

УДК 536.2
PACS 47.55.pb

Модели регуляризации при исследовании свободноконвективного теплопереноса псевдопластичной жидкости в замкнутой дифференциально-обогреваемой полости

Д. С. Лоенко[†], М. А. Шеремет[‡]

Томский государственный университет, Томск, Россия

[†] email: d.s.loenko@mail.tsu.ru

[‡] email: sheremet@math.tsu.ru

При изучении конвективного теплопереноса в системах, содержащих псевдопластичные жидкости, возникают вычислительные сложности, обусловленные появлением бесконечного уровня эффективной вязкости при стремлении к нулю интенсивности скоростей деформаций. Для решения этой проблемы используют различные модели регуляризации за счет введения малого добавочного слагаемого в выражение для эффективной вязкости. Данная работа посвящена анализу наиболее распространенных моделей регуляризации для исследования свободноконвективного теплопереноса псевдопластичной жидкости в замкнутой дифференциально-обогреваемой полости. Псевдопластичный характер течения жидкости описывался степенным законом Оствальда-де-Вилля. Исследовались три модели регуляризации: простейшая алгебраическая модель, модель Берковера и Инглемана и модель Папанастасиоу. Краевая задача математической физики, описывающая естественную конвекцию неньютоновской псевдопластичной жидкости внутри замкнутой полости, была сформулирована на основе законов сохранения массы, импульса и энергии и решена численно методом конечных разностей. Полученные результаты исследования сравнивались с данными других авторов.

Ключевые слова: естественная конвекция; неньютоновская псевдопластичная жидкость; регуляризация эффективной вязкости; замкнутая полость; дифференциальный обогрев

Поступила в редакцию 09.07.2021; после рецензии 29.07.2021; принята к опубликованию 02.08.2021

Regularization models for natural convection of a pseudoplastic liquid in a closed differentially heated cavity

D. S. Loenko[†], M. A. Sheremet[‡]

Tomsk State University, Tomsk, Russia

[†] email: d.s.loenko@mail.tsu.ru

[‡] email: sheremet@math.tsu.ru

Simulation of convective heat and mass transfer in systems filled with pseudoplastic fluids deals with computational difficulties due to the appearance of an infinite level of effective viscosity as the intensity of deformation rates tends to zero. To solve this problem, various regularization models are used by introducing a small additional term into the expression for the effective viscos-

ity. The present research is devoted to analysis of widespread regularization models for studying the natural convection of a pseudoplastic fluid in a closed differentially heated cavity. The pseudoplastic nature of the fluid flow was described by the Ostwald-de Waele power law. Three regularization models were investigated, namely, the simplest algebraic model, the Bercovier and Engelman model, and the Papanastasiou model. The boundary value problem of mathematical physics formulated using the conservation laws of mass, momentum and energy, was solved by the finite difference method. The obtained results were compared with data of other authors.

Keywords: natural convection; non-Newtonian fluid; regularization of effective viscosity; closed cavity; differential heating

Received 09.07.2021; revised 29.07.2021; accepted 02.08.2021

doi: 10.17072/1994-3598-2021-3-13-22

1. Введение

Естественно-конвективное охлаждение тепло-выделяющих элементов электронных систем с использованием неньютоновских сред представляется одним из популярных способов отвода тепла. Надежность, легкость реализации и низкая стоимость являются бесспорными преимуществами такого подхода. Поэтому моделирование подобных явлений является очень востребованным. Следует отметить, что в ходе численного анализа теплопереноса и гидродинамики неньютоновских жидкостей нередко возникают трудности. Поэтому многие исследователи всегда находятся в поиске оптимальных вычислительных подходов.

Одним из таких методов является методика регуляризации эффективной вязкости, которую можно назвать одним из самых популярных способов моделирования течений вязкопластичной жидкости. Такой подход заключается в преобразовании выражения для расчета эффективной вязкости с целью коррекции особенностей функции вязкости в случаях приближения к нулю интенсивности скоростей деформации. Подробный анализ методов регуляризации для вязкопластичных жидкостей представлен в [1]. Авторы [2] описали возможности применения методов регуляризации для численного анализа. В работе [3] используется простейший алгебраический подход для расчета вязкости при исследовании течения жидкости Бингама между двумя параллельными пластинами. Изучение течения жидкости Бингама в полости с подвижной крышкой с применением регуляризации эффективной вязкости было проведено в работе [4]. Авторы показали успешность метода для моделирования потока неньютоновской жидкости, а также объяснили особенности выбора оптимального параметра регуляризации. В работе [5] авторы обобщили подход [4] для моделирования течения крови, как неньютоновской среды, с учетом наличия сердечных клапанов. Результаты показали, что компьютерное моделирование таких задач имеет преимущества над физическими экспериментами. Исследования [6–8] также посвящены

анализу течения бингамовской жидкости. Использование регуляризации при описании изменения эффективной вязкости позволило детально изучить рассматриваемые явления. В работе [9] применяется подход Берковера и Инглемена для вычисления эффективной вязкости в задаче течения бингамовской жидкости в кольцевом канале. Теоретические результаты сравнивались с численными данными, и хорошее согласие было достигнуто для отношений радиусов, превышающих 0.7. Подход в регуляризации, предложенный Папанастасиоу, использовался в работе [10] для моделирования течения жидкости Бингама в канале с внезапным сужением.

Представленные выше исследования являются основой развития методов регуляризации для описания эффективной вязкости. В настоящее время подходы, предложенные Аллучем [3], Берковером и Инглеманом [4], а также Папанастасиоу [6], находят широкое применение в различных задачах гидродинамики и теплопереноса неньютоновских сред [11–21]. Например, использование простейшей алгебраической модели для описания поведения эффективной вязкости продемонстрировано в [11–16], эффективность подхода Берковера и Инглемена показана в [11, 12, 17, 22–24], а подход Папанастасиоу апробирован в [11, 12, 18–22]. Отдельно следует отметить цикл работ, посвященный анализу влияния вибрационного и гравитационного полей на гидродинамику и теплоперенос неньютоновских жидкостей [14–16]. Авторы для описания реологического поведения среды применяли приближение Уильямсона с параметром регуляризации [25], отражающим использование простейшей алгебраической модели.

Представленный краткий анализ литературы показывает, что использование регуляризации позволяет эффективно изучать поведение вязкопластичных жидкостей. Целью настоящей работы является исследование возможностей трех основных методов регуляризации для моделирования естественной конвекции псевдопластичной неньютоновской жидкости в замкнутой дифференциально-обогреваемой квадратной полости на основе двухполюсного метода.

2. Математическая постановка

Геометрическая схема области решения представлена на рис. 1. Степенная жидкость находится в замкнутой квадратной полости с горизонтальными адиабатическими стенками. На левой стенке поддерживается постоянная высокая температура T_h , на правой стенке – постоянная низкая температура T_c .

Для описания неньютоновского характера течения применяется степенной закон Оствальда-де-Вилля [26]:

$$\tau_{ij} = 2\mu_{eff} D_{ij} = 2K(2D_{kl}D_{kl})^{\frac{n-1}{2}} D_{ij}, \quad (1)$$

где $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – компоненты тензора скоростей деформации; u_i, u_j – компоненты вектора скорости, соответствующие координатам x_i, x_j ; μ_{eff} – эффективный коэффициент вязкости; K – коэффициент густоты потока; n – показатель поведения жидкости. Стоит отметить, что n описывает три случая. Если $n < 1$, то это – случай псевдопластичной жидкости, вязкость которой уменьшается с увеличением скорости деформации. При $n = 1$ степенной закон описывает ньютоновскую жидкость, при $n > 1$ – дилатантную жидкость, вязкость которой возрастает с увеличением скорости деформации. Отметим, что в данной работе будет рассматриваться только псевдопластичная жидкость с индексом степенного закона $n = 0.6$. Такой выбор рабочей среды обусловлен наличием особенностей только для псевдопластичных жидкостей при $n < 1$. Стоит также отметить, что к таким средам можно отнести карбоксиметилцеллюлозу [27, 28], карбоксиполиметилен [27, 28] и некоторые наножидкости [29].

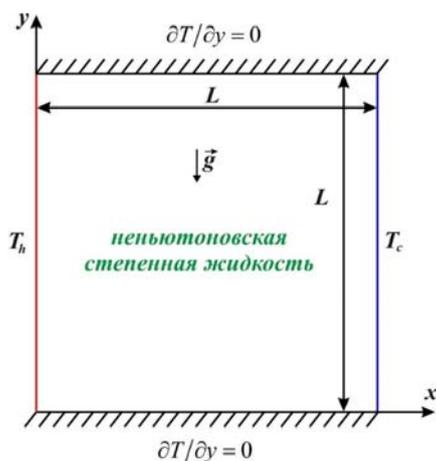


Рис.1. Область решения

Дифференциальные уравнения, описывающие процесс нестационарного конвективного теплопереноса в приближении Буссинеска в естественных

переменных «скорость – давление – температура», имеют следующий вид [26, 30, 31]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) + g\beta(T - T_c), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (5)$$

Здесь x, y – координаты декартовой системы; t – время; u, v – составляющие компоненты вектора скорости в проекциях на оси x и y , соответственно; p – давление; ρ – среднее значение плотности; $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$ – компоненты девиаторной части тензора напряжений; T – температура; g – ускорение свободного падения; β – термический коэффициент объемного расширения; a – коэффициент теплопроводности.

В задачах свободноконвективного теплопереноса с малыми скоростями конвекции поле давления не представляет особого интереса, так как с течением времени изменяется несущественно, поэтому в уравнения (2)–(5) вводятся новые переменные – функция тока ψ ($u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$) и завихренность скорости ω ($\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$), что позволяет сократить количество уравнений до трех и тем самым уменьшить время расчета. Также в систему вводятся безразмерные параметры из табл. 1 [32], позволяющие обобщить результаты моделирования на большой класс задач с различными размерными входными параметрами. Отметим, что здесь $\Delta T = T_h - T_c$.

Таблица 1. Характерные значения определяющих параметров

Масштаб длины	L
Масштаб скорости	$\sqrt{g\beta L \Delta T}$
Масштаб времени	$\sqrt{L/(g\beta \Delta T)}$
Масштаб функции тока	$\sqrt{g\beta L^3 \Delta T}$
Масштаб завихренности	$\sqrt{g\beta \Delta T/L}$

Система нестационарных дифференциальных уравнений в преобразованных безразмерных переменных «функция тока – завихренность» имеет следующий вид [32–36]:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \\ = \left(\frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left[\nabla^2 (\bar{M} \Omega) + S_\Omega \right] + \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь X, Y – безразмерные координаты, соответствующие x, y ; τ – безразмерное время; Θ – безразмерная температура; Ψ – безразмерная функция тока; Ω – безразмерная завихренность скорости; $\text{Ra} = g\beta\Delta TL^3/(\bar{\nu}a)$ – число Рэлея; $\text{Pr} = \bar{\nu}/a$ – число Прандтля; в него входит эффективная кинематическая вязкость:

$$\bar{\nu} = \left(K/\rho \right)^{\frac{1}{(2-n)}} \cdot L^{\frac{2(1-n)}{(2-n)}}.$$

Источниковый член S_Ω и безразмерная эффективная вязкость \bar{M} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} S_\Omega = \\ = 2 \left[\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial X^2} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial Y^2} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial X \partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right], \\ \bar{M} = \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Если в формуле эффективной вязкости выделить подкоренное выражение, то получим интенсивность скоростей деформаций A в виде (9):

$$A = \sqrt{2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2} \quad (9)$$

Тогда эффективную вязкость можно представить следующим образом: $\bar{M} = A^{n-1}$. В случае псевдопластичной жидкости ($n < 1$) возможно появление «бесконечной» эффективной вязкости, поэтому для сохранения устойчивости численного метода используют регуляризацию степенной модели. В проводимых исследованиях использовались три подхода, представленные в табл. 2 [3, 4, 6], где ε – параметр регуляризации.

Таблица 2. Три модели регуляризации

1. Простейшая алгебраическая модель [3]	$\bar{M} = (A + \varepsilon)^{n-1}$
---	-------------------------------------

2. Модель Берковера и Инглемана [4]	$\bar{M} = \left(\sqrt{A^2 + \varepsilon^2} \right)^{n-1}$
3. Модель Папанастасиоу [6]	$\bar{M} = \left(\frac{A}{1 - \exp(-A/\varepsilon)} \right)^{n-1}$

Начальные и граничные условия для системы уравнений (6)–(8) в безразмерном виде:

$$\tau = 0 \rightarrow \Psi = \Omega = 0, \quad \Theta = 0.5,$$

$$\tau > 0 \rightarrow$$

$$X = 0, \quad 0 \leq Y \leq 1:$$

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \quad \Theta = 1,$$

$$X = 1, \quad 0 \leq Y \leq 1:$$

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \quad \Theta = 0,$$

$$Y = 0 \text{ и } Y = 1, \quad 0 \leq X \leq 1:$$

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0.$$

Решение сформулированной краевой задачи (6)–(8) с соответствующими начальными и граничными условиями проведено методом конечных разностей на равномерной сетке [32–36]. Уравнение Пуассона для функции тока аппроксимировалось с использованием симметричных разностей для производных второго порядка. Полученная система линейных алгебраических уравнений решалась методом последовательной нижней релаксации. Двумерные уравнения дисперсии завихренности и энергии сводились к системе одномерных уравнений с помощью локально-одномерной схемы А.А. Самарского. Конвективные слагаемые были аппроксимированы на основе схемы с донорными ячейками, диффузионные – с помощью центральных разностей. Полученные системы линейных алгебраических уравнений решались методом прогонки.

3. Результаты моделирования

В рамках рассматриваемой задачи естественной конвекции псевдопластичной жидкости в дифференциально-обогреваемой полости проведено исследование трех моделей регуляризации с выбором оптимального значения параметра регуляризации в диапазоне $\varepsilon = 0.0001$ – 0.1 .

На рис. 2 представлены временные зависимости среднего числа Нуссельта на горячей стенке:

$$\left(Nu_{\text{avg}} = \int_0^1 \left(-\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)_{X=0} dY \right)$$

от параметра регуляризации для трех рассматриваемых подходов при $\text{Ra} = 10^5$, $\text{Pr} = 10^2$.

Все исследования были проведены с шагом по времени $\Delta\tau = 10^{-5}$. Анализируя полученные распределения для среднего числа Нуссельта (рис. 2), можно отметить, что при малых значениях параметра регуляризации $\varepsilon = 0.0001$ выбранный шаг по времени приводит к появлению вычислительных осцилляций (рис. 2, а), а дальнейшее уменьшение шага по времени отражается в существенном увеличении времени счета. При этом малые значения этого параметра ε не приводят к заметным отличиям в значениях среднего числа Нуссельта, полученных при больших значениях параметра регуляризации. В случае модели Берковера и Инглемана (рис. 2, б) можно заметить небольшие отличия при $\varepsilon = 0.1$, в то время как остальные значения параметра регуляризации приводят к идентичным результатам для среднего числа Нуссельта. Остальные модели регуляризации также иллюстрируют наличие отклонений при $\varepsilon = 0.1$ и возникновение колебаний в распределениях Nu_{avg} при $\varepsilon = 0.0001$ и даже при $\varepsilon = 0.001$ для модели Папанастасиоу (рис. 2, в).

В ходе исследования было также оценено влияние сеточных параметров на значения среднего числа Нуссельта при $Ra = 10^5$, $Pr = 10^2$ и фиксированном параметре регуляризации $\varepsilon = 0.01$, которое представлено в табл. 3. Видно, что использование равномерных сеток размерности 200×200 и 300×300 элементов не приводит к появлению расхождений для Nu_{avg} . Поэтому для сокращения времени расчета была выбрана прямоугольная равномерная сетка 200×200 элементов.

На рис. 3 представлено сравнение изолиний функции тока (рис. 3, а) и температуры (рис. 3, б) для рассматриваемых моделей регуляризации при $Ra = 10^5$, $Pr = 10^2$, $\varepsilon = 0.01$. Красной сплошной линией обозначены изолинии для простейшей алгебраической модели [3], синей штриховой линией – для модели Берковера и Инглемана [4], зеленой штрихпунктирной линией – для модели Папанастасиоу [6]. Представленные распределения отражают наличие небольших расхождений для простейшей алгебраической модели. Физически полученные изолинии иллюстрируют формирование внутри полости конвективного течения с восходящим потоком вблизи левой горячей стенки и нисходящим вблизи противоположной холодной стенки. Изотермы характеризуют образование тепловых пограничных слоев вблизи изотермических стенок.

Временные профили среднего числа Нуссельта для рассматриваемых моделей регуляризации при $Ra = 10^5$, $Pr = 100$, $\varepsilon = 0.01$ показаны на рис. 4. Видно, что кривые практически совпадают, за исключением простейшей алгебраической модели, где значения Nu_{avg} отличаются на 0.3% от значений, полученных на основе остальных моделей регуляризации.

Таким образом, проведенный анализ показал, что для исследования свободноконвективного теплопереноса в замкнутой полости, заполненной псевдопластичной жидкостью, возможно применение модели Берковера и Инглемана [4] с параметром регуляризации $\varepsilon = 0.01$.

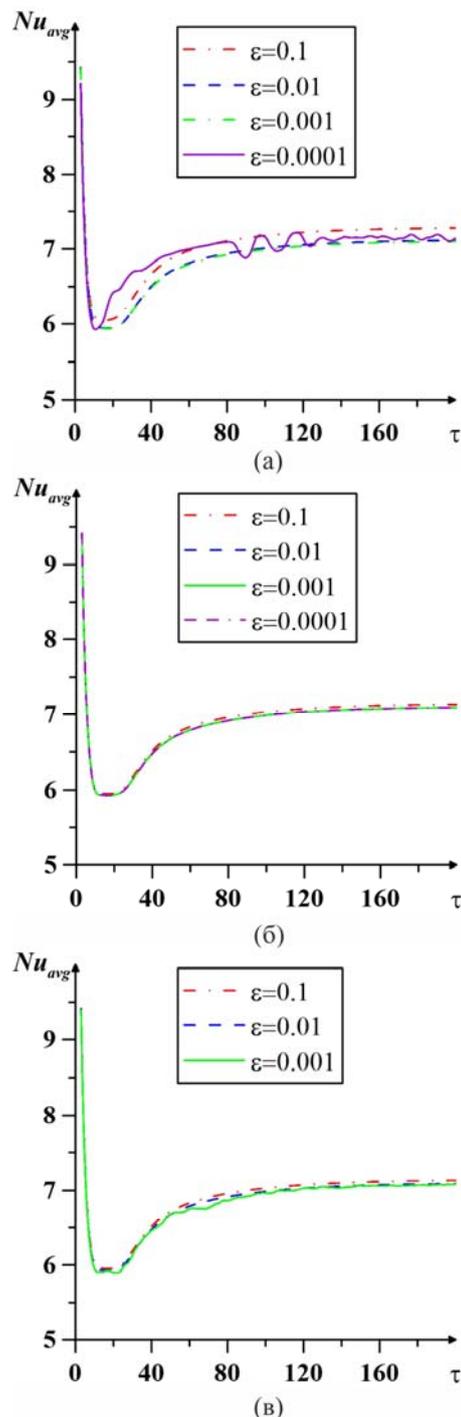


Рис. 2. Влияние параметра регуляризации: а – простейшая алгебраическая модель [3]; б – модель Берковера и Инглемана [4]; в – модель Папанастасиоу [6]

Таблица 3. Влияние сеточных параметров

Сетка/модель	100×100	200×200	300×300
Простейшая алгебраическая модель [3]	7.11349	7.03343	7.01512
Модель Берковера и Инглемана [4]	7.09051	7.01141	6.99324
Модель Папанастасиу [6]	7.09002	7.01095	6.99277

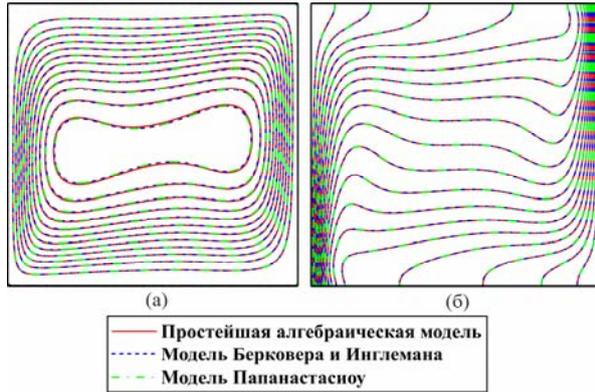


Рис. 3. Сравнение изолиний для трех моделей регуляризации при $Ra = 10^5$, $Pr = 10^2$, $\varepsilon = 0.01$: а – линии тока; б – изотермы

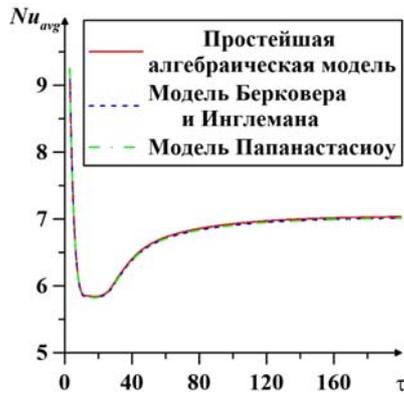


Рис. 4. Временные профили среднего числа Нуссельта на нагретой стенке при $Ra = 10^5$, $Pr = 10^2$, $\varepsilon = 0.01$ и разных моделях регуляризации

Результаты моделирования, полученные с помощью выбранной модели регуляризации при $\varepsilon = 0.01$, были сравнены с данными других авторов. Так, например, на рис. 5 представлено хорошее качественное согласование изолиний функции тока с данными [26].

В табл. 4 представлено сравнение значений среднего числа Нуссельта с результатами других авторов при $Ra = 10^5$, $Pr = 10^2$. Погрешность вычислений составляет не более 1% с данными [26] и 0.1% с результатами [37].

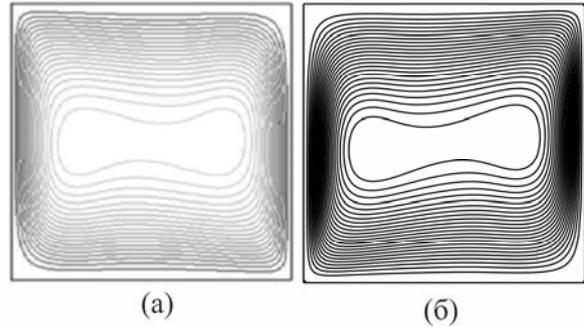


Рис. 5. Сравнение линий тока: а – данные работы [26]; б – полученные результаты

Таблица 4. Сравнение значений среднего числа Нуссельта

	Полученные результаты	[26]	[37]
Nu_{avg}	7.0114	6.9345	7.020

На рис. 6 представлено сравнение нормированных значений среднего числа Нуссельта с данными [31] для разных показателей поведения жидкости и чисел Прандтля. Нормировка проводилась по следующей формуле: $\bar{N} = Nu_{avg} / Nu_{avg(n=1)}$. На рисунке черным цветом обозначены данные [31], белым – полученные результаты. Видно, что небольшие расхождения результатов присутствуют при малых значениях показателя поведения жидкости, но отклонения не превышает 4%.

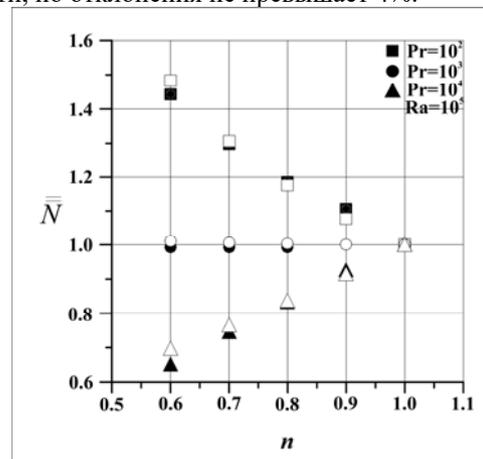


Рис. 6. Зависимость нормированного числа Нуссельта от Pr и n при $Ra = 10^5$ в сравнении с [31]

4. Заключение

В результате исследований свободноконвективного теплопереноса псевдопластичной жидкости в замкнутой дифференциально-обогреваемой полости были выбраны оптимальная модель регуляризации – модель Берковера и Инглемана, – и параметр регуляризации $\varepsilon = 0.01$. Проведена подробная верификация разработанного вычисли-

тельного подхода с данными других авторов, иллюстрирующая возможность использования данной методики для решения задач свободноконвективного теплопереноса в замкнутых областях, заполненных псевдопластичными жидкостями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-79-20141).

Список литературы

1. *Duvant G., Lions J. L.* Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1976. 400 p.
2. *Glowinski R., Lions J. L., Trémolières R.* Analyse numérique des inéquations variationnelles: Applications aux phénomènes stationnaires et d'évolution. Paris: Dunod, 1976. 290 p.
3. *Allouche M., Frigaard I. A., Sona G.* Static wall layers in the displacement of two visco-plastic fluids in a plane channel // *J. Fluid Mech.* 2000. Vol. 424. P. 243–277.
4. *Bercovier M., Engleman M.* A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows // *Journal of Computational Physics.* 1980. Vol. 36. P. 313–326.
5. *Engleman M. S., Moskowitz S., Borman J.* Computer simulation: A diagnostic method in comparative studies of valve prostheses // *The Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery.* 1980. Vol. 79. N. 3. P. 402–412.
6. *Papanastasiou T.* Flows of materials with yield // *Journal of Rheology.* 1978. Vol. 31. P. 385–404.
7. *Lipscomb G. G., Denn M. M.* Flow of bingham fluids in complex geometries // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 1984. Vol. 14. P. 337–346.
8. *O'Donovan E. J., Tanner R. I.* Numerical study of the Bingham squeeze film problem // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 1984. Vol. 15. N. 1. P. 75–83.
9. *Walton I. C., Bittleston S. H.* The axial flow of a Bingham plastic in a narrow eccentric annulus // *Journal of Fluid Mechanics.* 1991. Vol. 222. P. 39–60.
10. *Abdali S. S., Mutsoulis E.* Entry and exit flows of Bingham fluids // *Journal of Rheology.* 1992. Vol. 36. P. 389–407.
11. *Li M.-G., Feng F., Wu W.-T., Massoudi M.* Numerical simulations of the flow of a dense suspension exhibiting yield-stress and shear-thinning effects // *Energies.* 2020. Vol. 13. N. 24, 6635.
12. *Tran-Duc Th., Ho Th., Thamwattana Ng.* A smoothed particle hydrodynamics study on effect of coarse aggregate on self-compacting concrete flows // *International Journal of Mechanical Sciences.* 2021. Vol. 190, 106046.
13. *Deka H., Pierson J.-L., Soares E. J.* Retraction of a viscoplastic liquid sheet // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 2019. Vol. 272, 104172.
14. *Lyubimova T. P., Perminov A. V.* Stability of stationary plane-parallel flow of viscoplastic fluid between two differentially heated vertical plates // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 2015. Vol. 224. P. 51–60.
15. *Lyubimova T. P., Perminov A. V.* Vibration effect on a stability of stationary flow of pseudoplastic fluid in vertical slot // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2018. Vol. 126, Part A. P. 545–556.
16. *Lyubimova T. P., Perminov A. V., Kazimardanov M. G.* Stability of quasi-equilibrium states and supercritical regimes of thermal vibrational convection of a Williamson fluid in zero gravity conditions // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2019. Vol. 129. P. 406–414.
17. *Ghazal A., Karimfazli I.* On the hydrodynamics of off-bottom plug placement: A 2D model problem // *Journal of Petroleum Science and Engineering.* 2021. Vol. 203, 108613.
18. *Banerjee A., Lavrenteva O. M., Smagin I., Nir A.* Deformation of an axisymmetric viscoplastic drop in extensional/compressional flow // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 2021. Vol. 292, 104534.
19. *Zamankhan P., Takayama Sh., Grotberg J. B.* Steady displacement of long gas bubbles in channels and tubes filled by a Bingham fluid // *Phys Rev Fluids.* 2018. Vol. 3. N. 1, 013302.
20. *Mishra G., Chhabra R.P.* Influence of flow pulsations and yield stress on heat transfer from a sphere // *Applied Mathematical Modelling.* 2021. Vol. 90. P. 1069–1098.
21. *Mitsoulis E., Tsamopoulos J.* Numerical simulations of complex yield-stress fluid flows // *Rheol Acta.* 2017. Vol. 56. P. 231–258.
22. *Ahmadi A., Karimfazli I.* A quantitative evaluation of viscosity regularization in predicting transient flows of viscoplastic fluids // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 2021. Vol. 287, 104429.
23. *Борзенко Е. И., Шрагер Г. П.* Структура течения вязкопластичной жидкости при заполнении круглой трубы/плоского канала // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2019. Т. 12 (2). С. 129–136.
24. *Lin Ch.-Ch., Yang F.-L.* Continuum simulation for regularized non-local $\mu(I)$ model of dense granular flows // *Journal of Computational Physics.* 2020. Vol. 420, 109708.

25. Любимова Т. П. Численное исследование конвекции вязкопластичной жидкости в замкнутой области // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 1. С. 3–8.
26. Khezzar L., Siginer D., Vinogradov I. Natural convection of power law fluids in inclined cavities // International Journal of Thermal Sciences. 2012. Vol. 53. P. 8–17.
27. Pittman J. F. T., Richardson J. F., Sherrard C. P. An experimental study of heat transfer by laminar natural convection between an electrically-heated vertical plate and both Newtonian and non-Newtonian fluids // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1999. Vol. 42. P. 657–671.
28. Dale J. D., Emery A. F. The free convection of heat from a vertical plate to several non-Newtonian pseudoplastic fluids // Journal of Heat Transfer. 1972. Vol. 94. P. 64–72.
29. Yang L., Du K. A comprehensive review on the natural, forced, and mixed convection of non-Newtonian fluids (nanofluids) inside different cavities // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. 2020. Vol. 140. P. 2033–2054.
30. Любимова Т. П. О конвективных движениях неньютоновской жидкости в замкнутой полости, подогреваемой снизу // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 2. С. 181–184.
31. Turan O., Sachdeva A., Chakraborty N., Poole R. J. Laminar natural convection of power-law fluids in a square enclosure with differentially heated side walls subjected to constant temperatures // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2011. Vol. 166. P. 1049–1063.
32. Loenko D., Shenoy A., Sheremet M. Effect of time-dependent wall temperature on natural convection of a non-Newtonian fluid in an enclosure // International Journal of Thermal Sciences. 2021. Vol. 166, 106973.
33. Loenko D., Shenoy A., Sheremet M. Influence of the chamber inclination angle and heat-generating element location on thermal convection of power-law medium in a chamber // International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. 2021. Vol. 31, N. 1. P. 134–153.
34. Loenko D., Shenoy A., Sheremet M. Natural convection of non-Newtonian power-law fluid in a square cavity with a heat-generating element // Energies. 2019. Vol. 12, 2149.
35. Лоенко Д. С., Шеремет М. А. Конвективный теплоперенос степенной жидкости в полости с источником энергии нестационарного объемного тепловыделения // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 4. С. 44–50.
36. Лоенко Д. С., Шеремет М. А. Численное моделирование естественной конвекции неньютоновской жидкости в замкнутой полости // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 1. P. 59–72.
37. Sojoudi A., Saha S. C., Gu Y. T., Hossain M. A. Steady natural convection of non-Newtonian power-law fluid in a trapezoidal enclosure // Advances in Mechanical Engineering. 2013. Vol. 5. P. 1–8.

References

1. Duvant G., Lions J. L. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1976. 400 p.
2. Glowinski R., Lions J. L., Trémolières R. *Analyse numérique des inéquations variationnelles: Applications aux phénomènes stationnaires et d'évolution*. Paris: Dunod, 1976. 290 p.
3. Allouche M., Frigaard I. A., Sona G. Static wall layers in the displacement of two visco-plastic fluids in a plane channel. *J. Fluid Mech.*, 2000, vol. 424, pp. 243–277.
4. Bercovier M., Engleman M. A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows. *Journal of Computational Physics*, 1980, vol. 36, pp. 313–326.
5. Engleman M. S., Moskowitz S., Borman J. Computer simulation: A diagnostic method in comparative studies of valve prostheses. *The Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*, 1980, vol. 79, no. 3, pp. 402–412.
6. Papanastasiou T. Flows of materials with yield. *Journal of Rheology*, 1978, vol. 31, pp. 385–404.
7. Lipscomb G. G., Denn M. M. Flow of bingham fluids in complex geometries. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1984, vol. 14, pp. 337–346.
8. O'Donovan E. J., Tanner R. I. Numerical study of the Bingham squeeze film problem. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1984, vol. 15, no. 1, pp. 75–83.
9. Walton I. C., Bittleston S. H. The axial flow of a Bingham plastic in a narrow eccentric annulus. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, vol. 222, pp. 39–60.
10. Abdali S. S., Mutsoulis E. Entry and exit flows of Bingham fluids. *Journal of Rheology*, 1992, vol. 36, pp. 389–407.
11. Li M.-G., Feng F., Wu W.-T., Massoudi M. Numerical simulations of the flow of a dense suspension exhibiting yield-stress and shear-thinning effects. *Energies*, 2020, vol. 13, no. 24, 6635.
12. Tran-Duc Th., Ho Th., Thamwattana Ng. A smoothed particle hydrodynamics study on effect of coarse aggregate on self-compacting concrete flows. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, vol. 190, 106046.
13. Deka H., Pierson J.-L., Soares E. J. Retraction of a viscoplastic liquid sheet. *Journal of Non-*

- Newtonian Fluid Mechanics*, 2019, vol. 272, 104172.
14. Lyubimova T. P., Perminov A. V. Stability of stationary plane-parallel flow of viscoplastic fluid between two differentially heated vertical plates. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2015, vol. 224, pp. 51–60.
 15. Lyubimova T. P., Perminov A. V. Vibration effect on a stability of stationary flow of pseudoplastic fluid in vertical slot. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, vol. 126, Part A, pp. 545–556.
 16. Lyubimova T. P., Perminov A. V., Kazimardanov M. G. Stability of quasi-equilibrium states and supercritical regimes of thermal vibrational convection of a Williamson fluid in zero gravity conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, vol. 129, pp. 406–414.
 17. Ghazal A., Karimfazli I. On the hydrodynamics of off-bottom plug placement: A 2D model problem. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2021, vol. 203, 108613.
 18. Banerjee A., Lavrenteva O. M., Smagin I., Nir A. Deformation of an axisymmetric viscoplastic drop in extensional/compressional flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2021, vol. 292, 104534.
 19. Zamankhan P., Takayama Sh., Grotberg J. B. Steady displacement of long gas bubbles in channels and tubes filled by a Bingham fluid. *Phys Rev Fluids*, 2018, vol. 3, no. 1, 013302.
 20. Mishra G., Chhabra R.P. Influence of flow pulsations and yield stress on heat transfer from a sphere. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, vol. 90, pp. 1069–1098.
 21. Mitsoulis E., Tsamopoulos J. Numerical simulations of complex yield-stress fluid flows. *Rheol Acta*, 2017, vol. 56, pp. 231–258.
 22. Ahmadi A., Karimfazli I. A quantitative evaluation of viscosity regularization in predicting transient flows of viscoplastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2021, vol. 287, 104429.
 23. Borzenko E. I., Shrager G. R. The structure of a viscoplastic fluid flow during filling of a circular pipe/plane channel. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020, vol. 61, no. 7, pp. 1107–1115.
 24. Lin Ch.-Ch., Yang F.-L. Continuum simulation for regularized non-local $\mu(I)$ model of dense granular flows. *Journal of Computational Physics*, 2020, vol. 420, 109708.
 25. Lyubimova T.P. Numerical investigation of convection in a viscoplastic liquid in a closed region. *Fluid Dynamics*, 1977, vol. 12, no. 1, pp. 1–5.
 26. Khezzar L., Siginer D., Vinogradov I. Natural convection of power law fluids in inclined cavities. *International Journal of Thermal Sciences*, 2012, vol. 53, pp. 8–17.
 27. Pittman J. F. T., Richardson J. F., Sherrard C. P. An experimental study of heat transfer by laminar natural convection between an electrically-heated vertical plate and both Newtonian and non-Newtonian fluids. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1999, vol. 42, pp. 657–671.
 28. Dale J. D., Emery A. F. The free convection of heat from a vertical plate to several non-Newtonian pseudoplastic fluids. *J. Heat Tran.*, 1972, vol. 94, pp. 64–72.
 29. Yang L., Du K. A comprehensive review on the natural, forced, and mixed convection of non-Newtonian fluids (nanofluids) inside different cavities. *J. Therm. Anal. Calorim.*, 2020, vol. 140, pp. 2033–2054.
 30. Lyubimova T.P. Convection of non-Newtonian liquids in closed cavities heated from below. *Fluid Dynamics*, 1974, vol. 9, no. 2, pp. 319–322.
 31. Turan O., Sachdeva A., Chakraborty N., Poole R. J. Laminar natural convection of power-law fluids in a square enclosure with differentially heated side walls subjected to constant temperatures. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, vol. 166, pp. 1049–1063.
 32. Loenko D., Shenoy A., Sheremet M. Effect of time-dependent wall temperature on natural convection of a non-Newtonian fluid in an enclosure. *International Journal of Thermal Sciences*, 2021, vol. 166, 106973.
 33. Loenko D., Shenoy A., Sheremet M. Influence of the chamber inclination angle and heat-generating element location on thermal convection of power-law medium in a chamber. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2021, vol. 31, no. 1, pp. 134–153.
 34. Loenko D., Shenoy A., Sheremet M. Natural convection of non-Newtonian power-law fluid in a square cavity with a heat-generating element. *Energies*, 2019, vol. 12, 2149.
 35. Loenko D. S., Sheremet M. A. Convective heat transfer of power-law fluid in a cavity with a heat source of time-dependent volumetric heat generation. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2019, no. 4, pp. 44–50. (In Russian).
 36. Loenko D., Sheremet M. Numerical modeling of the natural convection of a non-Newtonian fluid in a closed cavity. *Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, pp. 59–72. (In Russian).
 37. Sojoudi A., Saha S. C., Gu Y. T., Hossain M. A. Steady natural convection of non-Newtonian power-law fluid in a trapezoidal enclosure. *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, vol. 5, pp. 1–8.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Лоенко Д. С., Шеремет М. А. Модели регуляризации при исследовании свободноконвективного тепло-массопереноса псевдопластичной жидкости в замкнутой дифференциально-обогреваемой полости // Вестник Пермского университета. Физика. 2021. № 3. С. 13–22. doi: 10.17072/1994-3598-2021-3-13-22

Please cite this article in English as:

Loenko D. S., Sheremet M. A. Regularization models for natural convection of a pseudoplastic liquid in a closed differentially heated cavity. Bulletin of Perm University. Physics, 2021, no. 3, pp. 13–22. doi: 10.17072/1994-3598-2021-3-13-22

Сведения об авторах

1. *Дарья Сергеевна Лоенко*, м.н.с., Национальный исследовательский Томский государственный университет, пр. Ленина, 36, Томск, 634050
2. *Михаил Александрович Шеремет*, д-р. физ-мат. наук, доцент; зав. лабораторией, Национальный исследовательский Томский государственный университет, пр. Ленина, 36, Томск, 634050

Author information

1. *Daria S. Loenko*, Junior Researcher, Tomsk State University, Lenin av., 36, Tomsk, Russia, 634050
2. *Mikhail A. Sheremet*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent; Head of the Laboratory, Tomsk State University, Lenin av., 36, Tomsk, Russia, 634050