

УДК 532.62; 532.68
PACS 47.20-k, 47.55N-

Влияние эффекта испарения на устойчивость тонкого слоя жидкости в задаче Ландау–Левича

А. В. Люшнин

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия
email: andry@pspu.ru

Теоретически исследуется устойчивость слоя жидкости в задаче Ландау–Левича при наличии эффекта испарения со стороны свободной поверхности. Свободная энергия тонкого слоя несжимаемой жидкости является суммой дисперсионного (ван-дер-ваальсового) взаимодействия и специфического электрического взаимодействия, обусловленного наличием двойных электрических слоев на обеих межфазных границах. В рамках длинноволнового приближения в системе уравнений Навье–Стокса изучается устойчивость такой системы относительно возмущений. Для различных значений параметра испарения приводится карта устойчивости. Установлено, что с увеличением безразмерного числа испарения устойчивость системы увеличивается.

Ключевые слова: испарение; тонкий слой; устойчивость; задача Ландау–Левича

Поступила в редакцию 09.07.2021; после рецензии 20.07.2021; принята к опубликованию 16.08.2021

Effect of the evaporation action on the stability of a thin liquid layer in the Landau–Levich problem

A. V. Lyushnin

Perm State Humanitarian-Pedagogical University, Perm, Russia
email: andry@pspu.ru

The stability of the liquid layer in the Landau–Levich problem is theoretically investigated in the presence of the evaporation effect from the free surface. The free energy of a thin layer of an incompressible fluid is the sum of the dispersion (van der Waals) interaction and the specific electrical interaction caused by the presence of double electric layers at both interphase boundaries. The stability of such a system with respect to perturbations is studied in the framework of the long – wave approximation in the system of Navier-Stokes equations. A stability map is provided for different values of the evaporation parameter. It is established that the stability of the system increases with an increase in the dimensionless number of evaporation.

Keywords: evaporation, thin film; stability; Landay–Levich problem

Received 09.07.2021; revised 20.07.2021; accepted 16.08.2021

doi: 10.17072/1994-3598-2021-3-23-29

1. Введение

Математическая постановка задачи о тонкой пленке жидкости, расположенной на твердой поверхности, – один из самых распространенных технологических элементов, использующихся в компьютерном моделировании процессов и устройств современной техники. Это могут быть защитные пленочные покрытия на стеклянных и металлических волокнах; различные пленки оптически активного вещества на плоских подложках для использования в области фототехники; остаточные пленки на стенках цилиндрических и плоских поверхностей, образующиеся при вытеснении из них вязкой жидкости другой менее вязкой жидкостью или газом (покраска путем погружения в ванну); пленки загрязнителей, образующиеся при самопроизвольном растекании капель жидкости под воздействием градиентов поверхностного натяжения или массовых сил.

В пионерской [1] работе было предложено решение задачи о толщине образующейся пленки на вытягиваемой вертикально вверх из объема жидкости плоской пластине, основанное на предположении о малом порядке толщины пленки. Это предположение можно интерпретировать таким образом, что силы гравитации и инерции дают пренебрежимо малый вклад в динамику жидкости в пленке. Такое предположение верно лишь при малых скоростях извлечения пластины из жидкости, при $Ca \rightarrow 0$, где $Ca = \mu U / \sigma$, где μ , U и σ – динамическая вязкость, скорость вытягивания пластины из жидкости и коэффициент поверхностного натяжения, соответственно. Идея работы Ландау и Левича основана на методике асимптотического сращивания профилей статического мениска и поверхности пленки таким образом, чтобы давление в пленке изменялось непрерывно.

В работе [2] был предложен эффективный метод исследования капиллярных пленочных течений с использованием вычислительной техники, основанный на применении приближения пограничного слоя. Из краевой задачи для уравнений Навье-Стокса выведена система безразмерных уравнений, где учитываются сила капиллярного натяжения, а также эффекты вязкости, инерции, гравитации. Развитие этой тематики привело к появлению новой области гидродинамики: гидродинамика волновых пленок. Идея, реализованная в этой работе, была использована и другими авторами в экспериментальных и теоретических исследованиях пленочных течений, результаты которых, в частности, отражены в статьях [3–7] и монографиях [8–10].

В множестве технологических систем, использующих математическую модель «твердая поверхность-слой жидкости», толщина слоя не является постоянной величиной. Одним из факторов может являться эффект испарения. Поэтому двухслойную

систему «твердая поверхность-слой жидкости» необходимо заменить на трехслойную «твердая поверхность-слой жидкости-газ». Поскольку испаряющийся тонкий слой жидкости и окружающий газ разделены, как правило, деформируемой межфазной поверхностью, в их слоях может появляться волновое движение; волны могут перемещаться, динамика волнового движения может изменяться, а при некоторых условиях могут возникнуть и квазипериодические или хаотические структуры. В таких пленках могут возникать разрывы, при которых появляются расширяющиеся отверстия пальцеобразной формы. Изучение таких слоев жидкости (10–1000 Å) началось с работы [11], где впервые было введено понятие «расклинивающее давление». Механизм возникновения такого эффекта обусловлен разностью свойств жидкости в межфазных переходных слоях «газ-жидкость» и «жидкость-твердая подложка». Ван-дер-Ваальс в своих работах сформулировал понятие внутреннего давления среды, обусловленного межмолекулярным взаимодействием. В объемной фазе это давление определяется взаимодействием только молекул жидкости. В межфазных слоях на это взаимодействие накладывается воздействие молекул контактирующих с жидкостью фаз. Это приводит к появлению разности давлений в тонком слое жидкой пленки. В настоящее время существует довольно большое количество публикаций [12–14], в которых изучаются в том числе процесс испарения тонкого слоя жидкости и эффекты структурообразования на свободной поверхности жидкой пленки.

При испарении тонкого слоя воды в экспериментах установлено, что при некотором значении толщины первоначально плоская свободная поверхность жидкости становится неустойчивой (появляется разрыв поверхности) и появляются две характерные толщины тонкого слоя жидкости h_1 и h_2 , ($h_2 > h_1$, см. рис.2) [15]. В этой системе имеется «тонкий», порядка нескольких десятков ангстрем, абсорбционный слой h_1 , толщина которого в процессе испарения не изменяется, и «толстый» молекулярный слой h_2 , толщина которого имеет значение порядка 200–900 Å в зависимости от вида жидкости и подложки. При испарении толщина молекулярного слоя с течением времени стремится к толщине абсорбционного слоя.

В теоретической работе [16], основываясь на теории ДЛФО (Дерягин-Ландау-Фервей-Овербек), было показано, что для описания двухуровневой структуры тонких слоев жидкости необходимо учитывать тот факт, что энергия межфазного взаимодействия складывается из суммы ван-дер-ваальсовского взаимодействия и ионно-электростатического взаимодействия, вызванного перекрытием двойных электрических слоев на межфазных поверхностях «твердое тело-жидкость» и «жидкость-пар». В своем классическом варианте теория ДЛФО рассматривает меж-

фазное взаимодействие как результат совместного действия ван-дер-ваальсовой энергии притяжения и электростатической энергией отталкивания. Энергия электростатического отталкивания меняется по экспоненциальному закону, а молекулярная (ван-дер-ваальсовая) – по степенному. Данная работа посвящена изучению влияния эффекта испарения на устойчивость тонкого слоя жидкости в задаче Ландау-Левича.

2. Постановка задачи

Рассматривается классическая задача Ландау-Левича о движении вязкой несжимаемой жидкости, образующейся в результате вытягивания твердой пластины из жидкой среды в воздушное пространство. На свободной поверхности пластины (рис. 1), которая выдвигается из жидкости с постоянной скоростью U , формируется тонкая жидкая пленка.

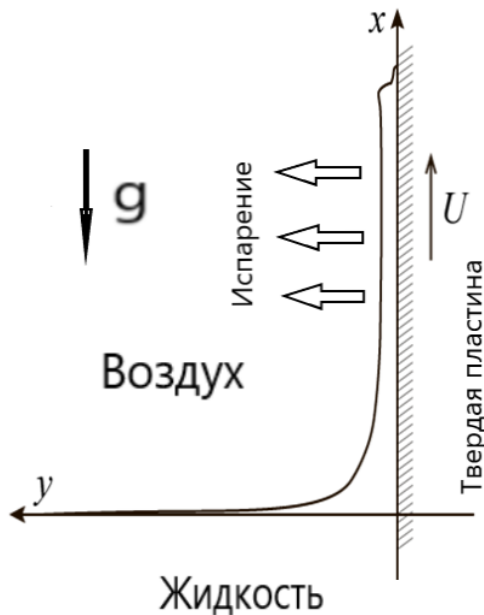


Рис. 1. Геометрический вид задачи Ландау – Левича

Определим систему координат следующим образом: ось x направим вдоль движения твердой пластины, а ось y – перпендикулярно поверхности подложки. Толщина слоя жидкости на твердой подложке является функцией координат и времени $h(x, y, t)$. Уравнение для толщины слоя, которое может быть получено из закона сохранения массы жидкости, выглядит следующим образом [17]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = -\frac{1}{\rho} J, \tag{1}$$

где $\vec{F} = -m(h) \nabla p$ обозначен поток жидкости, здесь $m(h)$ – коэффициент, определяемый из граничных условий. Символами J и ρ обозначены скорость испарения жидкости на границе раздела

(количество испаряющихся частиц на единицу поверхности и единицу времени) и плотность жидкости, соответственно. Правая часть уравнения (1) может быть представлена в виде разности химических потенциалов жидкости и воздуха [18]:

$$J = \psi (\phi_l - \phi_a),$$

где ψ – параметр, характеризующий интенсивность испарения. Этот параметр может быть вычислен исходя из кинетической теории газов или получен экспериментально. Химический потенциал единицы объема жидкости может быть записан в следующем виде:

$$\phi_l = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dg}{dh} - \sigma \nabla^2 h \right),$$

где g есть свободная энергия межфазного взаимодействия, а σ – коэффициент поверхностного натяжения на межфазной поверхности. Свободная энергия межфазного взаимодействия складывается из суммы ван-дер-ваальсовой и электростатической энергий взаимодействия, которая имеет следующий вид [19]:

$$g(h) = -\frac{S^{LW} d_0^2}{h^2} + S^P \cdot \exp\left(-\frac{d_0 - h}{l_0}\right),$$

где $S^{LW} d_0^2 = -A/12\pi$, A – константа Гамакера, d_0 – характерная длина для дебаевского отталкивания, l_0 – характерная длина взаимодействия. Для смачиваемых жидкостей $A < 0$ и $S^P < 0$. Константы S^{LW} и S^P являются ван-дер-ваальсовой и электростатической компонентами коэффициента растекания $S = S^{LW} + S^P$.

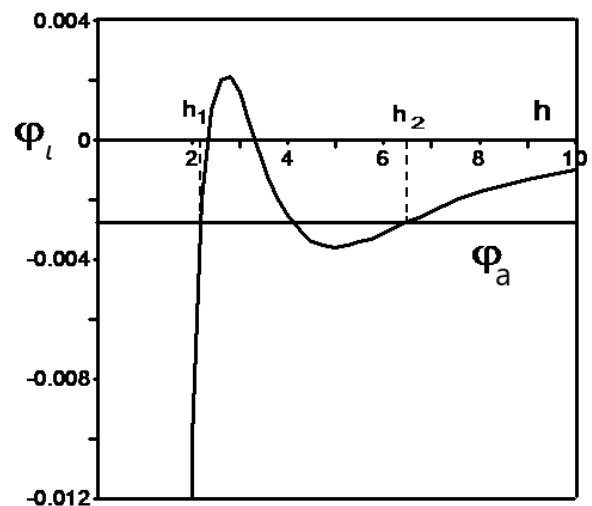


Рис. 2. Зависимость химического потенциала жидкости ϕ_l от толщины пленки h . Пунктирными линиями отмечены два значения стабильной равновесной толщины при соответствующих значениях химического потенциала воздуха ϕ_a

Исследование устойчивости тонкого слоя жидкости в отсутствие испарения было проведено в работе [20], и в размерном виде уравнение (1) для данной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \mu h_t = & -\frac{1}{3}\sigma \left(h_{xxx} h^3 \right)_x + \frac{A}{6\pi} \left(\frac{h_x}{h} \right)_x + \\ & + S^{Pl} \left(h_x h^3 \exp(-h/l_0) \right)_x + \rho g h^2 h_x - \mu U h_x - \\ & - \frac{\mu \psi}{\rho} \left(-\frac{A}{6\pi h^3} + S_0^p \exp(-h/l_0) - \sigma h_{xx} - \rho \phi_a \right) \end{aligned} \quad (2)$$

здесь используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S^{Pl} &= \frac{S_0^p}{3l_0}, \\ S_0^p &= \frac{S^p}{l_0} \exp\left(\frac{l_0}{d_0}\right). \end{aligned}$$

Проведем процесс обезразмеривания следующим образом:

$$h \rightarrow \delta h, \quad x \rightarrow \alpha x, \quad t \rightarrow \beta t,$$

где в качестве единиц размерности выбираются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\rho |A|}{6\pi\mu\psi S_0^p}, \\ \beta &= \frac{\alpha}{U}, \\ \delta &= \frac{1}{U} \sqrt{\frac{\psi S_0^p |A|}{6\pi\mu\rho}}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (2) в безразмерном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} h_t = & -\frac{1}{3}C \left(h_{xxx} h^3 \right)_x + \left(\frac{h_x}{h} \right)_x + \\ & + S \left(h_x h^3 \exp(-h/l_0) \right)_x + G h^2 h_x - h_x - \\ & - \Omega \left(-\frac{1}{h^3} + M \left(\exp(-h/l_0) \right) - Ca h_{xx} - P \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнении (3) используются следующие безразмерные коэффициенты:

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{\psi S_0^p}{\rho U^{4/3}} \right)^3, \quad S = \frac{A S^{Pl}}{6\pi\mu} \left(\frac{\psi S_0^p}{\rho U^2} \right)^2, \\ G &= \frac{1}{U^3} \frac{\psi g A S_0^p}{6\pi\mu^2}, \\ \Omega &= U^3 \left(\frac{6\pi\mu^3 \rho^3}{\psi^3 A^3 S_0^{P5}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad M = \frac{6\pi\delta^3}{A} S_0^p, \\ Ca &= \frac{\sigma}{\mu U^4} \left(\frac{\psi S_0^p}{\rho} \right)^3, \quad P = \frac{6\pi\delta^3}{A} \rho \phi_a, \end{aligned}$$

где Ω и Ca являются безразмерными параметрами испарения и капиллярности при испарении, соответственно. Используя в качестве жидкости воду, имеем значения $A = -10^{-20}$ Дж, $d_0 = 0.2$ нм, $l_0 = 0.6$ нм, $\mu = 10^{-3}$ кг/(м·с), $\rho = 10^3$ кг/м³, $\sigma = 0.08$ Дж/м² и $S^p = 0.002$ Дж/м², согласно [21] получаем характерные значения пространственных единиц измерения задачи δ и α , которые равны $2 \cdot 10^{-9}$ м и $7 \cdot 10^{-8}$ м, соответственно. Отношение значения величин δ и α показывают справедливость длинноволнового приближения ($\delta/\alpha \ll 1$) для данной задачи. Используя данное неравенство, можно получить критерий для выбора скорости вытягивания твердой пластины. Для данной задачи имеем $U = 10^{-3}$ м/с.

3. Анализ устойчивости

Для исследования устойчивости уравнения (3) представим толщину слоя в виде суммы основного состояния и возмущения $h = h_0 + h'$. Запишем эти возмущения в «нормальном» виде

$$h' = \exp[st + ikx],$$

где s – инкремент возмущений, т. е. описывает характер изменения возмущения со временем ($s > 0$ ведет к увеличению возмущений, а отрицательное значение инкремента соответствует их затуханию), k есть волновое число вдоль оси x . Подставляя обозначенный выше вид толщины слоя в уравнение (3), получим задачу на собственные значения, где собственным числом является инкремент возмущений s , который имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} s = & -\frac{1}{3} C h_0^3 k^4 + \frac{1}{h_0} k^2 - ik \left(G h_0^2 - 1 \right) - \\ & - S \exp(-h_0/l_0) h_0^3 k^2 - \Omega C a k^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Мнимая часть декремента s в уравнении (4) соответствует некоторому сдвигу вдоль оси x и является индикатором наличия решения в виде бегущей волны. Рассмотрим действительную часть уравнения (4). В ней содержатся слагаемые, которые влияют на устойчивость пленки к возмущениям. Уравнение действительной части свидетельствует о том, что определяющими устойчивостью системы являются ван-дер-ваальсовая и электростатическая энергии взаимодействия, а также испарение. Так как все параметры являются безразмерными, то $h_0 = 1$ (обезразмеривание происходит относительно самой величины h_0). Подставив это значение в уравнение действительной части, получим функцию декремента от волнового числа:

$$s = -\frac{1}{3} C a k^4 + k^2 - S^{Pl} \exp(-1/l_0) k^2 - \Omega C a k^2.$$

В случае, когда $S = G = \Omega = M = Ca = P = 0$, мы имеем задачу, которая была рассмотрена в [22], где показано, что в зависимости от знака константы Гамаке-

ра устойчивость такой системы будет повышаться ($A < 0$), а при $A > 0$ в решении уравнения появляется область неустойчивости.

В [19] рассматривалась задача Ландау-Левича для тонкого слоя при отсутствии испарения $\Omega = 0$. Установлено, что учет в уравнении электростатического взаимодействия двойных электрических слоев межфазных границ «твердое тело-жидкость» и «жидкость-воздух» приводит к понижению устойчивости системы.

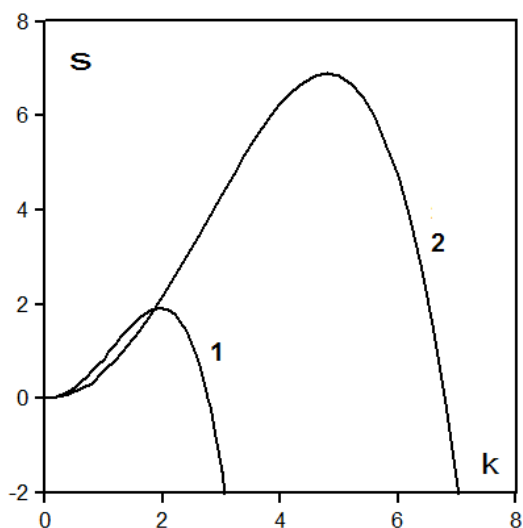


Рис. 3. Зависимость инкремента возмущений s от волнового числа k при различных значениях числа C . Цифрами 1 и 2 обозначены значения $C=0.1$ и $C=0.01$, соответственно. Остальные параметры: $S=0.001$, $\Omega=0.01$, $Ca=0.01$

На рис. 3 приведено дисперсионное соотношение $s(k)$ при различных значениях безразмерного числа C . Как видно из приведенного рисунка, с уменьшением C происходит понижение устойчивости системы, причем область неустойчивости смещается в область малых волновых чисел. Для задачи Ландау-Левича первое слагаемое в уравнении (3) является, во многом определяющим потому, что оно описывает гидродинамическое поведение тонкого слоя жидкости. Уменьшение безразмерного числа C можно интерпретировать как повышение скорости вытягивания твердой пластины. На рис. 4 приведено дисперсионное соотношение $s(k)$ при различных значениях безразмерного параметра испарения Ω .

Как было показано выше, при малых значениях испарения имеется область неустойчивости. С увеличением безразмерного числа Ω область неустойчивости уменьшается и её максимум смещается в область малых волновых чисел. При дальнейшем увеличении безразмерного числа испарения область неустойчивости исчезает и при значении $\Omega=0.48$ данная система становится полностью устойчивой относительно возмущений.

Такое поведение аналогично эволюции возмущений, которые рассматривались в [23]. Там было показано, что при малых числах испарения имеется область неустойчивости, а при росте числа испарений устойчивость системы повышается.

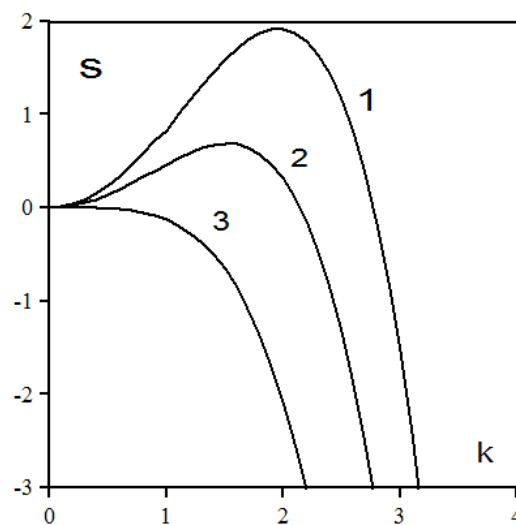


Рис. 4. Зависимость инкремента возмущений s от волнового числа k при различных значениях числа Ω . Цифрами 1, 2 и 3 обозначены значения $\Omega=0.01$, 0.1 и 0.7 , соответственно. Остальные параметры: $C=0.1$, $S=0.001$, $Ca=0.01$

Исследование выполнено при финансовой поддержке Правительства Пермского края в рамках научного проекта № С-26/174.2.

Автор выражает признательность кандидату технических наук, начальнику лаборатории перспективных исследований научно-технического центра ПАО «Пермская научно-производственная приборостроительная компания» И. А. Есипенко за полезные дискуссии и внимание к работе.

Список литературы

1. Landau L., Levich B. Dragging of a liquid by a moving plate // Acta Physicochimica. 1942. Vol. 17. P. 42–54. DOI: 10.1016/B978-0-08-092523-3.50016-2
2. Шкадов В. Я. Волновые режимы тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43-51
3. Sharma A., Ruckenstein E. An analytical nonlinear theory of thin film rupture and its application to wetting films // Journal of Colloid and Interface science. 1986. Vol. 113. N. 2. P. 456–479. DOI: 10.1016/0021-9797(86)9081-5
4. Jameel A. T., Sharma A. Morphological phase separation in thin liquid films: II. Equilibrium contact angles of nanodrops coexisting with thin films // Journal of Colloid and Interface Science. 1994. Vol. 164. No. 2. P. 416–427.

- DOI: 10.1006/jcis.1994.1184
5. Oron A., Davis S. H., Bankoff S. G. Long-scale evolution of thin liquid films // *Reviews of Modern Physics*. 1997. Vol. 69. N. 3. P. 931–980. DOI: 10.1103/RevModPhys.69.931
 6. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J., & Rolley E. Wetting and spreading // *Reviews of Modern Physics*. 2009. Vol. 81. N. 2. P. 739–805. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.739
 7. O'Brien S. B. G., Schwartz L. W. Theory and modeling of thin film flows // *Encyclopedia of Surface and Colloid Science*. 2002. Vol. 1. P. 5283–5297
 8. Алексеенко, С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Влияние волн на процессы переноса. Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. 256 с.
 9. Chang H., Demekhin E. A. Complex wave dynamics on thin films. Amsterdam: Elsevier. 2002. 401 p.
 10. Brutin D. Droplet wetting: From pure to complex liquids. Amsterdam: Elsevier Science, 2015. 464 p.
 11. Derjaguin B. V., Churaev N. V. Structural component of disjoining pressure // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1974. Vol. 49. N. 2. P. 249–255. DOI: 10.1016/0021-9797(74)90358-0
 12. Danov K. D. et al. The stability of evaporating thin liquid films in the presence of surfactant. I. Lubrication approximation and linear analysis // *Physics of Fluids*. 1998. Vol. 10. N. 1. P. 131–143. DOI: 10.1063/1.869555
 13. Wayner Jr P. C. The effect of interfacial mass transport on flow in thin liquid films // *Colloids and Surfaces*. 1991. Vol. 52. P. 71–84. DOI: 10.1016/01666622(91)80006-A
 14. Kabov O. A., Zaitsev D. V., Cheverda V. V., Bar-Cohen A. Evaporation and flow dynamics of thin, shear-driven liquid films in microgap channels // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2011. Vol. 35. N. 5. P. 825–831. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2010.08.001
 15. Samid-Merzel N. M., Lipson S. G., Tannhauser D. S. Pattern formation in drying water films // *Physical Review E*. 1998. Vol. 57. N. 3. P. 2906–2921 DOI: 10.1103/PhysRevE.57.2906
 16. Sharma A., Jameel A. T. Nonlinear stability, rupture, and morphological phase separation of thin fluid films on apolar and polar substrates // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1993. Vol. 161. N. 1. P. 190–208. DOI: 10.1006/jcis.1993.1458
 17. Witeliski T. P. Nonlinear dynamics of dewetting thin films // *AIMS Mathematics*. 2020. Vol. 5. N. 5. P. 4229–4259. DOI: 10.3934/math.2020270
 18. Sultan E., Boudaoud A., Amar M. B. Diffusion-limited evaporation of thin polar liquid films // *Journal of Engineering Mathematics*. 2004. Vol. 50. N. 2–3. P. 209–222. DOI: 10.1007/s10665-004-1244-0
 19. Sharma A., Khanna R. Pattern formation in unstable thin liquid films // *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 81. N. 16. P. 3463–3466. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.3463
 20. Люшин А. В., Пермякова К. А. Исследование устойчивости тонкого слоя жидкости в задаче Ландау–Левича // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2020. № 3. С. 48–55. DOI: 10.17072/1994-3598-2020-3-48-55
 21. Sharma A. Relationship of thin film stability and morphology to macroscopic parameters of wetting in the apolar and polar systems // *Langmuir*. 1993. Vol. 9. N. 3. P. 861–869. DOI: 10.1021/la00027a042
 22. Williams M. B., Davis S. H. Nonlinear theory of film rupture // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1982. Vol. 90. N. 1. P. 220–228. DOI: 10.1016/0021-9797(82)90415-5
 23. Lyushnin A. V., Golovin A. A., Pismen L. M. Fingering instability of thin evaporating liquid films // *Physical Review E*. 2002. Vol. 65. N. 2, 021602. DOI: 10.1103/physreve.65.021602.

References

1. Landau L., Levich B. Dragging of a liquid by a moving plate. *Acta Physicochim*, 1942, vol. 17, pp. 42–54. DOI: 10.1016/B978-0-08-092523-3.50016-2
2. Shkadov V. Y. Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Fluid Dynamics*, 1967, vol. 2, no. 1, pp. 29–34. DOI: 10.1007/BF01024797
3. Sharma A., Ruckenstein E. An analytical nonlinear theory of thin film rupture and its application to wetting films. *Journal of Colloid and Interface science*, 1986, vol. 113, no. 2, pp. 456–479. DOI: 10.1016/0021-9797(86)9081-5
4. Jameel A. T., Sharma A. Morphological phase separation in thin liquid films: II. Equilibrium contact angles of nanodrops coexisting with thin films. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1994, vol. 164, no. 2, pp. 416–427. DOI: 10.1006/jcis.1994.1184
5. Oron A., Davis S. H., Bankoff S. G. Long-scale evolution of thin liquid films. *Reviews of Modern Physics*, 1997, vol. 69, no. 3, pp. 931–980. DOI: 10.1103/RevModPhys.69.931
6. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J., & Rolley E. Wetting and spreading. *Reviews of Modern Physics*, 2009, vol. 81, no. 2, pp. 739–805. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.739
7. O'Brien S. B. G., Schwartz L. W. Theory and modeling of thin film flows. *Encyclopedia of surface and colloid science*, 2002. vol. 1, pp. 5283–5297
8. Alekseenko, S. V., Nakoryakov V. E., Pokusaev B. G. *Influence of waves on transport processes*.

- Wave flow of liquid films*. Novosibirsk: Nauka, 1992. 256 p. (In Russian).
9. Chang H., Demekhin E. A. *Complex wave dynamics on thin films*. Amsterdam: Elsevier. 2002. 401 p.
 10. Brutin D. *Droplet wetting: From pure to complex liquids*. Amsterdam: Elsevier Science, 2015. 464p.
 11. Derjaguin B. V., Churaev N. V. Structural component of disjoining pressure. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1974, vol. 49, no. 2, pp. 249–255. DOI: 10.1016/0021-9797(74)90358-0
 12. Danov K. D. et al. The stability of evaporating thin liquid films in the presence of surfactant. I. Lubrication approximation and linear analysis. *Physics of Fluids*, 1998, vol. 10, no. 1, pp. 131–143. DOI: 10.1063/1.869555
 13. Wayner Jr P. C. The effect of interfacial mass transport on flow in thin liquid films. *Colloids and Surfaces*, 1991, vol. 52, pp. 71–84. DOI: 10.1016/01666622(91)80006-A
 14. Kabov, O. A., Zaitsev, D. V., Cheverda, V. V., Bar-Cohen, A. Evaporation and flow dynamics of thin, shear-driven liquid films in microgap channels. *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2011, vol. 35, no. 5, pp. 825–831. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2010.08.001
 15. Samid-Merzel N. M., Lipson S. G., Tannhauser D. S. Pattern formation in drying water films. *Physical Review E*, 1998, vol. 57, no. 3, pp. 2906–2921 DOI: 10.1103/PhysRevE.57.2906
 16. Sharma A., Jameel A. T. Nonlinear stability, rupture, and morphological phase separation of thin fluid films on apolar and polar substrates. *Journal of Colloid and Interface science*, 1993, vol. 161, no. 1, pp. 190–208. DOI: 10.1006/jcis.1993.1458
 17. Witelski T. P. Nonlinear dynamics of dewetting thin films. *AIMS Mathematics*, 2020, vol. 5, no 5, pp. 4229–4259. DOI: 10.3934/math.2020270
 18. Sultan E., Boudaoud A., Amar M. B. Diffusion-limited evaporation of thin polar liquid films. *Journal of Engineering Mathematics*, 2004, vol. 50, no. 2-3, pp. 209–222. DOI: 10.1007/s10665-004-1244-0
 19. Sharma A., Khanna R. Pattern formation in unstable thin liquid films. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 81, no. 16, pp. 3463–3466. DOI: 10.1103/PhysRevLett.81.3463
 20. Lyushnin A. V., Permyakova K. A. Study of the stability of a thin liquid layer in the Landau–Levich problem. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2020, no. 3, pp. 48–55. DOI: 10.17072/1994-3598-2020-3-48-5
 21. Sharma A. Relationship of thin film stability and morphology to macroscopic parameters of wetting in the apolar and polar systems. *Langmuir*, 1993, vol. 9, no. 3, pp. 861–869. DOI: 10.1021/la00027a042
 22. Williams M. B., Davis S. H. Nonlinear theory of film rupture. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1982, vol. 90, no. 1, pp.220–228 DOI: 10.1016/0021-9797(82)90415-5
 23. Lyushnin A. V., Golovin A. A., Pismen L. M. Fingering instability of thin evaporating liquid films. *Physical Review E*, 2002, vol.65, no 2, 021602. DOI: 10.1103/physreve.65.021602.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Люшнин А. В. Влияние эффекта испарения на устойчивость тонкого слоя жидкости в задаче Ландау–Левича // Вестник Пермского университета. Физика. 2021. № 3. С. 23–29. doi: 10.17072/1994-3598-2021-3-23-29

Please cite this article in English as:

Lyushnin A. V., The influence of the evaporation effect on the stability of a thin layer of liquid in the Landau–Levich problem. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2021, no. 3, pp. 23–29. doi: 10.17072/1994-3598-2021-3-23-29

Сведения об авторах

Андрей Витальевич Люшнин, д-р. физ.-мат. наук, доцент, декан факультета информатики и экономики, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, ул. Сибирская, 24, Пермь, 614990.

Author information

Andrey V. Lyushnin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Dean of the Economics and Computer Science Faculty, Perm State Humanitarian-Pedagogical University, Sibirskaya str., 24, Perm, Russia, 614990.