

УДК 537.2  
PACS 41.20.Cv

## О силе взаимодействия точечного заряда с диэлектрическим шаром

В. А. Саранин

Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко, Глазов, Россия  
email: val-sar@yandex.ru

Приведено решение задачи о силе взаимодействия точечного заряда с диэлектрическим шаром, которое представляется в виде бесконечной суммы. Показано, что в случае, когда диэлектрическая проницаемость шара стремится в бесконечность, сила взаимодействия стремится к силе взаимодействия точечного заряда с проводящим изолированным шаром, которая содержит всего одно слагаемое. На основе полученных результатов предложена простая приближенная формула для расчета силы взаимодействия точечного заряда и диэлектрического шара, содержащая тоже только одно слагаемое. Используя полученную формулу, решена задача о силе взаимодействия точечного заряда и одноименно заряженного диэлектрического шара. Для различных значений параметров построены нейтральные кривые, разделяющие области действия сил отталкивания и притяжения.

**Ключевые слова:** сила электростатического взаимодействия; точечный заряд и диэлектрический шар; заряженный диэлектрический шар.

*Поступила в редакцию 17.11.2021; после рецензии 04.12.2021; принята к опубликованию 04.12.2021*

## About force of interaction of a point charge with a dielectric ball

V. A. Saranin

Korolenko Glazov State Pedagogical Institute, Glazov, Russia  
email: val-sar@yandex.ru

The decision of a problem on force of interaction of a point charge with a dielectric ball which is represented in the form of the infinite sum is resulted. It is shown that in a case when dielectric permeability of a ball aspires in infinity, force of interaction aspires to force of interaction of a point charge with the conducting isolated ball which contains only one composed. In the basis of the received results the simple approached formula for calculation of force of interaction of a point charge and the dielectric ball, containing too only one composed is offered. Using the received formula, the problem about force of interaction of a point charge and the same charged dielectric ball is solved. For various values of parameters the neutral curves dividing scopes of forces of pushing away and an attraction are constructed.

**Keywords:** a force of electrostatic interaction; a point charge and a dielectric ball; an electrostatic dynamometer

*Received 17.11.2021; revised 04.12.2021; accepted 04.12.2021*

doi: 10.17072/1994-3598-2021-4-58-63

© Саранин В. А., 2021



распространяется на условиях лицензии  
Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

### 1. Введение

Задача о взаимодействии точечного заряда и диэлектрического шара имеет как научно-методическое, так и прикладное значение, например, в физике пылевой плазмы [1]. В цитируемой работе рассмотрено электростатическое взаимодействие диэлектрической частицы с точечным зарядом в присутствии внешнего однородного электрического поля.

Как известно (см., например, [2, с. 61]), задача о взаимодействии точечного заряда с диэлектрическим шаром в конечном виде не решается. То есть в отличие от систем точечный заряд – диэлектрическое полупространство и линейный заряд – диэлектрический цилиндр электрическое поле системы точечный заряд – диэлектрический шар нельзя представить в виде суперпозиции полей заряда и конечного числа зарядов-изображений. Однако, используя специальные методы, можно найти потенциал поля такой системы в виде бесконечного ряда [3]. Зная потенциал, нетрудно найти энергию и силу взаимодействия.

В настоящей работе проведено теоретическое и экспериментальное исследование взаимодействия точечного заряда (в эксперименте малого шарика) и диэлектрического шара, которое позволило выявить ряд особенностей.

### 2. Теория

Конспективно изложим решение задачи о нахождении потенциала в системе точечный заряд – диэлектрический шар, аналогичное приведенному, например, в [3].

Пусть в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  находятся точечный заряд  $q$  и диэлектрический шар радиуса  $R$  с проницаемостью  $\epsilon_2$ . Будем искать решение уравнения Лапласа для потенциалов в сферических координатах, считая, что оно не зависит от угла  $\phi$ . Тогда решение можно представить в виде ряда по полиномам Лежандра. С другой стороны, решение для потенциала в точке  $M$  (рис. 1) имеет вид

$$\phi_q = \frac{kq}{\epsilon_1 r_1}. \tag{1}$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям требуется представить это решение также в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра. Для этого запишем

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{l} (1 + a^2 - 2a \cos \theta)^{-1/2}, \quad a = \frac{r}{l}. \tag{2}$$

Будем считать, что точка  $M$  находится внутри воображаемой сферы радиуса  $l$ . Тогда  $a < 1$  и выражение (2) можно разложить в ряд Тейлора:

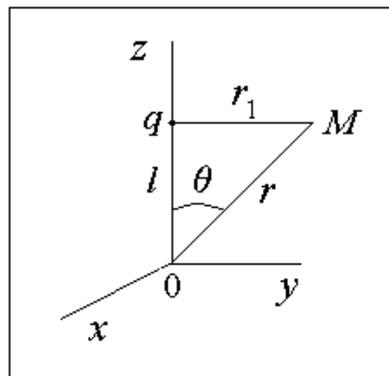


Рис. 1. Расположение координат и точки наблюдения

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{l} \left[ 1 + a \cos \theta + a^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \dots \right]. \tag{3}$$

В скобках видны три первых полинома Лежандра  $P_0, P_1, P_2$ , поэтому

$$\phi_q = \frac{kq}{\epsilon_1 l} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{l} \right)^n P_n(\cos \theta). \tag{4}$$

Если  $r > l$ , то в разложении (4)  $r$  и  $l$  надо поменять местами.

Решение для потенциала поляризованного шара вне и внутри его представим в форме

$$\begin{aligned} \phi_e &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \\ \phi_i &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos \theta). \end{aligned} \tag{5}$$

Общий потенциал поля вне шара, но вблизи его поверхности теперь представляется в виде

$$\phi_{oe} = \phi_q + \phi_e. \tag{6}$$

При этом в (4) переменная  $l$  имеет смысл расстояния от центра шара до точечного заряда. Для определения постоянных  $b_n, c_n$  используем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \phi_{oe}(r=R) &= \phi_i(r=R), \\ \epsilon_1 \left( \frac{\partial \phi_{oe}}{\partial r} \right)_{r=R} &= \epsilon_2 \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right)_{r=R}. \end{aligned} \tag{7}$$

Постоянная  $c_n$  нас интересовать не будет, а для постоянной  $b_n$  можно получить следующее выражение:

$$b_n = - \frac{kq(\epsilon_2 - \epsilon_1)nR^{2n+1}}{\epsilon_1 l^{n+1} [\epsilon_1(n+1) + n\epsilon_2]}. \tag{8}$$

Теперь для потенциальной энергии взаимодействия заряда и шара получаем

$$W = \frac{1}{2} q \phi_e(r=l, \theta=0) = -\frac{kq^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nR^{2n+1}}{l^{2n+2}[\varepsilon_1(n+1) + n\varepsilon_2]} \quad (9)$$

Для силы, действующей на заряд, имеем

$$F_l = -\frac{\partial W}{\partial l},$$

$$F_l = -\frac{kq^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 R^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)n}{[\varepsilon_1(n+1) + n\varepsilon_2]} \left(\frac{R}{l}\right)^{2n+3} \quad (10)$$

При  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  имеем силу притяжения, при обратном неравенстве реализуется отталкивание.

Поскольку потенциал  $\phi_e$  является внешним по отношению к заряду, то множитель  $1/2$  в правой части выражения для потенциальной энергии требует некоторого пояснения. Малое изменение потенциальной энергии заряда равно  $dW = qd\phi_e$ . Для зарядов, индуцированных зарядом  $q$ , имеем  $\phi_e = \text{const} \cdot q$ . Интегрирование дает  $W = \text{const} \cdot q^2 / 2$ . Этот вывод имеет общий характер [4, с. 246].

Покажем, что предел  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$  соответствует результату для силы в случае проводящего изолированного шара. В случае  $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$  для суммы получаем

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{x^{2n+3}} = \frac{2}{x^5} + \frac{3}{x^7} + \frac{4}{x^9} + \frac{5}{x^{11}} \dots,$$

$$x = \frac{l}{R} \quad (11)$$

Здесь учтено, что слагаемое с  $n=0$  согласно (10) выпадает. Преобразуем ряд (11) к виду

$$S = \frac{2}{x^5} \left( 1 + \frac{3/2}{x^2} + \frac{2}{x^4} + \frac{5/2}{x^6} \dots \right) \quad (12)$$

Сумму, стоящую в скобках, можно записать в виде:

$$S_1 = (1 + ay + (a+b)y^2 + (a+2b)y^3 + \dots),$$

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \quad (13)$$

Сумма такого ряда известна [5, с. 13], она равна

$$S_1 = 1 + \frac{ay + (b-a)y^2}{(1-y)^2} = 1 + \frac{3x^2 - 2}{2(x^2 - 1)^2} \quad (14)$$

Окончательно, с учетом (10)–(14) и простых преобразований, можно получить выражение для силы взаимодействия точечного заряда с изолированным проводящим шаром (см., например, [6], с. 53).

$$F_l = -\frac{kq^2}{\varepsilon_1 R^2} \frac{(2x^2 - 1)}{x^3(x^2 - 1)^2} \quad (15)$$

В воздухе можно положить  $\varepsilon_1 = 1$ .

Результаты расчетов силы в зависимости от расстояния между зарядом и центром шара показаны на рис. 2. Сила измеряется в единицах  $F_c = kq^2 / R^2$ , расстояние – в единицах  $R$ . Линии 1, 2 – расчет по формуле (10) для значений  $\varepsilon_2 = 2, 5$ , линия 3 – расчет по формуле (15). В расчете по формуле (10) в сумме удерживалось 100 слагаемых (проверочные расчеты с удержанием 150 слагаемых практически не меняли результата). Расчет производился в пакете Mathcad. Видно, что все три прямые параллельны. Это означает, что соответствующие зависимости отличаются постоянным множителем, зависящим от диэлектрической проницаемости шара. В частности, сила, действующая на точечный заряд со стороны парафинового шара, в 4 раза меньше, чем таковая со стороны такого же проводящего шара (в диапазоне параметров, показанных на рис. 2).

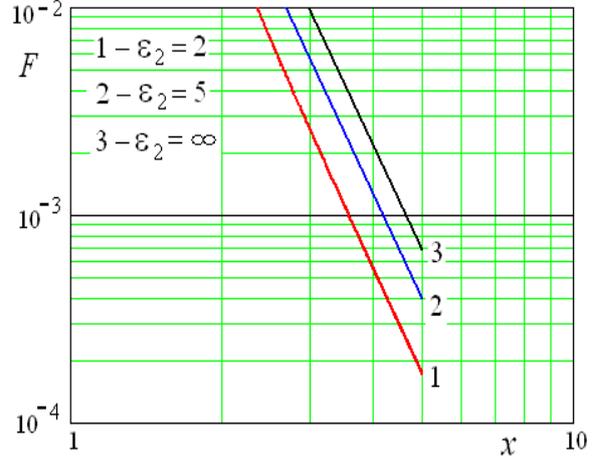


Рис. 2. Зависимости силы взаимодействия заряда и шара от расстояния от центра шара в логарифмической шкале и безразмерных единицах

### 3. Приближенная формула

Для нахождения постоянного множителя рассмотрим поляризованный шар радиуса  $R$  и с ди-

электрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Напряженность поля поляризованного шара вне его равна

$$\vec{E}_e = k \left( \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} \right),$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (16)$$

Здесь  $p$  – дипольный момент шара,  $R$  – радиус шара. В проекции на полярную ось, на которой расположен точечный заряд, имеем

$$E_{ez} = -\frac{kp_z}{l^3}, \quad (17)$$

где  $l$  – расстояние от центра шара до заряда. Рассмотрим случай, когда  $l \gg R$ , в этом случае поле точечного заряда можно считать однородным. Тогда для дипольного момента шара получим [1, с. 88]

$$p_z = -\frac{R^3}{k} \left( \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) E_0 \approx -R^3 \left( \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) \frac{q}{l^2}. \quad (18)$$

Сила, действующая на заряд, равна

$$F_z = qE_{ez} = \frac{kq^2}{R^2} \left( \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right) \frac{1}{x^5}. \quad (19)$$

Выражение для силы (15) на больших расстояниях также имеет асимптотику  $1/x^5$ , поэтому можно предположить, что искомый постоянный множитель равен

$$\left( \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 2} \right). \quad (20)$$

А для силы, действующей на точечный заряд со стороны диэлектрического шара вместо громоздкой формулы (10) можно записать простую приближенную формулу

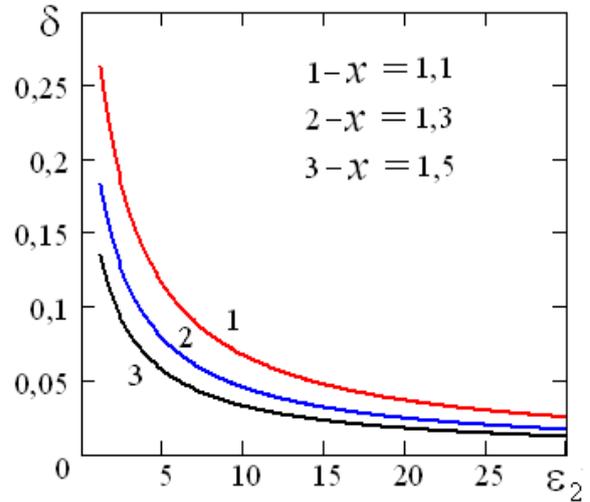
$$F_l^{(a)} = -\frac{kq^2}{R^2} \frac{(2x^2 - 1)}{x^3(x^2 - 1)^2} \left( \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 2} \right). \quad (21)$$

Вычислим относительную ошибку, даваемую приближенной формулой:

$$\delta = \frac{|F_l| - |F_l^{(a)}|}{|F_l|}. \quad (22)$$

На рис. 4 представлен график зависимости относительной ошибки от диэлектрической проницаемости шара при различных значениях расстояния от заряда до центра шара. Видно, что при  $\varepsilon_2 \geq 2$  и  $x > 1,5$  относительная ошибка, даваемая приближенной формулой (21), менее 10 % и уменьшается

с ростом расстояния от заряда до шара. Тем самым в большинстве практически интересных случаях вместо громоздкой формулы (10) можно использовать простую приближенную формулу (21).



**Рис. 4.** Зависимость относительной ошибки при использовании приближенной формулы для расчета силы от диэлектрической проницаемости шара при разных расстояниях от заряда до центра шара

#### 4.Заряженный шар

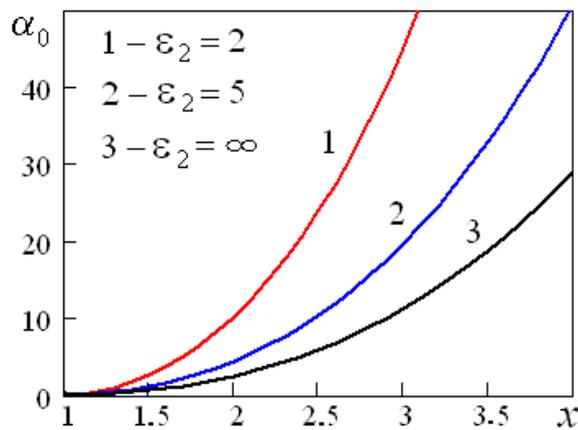
Предположим теперь, что диэлектрический шар равномерно заряжен до заряда  $Q$ , имеющего тот же знак, что и точечный заряд. В подобном случае проводящего шара к силе (15) добавляется кулоновская сила взаимодействия заряда шара, расположенного в его центре, с точечным зарядом [6]. В свете изложенного в пункте 3 логично в случае диэлектрического шара добавить кулоновскую составляющую к силе (21). Тогда получим

$$F_{lQ}^{(a)} = -\frac{kq^2}{R^2} \frac{(2x^2 - 1)}{x^3(x^2 - 1)^2} \left( \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 2} \right) + \frac{kqQ}{R^2 x^2},$$

$$F_{lQ}^{(a)} = -\frac{kqQ}{R^2 x^2} \left[ 1 - \frac{\alpha(2x^2 - 1)}{x(x^2 - 1)^2} \left( \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 2} \right) \right]. \quad (23)$$

$$\alpha = \frac{q}{Q}.$$

Видно, что при малых  $\alpha$  сила имеет характер силы отталкивания, а с увеличением этого параметра меняет знак, становясь силой притяжения. Критическое значение параметра  $\alpha$  дается выражением



**Рис. 5.** Нейтральные кривые. Ниже кривых область действия силы отталкивания, выше – притяжения

$$\alpha_0 = \frac{x(x^2 - 1)^2}{(2x^2 - 1)} \left( \frac{\varepsilon_2 + 2}{\varepsilon_2 - 1} \right). \quad (24)$$

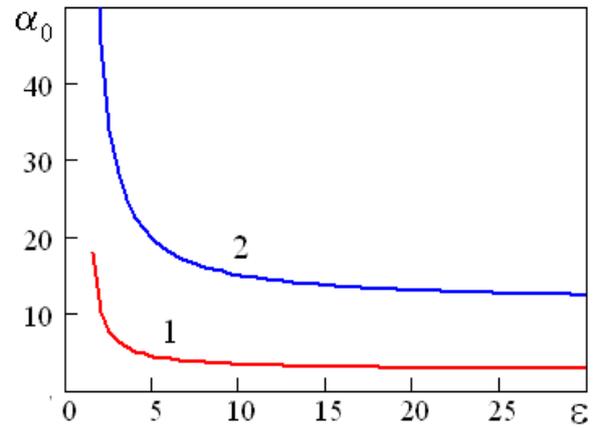
На рис. 5, 6 изображены нейтральные кривые на плоскостях  $(x, \alpha)$  и  $(\varepsilon_2, \alpha)$  для  $\varepsilon_2 = 2, 5, \infty$  (рис. 5, кривые 1, 2, 3 соответственно), и для  $x = 2, 3$  (рис. 6, кривые 1, 2 соответственно). Область ниже кривых соответствует действию силы отталкивания, область выше кривых – силы притяжения.

## 5. Заключение

В пределе бесконечно большой диэлектрической проницаемости шара сила взаимодействия стремится к силе взаимодействия точечного заряда с проводящим изолированным шаром.

Для диэлектрических проницаемостей шара  $\varepsilon \geq 2$  и расстояний от заряда до поверхности шара более половины его радиуса вместо громоздкой формулы с бесконечным числом слагаемых можно использовать простую приближенную формулу для силы взаимодействия точечного заряда и изолированного проводящего шара с дополнительным множителем равным  $(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)$  с погрешностью, не превышающей 10 %.

Если диэлектрический шар равномерно заряжен зарядом того же знака, что и точечный, то с помощью приближенной формулы можно найти области параметров, внутри которых сила имеет характер силы отталкивания, и области параметров, внутри которых она имеет характер силы притяжения.



**Рис. 6.** Нейтральные кривые для  $x = 2$  (1) и  $x = 3$  (2). Ниже кривых область действия силы отталкивания, выше – притяжения

## Список литературы

1. Муниров В. Р., Филиппов А.В. Взаимодействие диэлектрической макрочастицы с точечным зарядом в плазме // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Т. 142. Вып. 3. С. 594–602.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. С. 61.
3. Страттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 540 с.
4. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970. 246 с.
5. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973. С. 13.
6. Саранин В. А. Метод электрических изображений в задачах и экспериментах: монография. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012. 53 с.

## References

1. Munirov V. R., Philippov A. V. Interaction of a dielectric macroparticle with a point charge in plasma. *JETP*, 2012, vol. 115, no. 3, pp. 527 - 534. DOI: 10.1134/S1063776112080146.
2. Landau L. D., Lifshits E. M. *Elektrodinamika sploshnih sred* (Electrodynamics of continuous media). Moscow: Nauka, 1982. P. 61 (In Russian).
3. Stratton J. A. *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1941.
4. Batygin V. V., Toptygin I. N. *Sbornik zadach po elektrodinamike* (Collection of problems electro-

- dynamics). Moscow, Nauka, 1970, p. 246 (in Russian).
5. Dwight H. B. *Tables of integrals and other mathematical data*, New York: The Macmillan Company, 1961, p. 13.
  6. Saranin V. A. *Metod elektricheskikh izobrazheniy v zadachah i eksperimentah* (Method of electrical image in problems and experiments). Moscow - Izhevsk, Publ. "Regular and Chaotic Dynamics", 2012. 53 p. (in Russian).

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Саранин В. А. О силе взаимодействия точечного заряда с диэлектрическим шаром // Вестник Пермского университета. Физика. 2021. № 4. С. 58–63. doi: 10.17072/1994-3598-2021-4-58-63

**Please cite this article in English as:**

Saranin V. A. About force of interaction of a point charge with a dielectric ball. Bulletin of Perm University. Physics, 2021, no. 4, pp. 58–63. doi: 10.17072/1994-3598-2021-4-58-63

**Сведения об авторах**

1. *Владимир Александрович Саранин*, доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры физики и дидактики физики, Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко, ул. Первомайская, 25, Глазов, 427621

**Author information**

1. *Vladimir A. Saranin*, Doctor of the Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of Physics Department of Korolenko Glazov State Pedagogical Institute, Pervomaiskaya str. 25, Glazov, Russia, 427621