

УДК 532.5.032  
PACS 47.55.Dz, 47.55.dd, 47.55.np

## О влиянии внутреннего давления на колебания цилиндрического газового пузыря

А. А. Алабужев

Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1  
Пермский государственный национальный исследовательский университет,  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: alabuzhev@mail.ru

Изучаются собственные и вынужденные колебания газового пузыря. Пузырек в состоянии равновесия имеет форму круглого цилиндра. Он ограничен в осевом направлении двумя параллельными твердыми поверхностями и окружен несжимаемой жидкостью конечного объема со свободной внешней поверхностью. Вся система находится под действием переменного поля давления. Скорость движения линии контакта трех сред (газ-жидкость-твердая подложка) пропорциональна отклонению краевого угла от равновесного значения. Частота собственных колебаний газового пузыря может возрастать с увеличением параметра Хоккинга в отличие от частот капли несжимаемой жидкости, которые только убывают. Показано, что радиальные колебания цилиндрического пузыря возможны только в ограниченном объеме жидкости. Рассмотрен эффект пересечения мод собственных колебаний в диссипативном случае. Построены амплитудно-частотные характеристики для разных значений давления газа в пузыре. Обнаружены резонансные явления. Показано, что внешнее воздействие возбуждает, в первую очередь, объемные колебания. Колебания формы возникают вследствие движения линии контакта. Найдены выражения для амплитуды колебаний в случае закрепленной линии контакта и фиксированного краевого угла.

**Ключевые слова:** газовый пузырек; вынужденные колебания; динамика линии контакта

*Поступила в редакцию 30.09.2020; принята к опубликованию 17.11.2020*

## Effect of the internal pressure on oscillations of a cylindrical gas bubble

A. A. Alabuzhev

Institute of continuous media mechanics UB RAS, Academ. Koroleva str., 1, 614013, Perm  
Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: alabuzhev@mail.ru

Natural and forced oscillations of a gas bubble are studied. The bubble has the shape of a round cylinder in the state of equilibrium. It is bounded in the axial direction by two parallel solid surfaces and is surrounded by an incompressible liquid of a finite volume with a free outer surface. The entire system is under an alternating pressure field. The velocity of the contact line of three media (gas-liquid-solid substrate) is proportional to the deviation of the contact angle from the equilibrium value. The frequency of eigenmodes of a gas bubble can increase with an increase in the Hocking parameter, in contrast to the frequencies of an incompressible liquid drop, which only

decrease. It is shown that radial oscillations of a cylindrical bubble are possible only in a finite volume of liquid. The effect of crossing the modes of natural oscillations is considered for the dissipative case. The amplitude-frequency characteristics are constructed for different values of the internal gas pressure. Resonance phenomena are found. It is shown that the external influence excites, first of all, volumetric oscillations of the bubble. Variations in shape are caused by the movement of the contact line. Expressions are found for the vibration amplitude in the case of a fixed contact line and a fixed contact angle.

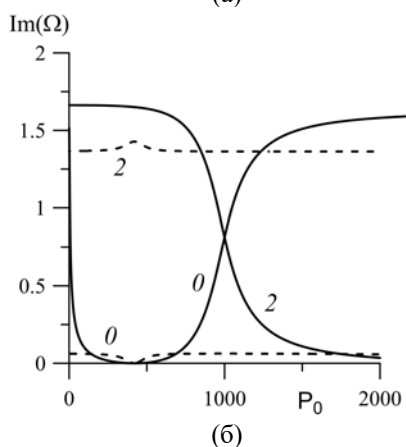
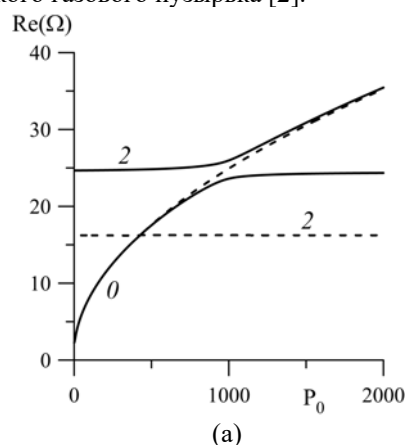
**Keywords:** gas bubble; forced oscillations; contact line dynamics

Received 30.09.2020; accepted 17.11.2020

doi: 10.17072/1994-3598-2020-4-51-62

## 1. Введение

При исследовании собственных осесимметричных колебаний газового полусферического пузырька на подложке [1] был обнаружен эффект пересечения частот соседних мод собственных колебаний: ветвь частоты радиальной моды проходит поперек ветви частоты поверхностной моды. Подобный эффект был отмечен и для цилиндрического газового пузырька [2].



**Рис. 1.** Зависимость частоты  $\text{Re}(\Omega)$  и декремента затухания  $\text{Im}(\Omega)$  двух первых мод от давления  $P_0$  для разных значений параметра  $\lambda$  ( $b=1$ ,  $R_0=5$ ) [2]: 0 – объемная мода, 2 – вторая мода,  $\lambda=0.5$  (сплошная линия),  $\lambda=10$  (штриховая линия)

На рис. 1 приведены зависимости безразмерных частот и коэффициентов затухания радиальной  $\Omega_0$  и второй поверхностной  $\Omega_2$  мод собственных колебаний от давления газа в пузырьке  $P_0$  [2]. Параметр Хокинга  $\lambda$  характеризует взаимодействие линии контакта с твердой подложкой: диссипативное движение при конечных значениях  $\lambda$ , а предельные случаи  $\lambda=0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  соответствуют закрепленной контактной линии и фиксированному краевому углу (подробнее см. [1–10]).

При малых и конечных значениях  $\lambda$  ( $\lambda=0.5$  на рис. 1) ветви частот не пересекаются, в отличие от ветвей декрементов затухания (рис. 1, б). При значении  $\lambda=10$  кривые пересекаются и значения частот фактически совпадают со значениями  $\Omega_0$  и  $\Omega_2$  (рис. 1, а), но пересечения декрементов затухания не происходит (рис. 1, б). Следовательно, несмотря на равенство частот в точке пересечения, радиальные колебания и колебания формы остаются различными режимами с разными декрементами затухания. Гораздо проще изменять равновесное давление в пузырьке, чем параметры жидкости и газа, и поэтому данный резонансный эффект должен быть хорошо заметен в эксперименте, что позволит более точно сравнить полученные данные с теоретическими результатами и определить параметр  $\lambda$ .

Отметим, что общий случай пересечения частот без диссипации был рассмотрен, например, в [11]. В работах [1, 2] движение линии контакта имело диссипативный характер.

Данная работа посвящена детальному изучению эффекта пересечения частот соседних мод собственных колебаний цилиндрического пузырька [2] и его влиянию на собственные и вынужденные колебания.

## 2. Постановка задачи

Постановка задача в целом похожа на задачу, рассматриваемую в работе [2]: газовый пузырек окружен несжимаемой жидкостью с плотностью  $\rho^*$  и ограничен двумя параллельными твердыми плоскостями, расстояние между которыми равно  $h^*$  (рис. 2). В отсутствие внешних сил пузырек

имеет форму цилиндра радиусом  $r_0^*$ . Газ в пузырьке считаем невесомым. Состояние газа описывается политропным процессом с показателем политропного процесса  $n_p$ . Краевой угол между боковой поверхностью пузырька и твердыми плоскостями в равновесии равен  $\pi/2$ . На расстоянии  $R_0^*$  от оси симметрии жидкость, окружающая пузырек, ограничена свободной поверхностью. На систему действует однородное пульсационное поле давления с амплитудой  $A^*$  и частотой  $\omega^*$ .

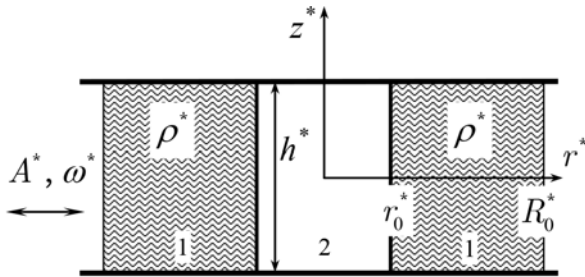


Рис. 2. Геометрия задачи:  
1 – жидкость, 2 – пузырек

Ввиду симметрии задачи будем использовать цилиндрическую систему координат  $(r^*, \alpha^*, z^*)$ , в которой поверхность пузырька описывается уравнением:  $r^* = r_0^* + \zeta^*(z^*, t^*)$ , где  $\zeta^*(z^*, t^*)$  – отклонение поверхности от равновесного положения.

Выберем единицей измерения времени –  $\sqrt{\rho^* r_0^{*3} / \sigma^*}$ , радиальной координаты –  $r_0^*$ , осевой координаты –  $h^*$ , отклонения поверхности –  $A^*$ , скорости –  $A^* \sqrt{\sigma^* / \rho^* r_0^{*3}}$ , давления –  $A^* \sigma^* / r_0^{*2}$ , где  $\sigma^*$  – коэффициент поверхностного натяжения, и запишем все уравнения и граничные условия в безразмерных переменных:

$$p_e = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \omega^2 e^{i\omega t} \right), \Delta \varphi = 0, \quad (2.1)$$

$$p_i = -P_0 \langle \zeta \rangle, \quad (2.2)$$

$$r = 1: [p] = \zeta + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (2.3)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (2.4)$$

$$r = 1, z = \pm \frac{1}{2}: \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (2.5)$$

$$r = R: \varphi = 0. \quad (2.6)$$

Здесь  $\varphi$  – потенциал скорости жидкости,  $p_e$  – давление жидкости,  $p_i$  – давление газа в пузырьке,  $r = r^* / r_0^*$ ,  $z = z^* / h^*$  – безразмерные координаты,  $\zeta = \zeta^*(z, t)$  – безразмерное отклонение поверхно-

сти от равновесного значения, квадратными скобками обозначим скачок величины на границе раздела между внешней жидкостью и пузырьком,  $\langle \zeta \rangle = (2\pi)^{-1} \int_S \zeta dS$  – угловые скобки означают осреднение по поверхности пузырька  $S = S(z)$ .

Эффективное граничное условие Хокинга (2.5) описывает движение линии контакта и, как уже отмечалось выше, содержит два важных предельных случая:  $\lambda = 0$  – закрепленная линия контакта (краевой угол меняется) и  $\lambda \rightarrow \infty$  – свободная линия контакта (краевой угол прямой и постоянный). Данное условие также использовалось для исследования колебаний капель [12–15], жидкой зоны [16] и горизонтальной поверхности жидкости [17, 18]. Гистерезисные явления рассматривались в работах [4, 19, 20], эффект электросмачивания с применением модифицированного условия Хокинга изучался в [21, 22]. С другими моделями описания движения линии контакта можно ознакомиться, например, в [23–36].

Краевая задача (2.1)–(2.6) содержит следующие безразмерные параметры: малую относительную амплитуду  $\varepsilon = A^* / r_0^*$ , параметр смачивания  $\lambda = \Lambda^* / \sqrt{\rho_e^* r_0^* / \sigma^*}$ , геометрический параметр  $b = r_0^* / h^*$ , радиус внешней поверхности  $R = R_0^* / r_0^*$ , безразмерную частоту –  $\omega = \omega^* \sqrt{\rho_e^* r_0^{*3} / \sigma^*}$ ,  $P_0 = 2n_p P_g^* r_0^* / \sigma^*$ ,  $P_g^*$  – размерное равновесное давление газа в пузырьке.

Предварительно оценим масштабы используемых величин для определения границ применимости наших предположений. Условие несжимаемости жидкости:  $\omega^* r_0^* \ll c^*$ , где  $c^*$  – скорость звука. Толщина вязкого пограничного слоя  $l^* = \sqrt{\nu_{i,e}^* / \omega^*}$ , где  $\nu_{i,e}^*$  – кинематическая вязкость жидкости. В нашем случае жидкость можно рассматривать невязкой, если  $l^* \ll r_0^*$ . Напомним, что в данной работе частота имеет масштаб  $\sqrt{\sigma^* / (\rho_e^* r_0^{*3})}$ . Например, для пузырька  $r_0^* = 1 \cdot 10^{-2}$  м в воде при нормальных условиях этот масштаб  $\sim 8.5$  Гц. Следовательно, в этом случае безразмерная частота  $\omega = 1$  соответствует размерной частоте  $\omega^* = 8.5$  Гц. Толщина вязкого пограничного слоя в воде  $l^* = 3.4 \cdot 10^{-4}$  м,  $l^* / r_0^* \approx 30$ ; условие несжимаемости выполняется:  $\omega^* r_0^* = 8.5 \cdot 10^{-2}$  м/с,  $c_i^* = 1.5 \cdot 10^3$  м/с,  $c_e^* = 3.4 \cdot 10^2$  м/с. Легко показать, что  $\omega = 5$  соответствует  $\omega^* = 42.5$  Гц,  $\omega = 20$  –  $\omega^* = 170$  Гц,  $\omega = 50$  –  $\omega^* = 425$  Гц. Безразмерное равновесное давление газа (воздуха) в таком пузырьке  $P_0 = 2.9 \cdot 10^4$  при  $P_g^* = 10^5$  Па,  $\sigma^* = 7 \cdot 10^{-2}$  Н/м и  $n = 1$ . Для пузырька радиуса  $r_0^* = 1 \cdot 10^{-3}$  м:

$\omega = 1$  будет соответствовать  $\omega^* = 2.7 \cdot 10^2$  Гц,  $l^* = 6.1 \cdot 10^{-5}$  м,  $\omega^* r_0^* = 2.7 \cdot 10^{-1}$  м/с,  $P_0 = 2.9 \cdot 10^3$ . Из приведенных оценок следует, что для пузырьков размером 0.1–1 см приближения несжимаемости и невязкости окружающей жидкости выполняются и являются оправданными. Отметим также, что с увеличением частоты толщина вязкого пограничного слоя будет уменьшаться.

### 3. Собственные колебания

Сначала рассмотрим собственные колебания цилиндрического газового пузырька. Решение задачи (2.1)–(2.6) будем искать в виде рядов Фурье по собственным функциям уравнения Лапласа (2.1) [2]. Относительно координаты  $z$  данный ряд будет содержать четные и нечетные функции, поэтому в дальнейшем будем разделять моды колебаний на четные и нечетные. Для частот  $\Omega$  свободных колебаний получаем спектрально-амплитудную задачу, собственные числа которой находятся из решения следующих уравнений: четные моды:

$$\begin{aligned} & \left( \Omega^2 - \frac{P_0}{\ln R} \right) \frac{C_0}{\Omega_{e0}^2 - \Omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Omega^2 C_k}{\Omega_{ek}^2 - \Omega^2} + \\ & + \cos \frac{1}{2b} - \frac{\lambda}{i\Omega b} \sin \frac{1}{2b} = 0, \\ & \Omega_{e0}^2 = \frac{P_0 - 1}{\ln R}, \quad C_0 = 2b \sin \left( \frac{1}{2b} \right), \\ & C_k = -\frac{4b(-1)^k}{4\pi^2 k^2 b^2 - 1} \sin \left( \frac{1}{2b} \right), \\ & \Omega_{ek}^2 = \frac{4\pi^2 k^2 b^2 - 1}{F_{ek}} \left( R_{kr}^{ee}(1) \frac{R_k^{ie}(R)}{R_k^{ee}(R)} - R_{kr}^{ie}(1) \right), \\ & F_{ek} = R_k^{ie}(1) - R_k^{ee}(1) \frac{R_k^{ie}(R)}{R_k^{ee}(R)}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

нечетные моды:

$$\begin{aligned} & i\Omega \left( \Omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{\Omega_{ok}^2 - \Omega^2} + \sin \frac{1}{2b} \right) + \frac{\lambda}{b} \cos \frac{1}{2b} = 0, \quad (3.2) \\ & \Omega_{ok}^2 = \frac{(2k+1)^2 \pi^2 b^2 - 1}{F_{ok}} \left( R_{kr}^{eo}(1) \frac{R_k^{io}(R)}{R_k^{eo}(R)} - R_{kr}^{io}(1) \right), \\ & F_{ok} = R_k^{io}(1) - R_k^{eo}(1) \frac{R_k^{io}(R)}{R_k^{eo}(R)}, \\ & S_k = \frac{4b(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2 b^2 - 1} \cos \left( \frac{1}{2b} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega_{e0}$ ,  $\Omega_{ek}$ ,  $\Omega_{ok}$  – частоты собственных колебаний пузырька со свободно скользящей контактной линией (т.е. при  $\lambda \rightarrow \infty$ ),  $k$  – волновое число,  $R_k^{ie}(r) = I_0(2k\pi br)$ ,  $R_k^{io}(r) = I_0((2k+1)\pi br)$ ,  $R_k^{ee}(r) = K_0(2k\pi br)$ ,  $R_k^{eo}(r) = K_0((2k+1)\pi br)$ ,

$I_0$ ,  $K_0$  – модифицированные функции Бесселя,  $R_{kr}^{ie}(r) = \partial R_k^{ie}(r)/\partial r$ ,  $R_{kr}^{ee}(r) = \partial R_k^{ee}(r)/\partial r$ ,  $R_{kr}^{io}(r) = \partial R_k^{io}(r)/\partial r$ ,  $R_{kr}^{eo}(r) = \partial R_k^{eo}(r)/\partial r$ ,  $C_k$  и  $S_k$  – коэффициенты разложения в ряд Фурье функции  $\cos(z/b)$  и  $\sin(z/b)$  по базисным функциям  $\cos(2\pi kz)$  и  $\sin((2k+1)\pi z)$ , соответственно. Уравнения (3.1), (3.2) решались методом двумерных секущих. Отметим, что из выражения для объемной частоты следует (3.1) условие существования объемных колебаний – такие колебания возможны только при условии  $1 < R < \infty$ . Это связано с тем, что для задания радиального поля потенциала в цилиндрической системе координат необходимо определить (задать) значение этого потенциала на некоторой цилиндрической поверхности. Похожий эффект возникает и при определении электрического потенциала заряженного цилиндра: необходимо определить потенциал на некоторой эквипотенциальной поверхности вне цилиндра. Если же занулить потенциал вдали от цилиндра, то он будет постоянным во всем пространстве. Полусферический пузырек на твердой подложке может совершать радиальные колебания и в бесконечном объеме жидкости [1, 4].

Выше было сказано, что коэффициент затухания стремится к нулю в двух предельных случаях: мало подвижной линии контакта, т.е.  $\lambda \rightarrow 0$ , и слабо меняющегося краевого угла при  $\lambda \rightarrow \infty$ . В первом случае  $\lambda \rightarrow 0$  для частот  $\Omega = \Omega_e + \delta$  четных мод справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{P_0}{\ln R} \frac{C_0}{\Omega_{e0}^2 - \Omega_e^2} - \cos \frac{1}{2b} + \left( \Omega_e^2 - \frac{P_0}{\ln R} \right) \frac{\Omega_e^2 C_0}{(\Omega_{e0}^2 - \Omega_e^2)^2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Omega_e^4 C_k}{(\Omega_{ek}^2 - \Omega_e^2)^2} + \frac{i\lambda}{2b\delta} \sin \frac{1}{2b} = 0, \end{aligned}$$

где частота колебаний  $\Omega_e$  пузырька с фиксированной линией контакта определяется из уравнения (3.1) при  $\lambda = 0$ :

$$\begin{aligned} & \left( \Omega_e^2 - \frac{P_0}{\ln R} \right) \frac{C_0}{\Omega_{e0}^2 - \Omega_e^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Omega_e^2 C_k}{\Omega_{ek}^2 - \Omega_e^2} + \\ & + \cos \frac{1}{2b} = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что разность в знаменателях всегда конечна. Для частот  $\Omega = \Omega_o + \delta$  нечетных мод аналогичные уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k \Omega_o^4}{(\Omega_{ok}^2 - \Omega_o^2)^2} - \sin \frac{1}{2b} - \frac{i\lambda}{2b\delta} \cos \frac{1}{2b} = 0, \\ & \Omega_o^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{\Omega_{ok}^2 - \Omega_o^2} + \sin \frac{1}{2b} = 0. \end{aligned}$$

Во втором случае при  $\lambda \rightarrow \infty$ , для частот  $\Omega = \Omega_{ek} + \delta_{ek}$  четных мод и  $\Omega = \Omega_{ok} + \delta_{ok}$  нечетных, получаем, соответственно, следующие выражения:

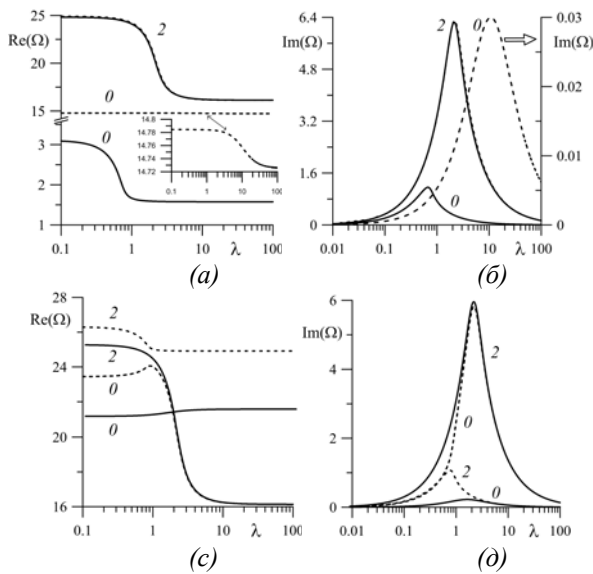
$$\delta_{e0} = \left( \Omega_{e0}^2 - \frac{P_0}{\ln R} \right) \frac{bC_0}{2i\lambda} \operatorname{cosec} \frac{1}{2b} = \frac{ib^2}{\lambda \ln R},$$

$$\delta_{ek} = \frac{(-1)^k b \Omega_{ek}^2 C_k}{2i\lambda} \operatorname{cosec} \frac{1}{2b},$$

$$\delta_{ok} = \frac{(-1)^k ib \Omega_{ok}^2 S_k}{2\lambda} \operatorname{sec} \frac{1}{2b},$$

где частоты  $\Omega_{e0}$ ,  $\Omega_{ek}$ ,  $\Omega_{ok}$  собственных колебаний пузырька с фиксированным краевым углом определены в (3.1), (3.2). Очевидно, что коэффициент затухания свободных колебаний пропорционален  $\lambda^{-1}$  для всех мод.

Основной анализ уравнений (3.1), (3.2) и зависимости частот  $\Omega$  от параметров задачи приведен в работе [2]. В данной работе нас интересует влияние давления газа  $P_0$  на собственные колебания и некоторые другие эффекты, которые не изучались в упомянутой работе [2].

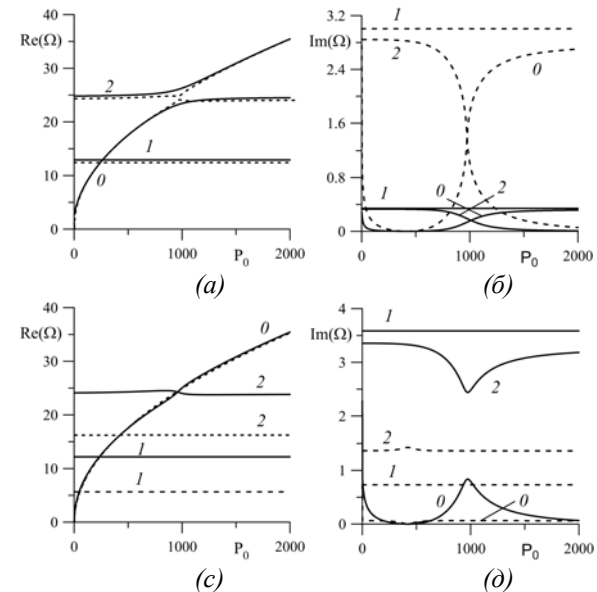


**Рис. 3.** Зависимость частоты  $\operatorname{Re}(\Omega)$  и коэффициента затухания  $\operatorname{Im}(\Omega)$  двух первых четных моды собственных колебаний от параметра Хокинга ( $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ): а, б –  $P_0 = 5$  (сплошная линия),  $P_0 = 350$  (штриховая); с, д –  $P_0 = 750$  (сплошная линия),  $P_0 = 1000$  (штриховая)

Для удобства будем обозначать частоты четных мод, определяемых уравнением (3.1),  $\Omega_{2k}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), а частоты нечетных мод, которые являются решением уравнения (3.2),  $\Omega_{2k+1}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Таким образом, частоты  $\Omega_n$  собственных колебаний с нечетным индексом  $n$  бу-

дут соответствовать нечетным модам (3.2), а с четным  $n$  – четным модам (3.1).

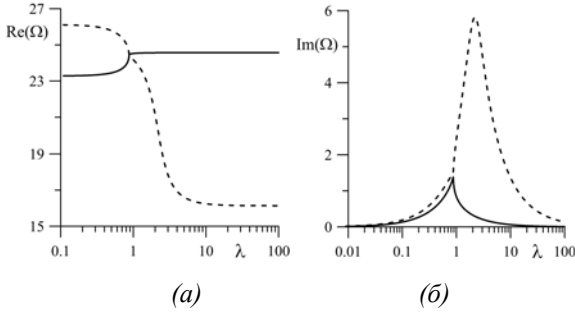
На рис. 3 приведена зависимость частоты и инкремента затухания двух первых четных мод от параметра Хокинга  $\lambda$  для нескольких значений равновесного давления газа  $P_0$ , а на рис. 4 зависимости частот и коэффициентов затухания трех первых мод собственных колебаний от  $P_0$  для четырех значений  $\lambda$ . Из приведенных графиков следует, что с увеличением давления качественно меняется поведение зависимости частоты объемной моды от параметра Хокинга  $\lambda$  (рис. 3, а), но с увеличением значения  $P_0$  характер меняется – частота монотонно увеличивается с ростом  $\lambda$  (рис. 3, в). Смена поведения происходит при условии  $\Omega_{e0}^2 = \Omega_{ek}^2$  (см. рис. 1, 4), т.е. не зависит от параметра  $\lambda$ . Для рассматриваемых параметров задачи на рис. 3, 4, пересечение ветвей нулевой и второй моды происходит при значении давления  $P_0 = 420.0$ .



**Рис. 4.** Зависимость частоты  $\operatorname{Re}(\Omega)$  и декремента затухания  $\operatorname{Im}(\Omega)$  трех первых мод от давления  $P_0$  для разных значений параметра  $\lambda$  ( $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ): 0, 1, 2 – объемная, первая и вторая моды (соответственно); а, б –  $\lambda = 0.1$  (сплошная линия),  $\lambda = 0.85$  (штриховая линия), в, г –  $\lambda = 1$  (сплошная линия),  $\lambda = 10$  (штриховая линия)

С дальнейшим увеличением равновесного давления  $P_0$  происходит переплетение ветвей спектра, т.е. в случае  $\Omega_0^2 = \Omega_{2k}^2$  (см. рис. 3, с, 4, 5). Для используемых параметров это происходит при значениях  $P_0 \approx 972.6$  и  $\lambda \approx 0.9$  (рис. 5). Таким

образом, эффект перецепления мод связан не только со сжимаемостью пузырька, но и с движением линии контакта.



**Рис. 5.** Зависимость частоты  $\text{Re}(\Omega)$  и коэффициента затухания  $\text{Im}(\Omega)$  объемной и второй мод собственных колебаний от параметра Хокинга ( $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ,  $P_0 = 972.6$ ), сплошная линия – объемная мода, штриховая – вторая мода

Последующее увеличение давления  $P_0$  в пузырьке приводит к разделению ветвей решения (рис. 3, c). В результате, при малых значениях  $\lambda$  (линия контакта малоподвижна) частота объемных колебаний пузырька меньше частоты колебаний формы, а при больших  $\lambda$  (свободнодвижущаяся линия контакта) наоборот, частота объемных колебаний – выше частоты колебаний формы. Кроме того, из приведенных графиков видно, что при больших значениях  $\lambda$  частота второй моды не за-

висит от  $P_0$  (рис. 3, a, c, 4, c). Частоты нечетных мод от давления  $P_0$  не зависят при любых значениях  $\lambda$ .

#### 4. Вынужденные колебания

Рассмотрим далее вынужденные колебания пузырька в пульсационном поле давления. Решение краевой задачи (2.1)–(2.6) аналогично случаю свободных колебаний, будем искать в виде рядов Фурье по собственным функциям уравнения Лапласа (2.1) [2]:

$$\varphi_e(r, z, t) = i \left( a_0 (\ln R - \ln r) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k R_k^{ie}(r) + b_k R_k^{ee}(r)) \cos(2\pi k z) \right) e^{i\omega t}, \quad (4.1)$$

$$\zeta(z, t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(2\pi k z) + d \cos\left(\frac{z}{b}\right) \right) e^{i\omega t}, \quad (4.2)$$

где  $R_k^{ie}(r) = I_0(2k\pi br)$ ,  $R_k^{ee}(r) = K_0(2k\pi br)$ ,  $I_0$ ,  $K_0$  – модифицированные функции Бесселя,  $a_k, b_k, c_k$  и  $d$  – неизвестные амплитуды. Подставляя решения (4.1) и (4.2) в уравнения (2.1)–(2.6), получим выражения для неизвестных амплитуд  $a_k, b_k, c_k$  и  $d$ :

$$d = \frac{\omega^2}{\ln(R)(\Omega_{e0}^2 - \omega^2) \left( \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k}{\Omega_{ek}^2 - \omega^2} + \frac{\omega^2 \ln(R) - P_0}{(\Omega_{e0}^2 - \omega^2) \ln(R)} C_0 + \cos \frac{1}{2b} - \frac{\lambda}{i\omega b} \sin \frac{1}{2b} \right)} \quad (4.3)$$

$$c_0 = \frac{(\omega^2 \ln(R) - P_0) C_0 d - \omega^2}{(\Omega_{e0}^2 - \omega^2) \ln(R)}, \quad c_k = \frac{\omega^2 C_k d}{\Omega_{ek}^2 - \omega^2}, \quad (4.4)$$

$$a_0 = -\omega(c_0 + C_0 d), \quad a_k = \omega(c_k + C_k d) F_{ek}^{-1}, \quad b_k = -a_k \frac{R_k^{ie}(R)}{R_k^{ee}(R)}. \quad (4.5)$$

Напомним, что  $\Omega_{e0}, \Omega_{ek}$  – частоты собственных колебаний пузырька со свободно скользящей контактной линией (3.1), т.е. при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Полученные амплитуды (4.3)–(4.5) являются комплексными при любом наборе параметров, за исключением двух предельных случаев: закрепленной контактной линии ( $\lambda = 0$ ) и фиксированного контактного угла ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). Наличие затухания свободных колебаний вызвано лишь условием на линии контакта и не связано с вязкостью. Более того, несмотря на знаменатели  $\Omega_{e0}^2 - \omega^2$  и  $\Omega_{ek}^2 - \omega^2$ , частоты  $\Omega_{e0}$  и  $\Omega_{ek}$  собственных колебаний пузырька не являются резонансными за исключением предельного случая свободной линии

контакта. При  $\omega \rightarrow \Omega_{e0}$  (или  $\omega \rightarrow \Omega_{en}$ ) и конечных значениях  $\lambda$  из решения (4.3)–(4.5) получаем, что

$$\omega \rightarrow \Omega_{e0}: \quad d \approx \frac{\omega^2}{(\omega^2 \ln(R) - P_0) C_0}, \quad c_0 \approx 0;$$

$$\omega \rightarrow \Omega_{en}: \quad d \approx 0, \quad c_0 \approx \frac{-\omega^2}{(\Omega_0^2 - \omega^2) \ln(R)},$$

$$c_n \approx \frac{(-1)^{n+1} \omega^2}{(\Omega_{e0}^2 - \omega^2) \ln(R)}, \quad c_k = 0, \quad k \neq n.$$

Анализ решения (4.1)–(4.5) показывает, что, с одной стороны, внешняя сила (пульсационное поле давления) возбуждает радиальные (объемные)

колебания пузырька. С другой стороны, вследствие взаимодействия линии контакта с твердой подложкой будут возбуждаться и колебания формы. Следовательно, можно предположить, что основной вклад в изменение формы и объема пузырька при малых значениях параметра  $\lambda$  будут вносить моды колебаний формы, а при больших  $\lambda$  – радиальная мода.

Рассмотрим более детально оба предельных случая. При закрепленной линии контакта ( $\lambda = 0$ ) коэффициенты  $c_0$ ,  $c_k$  и  $d$ , определяемые (4.3)–(4.5), становятся действительными. На собственных частотах колебаний капли с закрепленной контактной линией  $\Omega_e$ , определяемых решением уравнения указанного в предыдущем разделе, амплитуда колебаний обращается в бесконечность. Таким образом, радиальная мода вносит не менее существенный вклад в колебания с закрепленной линией контакта, как и поверхностные моды. Это существенно отличает колебания сжимаемого пузырька от несжимаемой капли.

В противоположном предельном случае со свободно движущейся линией контакта ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) имеем два случая линейного резонанса:  $\omega \rightarrow \Omega_{e0}$  и  $\omega \rightarrow \Omega_{ek}$ . Во втором случае амплитуда колебаний остается конечной, несмотря на малую диссипацию. Это связано с тем, что внешнее воздействие не возбуждает моды колебаний формы при наличии свободно движущейся линии контакта. Другими словами, если частота  $\omega$  близка к собственной частоте  $\Omega_{en}$   $n$ -й моды, т.е.

$$\omega = \Omega_{en} + i\delta_n, \quad n \neq 0,$$

то амплитуды (4.3)–(4.5) примут следующий вид:

$$d \approx 0, \quad c_0 \approx -\frac{\Omega_{en}^2}{(\Omega_{e0}^2 - \Omega_{en}^2) \ln R}, \quad c_k \approx 0, \quad k \neq n,$$

$$c_n \approx \frac{\Omega_{en}^2 C_n}{(\Omega_{e0}^2 - \Omega_{en}^2) \ln R} \left( (-1)^n C_n - \frac{2\delta_n \lambda}{b \Omega_{en}^2} \sin \frac{1}{2b} \right)^{-1}.$$

Из представленных формул видно, что коэффициенты принимают конечные значения.

Для резонанса  $\omega = \Omega_{e0} + i\delta_0$  амплитуды (4.3)–(4.5) имеют вид:

$$d \approx \frac{\Omega_{e0}^2}{\ln R} \left( \frac{2\delta_0 \lambda}{b} \sin \frac{1}{2b} - \frac{C_0}{\ln R} \right)^{-1} \sim O(1),$$

$$c_0 = \frac{C_0 d + \Omega_{e0}^2}{2i\Omega_{e0} \delta_0 \ln(R)} \sim O(\delta_0^{-1}), \quad c_k = \frac{\Omega_{e0}^2 C_k d}{\Omega_{ek}^2 - \Omega_{e0}^2}.$$

Следовательно, амплитуда  $c_0$  радиальной моды начинает неограниченно нарастать при  $\delta_0 \rightarrow 0$ .

Введем обозначение  $\zeta_0 = \max(|\zeta|_{z=0})$  – максимальное отклонение боковой поверхности пузырька от равновесного положения в середине слоя (при  $z = 0$ ). Аналогично, для максимального отклонения линии контакта на твердой поверхности –  $\zeta_s = \max(|\zeta|_{z=1/2})$  и краевого угла –  $\delta = \max(\gamma - 0.5\pi)$ .

На рис. 6 показаны амплитуды колебаний поверхности и отклонение краевого угла на верхней пластине для разных значений давления газа  $P_0$  и параметра Хокинга  $\lambda$ . Из представленных графиков видно, что резонанс на частоте радиальных колебаний имеет четко выраженный характер для большого набора значений параметров задачи. При конечных значениях  $\lambda$  амплитуда всегда ограничена даже при резонансе, т.е. в системе есть диссипация энергии. Наличие затухания вызвано лишь условием на линии контакта и не связано с вязкостью.

Имеются также «антирезонансные» частоты, при которых амплитуда колебаний поверхности равно нулю (см. рис. 6). Например, частоты, при которых линия контакта неподвижна, равны частотам  $\Omega_f$  собственных колебаний пузырька с закрепленной линией контакта ( $\lambda = 0$  в (3.1)):

$$\left( \Omega_f^2 - \frac{P_0}{\ln R} \right) \frac{C_0}{\Omega_{e0}^2 - \Omega_f^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k \Omega_f^2}{\Omega_{ek}^2 - \Omega_f^2} = -\cos \frac{1}{2b},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(-1)^k + d_0 \cos\left(\frac{1}{2b}\right) = 0,$$

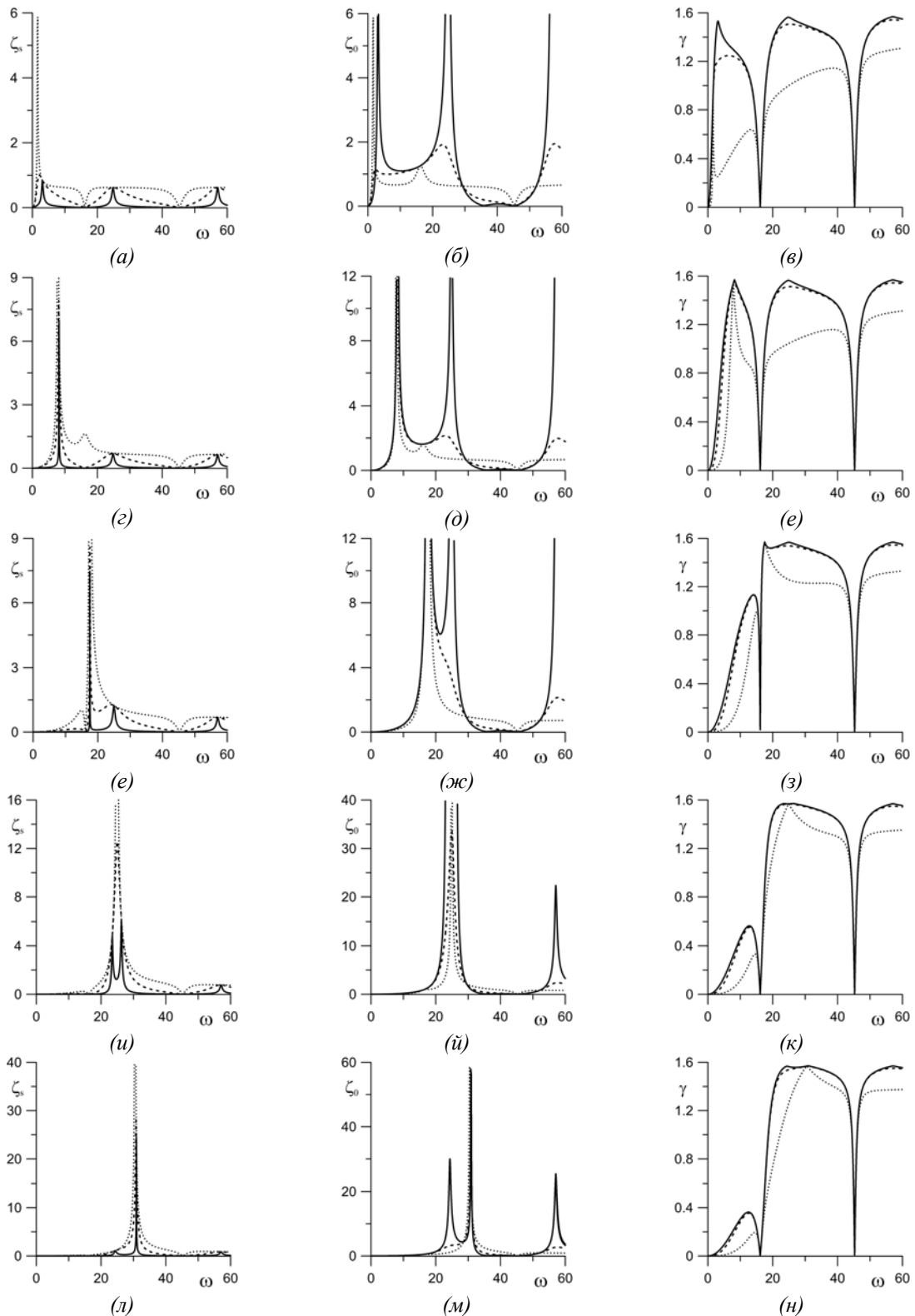
$$d_0 = \frac{\omega^2 (\Omega_0^2 - \omega^2)^{-1} \ln^{-1}(R)}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^2 C_k}{\Omega_{ek}^2 - \omega^2} + \frac{\omega^2 \ln(R) - P_0}{(\Omega_0^2 - \omega^2) \ln(R)} C_0 + \cos \frac{1}{2b}}.$$

Из представленных выражений видно, что коэффициент  $d_0$  равен  $d$  (4.3) при  $\lambda = 0$ .

При малых  $\lambda$  амплитуда колебаний линии контакта ограничена даже на резонансной частоте, равной частоте радиальных колебаний (рис. 6,  $a$ – $z$ ).

Это связано с сильным взаимодействием линии контакта с подложкой. В то же время диссипация мала (см. рис. 3,  $b$ ,  $z$ , и 5,  $b$ ) и при резонансе амплитуда колебаний боковой поверхности велика (рис. 6,  $d$ – $ж$ ). При больших значениях  $\lambda$  в резонансе амплитуда колебаний (и линии контакта (рис. 6,  $a$ – $z$ ) и боковой поверхности (рис. 6,  $d$ – $ж$ )) неограничена только на частоте объемных колебаний, для остальных значений частот амплитуда постоянна за исключением «антирезонансных» частот.

Отсутствие резонансов на частотах поверхностных мод при больших значениях  $\lambda$  объясняется слабым взаимодействием линии контакта с подложкой. В этом случае внешняя сила не воз-



**Рис. 6.** Зависимость амплитуды  $\zeta_s$  колебаний капли на твердой поверхности (а, г, е, и, л), амплитуды  $\zeta_0$  в плоскости  $z=0$  (б, д, ж, м) и краевого угла  $\gamma$  (в, е, к, н) от частоты внешнего воздействия  $\omega$  ( $b=1$ ,  $R_0=5$ ): (а-в) —  $P_0=5$ ; (г-е) —  $P_0=100$ ; (и-з) —  $P_0=500$ ; (к-н) —  $P_0=1000$ ; (л-н) —  $P_0=1500$ ;  $\lambda=0.1$  — сплошная линия,  $\lambda=1$  — штриховая,  $\lambda=10$  — пунктирная



буждает поверхностные колебания пузырька как и в случае капли со свободной контактной линией.

Из представленных на рис. 6 графиков видно, как меняются частоты объемной и первой поверхностной моды с увеличением давления газа в пузырьке. Как уже отмечалось выше, резонанс на частоте объемных колебаний ярко выражен при любых значениях параметров. Очевидно, что это связано, в первую очередь, с характером внешнего воздействия: возбуждается именно радиальная мода колебаний, поверхностные моды возбуждаются благодаря движению линии контакта.

## 5. Заключение

В данной статье рассмотрены собственные и вынужденные колебания зажатого газового пузырька в пульсирующем поле давления. Скорость движения линии контакта трех сред (газ–жидкость–твердая подложка) пропорциональна отклонению краевого угла от равновесного значения. Коэффициент пропорциональности  $\lambda$  (параметр Хокинга) описывает результирующее взаимодействие линии контакта с подложкой. Обнаружено, что объемные колебания цилиндрического пузырька возможны только в жидкости конечного объема со свободной внешней поверхностью. Показано, что частота собственных колебаний может возрастать с увеличением параметра  $\lambda$ , тогда как для несжимаемой капли значения частоты монотонно убывают. Найдены поправки к частотам собственных колебаний в предельных случаях фиксированной линии контакта ( $\lambda = 0$ ) и фиксированного краевого угла ( $\lambda \rightarrow \infty$ ).

Подробно изучен эффект пересечения частот соседних мод собственных колебаний: ветвь частоты радиальной моды проходит поперек ветви частоты поверхностной моды. Выяснено, что этот эффект связан не только со сжимаемостью пузырька, но и с движением линии контакта. С параметра  $\lambda$  при переходе точки пересечения существенно меняется коэффициент затухания свободных колебания.

При изучении вынужденных колебаний было показано, что при малых  $\lambda$ , т.е. фиксированной линии контакта, амплитуда колебаний стремится к бесконечности при равенстве частоты внешнего воздействия частоте любой моды собственных колебаний. При этом радиальная мода вносит не менее существенный вклад в колебания с закрепленной линией контакта, как и поверхностные моды. Это существенно отличает колебания сжимаемого пузырька от несжимаемой капли. В случае фиксированного краевого угла  $\lambda \rightarrow \infty$  амплитуда стремится к бесконечности только в случае резонанса на частоте объемной моды, а для резонансов на остальных частотах амплитуда ограничена. Это связано с тем, что внешнее воздействие не воз-

буждает моды колебаний формы при наличии свободно движущейся линии контакта. Имеются также «антирезонансные» частоты, при которых амплитуда колебаний поверхности равно нулю при любых значениях параметра  $\lambda$ .

Подытоживая результат исследования, можно сделать вывод о том, что сжимаемость (и, следовательно, давление газа) оказывает существенно влияние на динамику пузырька. При этом внешнее воздействие должно быть таким, чтобы возбуждалась объемная мода собственных колебаний. Ранее было показано, что осесимметричные или трансляционные вибрации не возбуждают радиальные колебания. К такому же эффекту, по-видимому, приведут круговые вибрации. То есть для таких типов воздействия поведение пузырька можно описать по аналогии с несжимаемой каплей.

## Список литературы

1. *Shklyaev S., Straube A. V.* Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate // *Physics of Fluids*. 2008. Vol. 20, 052102. DOI: 10.1063/1.2918728
2. *Алабужев А. А.* Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7. № 2. С. 151–161. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16
3. *Hocking L. M.* The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. Vol. 179. P. 253–266. DOI: 10.1017/S0022112087001514
4. *Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyaev S.* Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // *Physics of Fluids*. 2011. Vol. 23, 102105. DOI: 10.1063/1.3650280
5. *Алабужев А. А., Кайсина М. И.* Трансляционная мода собственных колебаний цилиндрического пузырька // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика*. 2015. Вып. 1(29). С. 35–41.
6. *Алабужев А. А., Кайсина М. И.* Влияние движения линии контакта на осесимметричные колебания цилиндрического пузырька // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика*. 2015. Вып. 2(30). С. 56–68.
7. *Алабужев А. А., Кайсина М. И.* Собственные азимутальные колебания цилиндрического пузырька в сосуде конечного объема // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика*. 2015. Вып. 3(31). С. 38–47.
8. *Кайсина М. И.* Азимутальные моды собственных колебаний цилиндрического пузырька // *Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2015. №2 (29). С.37–45.
9. *Кайсина М. И.* Колебания цилиндрического пузырька под действием продольных или попе-

- речных вибраций // Математическое моделирование в естественных науках. 2015. Т. 1. С. 189-194.
10. *Alabuzhev A. A., Kaysina M. I.* The translational oscillations of a cylindrical bubble in a bounded volume of a liquid with free deformable interface // *Journal of Physics: Conference Series*. 2016. Vol. 681, 012043. DOI: 10.1088/1742-6596/681/1/012043
  11. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2007. 536 с.
  12. *Алабужев А. А.* Осесимметричные колебания цилиндрической капли с подвижной контактной линией // *Прикладная механика и техническая физика*. 2016. Т. 57. № 6. С. 53-63.
  13. *Алабужев А. А.* Продольные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016. Т. 9. № 3. С. 316-330. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.26
  14. *Алабужев А. А.* Трансляционные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016. Т. 9, № 4. С. 453-465. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.38
  15. *Alabuzhev A. A.* Influence of a surface plates inhomogeneity on a translation oscillations of a drop // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 894, 012002. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012002
  16. *Borkar A., Tsamopoulos J.* Boundary-layer analysis of dynamics of axisymmetric capillary bridges // *Physics of Fluids A*. 1991. Vol. 3, N. 12. P. 2866-2874. DOI: 10.1063/1.857832
  17. *Ting C.-L., Perlin M.* Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 295. P. 263-300. DOI: 10.1017/S0022112095001960
  18. *Perlin M., Schultz W. W., Liu Z.* High Reynolds number oscillating contact lines // *Wave Motion*. 2004. V. 40. P. 41-56. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2003.12.011
  19. *Hocking L. M.* Waves produced by a vertically oscillating plate // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. Vol. 179. P. 267-281. DOI: 10.1017/S0022112087001526
  20. *Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V.* Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // *Physics of Fluids*. 2009. Vol. 21, 072104. DOI: 10.1063/1.3174446
  21. *Alabuzhev A. A., Kashina M. A.* The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2016. V. 681, 012042. DOI: 10.1088/1742-6596/681/1/012042
  22. *Alabuzhev A. A., Kashina M. A.* The dynamics of hemispherical drop under the influence of an alternating electric field // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V. 894, 012003. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012003
  23. *Воинов О. В.* Гидродинамика смачивания // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1976. № 5. С. 76-84
  24. *Cox R. G.* The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. Part 1. Viscous flow // *J. Fluid Mech.* 1986. Vol. 168. P. 169-194. DOI: 10.1017/S0022112086000332
  25. *де Жен П. Ж.* Смачивание: статика и динамика // *Успехи физических наук*. 1987. Т. 151, вып. 4. С. 619-681.
  26. *Воинов О. В.* Динамические краевые углы смачивания при растекании капли на поверхности твердого тела // *Прикладная механика и техническая физика*. 1999. Т. 40, № 1. С. 101-107.
  27. *Пухначев В. В., Семенова И. Б.* Модельная задача о внезапном движении линии трехфазного контакта // *Прикладная механика и техническая физика*. 1999. Т. 40, № 4. С. 51-61
  28. *Blake T. D.* The physics of moving wetting lines // *J. Colloid Interface Sci.* 2006. Vol. 299. P. 1-13. DOI: 10.1016/j.jcis.2006.03.051
  29. *Shikhmurzaev Y. D.* Singularities at the moving contact line. mathematical, physical and computational aspects // *Physica D*. 2006. Vol. 217, N. 2. P. 121-133. DOI: 10.1016/j.physd.2006.03.003
  30. *Картавых Н. Н., Шкляев С. В.* О параметрическом резонансе полуцилиндрической капли на осциллирующей твердой подложке // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика*. 2007. Вып. 1(6). С. 23-28.
  31. *Демин В. А.* К вопросу о свободных колебаниях капиллярного моста // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2008. № 4. С. 28-37.
  32. *Bonn D., Eggers J., Indekeu J., et al.* Wetting and spreading // *Rev. Mod. Phys.* 2009. Vol. 81. P. 739-805. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.739
  33. *Иванцов А. О.* Акустические колебания полусферической капли // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика*. 2012. Вып. 3(21). С. 16-23.
  34. *Snoeijer J. H., Andreotti B.* Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2013. Vol. 45. P. 269-292. DOI: 10.1146/annurev-fluid-011212-140734
  35. *Andreotti B., Snoeijer J.* Soft wetting and the Shuttleworth effect, at the crossroads between thermodynamics and mechanics // *Europhys. Lett.* 2016. Vol. 113, N. 6, 66001. DOI: 10.1209/0295-5075/113/66001
  36. *Zhang P., Mohseni K.* Theoretical model of a finite force at the moving contact line // *Int. J. Multiph. Flow*. 2020. Vol. 132, 103398. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103398

## References

1. Shklyaev S., Straube A. V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate. *Physics*

- of *Fluids*, 2008, vol. 20, 052102. DOI: 10.1063/1.2918728
2. Alabuzhev A. A. Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. *Computational Mechanics of Continuous Media*, 2014, vol.7, no. 2, pp. 151–161. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16
  3. Hocking L. M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, vol. 179, pp. 253–266. DOI: 10.1017/S0022112087001514
  4. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V., Shklyayev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Physics of Fluids*, 2011, vol. 23, 102105. DOI: 10.1063/1.3650280
  5. Alabuzhev A. A., Kaysina M. I. Translational mode of eigen oscillations of a cylindrical bubble. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2015, no. 1(29), pp. 35–41. (In Russian).
  6. Alabuzhev A. A., Kaysina M. I. Influence of contact line motion on axisymmetric vibrations of a cylindrical bubble. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2015, no. 2(30), pp. 56–68. (In Russian).
  7. Alabuzhev A. A., Kaysina M. I. Eigen azimuthal oscillations of a cylindrical bubble in final volume vessel. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2015, no. 3(31), pp. 38–47. (In Russian).
  8. Kaysina M. I. Azimuthal modes of eigen oscillations of a cylindrical bubble. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2015, no. 2(29), pp. 37–45. (In Russian).
  9. Kaysina M. I. Kolebaniya cilindricheskogo puzyr'ka pod deistviem prodolnyh ili poperechnykh vibracii. *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukah*, 2015, no. 1, pp. 189–194. (In Russian).
  10. Alabuzhev A. A., Kaysina M. I. The translational oscillations of a cylindrical bubble in a bounded volume of a liquid with free deformable interface. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 681, 012043. DOI: 10.1088/1742-6596/681/1/012043
  11. Lifshitz E. M., Pitaevskij L. P. *Physical kinetics. Course of theoretical physics, vol. 10*. Pergamon Press, 1981. 452 p.
  12. Alabuzhev A.A. Axisymmetric oscillations of a cylindrical droplet with a moving contact line. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, no. 6, pp. 1006–1015. DOI: 10.1134/S0021894416060079
  13. Alabuzhev A. A. Axisymmetric oscillations of a cylindrical drop in the final volume of fluid. *Computational Mechanics of Continuous Media*, 2016, vol.9, no. 3, pp. 316–330. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.26
  14. Alabuzhev A. A. Axisymmetric oscillations of a cylindrical drop in the final volume of fluid. *Computational Mechanics of Continuous Media*, 2016, vol.9, no. 4, pp. 453–465. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.38
  15. Alabuzhev A.A. Influence of a surface plates inhomogeneity on a translation oscillations of a drop. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 894, 012002. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012002
  16. Borkar A., Tsamopoulos J. Boundary-layer analysis of dynamics of axisymmetric capillary bridges. *Physics of Fluids A*, 1991, vol. 3, no. 12, pp. 2866–2874.
  17. Ting C.-L., Perlin M. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 295, pp. 263–300. DOI: 10.1017/S0022112095001960
  18. Perlin M., Schultz W.W., Liu Z. High Reynolds number oscillating contact lines. *Wave Motion*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 41–56. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2003.12.011
  19. Hocking L. M. Waves produced by a vertically oscillating plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, vol. 179, pp. 267–281. DOI: 10.1017/S0022112087001526
  20. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Physics of Fluids*, 2009, vol. 21, 072104. DOI: 10.1063/1.3174446
  21. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. The oscillations of cylindrical drop under the influence of a nonuniform alternating electric field. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2016, vol. 681, 012042. DOI: 10.1088/1742-6596/681/1/012042
  22. Alabuzhev A. A., Kashina M. A. The dynamics of hemispherical drop under the influence of an alternating electric field. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 894, 012003. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012003
  23. Voinov O. V. Hydrodynamics of wetting. *Fluid Dynamics*. 1976, vol. 11, no. 5, pp. 714–721. DOI: 10.1007/BF01012963
  24. Cox R. G. The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. Part 1. Viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 168, pp. 169–194. DOI: 10.1017/S0022112086000332
  25. De Genn P. G. Wetting: Statics and dynamics. *Review of Modern Physics*, 1985, vol. 57, pp. 827–863. DOI: 10.1103/RevModPhys.57.827
  26. Voinov O. V. Dynamic edge angles of wetting upon spreading of a drop over a solid surface. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999. vol. 40, no. 1, pp. 86–92. DOI: 10.1007/BF02467976
  27. Pukhnachev V. V., Semenova I. B. Model problem of instantaneous motion of a three-phase con-

- tact line. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 4, pp. 594–603. DOI: 10.1007/BF02468433
28. Blake T. D. The physics of moving wetting lines. *J. Colloid Interface Sci.*, 2006, vol. 299, p. 1–13. DOI: 10.1016/j.jcis.2006.03.051
29. Shikhmurzaev Y. D. Singularities at the moving contact line. mathematical, physical and computational aspects. *Physica D*, 2006, vol. 217, no. 2, pp. 121–133. DOI: 10.1016/j.physd.2006.03.003
30. Kartaviih N. N., Shklyayev S. V. О параметрическом резонансе полцилиндрической капли на осцилирующей твердой подложке. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*. 2007, no. 1(6), pp. 23–28. (In Russian).
31. Demin V. A. Problem of the free oscillations of a capillary bridge. *Fluid Dynamics*, 2008, vol. 43, no. 4, pp. 524–532. DOI: 10.1134/S0015462808040042
32. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., et al. Wetting and spreading. *Rev. Mod. Phys.*, 2009, vol. 81, pp. 739–805. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.739
33. Ivantsov A. O. Akusticheskie kolebaniya polusfericheskoi kapli. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2012, no. 3(21), pp. 16–23. (In Russian).
34. Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2013, vol. 45, pp. 269–292. DOI: 10.1146/annurev-fluid-011212-140734
35. Andreotti B., Snoeijer J. Soft wetting and the Shuttleworth effect, at the crossroads between thermo-dynamics and mechanics. *Europhys. Lett.*, 2016, vol. 113, no. 6, 66001. DOI: 10.1209/0295-5075/113/66001
36. Zhang P., Mohseni K. Theoretical model of a finite force at the moving contact line. *Int. J. Multiph. Flow*, 2020, vol. 132, 103398. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103398

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Алабужев А. А. О влиянии внутреннего давления на колебания цилиндрического газового пузырька // Вестник Пермского университета. Физика. 2020. № 4. С. 51–62. doi: 10.17072/1994-3598-2020-4-51-62

**Please cite this article in English as:**

Alabuzhev A. A. Effect of the internal pressure on oscillations of a cylindrical gas bubble. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2020, no. 4, pp. 51–62. doi: 10.17072/1994-3598-2020-4-51-62