], где изучены характеристики течения. В пористой среде конвекция при подогреве сбоку была исследована экспериментально [9] и теоретически [10]. Впоследствии были найдены и классифицированы различные режимы конвекции [11] и

исследована конвекция в полостях различной формы [12].

Чаще всего в качестве модели диффузии при описании концентрационной конвекции в пористой среде используется стандартная модель диффузии-адвекции, основанная на законе Фика [13]. Однако массоперенос в пористой среде не всегда корректно описывается классической моделью, поскольку часть жидкости связана, а частицы примеси, находящиеся в связанной жидкости или прилипшие к твердому скелету, неподвижны. Они не переносятся вовсе (находятся в немобильной фазе), что подтверждается экспериментами [14,15]. Наличие такой примеси приводит к замедлению диффузии и, как следствие, к существенному изменению течения и характеристик переноса.

Обычно перенос примеси через пористую среду с учетом неподвижности части примеси обычно описывается с помощью МИМ подхода (Mobile-Immobile media) [16]. В рамках МИМ подхода предполагается, что примесь разделена на две фазы: мобильная – дрейфующая в фильтрационном потоке и немобильная – осевшая на твердый скелет среды или находящаяся в связанной жидкости. Предполагается, что пространственный перенос примеси обусловлен исключительно динамикой мобильной фазы. Для ее описания используется классическое уравнение диффузии-адвекции [17] с дополнительным слагаемым, которое описывает отток примеси в немобильную фазу. Межфазный поток примеси описывается некоторым кинетическим уравнением и обычно зависит от концентраций примеси, находящейся в обеих фазах. Существует достаточно много моделей такого типа, отличающихся видом кинетического уравнения.

Впервые МИМ подход был предложен в работе [18] и развит в работе [16]. В этих работах для описания изменения концентрации немобильной

примеси была использована кинетика первого порядка, т.е. скорость межфазного перехода полагается линейной функцией концентраций примеси в обеих фазах.

Впоследствии было предпринято несколько попыток построения моделей с использованием хорошо известных изотерм адсорбции Фрейндлиха и Ленгмюра, которые достаточно хорошо описывают равновесную ситуацию при адсорбции газов и жидкостей из растворов с малой концентрацией [19–22]. Эти модели лучше, чем [18], описывают диффузию, но сами по себе изотермы соответствуют установившемуся режиму (когда достигнуто динамическое равновесие между фазами).

Экспериментально [16, 23] показано, что для достаточно малых значений концентрации линейная модель корректно описывает перенос. В случае больших значений концентрации необходимо учитывать эффект насыщения немобильной фазы (концентрация осевшей примеси не может превышать некоторый предел). А стационарное состояние при этом должно описываться изотермой Ленгмюра [24]. Это обстоятельство было впервые учтено в [25], где была предложена модель с кинетикой второго порядка.

Осевшая внутри поры примесь уменьшает объем поры. То есть пористость линейно зависит от объемной концентрации в примеси, находящейся в немобильной фазе. При этом гидродинамическое сопротивление потоку через пору увеличивается. Таким образом, осаждение примеси сказывается и на проницаемости среды. Обычно зависимость проницаемости от пористости среды описывается законом Козени–Кармана [26], полученным из геометрических соображений. Существует еще несколько распространенных эмпирических соотношений, описывающих случай значительных значений концентрации примеси или некоторые специальные виды примесей, например [27].

В данной работе изучается влияние конвекции на перенос примеси через горизонтальный канал пористой среды. На боковых границах канала задается перепад давления. Верхняя и нижняя границы области считаются непроницаемыми. В качестве закона движения жидкости использована модель Дарси–Буссинеска в приближении малых ускорений жидкости [12]. Учет иммобилизации производится в рамках ММ модели с кинетикой второго порядка [25], зависимость проницаемости от пористости учитывается формулой Козени–Кармана [26].

Статья состоит из четырех частей, в первой изложена постановка задачи. Вторая часть посвящена исследованию основного состояния, соответствующего распространению плоского фронта. Задача устойчивости плоского фронта решается в третьей части статьи, где получены нейтральные кривые и карты устойчивости в пространстве па-

раметров системы. Четвертая часть, которая является заключением настоящей работы, посвящена обсуждению основных результатов.

2. Уравнения концентрационной конвекции с учетом закупорки

2.1. Диффузия с учетом иммобилизации примеси

Рассмотрим перенос примеси через пористую среду. Будем считать, что примесь способна взаимодействовать с твердым скелетом пористой среды. Такую активность проявляют многие примеси, в том числе бактерии и коллоиды. Управление временем нахождения примеси в образце и потоками этой примеси важно для экологических приложений, нефтедобычи, а также для пищевой промышленности.

Некоторые частицы примеси могут в конкретный момент времени не взаимодействовать со скелетом. Такие частицы будут диффундировать обычным образом, подчиняясь закону Фика [1]. Будем считать, что они составляют подвижную часть примеси (мобильную фазу); обозначим их концентрацию c_m . При взаимодействии других частиц со скелетом происходит захват частицы скелетом (прилипание к скелету или частица попадает в объем связанной жидкости) – иммобилизация. Такая частица остается неподвижной до тех пор, пока она не «оторвется» от скелета. Подобные частицы составляют неподвижную примесь (немобильную фазу); обозначим их концентрацию c_{im} .

В достаточно общем случае уравнения переноса примеси с учетом иммобилизации могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\phi(c_m + c_{im})] &= -\mathbf{V}\nabla c_m + D\Delta(\phi c_m), \\ \frac{\partial}{\partial t} c_{im} &= \mathfrak{R}(c_m, c_{im}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где c_m , c_{im} – объемные концентрации примеси, находящейся в мобильной и немобильной фазах соответственно, \mathbf{V} – скорость фильтрации, D – эффективный коэффициент диффузии, ϕ – пористость среды, $\mathfrak{R}(c_m, c_{im})$ – кинетическая функция, описывающая динамику перехода примеси между фазами. Первое из уравнений (2.1) представляет собой классическое уравнение диффузии, в котором изменение полной концентрации со временем обеспечивается потоком мобильной фазы примеси. Второе уравнение представляет собой связь между концентрациями примеси, находящейся в мобильной и немобильной фазах, выбор кинетической функции $\mathfrak{R}(c_m, c_{im})$ определяет конкретную модель описания процесса иммобилизации. К примеру, в одной из первых работ [16], эта связь была выбра-

на следующем образом: $\mathfrak{K}(c_m, c_{im}) = \alpha(c_m - K_d c_{im})$. Такая линейная кинетическая функция соответствует линейной МИМ модели. В работах [16, 18] показано, что она корректно описывает перенос примеси в случае малых концентраций примеси. Если же говорить о закупорке пор, то, очевидно, эта модель с трудом может описывать наблюдающиеся эффекты. При оседании примеси на стенки пор имеет место насыщение немобильной фазы, поскольку стенка ограничена и может вместить лишь ограниченное число частиц. В этом случае нужно использовать следующую кинетическую функцию второго порядка, предложенную в [25]:

$$\mathfrak{K}(c_m, c_{im}) = \alpha(c_m(Q_0 - c_{im}) - K_d c_{im}), \quad (2.2)$$

где α, K_d – коэффициенты переноса и распределения примеси, Q_0 – концентрация насыщения пористой среды.

Оседание частицы на стенке поры пористой среды обуславливает сокращение объема поры. Поскольку пористость – это отношение объема пор к объему образца, т. е. объемная концентрация пор, то, очевидно, что пористость должна уменьшаться на величину объемной концентрации примеси в немобильной фазе

$$\phi = \phi_0 - c_{im}, \quad (2.3)$$

где ϕ_0 – пористость чистой среды.

2.2. Концентрационная конвекция с учетом закупорки

Перенос примеси чаще всего обусловлен двумя явлениями: это собственно диффузия, связанная с неоднородностью концентрации, и адвекция, связанная с течением насыщающей среду жидкости. Для описания процесса необходимо знать скорость фильтрации. Обычно [12] уравнение движения жидкости, насыщающей пористую среду, записывается в рамках приближения Дарси для несжимаемой жидкости следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\kappa(\phi)} \mathbf{V} + \rho(c_m) g \mathbf{j} &= -\nabla P, \\ \text{div} \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\kappa(\phi)$ – проницаемость пористой среды, η – коэффициент динамической вязкости жидкости, $\rho(c_m)$ – плотность смеси, P – давление, g – ускорение свободного падения, \mathbf{j} – единичный вектор, направленный вертикально вверх. Проницаемость пористой среды $\kappa(\phi)$ обычно является функцией пористости, поскольку гидродинамическое сопротивление поры зависит от ее объема.

Простейшая зависимость такого типа дается формулой Козени-Кармана, которую мы будем использовать в настоящей работе:

$$\kappa(\phi) = \kappa_0 \phi^3 / (1 - \phi)^2, \quad (2.5)$$

где κ_0 – проницаемость чистой среды.

Объединяя уравнения (2.1)–(2.5), получим систему, описывающую концентрационную конвекцию в пористой среде с учетом закупоривания:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\phi(c_m + c_{im})] &= -\nabla \nabla c_m + D \Delta(\phi c_m), \\ \frac{\partial}{\partial t} c_{im} &= \alpha(c_m(Q_0 - c_{im}) - K_d c_{im}), \\ \frac{\eta}{\kappa(\phi)} \mathbf{V} + \rho(c_m) g \mathbf{j} &= -\nabla P, \\ \text{div} \mathbf{V} &= 0, \\ \kappa(\phi) &= \kappa_0 \phi^3 / (1 - \phi)^2, \\ \phi &= \phi_0 - c_{im}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Очевидно, что систему (2.6) необходимо дополнить уравнением состояния $\rho(c_m)$. В случае, когда вариации плотности невелики, принято использовать приближение Буссинеска [2], в рамках которого $\rho(c_m) = \rho_l(1 + \beta_c c_{im})$, где ρ_l – плотность несущей жидкости и β_c – коэффициент концентрационного расширения. При этом зависимость плотности от концентрации учитывается только в слагаемом, описывающим влияние плавучести ($\rho(c_m) g \mathbf{j}$). В остальных слагаемых (например, в условии несжимаемости) плотность считается константой и равна ρ_l . Такое приближение возможно, поскольку ускорение свободного падения достаточно велико, т. е. произведение $g \beta_c$ того же порядка, что и остальные слагаемые. В то время как в других слагаемых малые вариации плотности можно не учитывать. Те же соображения позволяют учитывать зависимость пористости от концентрации только в формуле Козени-Кармана для проницаемости. В первом уравнении системы (2.6) слагаемые $D \Delta(\phi c_m)$ и $\frac{\partial}{\partial t} [\phi(c_m + c_{im})]$ линейно зависят от пористости, а слагаемое $-\nabla \nabla c_m \sim \kappa(\phi)$ (см. третье уравнение в (2.6)). Из анализа формулы Козени-Кармана, представленного в приложении, видно, что влияние вариации пористости на последнее слагаемое минимум на порядок больше остальных. Поэтому будем использовать приближение, аналогичное приближению Буссинеска для плотности, т. е. везде, кроме зависимости $\kappa(\phi)$, положим $\phi = \phi_0$. Тогда уравнения концентрационной конвекции в указанных приближениях будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
\phi_0 \frac{\partial}{\partial t} (c_m + c_{im}) &= -\mathbf{V} \nabla c_m + \phi_0 D \Delta (c_m), \\
\frac{\partial}{\partial t} c_{im} &= \alpha (c_m (Q_0 - c_{im}) - K_d c_{im}), \\
\frac{\eta}{\kappa(\phi)} \mathbf{V} + c_m \mathbf{j} \beta_c \rho_l &= -\nabla p, \\
P &= \rho_l g z + p, \\
\operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \\
\kappa(\phi) &= \kappa_0 \phi^3 / (1 - \phi)^2, \quad \phi = \phi_0 - c_{im},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где p – добавка к гидростатическому давлению.

3. Постановка задачи

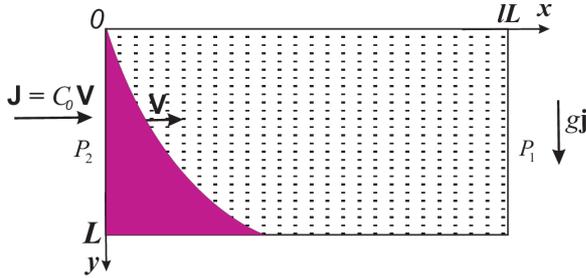


Рис 1. Конфигурация задачи

Рассматривается задача о горизонтальной напорной фильтрации смеси через канал пористой среды. Ширина канала – L , длина канала – lL , где l – геометрический параметр системы. На боковых стенках канала заданы постоянные значения давления P_1 и P_2 . Концентрация примеси в поступающей смеси предполагается постоянной и равной C_0 . Верхняя и нижняя границы канала непроницаемы для жидкости и примеси. Пористость и проницаемость чистой среды равны соответственно κ_0 и ϕ_0 . Конфигурация задачи представлена на рис. 1.

Обезразмерим уравнения (2.7). Для этого выберем следующие масштабы длины, времени, давления, скорости и концентрации:

$$\begin{aligned}
[L] &= L, \quad [t] = \frac{L^2}{D}, \\
[\mathbf{V}] &= \frac{\phi_0 D}{L}, \quad [p] = P_1 - P_2, \quad [c_m, c_{im}] = C_0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

В этом случае безразмерная форма уравнений (2.7) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\partial_t (c_m + c_{im}) &= -\mathbf{V} \cdot \nabla c_m + \Delta c_m, \\
\partial_t c_{im} &= \alpha c_m (q_0 - c_{im}) - b c_{im}, \\
\mathbf{V} + \kappa(\phi) R p c_m \mathbf{j} &= -\kappa(\phi) \nabla P, \\
\operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \\
\kappa(\phi) &= \phi^3 / (1 - \phi)^2, \quad \phi = \phi_0 - C_0 c_{im}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Уравнения (3.2) содержат пять безразмерных параметров: $a = \alpha C_0 D / L^2$, $b = \alpha K_d D / L^2$ – безразмерные коэффициенты адсорбции и десорбции, соответственно; $R p = C_0 g L \kappa_0 \rho \beta_c / (D \eta \phi_0)$ – число Релея–Дарси, C_0 – концентрация примеси в прокачиваемой смеси и ϕ_0 – пористость незагрязненной среды. Исключим скорость фильтрации из системы (3.2), воспользовавшись условием несжимаемости

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{V} &= -\partial_y (\kappa(\phi) \partial_y P + \kappa(\phi) R p c_m) - \\
&\quad - \partial_x (\kappa(\phi) \partial_x P),
\end{aligned}$$

где символами ∂_x, ∂_y обозначено дифференцирование по соответствующей координате. Тогда система (3.2) переписется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\partial_t (c_m + c_{im}) - \partial_x^2 c_m - \partial_y^2 c_m &= \\
&= \kappa(\phi) (\partial_y p \partial_y c_m + \partial_x p \partial_x c_m), \\
\frac{\partial_\phi \kappa C_0}{\kappa} [\partial_y c_{im} \partial_y p + \partial_x c_{im} \partial_x p + \partial_y c_{im} R p c_m] &= \\
&= R p \partial_y c_m + \partial_y^2 p + \partial_x^2 p, \\
\partial_t c_{im} &= \alpha c_m (q_0 - c_{im}) - b c_{im}, \\
\frac{\partial_\phi \kappa C_0}{\kappa} &= \frac{C_0}{\phi} \frac{3 - \phi^2}{1 - \phi^2}, \\
\kappa(\phi) &= \phi^3 / (1 - \phi)^2, \quad \phi = \phi_0 - C_0 c_{im},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где символами $\partial_t, \partial_\phi$ обозначено дифференцирование по времени и пористости соответственно. Уравнения (3.3) должны быть дополнены граничными условиями, которые могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
\partial_x p c_m - \partial_x c_m \Big|_{x=0} &= \partial_x p, \\
\partial_x c_m \Big|_{x=l} &= 0, \quad \partial_y c_m \Big|_{y=0,1} = 0, \\
p \Big|_{x=0} &= P e / l, \quad p \Big|_{x=l} = 0, \\
\partial_y p \Big|_{y=0,1} &= -R p c_m \Big|_{y=0,1},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

они содержат дополнительный параметр $Pe = \eta (P_1 - P_2) / \kappa_0 L$ – число Пекле.

Задача (3.3), (3.4) решалась численно методом конечных разностей с аппроксимацией первого порядка по времени и второго по пространству. Была использована полунейная схема [28], когда линейные слагаемые аппроксимируются значениями функций на текущем шаге по времени, а нелинейные на предыдущем. Получающаяся при этом система линейных уравнений решалась методом продольно-поперечной прогонки [29].

4. Результаты

Характерные поля распределения концентрации примеси, находящейся в мобильной фазе, представлены на рис. 2.

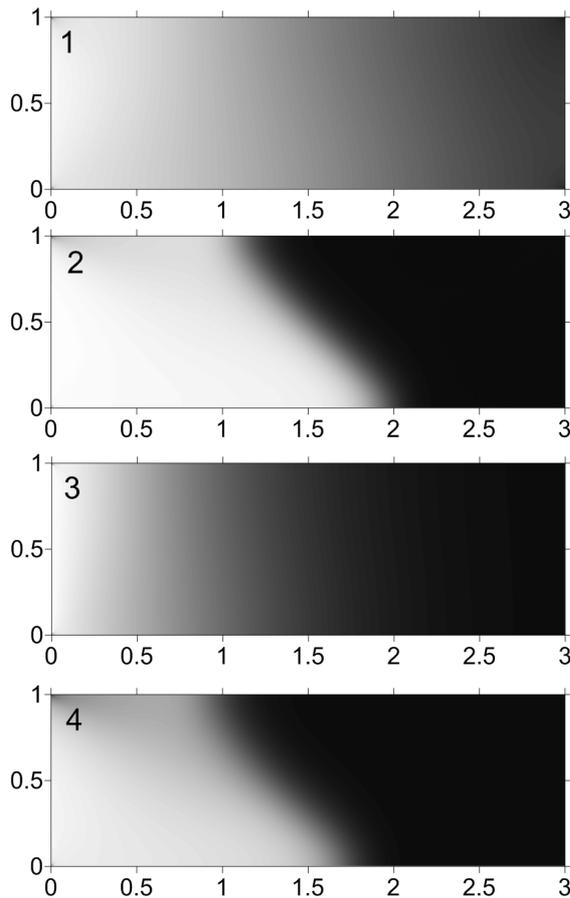


Рис. 2. Поля распределения концентрации примеси в находящейся в мобильной фазе при различных значениях параметров в момент времени $t = 0.5$. Поля 1 и 2 соответствуют модели с постоянной проницаемостью (без закупорки): поле 1 получено для $Rp = 2$, поле 2 для $Rp = 9$. Поля 3 и 4 соответствуют модели с переменной проницаемостью (с учетом закупорки): поле 3 получено для $Rp = 2$, поле 4 для $Rp = 9$. Значения остальных параметров выбраны следующим образом: $a = 3$, $b = 6$, $Pe = 40$, $q_0 = 0.5$, $\phi_0 = 0.5$, $C_0 = 0.1$, $l = 3$

Как видно из рис. 2, при усилении влияния гравитации (увеличении числа Релея–Дарси) диффузионный фронт искривляется, и вместе с этим транспорт примеси замедляется. Закупорка пористой среды также замедляет транспорт примеси, поскольку гидравлическое сопротивление пор увеличивается по мере закупорки. Однако стоит отметить тот факт, что эти два эффекта не могут быть просто сложены друг с другом. Более того, при учете закупорки очень сильно падает проницаемость вблизи нижней стенки канала, что обуславливает выравнивание распределения примеси по высоте. В результате при больших значениях числа Релея–Дарси средняя концентрация примеси на выходе из фильтра оказывается выше в случае, если закупорка учитывается. Так, из рис. 2 видно,

что в случае небольшого значения числа Релея–Дарси ($Rp = 2$, рис. 2, поля 1 и 3) учет закупорки дает резкое уменьшение концентрации вблизи правой границы канала, в для большего значения числа Релея–Дарси ($Rp = 9$, рис. 2, поля 2 и 4) распределения уже практически одинаковы.

Этот эффект дополнительно может быть проиллюстрирован с помощью рис. 3. На нём приведены зависимости средней концентрации примеси находящейся в мобильной фазе на выходе из канала (C_e) от числа Релея–Дарси (Rp), где концентрация C_e определена следующим образом:

$$C_e = \int_0^1 c_m(x=l, y) dy. \quad (4.1)$$

Из рис.3 видно, что без учета закупорки концентрация на выходе из фильтра выше при малых значениях числа Релея–Дарси, чем в модели с учетом закупорки. При достаточно больших значениях числа Релея–Дарси наблюдается обратный эффект (причины такого поведения изложены выше). Описанное поведение концентрации наблюдается в широком диапазоне параметров. Кроме того, наблюдаются демонстрирует закономерные эффекты: (1) повышения концентрации на выходе с ростом числа Пекле, поскольку растет интенсивность фильтрационного потока, (см. рис.3 сверху); (2) понижения C_e с увеличением концентрации насыщения пористой среды, поскольку увеличивается сорбционная способность среды (см. рис. 3 по центру); (3) увеличения C_e с увеличением параметра десорбции, поскольку ухудшается сорбционная способность среды (см. рис. 3 снизу).

Все описанные эффекты могут быть дополнительно подтверждены рис. 4, где показана зависимость концентрации C_e от различных параметров.

5. Заключение

Исследовано влияние конвекции на горизонтальное напорное фильтрационное течение в канале пористой среды. Показано, что в случае фильтрации смеси, состоящей из тяжелой примеси и легкой несущей жидкости, которая насыщает пористую среду, при учете гравитации примесь под влиянием тяжести собирается у нижней стенки канала, что приводит к искривлению фронта распространения примеси.

Установлено, что при усилении влияния гравитации (увеличении числа Релея–Дарси) диффузионный фронт искривляется сильнее, и вместе с этим транспорт примеси замедляется. Этот эффект подтверждается зависимостями, указанными на рис. 3. Закупорка пористой среды тоже замедляет транспорт примеси, поскольку гидравлическое сопротивление пор увеличивается по мере закупорки.

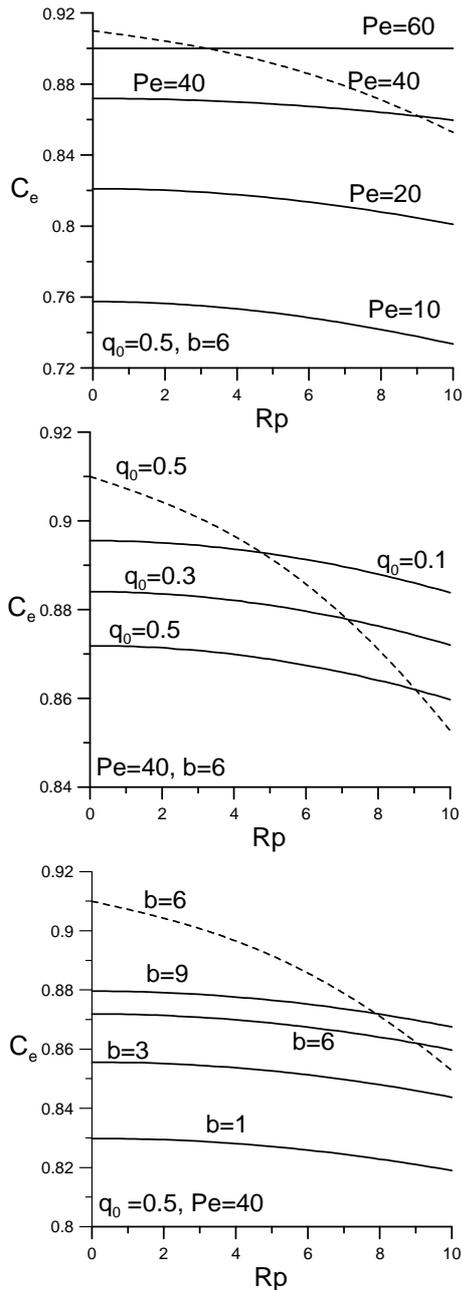


Рис. 3. Зависимости средней концентрации примеси находящейся в мобильной фазе на выходе из канала (C_e) от числа Рейля–Дарси (Rp) при различных значениях параметров в момент времени $t=1$. Сплошные линии демонстрируют зависимости с учетом закупорки, пунктирная линия – без учета закупорки. Значения варьируемых параметров указаны на рисунках, значения остальных параметров выбраны следующим образом: $a=3$, $\phi_0=0.5$, $C_0=0.1$, $l=3$

Однако эти два эффекта взаимодействуют сложным образом, а не просто складываются друг с другом. Поскольку при учете закупорки очень сильно падает проницаемость среды вблизи нижней стенки канала, распределение примеси по высоте начинает выравниваться. Вследствие чего при

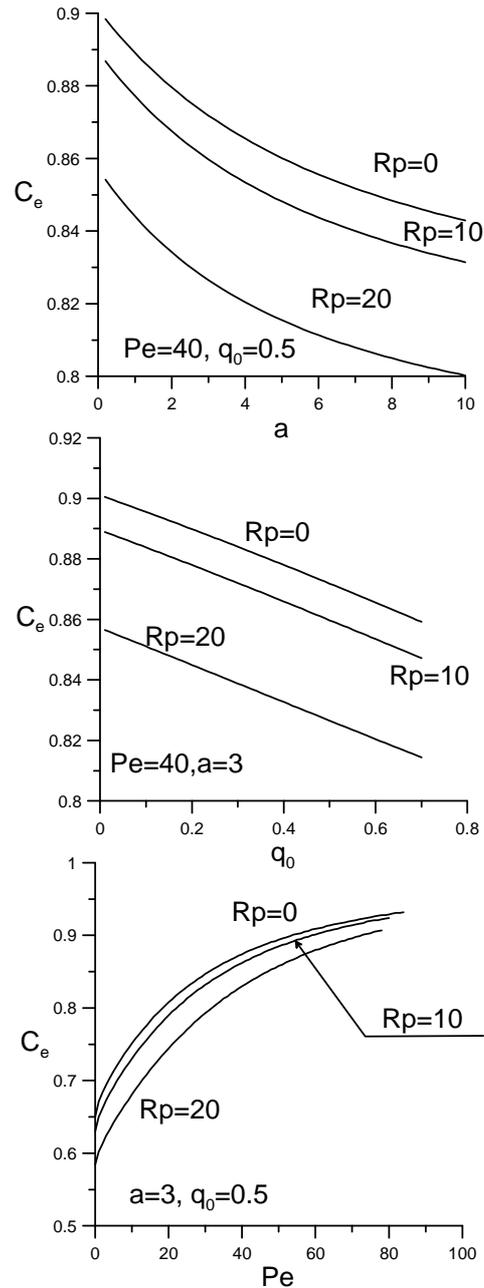


Рис. 4. Зависимости средней концентрации примеси находящейся в мобильной фазе на выходе из канала (C_e) для трех фиксированных значений числа Рейля–Дарси (Rp) в момент времени $t=1$ от различных параметров: сверху – от a ; в центре – от концентрации насыщения q_0 ; снизу – от числа Пекле. Значения варьируемых параметров указаны на рисунках, значения остальных параметров выбраны следующим образом: $b=6$, $\phi_0=0.5$, $C_0=0.1$, $l=3$

больших значениях числа Рейля–Дарси средняя концентрация примеси на выходе из фильтра оказывается выше в случае, если закупорка учитывается. Также проанализировано влияние параметров модели на транспорт примеси через рассматриваемый канал (см. рис. 4).

Работа выполнена при поддержке Гранта Президента РФ (МК-6851.2015.1).

Приложение. Соотношение вариаций пористости и проницаемости

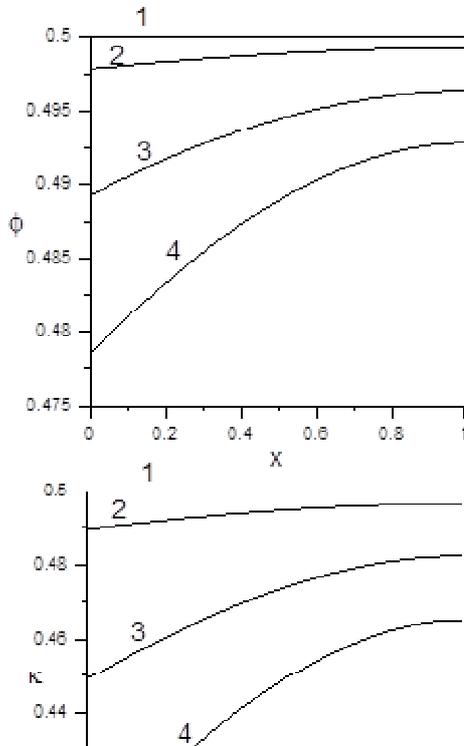


Рис. 5. Распределения пористости (ϕ) и проницаемости (κ) вдоль горизонтальной координаты (x) в момент времени $t = 0.2$. Кривые 1–4 соответствуют следующим значениям концентрации в фильтруемой смеси: 1 – $C_0 = 0$, 2 – $C_0 = 0.01$, 3 – $C_0 = 0.05$, 4 – $C_0 = 0.1$. Значения остальных параметров выбраны следующим образом $a = 3$, $b = 6$, $Pe = 1$, $q_0 = 0.5$, $\phi_0 = 0.5$, $Rp = 0$, $l = 1$

Приложение посвящено демонстрации того, что небольшие вариации пористости (ϕ) приводят к существенным изменениям проницаемости (κ). На основании этого факта, мы предполагаем, что в уравнениях (2.6) пористость может считаться постоянной величиной везде, кроме формулы Козени-Кармана [26] для проницаемости. Это предположение аналогично приближению Буссинеска для плотности.

Пусть $\delta\phi$ – малое изменение пористости, а ϕ_0 – среднее значение пористости. В этом случае безразмерная проницаемость среды (см. предпоследнее уравнение в (2.6)) в приближении Козени-Кармана может быть записана в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} \kappa(\phi) &= \frac{\phi_0^3}{(1-\phi_0)^2} + \frac{3\phi_0^2 - \phi_0^3}{(1-\phi_0)^3} \delta\phi + \dots = \\ &= \kappa(\phi_0) (1 + f(\phi_0) \delta\phi), \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ – пористость среды, функция

$$f(\phi_0) = \delta\kappa \kappa^{-1}(\phi_0) \delta\phi^{-1} = \kappa^{-1}(\phi_0) \partial\kappa(\phi_0) / \partial\phi_0$$

имеет смысл относительной вариации пористости. Эта функция имеет минимальное значение $f(\phi_0^*) \approx 9.9$, которое достигается при значении $\phi_0^* = 3 - \sqrt{6} \approx 0.55$. Это означает, что вариации проницаемости минимум на порядок сильнее вариаций пористости. Дополнительное обоснование этого предположения для рассматриваемой задачи представлено на рис. 5. Рис. 5 содержит горизонтальные распределения пористости и проницаемости для случая невесомости, когда фронт распространения примеси остается плоским, а распределение вдоль вертикальной оси однородным. Распределения представлены для различных концентрации примеси в фильтруемой смеси (C_0).

Из рис. 5 видно, что небольшое относительное изменение пористости $\delta\phi \phi_0^{-1} \approx 2\%$ вызывает значительные вариации проницаемости $\delta\kappa \kappa^{-1}(\phi_0)$. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что использованное выше предположение применимо для рассматриваемой задачи.

Список литературы

1. Darcy H. P. Les fontaines publiques de la Ville de Dijon. Paris : Dalmont, 1856. 657 p.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1966. №. 3. С. 69–72.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Мызников В. М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое // Прикладная механика и техническая физика. 1974. № 1. С. 99–100.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Мызников В. М. Устойчивость плоскопараллельного конвективного течения жидкости в горизонтальном слое относительно пространственных возмущений // Прикладная механика и техническая физика. 1974. № 5. С. 145–147.
6. Кирдяшкин А. Г., Полежаев В. И., Федюшкин А. И. Тепловая конвекция в горизонтальном слое при боковом подводе тепла // В кн: Авдусевский В. С. (ред.) Гидроаэромеханика и космические исследования. М.: Наука, 1985. С. 170–187.

7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. №. 5. С. 56–62.
8. Вертгейм И. И., Любимов Д. В. Конвекция в ячейке Хеле–Шоу при нагреве сбоку // в сб.: Исследование тепловой конвекции и теплопередачи. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 32–35.
9. Walker K. L., Homsy G. M. Convection in a porous cavity // Journal of Fluid Mechanics. 1978. Vol. 87. P. 449–474.
10. Bejan A., Tien C. L. Natural convection in a horizontal porous medium subjected to an end-to-end temperature difference // ASME Journal of Heat Transfer. 1978. Vol. 100. P. 191–198.
11. Blythe P. A., Simpkins P. G., Daniels P. G. Thermal convection in a cavity filled with a porous medium: a classification of limiting behaviours // International Journal of Heat and Mass Transfer 1983 Vol. 26. P. 701–708.
12. Bejan A., Tien C. L. Natural convection in horizontal space bounded by two concentric cylinders with different end temperatures // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1979. Vol. 22. P. 919–927.
13. Nield D. A., Bejan A. Convection in Porous Media. New York: Springer, 2006. 654 p.
14. Latrille C., Cartalade A. New experimental device to study transport in unsaturated porous media / In.: Birkle P., Torres I. S. (Eds.) Water–rock interaction. Leiden: CRC Press, 2010. P. 299–302.
15. Agaoglu B., Scheytt T., Copty N. K., Laboratory-scale experiments and numerical modeling of cosolvent flushing of multi-component NAPLs in saturated porous media // Journal of Contaminant Hydrology. 2012. Vol. 140. P. 80–94.
16. van Genuchten M. Th., Wierenga P. J. Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions // Soil Science Society of America Journal. 1976. Vol. 40. P. 473–480.
17. Einstein A. The theory of the Brownian movement // Annalen der Physik. 1905. Vol. 17. P. 549.
18. Deans H. A. A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media // SPE Journal. 1963. Vol. 3. P. 49–52.
19. Barry D. A., Parker J. C. Approximations for solute transport through porous media with flow transverse to layering // Transport in Porous Media. 1987. Vol. 2. N. 4. P. 65–82.
20. Bosma W. J. P., van der Zee S. E. A. T. M. Analytical approximations for nonlinear adsorbing solute transport in layered soils // Journal of Contaminant Hydrology. 1992. Vol. 10. N. 2. P. 99–118.
21. Selim H. M., Davidson J. M., Rao P. S. C. Transport of reactive solutes through multilayered soils // Soil Science Society of America Journal. 1977. Vol. 41. N. 1. P. 3–10.
22. Wu, Y. S., Kool J. B., Huyakorn P. S. An analytical model for nonlinear adsorptive transport through layered soils // Water Resources Research. 1997. Vol. 33. N. 1. P. 21–29.
23. Bromly M., Hinz C. Non-Fickian transport in homogeneous unsaturated repacked sand // Water Resources Research. 2004. Vol. 40, W07402.
24. Harter R. D., Baker D. E. Applications and misapplications of the Langmuir equation to soil adsorption phenomena. // Soil Science Society of America Journal. 1977. Vol. 41. P. 1077–1080.
25. Selim H. M., Amacher M. C. Reactivity and Transport of Heavy Metals in Soils. Boca Raton: CRC, 1997. 240 p.
26. Kozeny J. Über kapillare Leitung des Wassers im Boden // Sitzungsbericht Akademie der Wissenschaften Wien. 1927. Vol. 136. P. 271–306.
27. Gruesbeck C., Collins R.E. Entrainment and deposition of fine particles in porous media // SPE Journal. 1982. Vol. 22. P. 847–856.
28. Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
29. Тарунин Е. Л. Метод последовательности сеток для задач свободной конвекции // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15. №. 2. С. 436–445.

References

1. Darcy H. P. *Les fontaines publiques de la Ville de Dijon*. Paris: Dalmont, 1856. 657 p.
2. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids*. Jerusalem: Keter Publishing House, 1976, 330 p.
3. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44.
4. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M., Myznikov V. M. Stability of a plane-parallel convective flow of a liquid in a horizontal layer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1974, vol. 15, no. 1, pp. 78–82.
5. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M., Myznikov V. M. Stability of plane-parallel convective fluid flow in a horizontal layer relative to spatial perturbations. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1974, vol. 15, no. 5, pp. 706–708.
6. Kirdyashkin A. G., Polezhaev V. I., Fedyushkin A. I. (Thermal convection in horizontal layer with heating from one side). In: Avduevskii V. S. (Ed.) *Gidraeromekhanika i kosmicheskie issledovaniia* (Hydroaeromechanics and cosmic studies). Moscow: Nauka, 1985, pp. 170–187 (In Russian)
7. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M., Tarunin E. L. Numerical investigation of convective motion in closed cavity. *Fluid Dynamics*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 38–42.

8. Vertgeim I. I., Lyubimov D. V. Konveksiia v iacheike Khele–Shou pri nagreve sboku (Convection in Hele–Shaw cell heated from one side). In: *Issledovanie teplovoi konveksii i teploperedachi* (Study of thermal convection and heat transfer). Sverdlovsk: Ural Scientific Center of USSR Academy of Science, 1981, pp. 32–35 (In Russian).
9. Walker K. L., Homsy G. M. Convection in a porous cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 1978, vol. 87, pp. 449–474.
10. Bejan A., Tien C. L. Natural convection in a horizontal porous medium subjected to an end-to-end temperature difference. *ASME Journal of Heat Transfer*, 1978, vol. 100, pp. 191–198.
11. Blythe P. A., Simpkins P. G., Daniels P. G. Thermal convection in a cavity filled with a porous medium: a classification of limiting behaviours. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1983, vol. 26, pp. 701–708.
12. Bejan A., Tien C. L. Natural convection in horizontal space bounded by two concentric cylinders with different end temperatures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1979, vol. 22, pp. 919–927.
13. Nield D. A., Bejan A. *Convection in porous media*. New York: Springer, 2006. 654 p.
14. Latrille C., Cartalade A. New experimental device to study transport in unsaturated porous media. In: Birkle P., Torres I. S. (Eds.) *Water–rock interaction*. Leiden: CRC Press, 2010, pp. 299–302.
15. Agaoglu B., Scheytt T., Copty N. K., Laboratory-scale experiments and numerical modeling of cosolvent flushing of multi-component NAPLs in saturated porous media. *Journal of Contaminant Hydrology*, 2012, vol. 140, pp. 80–94.
16. van Genuchten M. Th., Wierenga P. J. Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions. *Soil Science Society of America Journal*, 1976, vol. 40, pp. 473–480.
17. Einstein A. The theory of the Brownian movement. *Annalen der Physik*, 1905, vol. 17, pp. 549.
18. Deans H. A. A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media. *SPE Journal*, 1963, vol. 3, pp. 49–52.
19. Barry D. A., Parker J. C. Approximations for solute transport through porous media with flow transverse to layering. *Transport in Porous Media*. 1987. vol. 2, no. 4, pp. 65–82.
20. Bosma W. J. P., van der Zee S. E. A. T. M. Analytical approximations for nonlinear adsorbing solute transport in layered soils. *Journal of Contaminant Hydrology*, 1992, vol. 10, no. 2, pp. 99–118.
21. Selim H. M., Davidson J. M., Rao P. S. C. Transport of reactive solutes through multilayered soils. *Soil Science Society of America Journal*, 1977, vol. 41, no. 1, pp. 3–10.
22. Wu, Y. S., Kool J. B., Huyakorn P. S. An analytical model for nonlinear adsorptive transport through layered soils. *Water Resources Research*, 1997, vol. 33, no. 1, pp. 21–29.
23. Bromly M., Hinz C. Non-Fickian transport in homogeneous unsaturated repacked sand. *Water Resources Research*, 2004, vol. 40, W07402.
24. Harter R. D., Baker D. E. Applications and misapplications of the Langmuir equation to soil adsorption phenomena. *Soil Science Society of America Journal*, 1977, vol. 41, pp. 1077–1080.
25. Selim H. M., Amacher M. C. *Reactivity and transport of heavy metals in soils*. Boca Raton: CRC, 1997. 240 p.
26. Kozeny J. Über kapillare Leitung des Wassers im Boden. *Sitzungsbericht Akademie der Wissenschaften Wien*, 1927, vol. 136, pp. 271–306.
27. Gruesbeck C., Collins R. E. Entrainment and deposition of fine particles in porous media. *SPE Journal*, 1982, vol. 22, pp. 847–856.
28. Kalitkin N. N. *Chislennye metody* (Numerical methods). Saint-Petersburg: BKhV-Peterburg, 2011, 592 p. (In Russian).
29. Tarunin E. L. The method of a sequence of nets for free convection problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1975, vol. 15, no. 2, pp. 148–156.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Марышев Б. С. О горизонтальной напорной фильтрации смеси через пористую среду с учетом закупорки // Вестник Пермского университета. Физика. 2016. № 3 (34). С. 12–21. doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-12-21

Please cite this article in English as:

Maryshev B. S. On the horizontal pressure filtration of the mixture through a porous medium with clogging // Bulletin of Perm University. Physics, 2016, no. 3 (34), pp. 12–21. doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-12-21