

УДК 532.5  
PACS 44.25.+f, 47.56.+r

## Влияние размера воздушной области на порог тепловой конвекции в системе «воздух–тепловыделяющая пористая среда–воздух»

Е. А. Колчанова\*, Н. В. Колчанов\*\*

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

\*email: kolchanovaea@gmail.com

\*\*email: kolchanovn@gmail.com

В работе численно моделируется задача конвективной устойчивости механического равновесия в слоистой системе «воздух - тепловыделяющая пористая среда – воздух» в поле силы тяжести. Учитывается зависимость мощности тепловыделения в пористом субслое от объемной доли твердой фазы. Построены нейтральные кривые устойчивости при разных значениях относительной толщины воздушного субслоя. Показано, что с ростом этой толщины порог внутренней конвекции понижается. При малых относительных толщинах конвективное валиковое течение носит крупномасштабный характер, а при больших – оно может локализоваться в пределах верхнего воздушного субслоя. Сравнение пороговых внутренних чисел Рэлея-Дарси при равных отношениях толщин воздушного и пористого субслоев показало, что усиление конвекции (понижение ее порога) более эффективно в трехслойной системе «воздух – тепловыделяющая среда – воздух» по сравнению с двухслойной системой «воздух – тепловыделяющая пористая среда».

**Ключевые слова:** система «воздух – пористая среда – воздух»; внутреннее тепловыделение; пассивная конвективная вентиляция воздуха; зависимость от объемной доли твердой фазы; линейная устойчивость равновесия.

*Поступила в редакцию 24.12.21; после рецензии 20.01.22; принята к опубликованию 20.01.22*

## Influence of air region size on the onset of thermal convection in an “air–heat-generating porous medium–air” system

E. A. Kolchanova\*, N. V. Kolchanov\*\*

Perm State University, Perm, Russia

\*email: kolchanovaea@gmail.com

\*\*email: kolchanovn@gmail.com

The problem concerning convective stability of the motionless air state in a layered air–heat-generating porous medium–air system under the gravitational field is simulated numerically in the paper. We take into consideration the heat source strength dependent on solid volume fraction in the porous sublayer. Marginal stability curves are presented at different values of the relative depth of the air sublayer. It has been shown that the onset value of internal convection decreases with increasing this depth. Besides, the convective roller flow is of a large-scale character at low

relative depths, but it can be localized within the upper air sublayer at high enough depths. A comparison of the threshold internal Rayleigh-Darcy numbers at equal ratios of the air to porous depths has shown that the enhancement of convection (or lowering its threshold) is more effective in the three-layered air–heat-generating porous medium–air system as compared to that of the two-layered air–heat-generating porous medium system.

**Keywords:** air–porous medium–air system; internal heat generation; passive convective air ventilation; dependence on the solid volume fraction; linear stability analysis.

Received 24.12.21; revised 20.01.22; accepted 20.01.22

doi: 10.17072/1994-3598-2022-1-22-27

## 1. Введение

Наше исследование посвящено определению порога возникновения пассивного конвективного течения в трехслойной системе, состоящей из субслоя тепловыделяющей пористой среды, окруженного двумя воздушными слоями снизу и сверху. Известно, что конвекция усиливает теплообмен, поэтому с ее помощью можно эффективно отводить тепло от перегретых участков пористой среды. Управлять такой конвекцией можно, например, с помощью добавления слоев воздуха задаваемой толщины. Рассматриваемая фундаментальная проблема интересна, например, с точки зрения анализа вентиляции воздуха в массивах сельскохозяйственной продукции (корнеплодов, сена и др.), когда необходимо поддерживать оптимальный температурный режим хранения этой продукции. Участки массива выделяют тепло за счет своей биологической активности в меру плотности насыпи продукции [1]. Для предотвращения их перегрева необходимо обеспечивать своевременный отвод тепла.

Конвективное движение газа или жидкости при наличии фиксированного перепада температур на границах исследовалось в различных слоистых системах, содержащих один или два пористых субслоя [2–4]. Течение в таких системах формируется при подогреве системы снизу на фоне линейного распределения температуры в субслоях. При наличии тепловыделения в жидкостном и/или пористом субслоях течение может возникнуть даже в случае внешних теплопроводных границ одинаковой температуры [5–8]. Во всех этих двух ситуациях (как при внешней конвекции, так и при внутренней конвекции) прослеживается характерная особенность конвективной устойчивости в слоистых системах. Возникающее пороговое течение может носить либо крупномасштабный характер и проникать в пористые субслои, либо иметь локальный характер и формироваться в пределах жидкостного субслоя.

Мы расширяем имеющиеся представления по конвекции в слоистых системах с внутренними источниками тепла, считая, что мощность тепловыделения в пористом субслое зависит от объемной

доли твердой фазы. Линейная устойчивость равновесия в двухслойной системе «воздух–тепловыделяющая пористая среда» проанализирована авторами в статье [9], принятой в печать. В настоящей работе мы уделяем внимание конвективной задаче в трехслойной системе «воздух–тепловыделяющая пористая среда–воздух».

## 2. Теория и метод решения

Рассматривается задача конвективной устойчивости механического равновесия в трехслойной системе, представленной на рис. 1. Система состоит из пористого субслоя, содержащего тепловыделяющую матрицу и окруженного двумя воздушными субслоями равной толщины. Матрица способна выделять тепло в меру ее уплотнения. Считается, что мощность тепловыделения в пористом субслое, насыщенном воздухом, линейно зависит от объемной доли твердой фазы  $\phi$ :

$$Q = \phi Q_s,$$

где  $Q_s$  – объемная мощность тепловыделения в пористой матрице. Внешние границы трехслойной системы являются непроницаемыми и имеют постоянную одинаковую температуру.



**Рис. 1.** Трехслойная система «воздух – тепловыделяющая пористая среда – воздух» в поле силы тяжести

Исследование проводится для гранулированной пористой среды, проницаемость  $K(\phi)$  которой можно оценить в зависимости от объемной доли твердой фазы  $\phi$  по формуле Кармана–Козени [10, 11]:

$$K(\phi) = \frac{D_p^2 (1-\phi)^3}{180\phi^2}.$$

Здесь средний диаметр гранул  $D_p$  меньше толщины пористого субслоя в 10 раз.

Тепловые коэффициенты для пористой среды (теплопроводность  $\kappa_p$  и объемная теплоемкость  $(\rho C)_p$ ) находятся по формулам:

$$\kappa_p = (1 - \phi)\kappa_a + \phi\kappa_s, \quad (1)$$

$$(\rho C)_p = (1 - \phi)(\rho C)_a + \phi(\rho C)_s, \quad (2)$$

где отношения  $\kappa_s/\kappa_a = 16$  и  $(\rho C)_s/(\rho C)_a = 3 \cdot 10^3$  выбраны типичными для биологически активной пористой среды, твердые элементы которой содержат в своем составе воду, например, для корнеплодов [12].

Движение воздуха в субслоях по аналогии с течением жидкости описывается уравнениями конвекции в приближении Буссинеска [5, 11]. В работе мы пренебрегаем сжимаемостью газа, рассматривая малые дозвуковые скорости его течения. Здесь можно привести пример эксперимента [13] по конвекции азота в неоднородно нагретой пористой среде, состоящей из плотно упакованных шаров разных материалов. Авторы подтвердили пороговое значение числа Рэлея-Дарси  $4\pi^2$ , полученное аналитически в приближении Буссинеска в задаче Гордона, Лэпвуда, Роджерса [14]. Уравнения конвекции в безразмерной форме одинаковы в двух воздушных субслоях:

$$\frac{\text{Da}}{\text{Pr}_p} \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}_a}{\partial t} + b(\mathbf{V}_a \nabla) \mathbf{V}_a \right\} = -\nabla P_a + \text{Da} \Delta \mathbf{V}_a + R_l \Theta_a \boldsymbol{\gamma}, \quad (3)$$

$$\frac{\kappa}{b} \frac{\partial \Theta_a}{\partial t} + \kappa(\mathbf{V}_a \nabla) \Theta_a = \Delta \Theta_a, \quad (4)$$

$$\text{div} \mathbf{V}_a = 0, \quad (5)$$

а в пористом субслое:

$$0 = -\nabla P_p - \mathbf{V}_p + R_l \Theta_p \boldsymbol{\gamma}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta_p}{\partial t} + (\mathbf{V}_p \nabla) \Theta_p = \Delta \Theta_p + 2\phi, \quad (7)$$

$$\text{div} \mathbf{V}_p = 0. \quad (8)$$

Внешние границы трехслойной системы непроницаемые и идеально теплопроводные:

$$z = 0; 1: \quad \mathbf{V}_a = 0, \quad \Theta_a = 0. \quad (9)$$

На каждой из границ раздела воздух – пористая среда выполняются следующие условия:

$$z = \delta; (1 - \delta): \quad V_{az} = V_{pz}, \quad V_{ax} = 0, \\ -P_a + 2\text{Da} \nabla_z V_{az} = -P_p, \quad (10) \\ \Theta_a = \Theta_p, \quad \nabla_z \Theta_a = \kappa \nabla_z \Theta_p.$$

Здесь  $\mathbf{V}_a$  – скорость в воздушном субслое,  $\mathbf{V}_p$  – скорость фильтрации в пористом субслое,  $\Theta$  – отклонение температуры от ее значения на внешних границах трехслойной системы,  $P$  – давление без учета гидростатической добавки,  $\boldsymbol{\gamma}$  – орт вертикальной оси  $z$ .

Масштабы величин в уравнениях (3)–(8) и граничных условиях (9)–(10) удобно определить обычным образом по параметрам пористого субслоя и общей толщине системы:

$$[x, y, z] = H, \quad [t] = bH^2/\chi_{\text{eff}},$$

$$[T - T_0] = Q_s H^2 / (2(\rho C)_a \chi_{\text{eff}}),$$

$$[P] = \rho_a v \chi_{\text{eff}} / K, \quad [\mathbf{V}] = \chi_{\text{eff}} / H.$$

Безразмерные параметры задачи следующие: число Дарси  $\text{Da} = K/H^2$ , число Прандтля для пористой среды  $\text{Pr}_p = vb/\chi_{\text{eff}}$ , отношение объемных теплоемкостей пористого и воздушного субслоев  $b = (\rho C)_p/(\rho C)_a$ , отношение теплопроводностей субслоев  $\kappa = \kappa_p/\kappa_a$ , внутреннее число Рэлея-Дарси  $R_l = g\beta Q_s K H^3 / (2(\rho C)_a v \chi_{\text{eff}}^2)$ , нормированное на объемную долю твердой фазы.

В работе мы исследуем механическое равновесие воздуха на устойчивость относительно малых возмущений и определяем порог конвекции. Последняя возникает в трехслойной системе за счет внутреннего тепловыделения в пористом субслое при одинаковых температурах на внешних границах этой системы. Равновесное распределение безразмерной температуры в нижнем воздушном субслое имеет вид:

$$\hat{\Theta}_{a1}(z) = \Theta_i z / \delta, \quad (11)$$

в пористом субслое:

$$\hat{\Theta}_p(z) = \Theta_i + \phi(z - \delta) - \phi(z^2 - \delta^2), \quad (12)$$

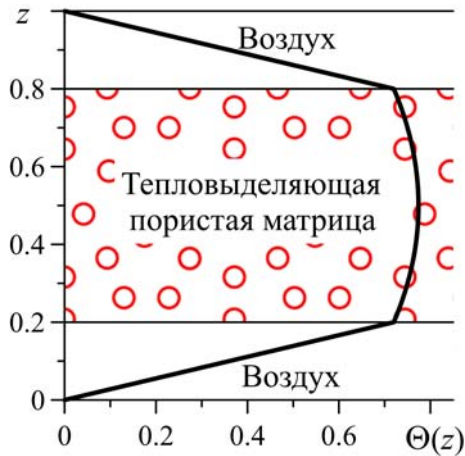
в верхнем воздушном субслое:

$$\hat{\Theta}_{a2}(z) = -\Theta_i(z - 1)/\delta, \quad (13)$$

где  $\Theta_i = \delta\kappa\phi(1 - 2\delta)$  – температура на границе раздела воздух – пористая среда.

На рис. 2 приведен пример равновесного профиля безразмерной температуры в системе с  $\delta = 0.2$  и объемной долей твердой фазы  $\phi = 0.6$ . Неоднородный по вертикали профиль температуры формируется за счет тепловыделения внутри пористого субслоя. Ожидается, что конвективное течение будет зарождаться в верхнем воздушном субслое и в пористом субслое, где градиент температуры направлен вниз, т.е. имеется неустойчивая стратификация по плотности (аналог подогрева системы снизу). В нижнем воздушном субслое такой неустойчивой стратификации не возникает.

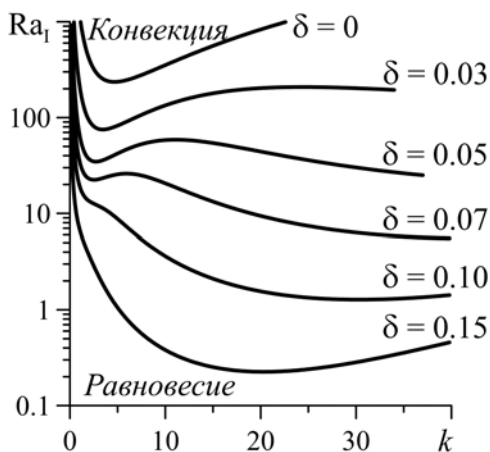
Здесь градиент температуры, наоборот, направлен вверх (аналог подогрева системы сверху).



**Рис. 2.** Равновесное распределение температуры в трехслойной системе с относительной толщиной воздушного субслоя  $\delta = 0.2$  и объемной долей твердой фазы  $\phi = 0.6$

Задача устойчивости равновесия воздуха решается численно, методом построения фундаментальной системы решений. Строятся нейтральные кривые при различных значениях относительной толщины воздушного субслоя  $\delta$ . Минимумы этих кривых соответствуют порогу возбуждения конвекции в виде валов, периодических вдоль горизонтальной оси  $x$  с волновым числом  $k$ .

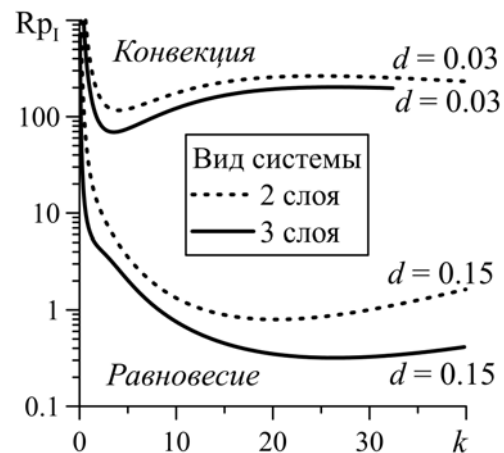
### 3. Результаты



**Рис. 3.** Нейтральные кривые устойчивости равновесия воздуха в трехслойной системе с  $\phi = 0.6$  при изменении относительной толщины воздушного субслоя  $\delta$

На рис. 3 изображены нейтральные кривые устойчивости равновесия в трехслойной системе с  $\phi = 0.6$  при различных значениях параметра  $\delta$ . Для сравнения с более ранними работами [15],

описывающими конвекцию в отдельно расположенном тепловыделяющем пористом слое, мы приводим данные в терминах внутреннего числа Рэлея-Дарси:  $Ra_I = \phi R_I$ . Из рисунка видно, что с ростом относительной толщины воздушного субслоя порог конвекции понижается. Таким образом, добавление воздушных субслоев позволяет управлять порогом возникновения конвекции, усиливая тепломассоперенос в системе. Однако нужно отметить, что длина волны формирующихся валов уменьшается с ростом параметра  $\delta$ . В системе с тонкими воздушными субслоями конвекция носит длинноволновый характер и проникает в пористый субслой. С увеличением  $\delta$  пороговое течение будет коротковолновым и локализоваться в верхнем воздушном субслое.



**Рис. 4.** Сравнение нейтральных кривых устойчивости равновесия в трехслойной (сплошные линии) и двухслойной [9] (штриховые линии) системах при разных фиксированных отношениях толщин воздушного и пористого субслоев  $d$

Интересно проследить, как влияет количество воздушных субслоев на порог конвекции в системе при заданном отношении толщин воздушного и пористого субслоев  $d = \delta / (1 - 2\delta)$ . На рис. 4 показаны нейтральные кривые для двухслойной системы «воздух – тепловыделяющая пористая среда» (штриховые линии) и трехслойной системы «воздух – тепловыделяющая пористая среда – воздух» (сплошные линии) при  $\phi = 0.6$ . Данные приводятся в терминах внутреннего числа Рэлея-Дарси, определенного через толщину пористого субслоя:  $Rp_I = (1 - 2\delta)^3 \phi R_I$ . Результаты расчетов для порога внутренней конвекции в двухслойной системе получены в более ранней работе авторов [9]. Из рис. 4 видно, что для фиксированного значения  $d$  в трехслойной системе течение возникает при меньшем критическом внутреннем числе Рэлея-Дарси, чем в двухслойной системе. Причем разница в пороговых числах растет с повышением отно-

сительной толщины воздушного субслоя. Таким образом, не только повышение толщины воздушного субслоя, но и увеличение количества воздушных субслоев позволяет эффективно понижать порог возбуждения конвективного течения.

#### 4. Заключение

Исследована конвективная устойчивость механического равновесия в трехслойной системе «воздух – тепловыделяющая пористая среда – воздух» в поле тяжести при заданных одинаковых температурах на внешних непроницаемых границах. Учтена линейная зависимость мощности тепловыделения в пористом субслое от объемной доли твердой фазы.

Проведено численное моделирование задачи конвективной устойчивости и определен порог возникновения валикового течения разной длины волны. Показано, что с ростом относительной толщины воздушного субслоя порог течения понижается и происходит переход от крупномасштабной конвекции к локальной. Это понижение оказывается более эффективным в трехслойной системе по сравнению с системой, образованной двумя субслоями.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10045.

#### Список литературы

1. Бодров В. И., Бодров М. В. Теплообмен в биологически активных системах (теория сушки и хранения): учеб. пособие. Нижний Новгород: ННГАСУ, 2013. 145 с.
2. Ait saada M., Chikh S., Campo A. Natural convection reduction in a composite air/porous annular region with horizontal orientation // *Journal of Heat Transfer*. 2009. Vol. 131, 022601.
3. Kolchanova E. A., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P. The onset and nonlinear regimes of convection in a two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid // *Transport in Porous Media*. 2013. Vol. 97. N. 1. P. 25-42.
4. Lyubimova T. P., Muratov I. D. Interaction of the longwave and finite-wavelength instability modes of convection in a horizontal fluid layer confined between two fluid-saturated porous layers // *Fluids*. 2017. Vol. 2.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
6. Carr M. Penetrative convection in a superposed porous-medium-fluid layer via internal heating // *Journal of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 509. P. 305–329.

7. Shalbfaf S., Noghrehabadi A., Assari M. R., Dezfouli A. D. Linear stability of natural convection in a multilayer system of fluid and porous layers with internal heat sources // *Acta Mechanica*. 2013. Vol. 224. P. 1103-1114.
8. Lisboa K. M., Su J., Cotta R. M. Single domain integral transform analysis of natural convection in cavities partially filled with heat generating porous medium // *Numerical Heat Transfer. Part A*. 2018. V. 74. N. 3. P. 1068–1086. DOI: 10.1080/10407782.2018.1511141
9. Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. Convection in a composite air-porous layer with internal heat source depending on solid volume fraction // *AIP Conference Proceedings*. 2021 (принята в печать)
10. Carman P. C. Fluid flow through granular beds // *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*. 1937. Vol. 15. P. S32–S48.
11. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Cham, Switzerland: Springer, 2017. 988 p.
12. Алмухов И. В., Очиров В. Д. Теплофизические характеристики как основа расчета постоянной времени нагрева сахаросодержащих корнеплодов в процессах тепловой обработки // *Вестник КрасГАУ*. 2010. № 4. С. 134–139.
13. Katto Y., Matsuoka T. Criterion for onset of convective flow in a fluid in a porous medium // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1967. V. 10. N. 3. P. 297–309.
14. Horton C. W., Rogers F. T. Convection currents in a porous medium // *Journal of Applied Physics*. 1945. Vol. 16. P. 367–370.
15. Kulacki F., Ramchandani R. Hydrodynamic instability in a porous layer saturated with a heat generating fluid // *Wärme und Stoffübertragung-Thermo and Fluid Dynamics*. 1975. Vol. 8. P. 179–185.

#### References

1. Bodrov V. I., Bodrov M. V. *Heat and mass transfer in biologically active systems (theory of drying and storage): tutorial*. Nizhny Novgorod: NNGASU, 2013, 145 p. (In Russian).
2. Ait saada M., Chikh S., Campo A. Natural convection reduction in a composite air/porous annular region with horizontal orientation. *Journal of Heat Transfer*, 2009, vol. 131, no. 022601.
3. Kolchanova E. A., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P. The onset and nonlinear regimes of convection in a two-layer system of fluid and porous medium saturated by the fluid. *Transport in Porous Media*, 2013, vol. 97, no. 1, pp. 25-42.
4. Lyubimova T. P., Muratov I. D. Interaction of the longwave and finite-wavelength instability modes of convection in a horizontal fluid layer confined between two fluid-saturated porous layers. *Fluids*, 2017, vol. 2.



5. Gershuni G. Z., Zhukovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids*. Moscow: Nauka, 1972. 392 p (In Russian).
6. Carr M. Penetrative convection in a superposed porous-medium-fluid layer via internal heating. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, vol. 509, pp. 305–329.
7. Shalhaf S., Noghrehabadi A., Assari M. R., Dezfouli A. D. Linear stability of natural convection in a multilayer system of fluid and porous layers with internal heat sources. *Acta Mechanica*, 2013, vol. 224, pp. 1103–1114.
8. Lisboa K. M., Su J., Cotta R. M. Single domain integral transform analysis of natural convection in cavities partially filled with heat generating porous medium. *Numerical Heat Transfer. Part A*, 2018, vol. 74, no. 3, pp. 1068–1086. DOI: 10.1080/10407782.2018.1511141
9. Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. Convection in a composite air-porous layer with internal heat source depending on solid volume fraction. *AIP Conference Proceedings*. 2021 (принята в печать)
10. Carman P. C. Fluid flow through granular beds. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 1937, vol. 15, pp. S32–S48.
11. Nield D., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Switzerland: Springer, 2017. 988 p.
12. Altukhov I. V., Ochirov V. D. Thermalphysic characteristics as the basis of calculation of the heating time constant of the sacchariferous root crops in the thermal processing processes. *The Bulletin of KrasGAU*, 2010, vol. 4, pp. 134–139 (In Russian).
13. Katto Y., Matsuoka T. Criterion for onset of convective flow in a fluid in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1967, vol. 10, no. 3, pp. 297–309.
14. Horton C. W., Rogers F. T. Convection currents in a porous medium. *Journal of Applied Physics*, 1945, vol. 16, pp. 367–370.
15. Kulacki F., Ramchandani R. Hydrodynamic instability in a porous layer saturated with a heat generating fluid. *Wärme und Stoffübertragung-Thermo and Fluid Dynamics*, 1975, vol. 8, pp. 179–185.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Колчанова Е.А., Колчанов Н.В. Влияние размера воздушной области на порог тепловой конвекции в системе воздух–тепловыделяющая пористая среда–воздух // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 1. С. 22–27. doi: 10.17072/1994-3598-2022-1-22-27

**Please cite this article in English as:**

Kolchanova E.A., Kolchanov N.V. Influence of air region size on the onset of thermal convection in an air–heat-generating porous medium–air system. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2022, no. 1, pp. 22–27. doi: 10.17072/1994-3598-2022-1-22-27

**Сведения об авторах**

1. *Екатерина Андреевна Колчанова*, канд. физ.-мат.наук., доцент, кафедра общей физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, 614990, г. Пермь
2. *Николай Викторович Колчанов*, канд. физ.-мат.наук., доцент, кафедра общей физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, 614990, г. Пермь

**Author information**

1. *Ekaterina A. Kolchanova*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Perm State University, Bukirev str. 15, 614990, Perm, Russia.
2. *Nikolay V. Kolchanov*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Perm State University, Bukirev str. 15, 614990, Perm, Russia.