

УДК 532.62; 532.68  
PACS 47.20-k, 47.55N-

## Исследование устойчивости тонкого слоя жидкости в задаче Ландау-Левича

А. В. Люшнин, К.А. Пермякова

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет  
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24  
email: andry@pspu.ru, sargatanas94@mail.ru

Теоретически исследуется устойчивость слоя жидкости в задаче Ландау-Левича. Свободная энергия данного слоя является суммой дисперсионного (ван-дер-ваальсового) взаимодействия и специфического электрического взаимодействия, обусловленного наличием двойных электрических слоев на обеих межфазных границах. В рамках длинноволнового приближения в системе уравнений Навье-Стокса изучается устойчивость такой системы относительно возмущений. Для различных толщин слоев приводится карта устойчивости.

**Ключевые слова:** тонкий слой; устойчивость; задача Ландау-Левича

Поступила в редакцию 01.02.2019; принята к опубликованию 01.03.2019

## Study of the stability of a thin liquid layer in the Landau-Levich problem

A. V. Lyushnin, K.A. Permyakova

Perm State Humanitarian-Pedagogical University, Sibirskaya St. 24, 614990, Perm  
email: andry@pspu.ru, sargatanas94@mail.ru

The stability of the liquid layer in the Landay-Levich problem is theoretically investigated. The free energy of this layer is the sum of the dispersion (van der Waals) interaction and the specific electrical interaction caused by the presence of two electric layers at both interphase boundaries. In the framework of long-wave approximation, the stability of such a system with respect to perturbations is studied in the system of Navier-Stokes equations. A stability map is provided for different layer thicknesses.

**Keywords:** thin film; stability; Landay-Levich problem

Received 01.02.2019; accepted 01.03.2019

doi: [заполняется редакцией](#)

### 1. Введение

Тонкие пленки полярных жидкостей являются областью большого интереса ученых благодаря уникальной структуре и существенному влиянию электростатических сил на состояние и поведение пленки. Молекулы полярной жидкости представляют собой того или иного вида диполь, в которой можно четко выделить области разных зарядов. Вследствие этого, между ними возникают межмолекулярные силы. Вода занимает особое место

среди полярных жидкостей за счет своих уникальных свойств. Важным свойством при исследовании динамики жидкостей является вязкость. Среди полярных жидкостей (напр. метанол, этанол, бензол и т.д.) вода обладает аномально большой, что напрямую влияет на динамику тонких водяных пленок. Кроме того, большинство полярных жидкостей летучи, в то время как вода обладает в этом отношении достаточной стабильностью.

Актуальность рассмотрения тонкой водной пленки обусловлено тем фактом, что вода является одной из самых распространенных жидкостей на

планете, что влечет за собой множество явлений с её участием. Исторически, изучение воды в тонких слоях и каплях началось в 1918 г. с исследований Ирвинга Ленгмюра [1]. Он измерял толщину водной пленки, осажденной на листы слюды или стекла, взятых из естественных условий окружающей среды. Ему принадлежит идея о том, что в естественных условиях все поверхности в той или иной мере покрыты тонкой водной пленкой. В течении нескольких десятков лет внимание исследователей привлек механизм формирования капель воды на различных поверхностях. Ученые рассматривали два основных механизма образования водяных капель: конденсация водяного пара и испарение жидкости с поверхности тонкой водяной пленки с последующим её разрывом при достижении ею критической толщины.

В [2] проводилось исследование, посвященное неустойчивости и спонтанной деформации водной пленки. Так же описывается механизм образования разрывов жидкой пленки как процесс, состоящий из двух этапов: уменьшение объемного слоя жидкости в пленке до размеров критического и рост поверхностной неустойчивости, приводящий к образованию дыр на поверхности пленки. Среди причин появления разрывов указывает особая роль расклинивающего давления и действие ван-дер-ваальсовых сил [3]. Изучение соотношения сил в жидких пленках малой толщины уже в середине XX в. представляло собой серьезную задачу, так как по результатам экспериментов и наблюдений при уменьшении толщины в определенный момент времени пленка дестабилизируется без воздействий извне. Следовательно, существуют силы, которые влияют на этот процесс, и эти силы либо возникают при достижении критической толщины, либо значительно при этом возрастают.

Поиском закономерностей возникновения дисбаланса сил в тонкой водной пленке занималось множество ученых на протяжении полувека, например в работах [4-9]. Сложность исследований заключалась в том, что основное уравнение динамики жидкости и газа (уравнение Навье-Стокса) обладает бесконечной способностью к расширению при добавлении новых параметров, влияющих на жидкость. Для описания того или иного поведения тонкой водной пленки требовалось при разных условиях требовалось различное упрощение этого уравнения. При упрощении уравнения математическое решение и моделирование поведения тонкой водной пленки становится возможным, однако при этом оно является приближенным. Задача по упрощению уравнения Навье-Стокса для жидкости производилась многими учеными, обзоры по которым приведены в [10-14].

Задача о жидкости, стекающей с поднимаемой из резервуара пластины, впервые была сформулирована Ландау и Левичем в работе [15]. Содержание задачи заключается в следующем: из емкости с

жидкостью вытаскивается с постоянной малой скоростью пластина, в силу эффекта прилипания жидкость цепляется за пластину и утягивается ей. При этом гравитационные силы вынуждают вещество стекать вниз, образуя плавный мениск. Вопрос в оригинальной постановке задачи состоит в том, чтобы узнать толщину получаемой таким образом на пластине жидкой пленки. Самими авторами было предложено следующее решение:

$$h_{\infty} = 0.945 l_c Ca^{2/3}$$

где  $Ca = \mu U / \sigma$  – капиллярное число,  $l_c = \sqrt{\sigma / \rho g}$  – капиллярная длина. Здесь  $U$  – скорость вытягивания пластины из жидкости,  $g$  – гравитационная постоянная, а величины  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  – есть коэффициент поверхностного натяжения, кинематическая вязкость и плотность жидкости, соответственно.

Данный закон распространяется только на плоскую бесконечную пластину и не работает в случаях иных поверхностей (например, конечной пластины или искривленной поверхности, в частности, трубки). В оригинальной постановке задачи также присутствует серьезное ограничение, касающееся наклона подложки. Оно заключается в том, что пластины вынимают из жидкости перпендикулярно поверхности. Особый интерес для ученых представляют течения, возникающие в системе, описанной задачей Ландау-Левича. Об этом свидетельствуют исследования, связанные с моделированием профилей движения жидкости, возникающих в области мениска и верхнего слоя бассейна жидкости. Что касается самой пленки, то там движения достаточно тривиальны. В рамках этого направления исследований можно назвать работы следующих ученых [16-19].

Помимо характера движения слоя жидкости, учеными рассматривался вопрос о влиянии определенных параметров системы. В работе [20] была показана роль атмосферного давления на формирование пленки при опускании объекта в жидкость. Другим направлением, углубляющим оригинальную задачу Ландау-Левича, является рассмотрение влияния межмолекулярных сил на толщину пленки. Особую роль этих сил в формировании пленки подтверждают эксперименты [21-23]. По результатам их исследований обнаружено, что толщина пленки уменьшалась в присутствии в жидкости солей, которые ослабляют межмолекулярное взаимодействие.

Практически все исследования, рассматривающие толщину пленки в задаче Ландау-Левича, предполагают наличие каких-либо примесей в жидкости и исследуют её в связи с действием этих примесей на толщину пленки. В то же время, вода как полярная жидкость обладает уникальным строением молекул, которые в тонком слое образуют особую по своим физическим свойствам структуру. В связи с этим, исследование устойчивости пленки

в задаче Ландау-Левича с учетом полярности самих молекул жидкости представляет собой реальный предмет для изучения.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим классическую задачу Ландау-Левича о движении жидкости, утягиваемой поднимающейся пластиной [15]. Пластина, двигаясь с постоянной скоростью  $U$ , утягивает жидкость за собой, формируя на поверхности ультратонкую пленку. Определим координатные оси следующим образом: ось  $x$  направим вдоль движения пластины, а ось  $y$  – перпендикулярно поверхности подложки (рис.1).

Под воздействием гравитации жидкость движется обратно вниз, пока межмолекулярные силы не возобладают над гравитационными, и на пластине не останется тонкий слой жидкости, увлекаемый пластиной вверх. При этом образуются две межфазные границы: «жидкость-газ» и «жидкость-подложка». В зависимости от вида жидкости, энергия полученного слоя будет различной, как и его поведение относительно времени.

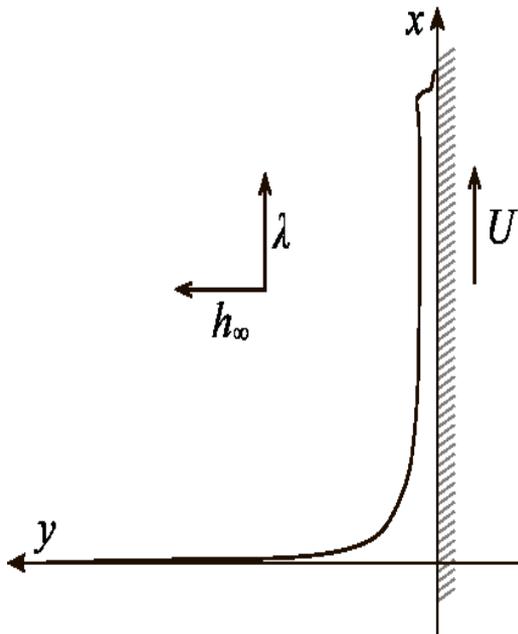


Рис.1. Геометрическая интерпретация задачи Ландау-Левича

Вектор скорости жидкости имеет две компоненты  $v = (u, w)$ , где  $u$  и  $w$  – проекции на оси  $x$  и  $y$ , соответственно. Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса, описывающих движение вязкой жидкости:

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x + wu_y) &= -(p + \varphi)_x - \rho g + \mu(u_{xx} + u_{yy}), \\ \rho(w_t + uw_x + ww_y) &= -(p + \varphi)_y + \mu(w_{xx} + w_{yy}), \\ u_x + w_y &= 0, \end{aligned}$$

здесь  $\rho$  – плотность жидкости,  $p$  – давление,  $\varphi$  – дополнительный потенциал энергии слоя, имеющий

размерность химического потенциала и возникающий в результате межмолекулярного взаимодействия межфазных поверхностей,  $\mu$  – динамическая вязкость. Символом  $\partial_i$  обозначается производная по соответствующей координате.

Для тонкой пленки, увлекаемой движущейся подложкой, существует две границы: «жидкость-газ» и «жидкость-твердая поверхность». Для раздела «жидкость-подложка» применяется классическое граничное условие, заключающееся в непроницаемости подложки  $w=0$ . Второй характеристикой поведения жидкости на данной границе является прилипание. Это означает, что жидкость у самой границы движется вместе с ней  $u=U$ . Движение жидкости на границе раздела «жидкость-газ» представляет собой более сложную задачу, так как следует учитывать множество факторов, таких как межмолекулярные силы, сила тяжести, кривизна поверхности, поверхностное натяжение и т.д. Кинематическое условие на свободной границе  $y = h(x, y, t)$  может быть представлено в стандартном виде:  $h_t + u \cdot h_x - w = 0$ . Нормальное и тангенциальное условия для тензора напряжений на свободной границе, используя стандартные преобразования, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} p + 2\mu\gamma^2[(w_x + u_y)h_x + \delta u_x] + \gamma^3\sigma h_{xx} &= 0, \\ 4\mu h_x u_x - \mu\delta(u_y + w_x) + \gamma\sigma_x &= 0, \end{aligned}$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\delta = 1 - h_x^2, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 + h_x^2}.$$

## 3. Длинноволновое приближение

Система уравнений и граничные условия данной задачи в исходном виде представляет собой довольно сложный для решения математический объект. Для того, чтобы её упростить и получить некие аналитические соотношения, воспользуемся длинноволновым приближением [24]. Длинноволновое приближение, которое мы будем использовать ниже, заключается в следующем: выбираем длину волны  $\lambda$  в качестве характерного размера вдоль оси  $x$ , а в качестве характерного масштаба вдоль оси  $y$  выберем толщину слоя  $h_0$ . Будем считать, что отношение  $\varepsilon = 2\pi h_0 / \lambda \ll 1$ . Используя данное приближение, запишем характерные безразмерные масштабы задачи:

$$\begin{aligned} y &= h_0 \tilde{y}, \quad x = \frac{h_0}{\varepsilon} \tilde{x}, \quad u = U \tilde{u}, \quad w = \varepsilon U \tilde{w}, \quad t = \frac{h_0}{\varepsilon U} \tilde{t} \\ t &= \frac{h_0}{\varepsilon U} \tilde{t}, \quad p, \varphi = \frac{\varepsilon h_0}{\mu U} \tilde{p}, \tilde{\varphi} \end{aligned}$$

В безразмерных переменных система уравнений Навье-Стокса для нашей задачи примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon \operatorname{Re}(\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x + \tilde{w}\tilde{u}_y) &= -(\tilde{p} + \tilde{\varphi})_x - G + (\varepsilon^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}), \\ \varepsilon^3 \operatorname{Re}(\tilde{w}_t + \tilde{u}\tilde{w}_x + \tilde{w}\tilde{w}_y) &= -(\tilde{p} + \tilde{\varphi})_y + \varepsilon^2 (\varepsilon^2 \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}), \\ \tilde{u}_x + \tilde{w}_y &= 0.\end{aligned}$$

В данной системе уравнений имеются два безразмерных коэффициента: число Рейнольдса  $Ra = \rho U h_\infty / \mu$  и гравитационный параметр  $G = \rho g / \mu U$ .

Перейдем теперь к записи граничных условий в безразмерном виде. На твердой подложке безразмерные граничные условия имеют вид:  $y = 0: \tilde{u} = U, \tilde{w} = 0$ . На свободной границе безразмерные условия запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{p} + 2\varepsilon^2 \tilde{\gamma}^2 [(\varepsilon^2 \tilde{w}_x + \tilde{u}_y) \tilde{h}_x + \tilde{\delta} \tilde{u}_x] + Ca \tilde{\gamma}^3 \tilde{h}_{xx} &= 0, \\ 4\varepsilon^2 \tilde{h}_x \tilde{u}_x - \tilde{\delta} (\tilde{u}_y + \varepsilon^2 \tilde{w}_x) + \tilde{\gamma} \sigma_x &= 0,\end{aligned}$$

здесь  $\tilde{\delta} = 1 - \varepsilon^2 \tilde{h}_x^2$ ,  $\tilde{\gamma} = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2 \tilde{h}_x^2}$ ,  $Ca = \varepsilon^3 \sigma / \mu U$ .

Здесь и далее используем лишь безразмерные величины и верхнее подчеркивание будем в дальнейшем опускать.

Решение системы безразмерных уравнений и граничных условий будем искать путем разложения искомых величин в ряд по малому параметру  $\varepsilon$ . Представим переменные компонент вектора скорости и давления в виде:

$$\begin{aligned}u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \\ w &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots\end{aligned}$$

Собирая слагаемые относительно нулевого нулевой степени разложения по  $\varepsilon$  и опуская подстрочные индексы для  $u_0, w_0$  и  $p_0$  мы получаем следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned}-(p + \varphi)_x &= G + u_{yy}, \\ -(p + \varphi)_y &= 0, \\ u_x + w_y &= 0.\end{aligned}$$

$$y = 0: u = 1, \quad w = 0.$$

$$y = h: h_t + u h_x = w, \quad p + Ca h_{xx} = 0, \quad u_y = \sigma_x.$$

Интегрируя уравнение неразрывности по координате  $y$  и подставляя граничные условия получаем общий вид эволюционного уравнения:

$$h_t + \left( \int_0^h u dy \right)_x = 0.$$

Интегрируя вертикальную компоненту скорости по соответствующей координаты мы получаем следующее соотношение:

$$p + \varphi = -Ca h_{xx} + \varphi|_{y=h}.$$

Далее, интегрируя уравнение для горизонтальной компоненты скорости и используя граничные условия мы получаем уравнение для скорости:

$$u = (p + \varphi)_x \left( \frac{y^2}{2} - yh \right) + G \left( \frac{y^2}{2} - yh \right) + \sigma_x y + 1.$$

Подставляя значение горизонтальной компоненты скорости в эволюционное уравнение мы получаем эволюционное уравнение для данной задачи:

$$h_t = \left( (p + \varphi)_x \frac{h^3}{3} \right)_x + Gh^2 h_x - \sigma_{xx} \frac{h^2}{2} - \sigma_x h h_x - h_x \quad (1)$$

Внешний вид полученного уравнения говорит о том, что изменение толщины пленки со временем зависит от трех основных параметров: поверхностного натяжения, гравитации и дополнительного энергетического потенциала, в который заложены межмолекулярное взаимодействие жидкости.

#### 4. Анализ устойчивости

После того, как математическая модель эволюции ультратонкой водной пленки в задаче получена, следует проанализировать её на предмет влияния ван-дер-ваальсовых и электростатических взаимодействий. Большую роль в этом процессе играет анализ устойчивости пленки к разного рода возмущениям, в том числе и волнам. Так, в процессе вывода эволюционного уравнения использовалось длинноволновое приближение: пленке как бы сообщали возмущение с длиной волны, значительно превосходящей масштабы толщины самой пленки. При этом, анализ целостности пленки в процессе подобных возмущений не производился.

В работе [25] было показано, что в описании химического потенциала для тонких слоев кроме ван-дер-ваальсовского межфазного взаимодействия необходимо добавить второе слагаемое, которое возникает благодаря перекрытию двойных электрических слоев для обеих межфазных поверхностей. Потенциал межмолекулярного взаимодействия  $\varphi$  выражается через свободную энергию межмолекулярного взаимодействия поверхности  $f$ , связь между этими величинами записывается следующим образом  $\varphi = df/dh$ . Величина  $f$  определяется как:

$$f(h) = -\frac{S^{LW} d_0^2}{h^2} + S^P \cdot \exp\left(\frac{d_0 - h}{l_0}\right)$$

где  $S^{LW} d_0^2 = -A/12\pi$ ,  $A$  – константа Гамакера,  $d_0$  – характерная длина для дебаевского отталкивания,  $l_0$  – характерная длина для взаимодействия. Для воды величины  $d_0$  и  $l_0$  имеют значения 0.2 и 0.6 нм, соответственно. Константы  $S^{LW}$  и  $S^P$  являются ван-дер-ваальсовской и электростатической компонентами коэффициента растекания  $S = S^{LW} + S^P$ .

В дальнейших наших исследованиях будем считать, коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  яв-

ляется постоянной величиной. Тогда из эволюционного уравнения исключаются соответствующие слагаемые и уравнение (1) примет вид:

$$h_t = \left( (p + \varphi)_x \frac{h^3}{3} \right) + Gh^2 h_x - h_x \quad (2)$$

Подставляя свободную энергию межмолекулярного взаимодействия в (2) и в безразмерном виде окончательный вариант эволюционного уравнения в безразмерной форме:

$$h_t = -\frac{1}{3} Ca (h_{xxx} h^3)_x + \bar{G} h h_x - h_x + \bar{A} \left( \frac{h_x}{h} \right)_x + S^{Pl} (h_x h^3 \exp(h/l'))_x, \quad (3)$$

здесь представлены следующие безразмерные параметры:

$$Ca = \frac{\varepsilon^3 \sigma h_\infty}{\rho \nu^2}, \quad \bar{A} = \frac{\varepsilon A}{6\pi h_\infty \rho \nu^2}, \quad \bar{G} = \frac{g h_\infty^3}{\nu^2},$$

$$S^{Pl} = \frac{\varepsilon S^p h_\infty^3}{3\rho \nu^2 l_0^2} \exp(d_0/l_0) \quad l' = \frac{l_0}{h_\infty}, \quad d' = \frac{d_0}{h_\infty}.$$

Для исследования устойчивости уравнения (3) представим толщину слоя в виде суммы основного состояния и возмущения  $h = h_0 + h'$ . Представим эти возмущения в «нормальном» виде  $h' = \exp[st + ikx]$ , где  $s$  – декремент возмущений, т.е. описывает поведение возмущения со временем ( $s > 0$  ведет к росту возмущений, а отрицательное значение декремента соответствует их затуханию),  $k$  есть волновое число вдоль оси  $x$ . Подставляя такой вид толщины слоя в уравнение (3), получим задачу на собственные значения, где собственным числом является декремент возмущений  $s$ , которая имеет следующую форму:

$$s = -\frac{1}{3} Cah_0^3 k^4 + ik(\bar{G}h_0^2 - 1) - \frac{\bar{A}}{h_0} k^2 - S^{Pl} \exp((d' - h_0)/l') h_0^3 k^2. \quad (4)$$

Мнимая часть декремента  $s$  в уравнении (4) соответствует некоторому сдвигу вдоль оси  $x$  и является индикатором наличия решения в виде бегущей волны. Проанализируем действительную часть. В ней содержатся те компоненты, которые влияют на устойчивость пленки к возмущениям. Уравнение действительной части свидетельствует о том, что влияющими параметрами является энергия макрослоя, ван-дер-ваальсовая и электростатическая энергии. Так как все параметры являются безразмерными, то  $h_0=1$  (обезразмеривание происходит относительно самой величины  $h_0$ ). Подставим это значение в уравнение действительной части, получим функцию декремента от волнового числа.

$$s = -\frac{1}{3} Cak^4 - \bar{A}k^2 - S^{Pl} \exp((d' - 1)/l')k^2$$

Составим уравнения для макрослоя (5), тонкого (6) и ультратонкого слоев (7):

$$s_M = -\frac{1}{3} Cak^4 \quad (5)$$

$$s_T = -\frac{1}{3} Cak^4 - \bar{A}k^2 \quad (6)$$

$$s_{UT} = -\frac{1}{3} Cak^4 - \bar{A}k^2 - S^{Pl} \exp((d' - 1)/l')k^2 \quad (7)$$

Макрослой характеризуется большей объемной частью жидкостного слоя. Энергии на межфазных границах в малой степени влияют на данный слой. Поэтому, исключая все, кроме энергии объемной фазы жидкости. То же происходит при добавлении энергии межмолекулярного взаимодействия (6) и энергии двойных электрических слоев (7).

**Таблица 1.** Примерные значения параметров, входящих в уравнение устойчивости тонкой водяной пленки

Параметр	Значение (для воды)
$\varepsilon$	$5 \cdot 10^{-2}$
$h_0$	$10^{-9}$ м
$\rho$	$10^3$ кг/м <sup>3</sup>
$\nu$	$10^{-6}$ м <sup>2</sup> /с
$A$	$-10^{-20}$ Дж
$S^p$	$-2 \cdot 10^{-3}$ Дж/м <sup>2</sup>
$l_0$	$6 \cdot 10^{-10}$ м
$d_0$	$2 \cdot 10^{-10}$ м
$\sigma$	$72 \cdot 10^{-3}$ Дж/м <sup>2</sup>

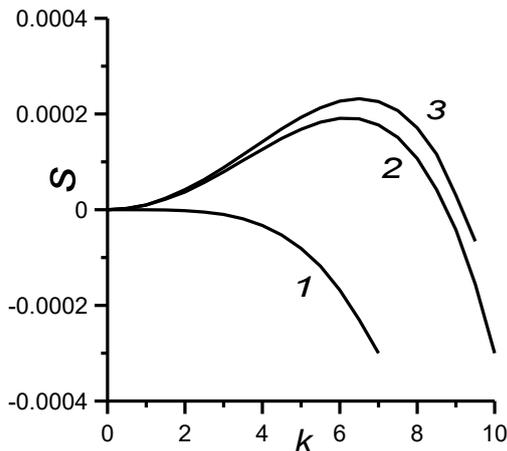
При подборе параметров берется в расчет тот факт, что для полярных жидкостей константа Гамакера и коэффициент адсорбции отрицательны. Построим графики устойчивости уравнений толщины пленки для макрослоя, тонкого и ультратонкого слоев. Анализируя полученные данные, можно заметить, что неустойчивость декремента возмущений ( $s > 0$ ) растет с последовательным включением в уравнение ван-дер-ваальсовых и электростатических взаимодействий. Волновое число, для которого существует неустойчивость, в макрослое отсутствует, для тонкого и ультратонкого слоев с учетом отрицательности параметров  $A$  и  $S^p$  можно представить следующим образом:

$$-\frac{1}{3} Cak^4 + \bar{A}k^2 = 0 \Rightarrow k_T = \sqrt{3\bar{A}/Ca}$$

$$-\frac{1}{3}Cak^4 - \bar{A}k^2 - S^{Pl} \exp((d'-1)/l')k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{cr} = \sqrt{3\bar{A}S^{Pl} \exp((d'-1)/l')/Ca}$$

Так как в процессе изучения водной пленки в рамках задачи Ландау-Левича, применялось длинноволновое приближение, то критическое волновое число является важной характеристикой. Оно является границей раздела устойчивости и неустойчивости состояния ультратонкой пленки.



**Рис. 2.** Дисперсионное соотношение  $s(k)$ . Цифрами 1,2,3 показаны кривые для уравнений (5), (6) и (7), соответственно.

На рис.2 представлено дисперсионное соотношение для декремента затухания  $s$  по отношению к волновому числу  $k$ . Анализируя полученный результат, можно сделать вывод о том, что наличие в системе ван-дер-ваальсовых и электростатических механизмов взаимодействия понижает устойчивость тонкой водяной пленки по отношению к возмущениям. Подобные явления в природе можно наблюдать, когда при высыхании водной пленки происходят разрывы на местах, имеющих некоторые дефекты и приводящие к формированию пространственных структур на поверхности. Особенностью задачи Ландау-Левича является тот факт, что капиллярное число  $Ca$  в процессе эксперимента непрерывно уменьшается. Это объясняется тем, что малый параметр  $\varepsilon$  непрерывно уменьшается. С точки зрения физики, смысл этого изменения заключается в том, что значение безразмерного параметра  $Ca$  тесно связано с понятием капиллярного давления: оно существует в объемной части жидкости и способствует устойчивости пленки в противовес расклинивающему давлению, направленному на нарушение баланса. Таким образом, понижая капиллярное давление, мы понижаем устойчивость системы. Интересным фактом является то, учет гравитации не влияет на устойчивость системы, а определяет характер бегущей волны.

Таким образом, учет ван-дер-ваальсовского взаимодействия для полярных жидкостей (например

воды) приводит к появлению неустойчивости относительно возмущений. Включение в рассмотрение и электростатического механизма взаимодействия, который обусловлен наличием двойных электрических слоев на свободных поверхностях, также понижает устойчивость системы. Следует отметить, что учет электростатического взаимодействия приводит в потенциале межфазного взаимодействия к увеличению области неустойчивости.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Правительства Пермского края в рамках научного проекта № С-26/174.2.

### Список литературы

1. *Langmuir I.* The adsorption of gases on plane surfaces of glass, mica and platinum // *Journal of the American Chemical society*, 1918, vol. 40, no. 9, pp. 1361-1403.
2. *Vrij A.* Possible mechanism for the spontaneous rupture of thin, free liquid films // *Discussions of the Faraday Society*, 1966, vol. 42. pp. 23-33. DOI:10.1039/DF9664200023
3. *Padmakar A.S, Kargupta K., Sharma A.* Instability and dewetting of evaporating thin water films on partially and completely wettable // *The Journal of Chemical Physics*, 1999, vol. 110. no. 3 pp. 1735–1744. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.477810>
4. *Ruckenstein E., Jain R. K.* Spontaneous rupture of thin liquid films // *Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions 2: Molecular and Chemical Physics*, 1974, vol. 70, pp. 132-147.
5. *Derjaguin B. V., Churaev N. V.* On the question of determining the concept of disjoining pressure and its role in the equilibrium and flow of thin films // *Journal of Colloid and Interface Science*, 1978, vol. 66, no. 3, pp. 389-398. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(78\)9005-5](https://doi.org/10.1016/0021-9797(78)9005-5)
6. *Israelachvili, J. N.* Intermolecular and Surface Forces with Applications to Colloidal and Biological Systems. New York; Academic, 1992. 296 p.
7. *Sharma A., Ruckenstein E.* An analytical nonlinear theory of thin film rupture and its application to wetting films // *Journal of colloid and interface science*, 1986, vol. 113, no.2, pp. 456-479. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(86\)9081-5](https://doi.org/10.1016/0021-9797(86)9081-5)
8. *Reiter G.* Dewetting of thin polymer films // *Physical review letters*, 1992, vol. 68. no. 1, pp. 75-82. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.75>
9. *Derjaguin B. V.* Theory of stability of colloids and thin films, New York : Consultants Bureau, 1989. 274 p.
10. *Williams M. B., Davis S. H.* Nonlinear theory of film rupture // *Journal of Colloid and Interface Science*, 1982, vol. 90, no. 1, pp. 220-228. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(82\)90415](https://doi.org/10.1016/0021-9797(82)90415)

11. *Teletzke G. F., Davis H. T., Scriven L. E.* Wetting hydrodynamics // *Revue de Physique Appliquee*, 1988, vol. 23, no. 6, pp. 989-1007.  
DOI: 10.1051/rphysap:01988002306098900
12. *Sharma A., Jameel A. T.* Nonlinear stability, rupture, and morphological phase separation of thin fluid films on apolar and polar substrates // *Journal of colloid and interface science*, 1993, vol. 161, no.1, pp. 190-208.  
DOI: <https://doi.org/10.1006/jcis.1993.1458>
13. *Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J., & Rolley, E.* Wetting and spreading // *Reviews of modern physics*, 2009, vol. 81, no.2, pp.739-805.  
DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.739>
14. *Craster R. V., Matar O. K.* Dynamics and stability of thin liquid films // *Reviews of modern physics*, 2009, vol. 81, no. 3, pp. 1131-1198.  
DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1131>
15. *Landau L., Levich B.* Dragging of a liquid by a moving plate // *Acta Physicochim. URSS*, 1942, vol. 17, pp. 42-54.
16. *Krechetnikov R., Homsy G.M.* Dip coating in the presence of a substrate-liquid interaction potential // *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, vol. 17, pp. 102105–102113  
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2107927>
17. *Maleki M, Reyssat M, Restagno F, Quéré D., Clanet C* Landau–Levich menisci / // *Journal of Colloid and Interface Science*, 2011, vol. 354, no.1, pp. 359–363.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2010.07.069>
18. *Mayer H.C., Krechetnikov R.* Landau-Levich flow visualization: Revealing the flow topology responsible for the film thickening phenomena // *Physics of Fluids*, 2012, vol. 24, pp. 052103–052136.  
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4703924>
19. *Maillard M., Boujle J., Coussot P.* Solid-Solid Transition in Landau-Levich Flow with Soft-Jammed Systems // *Physical Review Letters*, 2014, vol. 112, pp. 068304-068309.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.068304>
20. *Bindini E., Naudin G., Faustini M., Grosso D., Boissière C.* The Critical Role of the Atmosphere in Dip-Coating Process // *Journal of Physical Chemistry*, 2017, vol. 121, no.27, pp. 14572–14580.  
DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.7b02530>
21. *Krechetnikov R., Homsy G.M.* Surfactant effects in the Landau-Levich problem / // *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, vol. 559, pp. 429–450.  
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112006000425>
22. *Afanasyev K., Münch A., Wagner B.* Landau-Levich problem for non-Newtonian liquids // *Physical Review E*, 2007, vol. 76, no. 3, pp. 036307-036330.  
DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.036307>
23. *Han, Y., Na, Y.H.* Measurement of liquid film thickness on moving plate during dip-coating process // *Korea-Australia Rheology Journal*, 2018, vol. 30, pp.137–143.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s13367-018-0014-x>
24. *Oron A., Davis S. H., Bankoff S. G.* Long-scale evolution of thin liquid films // *Reviews of modern physics*, 1997, vol. 69, no. 3, pp. 931-980.  
DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.931>
25. *Jameel A. T., Sharma A.* Morphological phase separation in thin liquid films: II. equilibrium contact angles of nanodrops coexisting with thin films, // *Journal of Colloid. and Interface Science*, 1994, vol. 164, no. 2, pp.416-427.  
DOI: <https://doi.org/10.1006/jcis.1994.1184>

## References

1. *Langmuir I.* The adsorption of gases on plane surfaces of glass, mica and platinum // *Journal of the American Chemical society*, 1918, vol. 40, no. 9, pp. 1361-1403.
2. *Vrij A.* Possible mechanism for the spontaneous rupture of thin, free liquid films // *Discussions of the Faraday Society*, 1966, vol. 42. pp. 23-33.  
DOI: [10.1039/DF9664200023](https://doi.org/10.1039/DF9664200023)
3. *Padmakar A.S, Kargupta K., Sharma A.* Instability and dewetting of evaporating thin water films on partially and completely wettable // *The Journal of Chemical Physics*, 1999, vol. 110. no. 3 pp. 1735–1744.  
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.477810>
4. *Ruckenstein E., Jain R. K.* Spontaneous rupture of thin liquid films // *Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions 2: Molecular and Chemical Physics*, 1974, vol. 70, pp. 132-147.
5. *Derjaguin B. V., Churaev N. V.* On the question of determining the concept of disjoining pressure and its role in the equilibrium and flow of thin films // *Journal of Colloid and Interface Science*, 1978, vol. 66, no. 3, pp. 389-398.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(78\)9005-5](https://doi.org/10.1016/0021-9797(78)9005-5)
6. *Israelachvili, J. N.* *Intermolecular and Surface Forces with Applications to Colloidal and Biological Systems.* New York; Academic, 1992. 296 p.
7. *Sharma A., Ruckenstein E.* An analytical nonlinear theory of thin film rupture and its application to wetting films // *Journal of colloid and interface science*, 1986, vol. 113, no.2, pp. 456-479.  
DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(86\)9081-5](https://doi.org/10.1016/0021-9797(86)9081-5)
8. *Reiter G.* Dewetting of thin polymer films // *Physical review letters*, 1992, vol. 68. no. 1, pp. 75-82.  
DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.75>
9. *Derjaguin B. V.* *Theory of stability of colloids and thin films*, New York : Consultants Bureau, 1989. 274 p.
10. *Williams M. B., Davis S. H.* Nonlinear theory of film rupture // *Journal of Colloid and Interface Science*, 1982, vol. 90, no. 1, pp. 220-228.

- DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(82\)90415](https://doi.org/10.1016/0021-9797(82)90415)
11. *Teletzke G. F., Davis H. T., Scriven L. E.* Wetting hydrodynamics // *Revue de Physique Appliquee*, 1988, vol. 23, no. 6, pp. 989-1007.  
DOI: 10.1051/rphysap:01988002306098900
  12. *Sharma A., Jameel A. T.* Nonlinear stability, rupture, and morphological phase separation of thin fluid films on apolar and polar substrates // *Journal of colloid and interface science*, 1993, vol. 161, no.1, pp. 190-208.  
DOI: <https://doi.org/10.1006/jcis.1993.1458>
  13. *Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J., & Rolley, E.* Wetting and spreading // *Reviews of modern physics*, 2009, vol. 81, no.2, pp.739-805.  
DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.739>
  14. *Craster R. V., Matar O. K.* Dynamics and stability of thin liquid films // *Reviews of modern physics*, 2009, vol. 81, no. 3, pp. 1131-1198.  
DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1131>
  15. *Landau L., Levich B.* Dragging of a liquid by a moving plate // *Acta Physicochim. URSS*, 1942, vol. 17, pp. 42-54.
  16. *Krechetnikov R., Homsy G.M.* Dip coating in the presence of a substrate-liquid interaction potential // *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, vol. 17, pp. 102105–102113  
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2107927>
  17. *Maleki M, Reyssat M, Restagno F, Quéré D., Clanet C* Landau–Levich menisci // *Journal of Colloid and Interface Science*, 2011, vol. 354, no.1, pp. 359–363.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2010.07.069>
  18. *Mayer H.C., Krechetnikov R.* Landau-Levich flow visualization: Revealing the flow topology responsible for the film thickening phenomena // *Physics of Fluids*, 2012, vol. 24, pp. 052103–052136.  
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4703924>
  19. *Maillard M., Boujle J., Coussot P.* Solid-Solid Transition in Landau-Levich Flow with Soft-Jammed Systems // *Physical Review Letters*, 2014, vol. 112, pp. 068304-068309. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.068304>
  20. *Bindini E., Naudin G., Faustini M., Grosso D., Boissière C.* The Critical Role of the Atmosphere in Dip-Coating Process // *Journal of Physical Chemistry*, 2017, vol. 121, no.27, pp. 14572–14580.  
DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.7b02530>
  21. *Krechetnikov R., Homsy G.M.* Surfactant effects in the Landau-Levich problem // *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, vol. 559, pp. 429–450.  
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112006000425>
  22. *Afanasiev K., Münch A., Wagner B.* Landau-Levich problem for non-Newtonian liquids // *Physical Review E*, 2007, vol. 76, no. 3, pp. 036307-036330.  
DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.036307>
  23. *Han, Y., Na, Y.H.* Measurement of liquid film thickness on moving plate during dip-coating process // *Korea-Australia Rheology Journal*, 2018, vol. 30, pp.137–143.  
DOI: <https://doi.org/10.1007/s13367-018-0014-x>
  24. *Oron A., Davis S. H., Bankoff S. G.* Long-scale evolution of thin liquid films // *Reviews of modern physics*, 1997, vol. 69, no. 3, pp. 931-980.  
DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.931>
  25. *Jameel A. T., Sharma A.* Morphological phase separation in thin liquid films: II. equilibrium contact angles of nanodrops coexisting with thin films, // *Journal of Colloid. and Interface Science*, 1994, vol. 164, no. 2, pp.416-427.  
DOI: <https://doi.org/10.1006/jcis.1994.1184>

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Люшнин А.В., Пермякова К.А. Исследование устойчивости тонкого слоя жидкости в задаче Ландау-Левича // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2019. № 1. С. xx–xx. doi: [заполняется редакцией](#)

**Please cite this article in English as:**

Lyushnin A.V., Permyakova K.A. Study of the stability of a thin liquid layer in the Landau-Levich problem. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2019, no. 1, pp. xx–xx. doi: [заполняется редакцией](#)

**Сведения об авторах**

Для каждого автора указать, на русском и английском языках:

а) Люшнин Андрей Витальевич

- b) **Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет**
- c) **кандидат физико-математических наук, доцент**
- d) **декан факультета информатики и экономики**
- e) **andry@pspu.ru**

- a) **Lyushnin Andrey Vita'evich**
- b) **Perm State Humanitarian-Pedagogical University**
- c) **kandidat phiziko-nathematcheskih nayk, dosent**
- d) **dean of faculty of Economics and Computer Science**
- e) **andry@pspu.ru**

- a) **Пермякова Ксения Александровна**
- b) **Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет**
- c) **-**
- d) **магистр факультета информатики и экономики**
- e) **sargatanas94@mail.ru**

- a) **Permyakova Kseniyua Aleksandrovna**
- b) **Perm State Humanitarian-Pedagogical University**
- c) **-**
- d) **magister of faculty of Economics and Computer Science**
- e) **sargatanas94@mail.ru**