

УДК 621.37; 537.862; 517.925.42  
PACS 05.45.Xt; 05.40.-a; 02.50.Ey

## Описание макроскопической динамики популяций фазовых элементов с белым негауссовым шумом на основе подхода круговых кумулянтов

А. В. Долматова<sup>1,2</sup>, И. В. Тюлькина<sup>1</sup>, Д. С. Голдобин<sup>1,3\*</sup>

<sup>1</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

<sup>2</sup> Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

\* email: Denis.Goldobin@gmail.com

Использование подхода круговых кумулянтов позволяет построить маломодовое макроскопическое описание динамики популяций фазовых элементов, подверженных действию негауссова белого шума. Получены двухкумулянтные редуцированные уравнения для альфа-устойчивых шумов. Применение подхода демонстрируется на случае ансамбля Курамото с негауссовым шумом. Результаты численного счета для ансамбля  $N=1500$  элементов, численное решение цепочки уравнений для параметров порядка Курамото-Дайдо (Фурье-мод плотности вероятности) с учетом 200 членов (в термодинамическом пределе) и аналитическое решение в рамках двухкумулянтного приближения хорошо согласуются друг с другом.

**Ключевые слова:** теория синхронизации; круговые кумулянты; ансамбли осцилляторов; альфа-устойчивые шумы

*Поступила в редакцию 24.05.2021; после рецензии 16.06.2021; принята к опубликованию 24.06.2021*

## Description of the macroscopic dynamics of populations of phase elements with white non-Gaussian noise based on the circular cumulant approach

A. V. Dolmatova<sup>1,2</sup>, I. V. Tiulkina<sup>1</sup>, D. S. Goldobin<sup>1,3\*</sup>

<sup>1</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS, Perm, Russia

<sup>2</sup> Institute for Information Transmission Problems RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia

<sup>3</sup> Perm State University, Perm, Russia

\* email: Denis.Goldobin@gmail.com

We use the method of circular cumulants, which allows us to construct a low-mode macroscopic description of the dynamics of populations of phase elements subject to non-Gaussian white noise. In this work, we have obtained two-cumulant reduced equations for alpha-stable noise. The application of the approach is demonstrated for the case of the Kuramoto ensemble with non-Gaussian noise. The results of numerical calculations for the ensemble of  $N=1500$  elements, the numerical

simulation of the chain of equations for the Kuramoto–Daido order parameters (Fourier modes of the probability density) with 200 terms (in the thermodynamic limit of an infinitely large ensemble) and the theoretical solution on the basis of the two-cumulant approximation are in good agreement with each other.

**Keywords:** synchronization theory; circular cumulants; oscillator ensembles; alpha-stable noises

Received 24.05.2021; revised 16.06.2021; accepted 24.06.2021

doi: 10.17072/1994-3598-2021-3-05-12

## 1. Введение

В данной работе строится маломодовое макроскопическое описание динамики популяций фазовых элементов, подверженных действию негауссова дельтакоррелированного шума в терминах круговых кумулянтов. Ранее были рассмотрены системы с гауссовым белым шумом в работах [1, 2]. Двухкумулянтное приближение обеспечивает разумную точность макроскопического описания динамики системы.

Для дельтакоррелированных шумов, в силу центральной предельной теоремы, любой негауссов шум сведется к  $\alpha$ -устойчивым шумам при предельном переходе от дискретного времени к непрерывному, что диктует интерес к системам именно такого типа. В этой статье рассматривается случай для шума, определяемого знакосимметричным устойчивым распределением, которое актуально для финансовых систем и широкого круга физических приложений.

## 2. Дельтакоррелированные негауссовы шумы и приближение круговых кумулянтов

Рассмотрим стохастическую динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\xi(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , ниже свойства негауссового шума  $\xi(t)$  будут обсуждены более детально. Данные стохастические уравнения записаны в смысле Стратоновича.

Напомним определение характеристического функционала стохастического процесса  $\xi(t)$  [3, 4]:

$$F^{(\xi)}[v(t)] = \langle e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} v(\tau)\xi(\tau)d\tau} \rangle, \quad (2)$$

где  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по реализациям шума. Для некоторых приложений также востребовано

$$F_t^{(\xi)}[v(t)] = \langle e^{i \int^t v(\tau)\xi(\tau)d\tau} \rangle. \quad (3)$$

Логарифм характеристического функционала

$$\begin{aligned} \Phi^{(\xi)}[v(t)] \equiv \ln F^{(\xi)}[v(t)] &\equiv \int dt_1 K_{\xi,1}(t_1) i v(t_1) + \\ &+ \int dt_1 \int dt_2 K_{\xi,2}(t_1, t_2) \frac{i^2 v(t_1) v(t_2)}{2!} + \\ &+ \int dt_1 \int dt_2 \int dt_3 K_{\xi,3}(t_1, t_2, t_3) \frac{i^3 v(t_1) v(t_2) v(t_3)}{3!} + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $K_{\xi,n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$  является  $n$ -й кумулянтной функцией. Введем логарифм характеристического функционала в момент времени  $t$ :

$$\Phi_t^{(\xi)}[v(t)] \equiv \ln F_t^{(\xi)}[v(t)].$$

Для дельтакоррелированного шума, если можно ввести кумулянтные функции, то они выглядят таким образом:

$$K_{\xi,n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathcal{K}_{\xi,n}(t_1) \delta(t_2 - t_1) \dots \delta(t_n - t_1), \quad (5)$$

где допускаются стохастические процессы с зависящими от времени свойствами,  $\mathcal{K}_{\xi,n}(t)$ . Для дискретных версий уравнения (1) с шагом по времени  $\Delta t$  имеем  $\xi_j = \xi(t_j)$  как независимые случайные числа с кумулянтами  $\mathcal{K}_{\xi,n}(t_j) / (\Delta t)^{n-1}$ .

Кроме того, если мы имеем дело с дельтакоррелированным шумом, управляющим динамической системой (1), уместно рассмотрение только  $\alpha$ -устойчивых распределений  $\xi$ . Действительно, если принять для дискретного времени версию уравнения (1) и плотность вероятности  $\xi$  с хвостами распределения  $\propto |\xi|^{-1-\alpha}$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ , то в силу обобщенной центральной предельной теоремы в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$  шум будет эффективно действовать как  $\alpha$ -устойчивый. Таким образом, в численном моделировании выбор  $\alpha$ -устойчивого распределения приведет к лучшей сходимости результатов к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ ; в теоретическом анализе физически непротиворечивое рассмотрение должно полагать для дельтакоррелированного шума  $\alpha$ -устойчивые статистические свойства.

Напомним кратко необходимые свойства  $\alpha$ -устойчивых распределений [5]. Сумма большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин, плотность вероятности кото-

рых имеет степенные хвосты  $|\xi|^{-1-\alpha}$ , распределяется согласно  $\alpha$ -устойчивому распределению (с таким же показателем степенного закона для хвостов) для  $0 < \alpha < 2$  и распределению Гаусса ( $\alpha = 2$ ) для  $\alpha \geq 2$ . Для  $\alpha \leq 0$  распределение не может быть нормировано. Обычно эти распределения задаются через их характеристические функции:

$$F(v; \alpha, \beta, c, \mu) = \exp(iv\mu - |cv|^\alpha (1 + i\beta \text{sign}(v)\Theta)), \quad (6)$$

где  $\mu \in \mathbb{R}$  – параметр сдвига,  $c > 0$  – параметр масштаба, задающий ширину распределения,  $\beta \in [-1, 1]$  называется параметром асимметрии («skewness», обычно термин «skewness» используется для третьего кумулянта, который в настоящей задаче может расходиться):

$$\Theta = \begin{cases} \text{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \text{for } \alpha \neq 1; \\ -\frac{2}{\pi} \ln|v|, & \text{for } \alpha = 1. \end{cases}$$

Важно обсудить дискретную версию дельтакоррелированного  $\alpha$ -устойчивого шума. Сумма двух независимых  $\alpha$ -устойчивых случайных величин является  $\alpha$ -устойчивой случайной величиной с параметрами (см. уравнение (6))

$$\mu = \mu_1 + \mu_2,$$

$$|c| = (|c_1|^\alpha + |c_2|^\alpha)^{1/\alpha},$$

$$\beta = \frac{\beta_1 |c_1|^\alpha + \beta_2 |c_2|^\alpha}{|c_1|^\alpha + |c_2|^\alpha}.$$

Для суммы двух приращений шума  $\xi_{\Delta t} \Delta t$  эквивалентное приращение для размера временного шага ( $2\Delta t$ ) является  $\xi_{2\Delta t} 2\Delta t = 2^{1/\alpha} \xi_{\Delta t} \Delta t$ ; следовательно, на шаге по времени  $\Delta t$  в численном счете следует задавать шум  $\xi_{\Delta t} \propto (\Delta t)^{1/\alpha-1}$ .

Для стохастической системы (1) функция плотности вероятности

$$w(\mathbf{x}, t) = \langle \delta(x_1(t) - x_1) \delta(x_2(t) - x_2) \dots \delta(x_N(t) - x_N) \rangle = \langle \delta^N(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle$$

подчиняется следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}, t)) = \\ = \langle \xi(t) \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \delta^N(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

где принята договоренность о суммировании по повторяющимся индексам и  $\delta / \delta \xi(t)$  – вариационная производная для  $\delta^N(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x})$ , которая явля-

ется функционалом от  $\xi(\tau)|_{\tau \in (-\infty, t]}$ . Для дельтакоррелированного процесса  $\xi(t)$  производная по времени от логарифма характеристического функционала

$$\dot{\Phi}_t^{(\xi)}[v(t)] = \frac{\langle i \xi(t) v(t) e^{i \int_{-\infty}^t \xi(\tau) v(\tau) d\tau} \rangle}{\langle e^{i \int_{-\infty}^t \xi(\tau) v(\tau) d\tau} \rangle}$$

в момент  $t$  включает только  $\xi(t)$ , так как усреднение  $\langle e^{i \int_{-\infty}^t \xi(\tau) v(\tau) d\tau} \rangle$  можно разложить на множители для усреднений по  $\xi(t)$  и реализации  $\xi(\tau)|_{\tau \in (-\infty, t-0)}$ .

Для дискретного времени имеем  $\xi(t) dt \propto (dt)^{1/\alpha}$  и после сокращения общего множителя  $\langle e^{i \int_{-\infty}^t \xi(\tau) v(\tau) d\tau} \rangle$  среднее значение в знаменателе  $\sim (1 + \mathcal{O}(v^2 (dt)^{2/\alpha}))$ , а в числителе  $\sim v^2 (dt)^{1/\alpha+1}$ . Последнее может быть конечным, когда первое превращается в 1. Следовательно, в уравнении (7)

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \delta^N(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle = \\ = \langle \dot{\Phi}_t^{(\xi)} \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \right] \delta^N(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle. \end{aligned}$$

Используя

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}(t)} \delta^N(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) = -\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} \delta^N(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}),$$

$$\frac{\delta \mathbf{x}(t)}{\delta \xi(t)} = \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \int' (\mathbf{f}(\mathbf{x}(\tau)) + \xi(\tau) \mathbf{g}(\mathbf{x}(\tau))) d\tau = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$$

$$\text{и } \frac{\delta}{\delta \xi(t)} = \frac{\delta \mathbf{x}(t)}{\delta \xi(t)} \frac{\delta}{\delta \mathbf{x}(t)},$$

можно получить

$$\begin{aligned} \langle \dot{\Phi}_t^{(\xi)} \left[ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi(t)} \right] \delta^N(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle = \\ = \langle \dot{\Phi}_t^{(\xi)} [i \hat{Q}] \delta^N(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}) \rangle = \dot{\Phi}_t^{(\xi)} [i \hat{Q}] w(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

где  $\hat{Q}(\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} (g_j(\mathbf{x})(\cdot))$ .

Таким образом, мы приходим к результату Кляцкина [3, 4]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(\mathbf{x}) w) - \dot{\Phi}_t^{(\xi)} (i \hat{Q}) w = 0, \quad (8)$$

или, если возможно представление кумулянтным функциональным рядом,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(\mathbf{x})w) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{\xi, n}}{n!} (-\hat{Q})^n w = 0. \quad (9)$$

Для важного случая знакосимметричного шума  $\xi(t)$  с  $\alpha$ -устойчивым распределением (7) имеем  $\mu = 0$  и  $\beta = 0$ ; следовательно,

$$\Phi_t^{(\xi)}[v(t)] = -\int^t |cv(\tau)|^\alpha d\tau$$

и

$$\dot{\Phi}_t^{(\xi)}[v(t)] = -|cv(t)|^\alpha.$$

Для уровня шума  $c = \sigma$ , уравнение (8) можно переписать как

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (f_j(\mathbf{x})w) - \dot{\Phi}_t^{(\xi)}(i\sigma\hat{Q}; c=1)w = 0. \quad (10)$$

Здесь используется, что «амплитуда» шума может быть явно записана в виде множителя при операторе  $\hat{Q}$ .

Здесь и далее мы ограничиваем рассмотрение случаем фазового уравнения с аддитивным шумом  $g(\varphi) = 1$  и  $f(\varphi, t) = \omega(t) + \text{Im}(h(t)e^{-i\varphi})$ :

$$\dot{\varphi} = \omega(t) + \text{Im}(h(t)e^{-i\varphi}) + \sigma\xi(t). \quad (11)$$

В этом случае уравнение (10) можно переписать как

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (f(\varphi)w) - \dot{\Phi}_t^{(\xi)}\left(i\sigma\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)w = 0. \quad (12)$$

В Фурье-пространстве

$$w(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{-im\varphi}$$

с  $a_0 = 1$  и  $a_{-m} = a_m^*$ , а также

$$\dot{a}_m = im\omega a_m + mha_{m-1} - mh^* a_{m+1} + \dot{\Phi}_t^{(\xi)}(\sigma m) a_m. \quad (13)$$

Поскольку уравнения для  $a_{m>1}$  не включают  $a_{m<0}$  и  $a_0 = 1$ , то функция  $\dot{\Phi}_t^{(\xi)}(\sigma m)$  приобретает аналитическую форму  $\dot{\Phi}_t^{(\xi)}(\sigma m) = -(\sigma m)^\alpha$ , что означает, что она корректно определена для оператора в уравнении (8).

Подводя итог, для дельтакоррелированного  $\alpha$ -устойчивого симметричного аддитивного шума  $\xi(t)$  с силой  $\sigma$  функция плотности вероятности определяется следующим уравнением для мод Фурье:

$$\dot{a}_m = im\omega a_m + mha_{m-1} - mh^* a_{m+1} - (\sigma m)^\alpha a_m. \quad (14)$$

Примечательно, что уравнение (14) подчеркивает проблему построения аналога уравнения Фоккера–Планка посредством кумулянтного пред-

ставления шума, такого как в уравнении (9). Для всех физически значимых случаев дельтакоррелированного шума необходимо принять  $\alpha$ -устойчивые распределения либо с  $0 < \alpha < 2$ , либо с  $\alpha = 2$  (случай классического уравнения Фоккера–Планка). Представление сингулярной функции  $(\sigma m)^\alpha$  для  $0 < \alpha < 2$  рядом по четным степеням  $(\sigma m)$  никогда не будет адекватным: для больших  $(\sigma m)$ , которые связаны с формированием разрывов распределения, имеем  $m \rightarrow \infty$ , а для слабого шума  $(\sigma m) \rightarrow 0$ .

Проблема формирования нефизических коротковолновых особенностей плотности распределений из-за пространственных производных высокого порядка снимается в маломодовых приближениях на основе представления «круговых кумулянтов» [1, 5]. Можно надеяться, что эта проблема не должна возникнуть в уравнении (14). К сожалению, для нецелого числа  $\alpha$  вывод общих круговых кумулянтных уравнений [1] может быть проблематичным и включать дробные производные. Рассмотрим двухкумулянтные приближения [2] и уравнение (13). Здесь также можно рассмотреть случай распределения Лоренца для собственных частот  $G(\omega) = \gamma / \{\pi[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2]\}$ , что дает уравнения для параметров порядка Курамото–Дайдо из уравнения (13):

$$\dot{Z}_m = m\left((i\omega_0 - \gamma)Z_m + hZ_{m-1} - h^*Z_{m+1}\right) + \dot{\Phi}_t^{(\xi)}(\sigma m)Z_m \quad (15)$$

с  $Z_0 = 1$ . Для

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= Z_1, \\ \kappa_2 &= Z_2 - Z_1^2, \\ \kappa_3 &= \frac{Z_3 - 3Z_2Z_1 + 2Z_1^3}{2}, \dots \end{aligned}$$

можно записать  $\dot{\kappa}_1 = \dot{Z}_1$ ,  $\dot{\kappa}_2 = \dot{Z}_2 - 2Z_1\dot{Z}_1$  и т.д. Тогда уравнения (16) из работы [2] можно переписать как

$$\dot{Z}_1 = (i\omega_0 - \gamma)Z_1 + h - h^*(Z_1^2 + \kappa_2) + \Phi_\sigma Z_1, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_2 &= 2(i\omega_0 - \gamma)\kappa_2 - 4h^*(\kappa_3 + Z_1\kappa_2) + \\ &+ \Phi_{2\sigma}\kappa_2 + [\Phi_{2\sigma} - 2\Phi_\sigma]Z_1^2, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_3 &= 3(i\omega_0 - \gamma)\kappa_3 - \\ &- h^*(9\kappa_4 + 6Z_1\kappa_3 + 3\kappa_2^2) + \\ &+ \Phi_{3\sigma}\kappa_3 + \frac{3}{2}[\Phi_{3\sigma} - \Phi_{2\sigma} - \Phi_\sigma]\kappa_2 Z_1 + \\ &+ \frac{\Phi_{3\sigma} - 3\Phi_{2\sigma} + 3\Phi_\sigma}{2}Z_1^3, \end{aligned} \quad (18)$$

...

где  $\Phi_{m\sigma} := \dot{\Phi}_t^{(\varepsilon)}(m\sigma)$ .

С  $\dot{\Phi}_t^{(\varepsilon)}(\sigma m) = -(\sigma m)^\alpha$ , уравнения (16)–(17) принимают вид

$$\dot{Z}_1 = (i\omega_0 - \gamma)Z_1 + h - h^*(Z_1^2 + \kappa_2) - \sigma^\alpha Z_1, \quad (19)$$

$$\dot{\kappa}_2 = 2(i\omega_0 - \gamma)\kappa_2 - 4h^*(\kappa_3 + Z_1\kappa_2) + -\sigma^\alpha [2^\alpha \kappa_2 + (2^\alpha - 2)Z_1^2]. \quad (20)$$

### 3. Численное моделирование

Можно проверить уравнения (14) и (19)–(20), используя модель Курамото с собственными негауссовыми шумами. Сопоставим (i) моделирование конечного ансамбля, (ii) решение уравнения (15), (iii) решение уравнений (19)–(20).

Для

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \varepsilon \sum_{m=1}^N \sin(\varphi_m - \varphi_j) + \sigma \xi_j(t), \quad (21)$$

$$j = 1, \dots, N$$

в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  имеем

$$h = \frac{\varepsilon}{2} Z_1,$$

и уравнения (19)–(20) с  $\kappa_3 = 0$  дают «стационарное» решение ( $\dot{Z}_n = in\omega_0 Z_n$ )

$$\kappa_2 = -\frac{(2^\alpha - 2)\sigma^\alpha Z_1^2}{2\gamma + (2\sigma)^\alpha + 2\varepsilon |Z_1|^2},$$

$$|Z_1|^2 = \frac{1}{2} - \frac{3(\gamma + \sigma^\alpha)}{2\varepsilon} + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - [2\gamma + (6 - 2^{\alpha+1})\sigma^\alpha]\varepsilon}}{2\varepsilon} + \frac{\sqrt{(\gamma + \sigma^\alpha)[\gamma + (9 - 2^{\alpha+2})\sigma^\alpha]}}{2\varepsilon}, \quad (22)$$

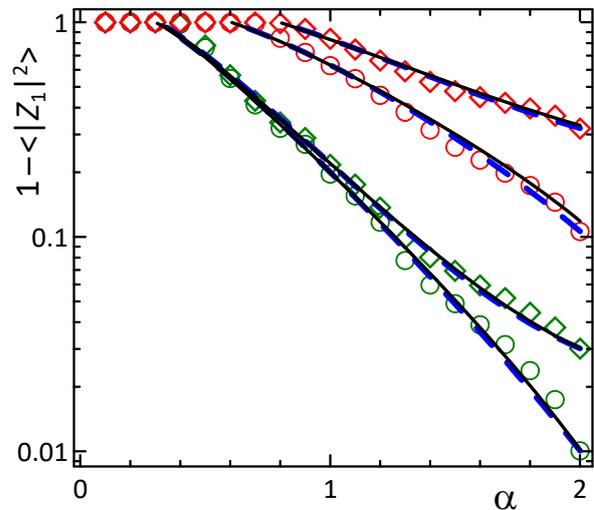
и с  $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$

$$|Z_1|^2 = 1 - \frac{2(\gamma + \sigma^\alpha)}{\varepsilon}. \quad (23)$$

Для получения  $\alpha$ -устойчивых переменных в численном счете в данной работе используется подход, предложенный в [6] и основанный на интегральной формуле из работы [7], как это было реализовано в [8]. (См. «Stable distributions» в [9], раздел «Simulation of stable variables», ссылки [19–21] в [9]).

На рисунке символами представлены результаты численного моделирования для ансамбля  $N = 1500$  осцилляторов Курамото (21) для  $\varepsilon = 1$ ;

значения параметров  $(\sigma^2, \gamma)$  снизу-вверх: (0.01, 0), (0.01, 0.01), (0.1, 0), (0.1, 0.1). Черные сплошные линии – двухкумулянтное приближение (22); синие пунктирные линии – «стационарное» (в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\omega_0$ ) численное решение системы уравнений (15) для параметров Курамото–Дайдо с учетом 200 элементов. Можно видеть, что аналитическое решение близко к «точному» численному решению, что позволяет судить о точности двухкумулянтной модели. Отклонение результатов счета для конечного ансамбля, по-видимому, связано с эффектами конечности размера ансамбля.



Сопоставление результатов численного счета и аналитической теории (описание в тексте)

### 4. Замыкания, соответствующие некоторым свернутым распределениям

Для свернутого  $\alpha$ -устойчивого распределения параметры порядка  $\langle e^{im\varphi} \rangle$  равны значениям характеристической функции  $F(m; \alpha, \beta, \sigma, \mu)$ ,  $m$  – целое число. При  $\beta = 0$

$$Z_m = e^{im\mu - \sigma^\alpha m^\alpha}.$$

Для круговых кумулянтов можно вычислить  $\kappa_2 \propto \sigma^\alpha$  и  $\kappa_3 \propto \sigma^\alpha$ ; видно, что не соблюдается закон  $\kappa_3 \propto (\sigma^\alpha)^2$ . Следовательно, замыкание бесконечной цепочки уравнений для  $\kappa_n$  на основе иерархии  $\kappa_{m+1}\kappa_{m-1} \sim \kappa_m^2$  в этом случае неуместно. Вместо этого может быть использовано

$$\kappa_2 = -(2^\alpha - 2)e^{i2\mu}\sigma^\alpha + \mathcal{O}(\sigma^{2\alpha}),$$

$$\kappa_3 = -\frac{3^\alpha - 3 \cdot 2^\alpha + 3}{2} e^{i3\mu} \sigma^\alpha + \mathcal{O}(\sigma^{2\alpha}).$$

Тогда

$$\kappa_3 = \frac{3^\alpha - 3 \cdot 2^\alpha + 3}{2^{\alpha+1} - 2^2} Z_1 \kappa_2 + \mathcal{O}(\sigma^{2\alpha}). \quad (24)$$

Обратим внимание на то, что это соответствует уравнению (18), где коэффициент при последнем члене обращается в нуль только для  $\alpha = 1, 2$ . Это слагаемое нарушает иерархию  $\kappa_m \sim (\sigma^\alpha)^{m-1}$ . С использованием замыкания (24) можно рассмотреть альтернативную версию уравнения (20):

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_2 = & 2(i\omega_0 - \gamma)\kappa_2 - \\ & - 2h^* \frac{3^\alpha - 2^\alpha - 1}{2^\alpha - 2} Z_1 \kappa_2 - \\ & - \sigma^\alpha [2^\alpha \kappa_2 + (2^\alpha - 2)Z_1^2]. \end{aligned} \quad (25)$$

«Стационарное» решение системы уравнений (18), (25):

$$\begin{aligned} \kappa_2 = & -\frac{(2^\alpha - 2)\sigma^\alpha Z_1^2}{2\gamma + (2\sigma)^\alpha + \varepsilon \frac{3^\alpha - 2^\alpha - 1}{2^\alpha - 2} |Z_1|^2}, \\ |Z|^2 = & \frac{1}{2} - \frac{(3^\alpha - 3)(\gamma + \sigma^2)}{(3^\alpha - 2^\alpha - 1)\varepsilon} + \\ & + \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{(3^\alpha - 3)(\gamma + \sigma^2)}{(3^\alpha - 2^\alpha - 1)\varepsilon} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{(2^\alpha - 2)(\varepsilon - 2\gamma - 2\sigma^\alpha)(2\gamma + (2\sigma)^\alpha)}{(3^\alpha - 2^\alpha - 1)\varepsilon^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для системы Курамото (21) данное приближение дает такую же точность, как приближение  $\kappa_3 = 0$ , при высокой степени синхронности (для узких распределений плотности вероятности) и существенно ниже – при невысокой степени синхронности. Вместе с тем, данное замыкание может быть востребовано для популяций с общим шумом [10, 11].

## 5. Замечания общего характера

В работах [10, 11] для ансамблей с общим шумом и связью, в состояниях с высокой степенью синхронности наблюдаются флуктуации отклонения фазы  $\theta_j$  относительно синхронизированной группы со степенными хвостами распределения  $\sim |\theta|^{-2-2m}$ , где коэффициент связи  $m > -1/2$ , что соответствует  $\alpha > 0$ . В частности, это означает, что эффективный внутренний шум в ансамблях

связанных осцилляторов с большим, но конечным числом связей будет  $\alpha$ -устойчивым.

## 6. Заключение

В рамках подхода круговых кумулянтов удается построить достаточно точное макроскопическое описание динамики популяций фазовых осцилляторов/элементов с негауссовыми дельтакоррелированными шумами. Для дельтакоррелированных шумов, в силу центральной предельной теоремы, физический смысл имеет только случай  $\alpha$ -устойчивых шумов, к которым сведется любой иной негауссов шум при предельном переходе от дискретного времени к непрерывному путем устремления шага  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Поскольку маломодовое описание математически соответствует учету только ведущих Фурье-гармоник распределения плотности вероятности, в рамках подхода не возникает проблемы нефизического поведения плотности вероятности (формирования разрывов и т.п.), типичной для уравнений типа Фоккера–Планка, в которых учитываются ведущие негауссовы поправки для шума, но кумулянтный ряд для шума оборван.

Применение подхода продемонстрировано на случае ансамбля Курамото с негауссовым шумом. Результаты численного счета для ансамбля  $N = 1500$  элементов (21), численное решение цепочки уравнений для параметров порядка Курамото–Дайдо  $Z_m = N^{-1} \sum_{j=1}^N e^{im\varphi_j}$  (15) в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  (Фурье-мод плотности вероятности) с учетом 200 членов  $Z_m$  и аналитическое решение в рамках двухкумулянтного приближения (22) хорошо согласуются друг с другом.

На графиках также можно заметить, что результаты счета конечного ансамбля и аналитического описания особенно близки при  $\alpha = 2$  и отличимы при  $\alpha = 1$ . Первое связано с тем, что наличие степенных хвостов распределения (при  $\alpha < 0$ ) для флуктуаций существенно ухудшает статистическую сходимость при осреднении, усиливая эффекты конечности размеров ансамбля и длины выборки для осреднения. Случай же лоренцева шума ( $\alpha = 1$ ) примечателен тем, что для него подстановка Отта–Антонсена является точной и для устойчивого стационарного решения старшие круговые кумулянты в точности равны нулю. В этом случае и в двухкумулянтной модели второй кумулянт обращается в ноль, а решение становится точным решением полной системы.

На графиках также можно заметить, что результаты счета конечного ансамбля и аналитического описания особенно близки при  $\alpha = 2$  и отличимы при  $\alpha = 1$ . Первое связано с тем, что наличие степенных хвостов распределения (при  $\alpha < 0$ ) для флуктуаций существенно ухудшает статистическую сходимость при осреднении, усиливая эффекты конечности размеров ансамбля и длины выборки для осреднения. Случай же лоренцева шума ( $\alpha = 1$ ) примечателен тем, что для него подстановка Отта–Антонсена является точной и для устойчивого стационарного решения старшие круговые кумулянты в точности равны нулю. В этом случае и в двухкумулянтной модели второй кумулянт обращается в ноль, а решение становится точным решением полной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-42-04120.

## Список литературы

1. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of Noisy Oscillator Populations Beyond the Ott-Antonsen Ansatz // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 120, 264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.264101
2. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2018. Vol. 28. 101101. DOI: 10.1063/1.5053576
3. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 337 с.
4. Klyatskin V. *Dynamic of Stochastic Systems*, Elsevier Science, 2005. 212 p.
5. Голдобин Д. С., Тюлькина И. В., Клименко Л. С., Пиковский А. К описанию коллективной динамики в ансамблях реальных осцилляторов // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2018. № 3 (41). С. 5–7. DOI: 10.17072/1994-3598-2018-3-05-07
6. Chambers J. M., Mallows C. L., Stuck B. W. A Method for Simulating Stable Random Variables // *Journal of the American Statistical Association*. 1976. Vol. 71. N. 354. P. 340–344.
7. Zolotarev V. M. One-dimensional stable distribution / Translation of Mathematical Monographs. Vol. 65. // Providence: American Mathematical Society, 1986.
8. Misiorek A., Weron R. Heavy-Tailed Distributions in VaR Calculations / in: *Gentle J. E., Härdle W. K., Mori Yu.* (ред.) *Springer Handbooks of Computational Statistics* // Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. P. 1025–1039.
9. Stable distribution (Электронный ресурс). URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Stable\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Stable_distribution) (дата обращения: 24.05.2021)
10. Goldobin D. S., Dolmatova A. V. Interplay of the mechanisms of synchronization by common noise and global coupling for a general class of limit-cycle oscillators // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*. 2019. Vol. 75. P. 94–108. DOI: 10.1016/j.cnsns.2019.03.026
11. Голдобин Д. С., Долматова А. В. Эффект расхождения частот в ансамблях автоколебательных систем с отталкивающей глобальной связью при синхронизации общим шумом // *Известия вузов. ПНД*. 2019. Т. 27, № 3. С. 33–60. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60

## References

1. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of Noisy Oscillator Populations Beyond the Ott-Antonsen Ansatz. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 120, 264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.264101
2. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018, vol. 28, 101101. DOI: 10.1063/1.5053576
3. Klyatskin V. I. Stokhasticheskie uravneniya i volny v sluchaino-neodnorodnyh sredah (Stochastic equations and waves in randomly inhomogeneous media). Moscow: Nauka, 1980. 337 p. (In Russian).
4. Klyatskin V. *Dynamic of Stochastic Systems*. Elsevier Science, 2005. 212 p.
5. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovskii A. Towards the description of collective dynamics in ensembles of real oscillators. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2018, no. 3 (41), pp. 5–7. DOI: 10.17072/1994-3598-2018-3-05-07
6. Chambers J. M., Mallows C. L., Stuck B. W. A Method for Simulating Stable Random Variables. *Journal of the American Statistical Association*, 1976, vol. 71, no. 354, pp. 340–344.
7. Zolotarev V. M. One-dimensional stable distribution. *Translation of Mathematical Monographs. Vol. 65*, Providence: American Mathematical Society, 1986.
8. Misiorek A., Weron R. Heavy-Tailed Distributions in VaR Calculations. *Springer Handbooks of Computational Statistics*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012, pp. 1025–1039.
9. Stable distribution (Electronic resource). URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Stable\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Stable_distribution) (Access date: 24.05.2021)
10. Goldobin D. S., Dolmatova A. V. Interplay of the mechanisms of synchronization by common noise and global coupling for a general class of limit-cycle oscillators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 2019, vol. 75, pp. 94–108.
11. Goldobin D. S., Dolmatova A. V. Frequency repulsion in ensembles of general limit-cycle oscillators synchronized by common noise in the presence of global desynchronizing coupling. *Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 3, pp. 33–60. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Долматова А. В., Тюлькина И. В., Голдобин Д. С. Описание макроскопической динамики популяций фазовых элементов с белым негауссовым шумом на основе подхода круговых кумулянтов // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2021. № 3. С. 05–12. doi: 10.17072/1994-3598-2021-3-05-12

**Please cite this article in English as:**

Dolmatova A. V., Tyulkin I. V., Goldobin D. S. Description of the macroscopic dynamics of populations of phase elements with white non-Gaussian noise based on the circular cumulant approach. Bulletin of Perm University. Physics, 2021, no. 3, pp. 05–12. doi: 10.17072/1994-3598-2021-3-05-12

**Сведения об авторах**

1. *Анастасия Владимировна Долматова*, канд. физ.-мат. наук, и.о. н.с., Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Большой Каретный пер., 19/1, Москва, 127051.
2. *Ирина Валерьевна Тюлькина*, м.н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013.
3. *Денис Сергеевич Голдобин*, канд. физ.-мат. наук, с.н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013; доцент кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990.

**Author information**

1. *Anastasia V. Dolmatova*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Research Associate, Institute for Information Transmission Problems RAS (Kharkevich Institute), Bolshoy Karetny per. 19/1, Moscow, Russia, 127051.
2. *Irina V. Tyulkin*; Junior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS, Akademika Koroleva str. 1, Perm, Russia, 614013.
3. *Denis S. Goldobin*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Senior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS, Akademika Koroleva str. 1, Perm, Russia, 614013; Professor Associate at Theoretical Physics Department, Perm State University, Bukirev str. 15, Perm, Russia, 614990.