

УДК 536.212.2, 536.221, 537.84,
PACS 02.70.Bf, 44.27.+g, 47.27.te, 52.65.Kj

ОБЗОР

Силовые и энергетические воздействия магнитного поля на проводящую среду. Модели и эксперименты

И. Л. Никулин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
614990, Пермь, Комсомольский пр., 29
email: nil@pstu.ru

Выполнен обзор существующих методов и технологий воздействия на проводящие среды магнитными полями, которые могут быть приложены принципиально тремя способами: постоянное, бегущее (и его вариант – вращающееся) и переменное (гармонически изменяющееся). Проанализированы общие уравнения электромагнетизма применительно к движущейся проводящей среде, приведены важные для описания безразмерные критерии. Для каждого вида приложения магнитного поля рассмотрены математические модели, уравнения моделей записаны настолько подробно, насколько этого достаточно для расчёта соответствующего воздействия. По каждому виду поля приведены данные натурных и вычислительных экспериментов. Основное внимание уделено переменному магнитному полю, остальные виды представлены более кратко, но достаточно для начала движения в интересующем направлении. В заключении обзора перечислены работы, полезные при верификации математических моделей. Для удобства работы с англоязычными поисковыми и наукометрическими базами для наиболее важных терминов приведён их английский вариант.

Ключевые слова: постоянное магнитное поле; бегущее магнитное поле; вращающееся магнитное поле; переменное магнитное поле; магнитная гидродинамика; индукционный ток; электродинамическая сила; индукционный нагрев; число Гартмана; параметр диффузии магнитного поля

Поступила в редакцию 31.01.2020; принята к опубликованию 17.03.2020

Force and energy impacts of magnetic field on a conducting medium. Models and experiments

I. L. Nikulin

Perm National Research Polytechnical University, Komsomol'skii St. 29, 614990, Perm
email: nil@pstu.ru

The review of the existing methods and technologies for influencing conductive media with magnetic fields, which can be applied in principle in three ways: constant, running (and rotating as its variant) and alternating (harmonically changing) is presented. The general equations of electromagnetism for a moving conducting medium are analyzed, and dimensionless criteria that are important for the description are given. Mathematical models are considered for each type of magnetic field application, and the model equations are written in as much detail as is sufficient to calculate the corresponding impact. For each type of field, data from full-scale and computational experiments are provided. The main attention is paid to the alternating magnetic field, the other types are presented more briefly, but enough to start moving in the appropriate direction. In con-

clusion, the list of the works that are useful for verifying mathematical models is given. For the convenience of working with English-language search and science databases, the English version is provided for the most important terms.

Keywords: constant magnetic field; traveling magnetic field; rotating magnetic field; alternating magnetic field; magnetohydrodynamics; eddy current; Lorentz force; induction heating; Hartmann number; magnetic field diffusion parameter

Received 31.01.2020; accepted 17.03.2020

doi: 10.17072/1994-3598-2020-2-10-37

1. Введение

Развитие техники основано на использовании всё более чистых, более прочных и стабильных по составу материалов. Производство исходных материалов от конструкционных сталей до кремниевых монокристаллов для интегральных схем построено на процессах теплопереноса, контроль которых обеспечивает заданное качество производимого продукта. Магнитное поле – эффективное средство управления процессами производства материалов, поскольку, проникая в среду, оно даёт возможность управлять движением проводящего материала, нагревать его и влиять на распределение компонентов в сложных по составу материалах как для гомогенизации, так и для их сепарации. При этом магнитное поле обладает крайне важным качеством – обеспечивает чистоту производства, поскольку исключает наличие механических перемешивателей или нагревательных элементов, способных повлиять на химический состав конечного продукта.

Развитием технологий управления при помощи магнитного поля активно занимаются в России Институт механики сплошных сред, г. Пермь, Всероссийский научно-исследовательский институт электротермического оборудования, г. Москва. В Германии – это Гельмгольц-центр, Дрезден-Россендорф, Институт электротехнологий, г. Ганновер, во Франции – Высшая национальная школа гидравлики и механики, г. Гренобль, в Испании – Университет Сантьяго-де-Комостела, г. Сантьяго-де-Комостела, в Иране – Университет Бу-Али Сина, г. Хамедан, в Китае – Харбинский технологический институт, г. Харбин, Тайваньский национальный университет, г. Тайбэй, в Латвии – Университет Латвии, г. Саласпилс и многие другие научные учреждения.

Магнитные поля разделяют по способу приложения: постоянное (*static magnetic field*), бегущее (*TMF, traveling magnetic field*) и его вариант – вращающееся (*RMF, rotating magnetic field*) и переменное (*AMF, alternating magnetic field*). В соответствующих разделах приведены уравнения, описывающие действие указанных полей, а в табл. 1 – примеры промышленных технологий, использующих эти поля.

Представленные процессы описываются общими уравнениями переноса тепловой энергии и уравнением Навье-Стокса в приближении Буссинеска (здесь и далее все уравнения записаны в системе СИ):

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = \nabla (\lambda \nabla T) + q, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} (1 - \beta (T - T_L)) + \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала (кг/м³); c – удельная теплоёмкость (Дж/(кг·К)); T – температура (К); t – время (с); \mathbf{u} – скорость (м/с); λ – коэффициент теплопроводности (Вт/(м·К)); p – давление (Па); η – коэффициент динамической вязкости (Па·с); \mathbf{g} – ускорение свободного падения (м/с²); β – коэффициент объёмного расширения (1/К); T_L – температура ликвидуса (К), q – мощность тепловых источников в единице объёма (Вт/м³), \mathbf{F} – сила Лоренца, действующая на единицу объёма (Н/м³), ∇ – оператор набла (1/м), ∇^2 – оператор Лапласа (1/м²). Различия в уравнениях теплопереноса, записанных для конкретных технологических процессов, проявляются, как правило, только в слагаемых, отвечающих за распределение силы \mathbf{F} и источников теплоты q .

Во второй части настоящего обзора приведены уравнения электромагнетизма, описывающие проникновение магнитного поля в проводник, а также безразмерные критерии, важные для описания действия магнитного поля. Подробно изложены математические модели силового действия постоянного, бегущего и вращающегося магнитных полей. Для переменного магнитного поля дополнительно рассматривается тепловое действие.

В третьей части проведён обзор известных в литературе эффектов действия магнитного поля на движущуюся проводящую среду.

В заключение даны рекомендации по верификации математических моделей процессов, связанных с действием магнитного поля на проводник.

Таблица 1. Технологии, использующие магнитное поле

№	Технология	Литература
<i>постоянное поле</i>		
1	Стабилизация теплообмена в канале жидкометаллическим теплоносителем	[1,2]
2	Измерение расхода расплавленного металла	[3,4]
<i>бегающее магнитное поле</i>		
3	Перемешивание расплава при плавлении и кристаллизации, в том числе при выращивании монокристаллов методом Бриджмена	[5–15]
4	Электромагнитные насосы для перекачки металла	[16–18]
<i>вращающееся магнитное поле</i>		
5	Измельчение зерна при кристаллизации	[19–21]
6	Управление течениями при росте монокристаллов	[22,23]
<i>переменное магнитное поле</i>		
7	Индукционная плавка металла	[24–26]
8	Управление течениями в расплаве металла	[27–33]
9	Зонная плавка	[34–37]
10	Термообработка индукционным нагревом	[38–43]
11	Индукционное определение уровня металла в закрытой реторте	[44]
12	Индукционное определение расхода расплавленного металла	[45]

2. Математические модели диффузии магнитного поля в проводник

2.1. Основные уравнения

Система уравнений, описывающая электромагнитное поле, включает уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_E, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

материальные уравнения, характеризующие электрические и магнитные свойства среды

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (5)$$

закон Ома в дифференциальной форме, учитывающий возможное движение электропроводной жидкости

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (6)$$

и условия на границе двух сред

$$\begin{aligned} D_{1n} - D_{2n} &= \sigma_E, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \\ B_{1n} &= B_{2n}, \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = I_L. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь E – напряжённость электрического поля, В/м, B – индукция магнитного поля, Тл, H – напряжённость магнитного поля, А/м, J – плотность электрического тока, А/м², D – электрическое смещение, Кл/м², ρ_E – объёмная плотность заряда, Кл/м³, ε – диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, μ – относительная магнитная проницаемость среды, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, σ – удельная электрическая проводимость среды, См/м, u – скорость движения среды, м/с, σ_E – поверхностная плотность свободных электрических зарядов, Кл/м², I_L – поверхностная плотность электрического тока, А/м. Индекс τ обозначает касательную к поверхности раздела компоненту, n – нормальную.

В металлах, где нет объёмной и поверхностной плотностей электрического заряда ($\rho_E = 0$, $\sigma_E = 0$), токи смещения ($\partial D / \partial t = 0$) пренебрежимо малы на фоне токов проводимости J , система уравнений (4) упрощается и имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

а уравнения (5)–(7) остаются прежними. Для материалов с нелинейными свойствами, например, ферромагнетиков, магнитная проницаемость μ зависит от величины магнитного поля $\mu = \mu(H)$. В твёрдых проводниках может проявляться магнито-резистивный эффект, т.е. зависимость электропроводности от величины и направления поля ($\sigma = \sigma(H)$).

Магнитное поле в проводящей среде может создаваться как внешними по отношению к ней источниками, так и электрическими токами, текущими в самой среде (второе уравнение в системе (8)), вызванными наличием электрического поля \mathbf{E} или её движением в магнитном поле $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ (уравнение (6)). Электрическое поле также может создаваться внешним источником или изменяющимся во времени магнитным полем $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$ (первое уравнение в системе (8)).

Протекание тока по проводнику приводит к выделению теплоты с объёмной мощностью q (Вт/м³), которое рассчитывается согласно закону Джоуля-Ленца:

$$q = \frac{J^2}{\sigma}, \quad (9)$$

а взаимодействие токов и магнитных полей проявляется в действии объёмной электродинамической

силы (*Lorentz force*), действующей в проводнике F , Н/м³:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (10)$$

которая приводит в случае жидкого проводника к движению среды, искривлению формы его поверхности и даже к левитации.

Индукционные токи (*eddy currents*), возбуждаемые в проводнике изменяющимся внешним магнитным полем, создают собственное магнитное поле \mathbf{H}_e такое, что результирующее поле

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_o + \mathbf{H}_e \quad (11)$$

затухает на некоторой глубине δ (м) от поверхности проводника:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma\Omega}}, \quad (12)$$

здесь \mathbf{H}_o – напряжённость внешнего поля, Ω – циклическая частота внешнего поля, рад/с. Таким образом, и результирующее магнитное поле, и вихревые токи, и источники теплоты, и объёмные силы локализованы в слое толщиной δ .

Применив к обеим частям закона Ома (6) операцию ротор с учётом соотношений (8), получим уравнение диффузии магнитного поля в проводящую среду

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = \nu_m \nabla^2 \mathbf{H}. \quad (13)$$

Величина

$$\nu_m = \frac{1}{\mu\mu_0\sigma} \quad (14)$$

в уравнении (13) называется магнитной вязкостью (м²/с).

Стандартные граничные условия для уравнения (13) подразумевают затухание магнитного поля на бесконечности

$$\mathbf{H}|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (15)$$

Кроме того, в осесимметричном случае на оси симметрии равными нулю полагаются радиальная компонента напряжённости магнитного поля в силу вихревого характера магнитного поля ($\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$) и азимутальная компонента плотности

тока $0 = J_\varphi = (\nabla \times \mathbf{H})_\varphi = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}$, т.е.

$$H_r|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial r}|_{r=0} = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (13) с учётом (5), (6) и соответствующими граничными условиями, например, (16) позволяет определить объёмные распределения источников теплоты и электродина-

мической силы (уравнение (9) и (10)), которые определяют разогрев и движение проводящей среды (уравнения (1) и (2)). Последнее, в свою очередь, может изменять распределение магнитного поля (второе слагаемое в (13)), а, следовательно, токов, электромагнитных сил и источников теплоты. Таким образом, указанные уравнения с соответствующими граничными условиями образуют сопряжённую задачу тепломассопереноса в магнитном поле.

Один из наиболее распространённых подходов к нахождению распределения магнитного поля и токов связан с введением векторного потенциала A (Вб/м), связанного с напряжённостями магнитного и электрического полей следующими соотношениями:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla U - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (17)$$

где U – скалярный потенциал, В. Тогда, пренебрегая токами смещения в проводнике, второе уравнение Максвелла (8) принимает вид

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu\mu_0 \mathbf{J}, \quad (18)$$

а с учётом закона Ома (6) и второго соотношения (17):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{\nu_m} \left(\nabla U + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right) = 0, \quad (19)$$

В этом уравнении слагаемое ∇U связано с искусственно созданной разностью потенциалов, а $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A})$ – с движением проводящей среды.

Удобство данного подхода заключается в том, что плотность тока в правой части уравнения (18) можно представить, аналогично (11), в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_o + \mathbf{J}_e, \quad (20)$$

где \mathbf{J}_o и \mathbf{J}_e – соответственно плотности искусственно создаваемых и индукционных токов, тогда в уравнении (19) появляется известная правая часть.

При записи плотности токов в виде $\mathbf{J}_o(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_o(\mathbf{r}) e^{i(\Omega t + k\mathbf{r} + \alpha)}$ следует искать решение в виде, аналогичном (24) или (25), только для части векторного потенциала, касающегося индукционных токов.

Граничные условия для уравнения (19) содержат значения A на поверхностях проводников (индукторов), в которых ток создаётся искусственно, т.е. известны \mathbf{J}_o и ∇U , а также условие затухания магнитного поля на бесконечном удалении (16)

$$A|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (21)$$

Для случаев, когда можно пренебречь вкладом, обусловленным движением проводящей среды в

магнитном поле ($\sigma \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ в уравнении (6)), в плотность тока и, следовательно, в магнитное поле \mathbf{H}_e (11), уравнения диффузии магнитного поля в терминах напряжённости (13) и векторного потенциала (19) принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \mathbf{H} \quad (22)$$

и

$$\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{\mu \mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_o. \quad (23)$$

Общим методом решения уравнений диффузии магнитного поля (22) и (23) с граничными условиями (15), (16) и (21) является разделение напряжённости магнитного поля, зависящей от пространства и времени, на амплитудную и временную части

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot e^{i(\Omega t + \mathbf{k}r + \alpha)}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot e^{i(\Omega t + \mathbf{k}r + \alpha)}, \end{aligned} \quad (24)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \cdot \cos\{\Omega t + \mathbf{k}r + \alpha\} + \\ &+ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \cdot \sin\{\Omega t + \mathbf{k}r + \alpha\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где \mathbf{r} , \mathbf{k} , α – соответственно, радиус-вектор, волновой вектор и сдвиг фазы, которые с учётом представления поля в виде (24) дают уравнения для амплитуды $\mathbf{H}(\mathbf{r})$

$$i \frac{2}{\delta^2} \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = 0, \quad (26)$$

а с учётом кулоновской нормировки [46] $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ и $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ имеем уравнение для амплитуды $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ векторного потенциала

$$i \frac{2}{\delta^2} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mu_0 \mathbf{J}_o. \quad (27)$$

Для обобщения результатов применяются следующие общие безразмерные критерии. Магнитное число Рейнольдса (*magnetic Reynolds number*)

$$\text{Re}_m = \frac{uL}{\nu_m} = \mu \mu_0 \sigma u L, \quad (28)$$

равное отношению сил инерции к электромагнитным, показывающее влияние движения проводящей среды на магнитное поле, L – характерный размер. В предельном случае

$$\text{Re}_m \ll 1 \quad (29)$$

можно пренебречь электрическими токами, индуцированными движением проводящей жидкости (*безындукционное приближение*), кроме случаев, когда это движение является единственной причи-

ной порождения электрического тока – течение в постоянном магнитном поле.

Число Гартмана (*Hartmann number*), определяемое как

$$\text{Ha} = BL \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}, \quad (30)$$

характеризует силовое действие магнитного поля, и параметр диффузии магнитного поля (*magnetic field diffusion parameter*)

$$D_H = \frac{2L^2}{\delta^2} = \frac{\Omega L^2}{\nu_m} = \mu \mu_0 \sigma \Omega L^2 \quad (31)$$

показывает относительную глубину проникновения магнитного поля в проводник. Этот параметр также называют параметром экранирования (*shielding parameter*) [47], безразмерной частотой (*dimensionless frequency*) [24], поскольку размер L и свойства материалов μ и σ могут определяться технологическим процессом, тогда доступным для управления параметром будет частота изменения поля, и даже магнитным числом Рейнольдса ввиду схожести соотношений (28) и (31) [48, 49].

Магнитное число Прандтля (*magnetic Prandtl number*) [50]

$$\text{Pr}_m = \frac{\nu}{\nu_m} = \mu \mu_0 \nu \sigma \quad (32)$$

показывает отношение вязкого и электромагнитного пограничных слоёв.

2.2. Постоянное магнитное поле

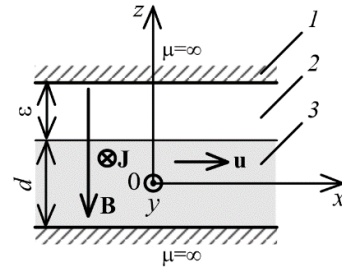


Рис. 1. Схема течения в постоянном магнитном поле: 1 – постоянный магнит (электромагнит), 2 – зазор, 3 – жидкий проводник

Движение проводящей среды в магнитном поле приводит к возникновению в ней токов вследствие закона Ома (6), эти токи, в свою очередь взаимодействуют с внешним магнитным полем, и возникает электромагнитная сила, оказывающая влияние на движение. Поэтому система уравнений, описывающая поведение текущей проводящей жидкости в постоянном магнитном поле, содержит уравнения как для магнитного поля, так уравнения динамики сплошной среды. На рис. 1 показан тонкий слой толщиной d проводящей жидкости, помещён-

ный между двумя твёрдыми поверхностями ферромагнетика с зазором толщиной ε , заполненным воздухом ($\mu = 1$).

В изотермическом приближении уравнение движения (2) приводится к безразмерному виду [51] с масштабами длины, скорости, давления и индукции магнитного поля d , v/d , $\rho u^2/d^2$, $\mu_0 I/d$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \zeta \{ \beta \}) \mathbf{u} = -\nabla p - \xi \{ \beta \} \mathbf{u} - \frac{\text{Ha}^2}{\text{Pr}_m} B \frac{\partial (B(1+\varepsilon))}{\partial x}. \quad (33)$$

В уравнении (33) поле представлено в виде главной части B_0 и возмущения $B' \ll B_0$

$$B = B_0 + B', \quad (34)$$

а функции $\zeta \{ \beta \}$ и $\xi \{ \beta \}$ определены как

$$\beta = \frac{\text{Ha} B}{2}, \quad \zeta \{ \beta \} = \frac{4\beta^2 \text{sh} \beta}{\beta \text{ch} \beta - \text{sh} \beta}, \quad \xi \{ \beta \} = \frac{\beta^2 \left(\text{ch}^2 \beta - \frac{3 \text{sh} 2\beta}{4\beta} + \frac{1}{2} \right)}{(\beta \text{ch} \beta - \text{sh} \beta)^2}, \quad (35)$$

и учитывают эволюцию профиля скорости. Функция $\zeta \{ \beta \}$ слабо зависит от β : $\zeta \{ 0 \} = 6/5$, $\zeta \{ \infty \} = 1$, поэтому в расчётах её иногда принимают постоянной, $\xi \{ \beta \}$ существенно зависит от β : $\xi \{ 0 \} = 12$ (течение Пуазейля), $\xi \{ \infty \} = 2\text{Ha}|B|$ (течение Гартмана). Перестроение профиля скорости при увеличении числа Гартмана приведено в работе [52].

Уравнение неразрывности (3) остаётся без изменений. Магнитное поле в представленной системе описывается следующими уравнениями, записанными также в безразмерной форме:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) B = \frac{1}{\text{Pr}_m} \nabla^2 \{ B(1+\varepsilon) \}. \quad (36)$$

В работе Г. Сposito и М. Чиофало (*G. Sposito, M. Ciofalo*) [53] получены одномерные распределения скорости, электрического потенциала и плотности индукционного тока в слое проводящей жидкости с учётом подъёмной силы в приближении Буссинеска.

Вопросы влияния постоянного магнитного поля на устойчивость термокапиллярных и термоконцентрационных течений рассмотрены в работе Т.П. Любимовой [54].

2.3. Бегущее магнитное поле

На рис. 2 приведена система, в которой реализуется бегущее магнитное поле (БМП): по незави-

мым индукторам с полюсным делением P (расстояние между центрами индукторов), расположенным на пренебрежимо малом расстоянии от проводника, течёт переменный электрический ток с циклической частотой Ω . Эти индукторы создают бегущее магнитное поле с компонентами

$$\begin{cases} H_x = H_x(x) \cdot e^{i(\Omega t - \alpha z)} \\ H_z = H_z(x) \cdot e^{i(\Omega t - \alpha z)} \end{cases}, \quad (37)$$

где $\alpha = \pi/p$. При реализации технологического процесса, включая индукторы со сдвигом фазы, добиваются создания волн магнитного поля, движущихся вдоль проводника по u -координате. При этом вглубь проводника амплитуда магнитного поля затухает.

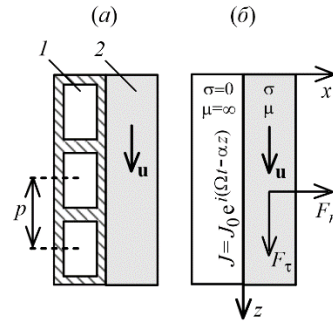


Рис. 2. Концептуальная (а) и расчётная (б) схемы к определению бегущего магнитного поля: 1 – индуктор, 2 – проводник

Подстановка компонент магнитного поля (37) в уравнение диффузии магнитного поля (13) приводит к решениям для компонент магнитного и электрического полей в проводящей среде:

$$\begin{cases} H_x = -\frac{\alpha}{\mu \mu_0 \Omega} (C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}) e^{i(\Omega t - \alpha y)}, \\ H_z = -\frac{i \beta_k}{\mu \mu_0 \Omega} (C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}) e^{i(\Omega t - \alpha y)}, \\ E_y = (C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}) e^{i(\Omega t - \alpha y)}, \end{cases} \quad (38)$$

$$\beta = \alpha \sqrt{1 + \frac{i}{\alpha^2 v_m} (\Omega - \alpha u)}.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 , совпадающие по размерности с напряжённостью электрического поля (В/м), определяются из условий на границе раздела сред (7), где происходит скачок тангенциальной составляющей магнитного поля, равный плотности поверхностного тока, нормальная составляющая не имеет скачка. Плотность тока имеет только y -компоненту и может быть выражена из закона Ома (6) с учётом материальных уравнений (5) и соотношений (38):

$$J_y = -\frac{2SH_x}{\alpha \delta^2}, \quad (39)$$

$$S = 1 - \frac{u}{\Omega/\alpha}, \quad (40)$$

где S – скольжение магнитного поля, бегущего со скоростью Ω/α относительно среды, движущейся со скоростью u . Скольжение отлично от нуля в случае, если указанные скорости различны.

Мгновенные значения объёмной электродинамической силы определяются из уравнения (10), а усреднённые значения для её касательной и нормальной составляющих имеют вид

$$\begin{aligned} F_\tau &\equiv F_z = \frac{1}{2} \mu \Re \{ J_y \cdot B_x^* \}, \\ F_n &\equiv F_x = \frac{1}{2} \mu \Re \{ J_y \cdot B_z^* \}, \end{aligned} \quad (41)$$

здесь τ и n – индексы тангенциальной и нормальной составляющих, \Re обозначает действительную часть выражения, звёздочка – комплексно сопряжённое число. В случае пренебрежимо малого зазора между проводником и индуктором объёмные силы можно записать как

$$\begin{aligned} F_\tau &\equiv F_x = \frac{\alpha \mu \mu_0 J^2}{2} \frac{a_*}{\sqrt{1+a_*^2}} e^{-2\alpha b_* x}, \\ F_n &\equiv F_z = \frac{\alpha \mu \mu_0 J^2 c_*}{2} \frac{a_*}{\sqrt{1+a_*^2}} e^{-2\alpha b_* x}, \\ a_* &= \frac{2S}{\alpha^2 \delta^2}, \\ b_* &= \sqrt{\frac{\sqrt{1+a_*^2} + 1}{2}}, \\ c_* &= \sqrt{\frac{\sqrt{1+a_*^2} - 1}{2}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Амплитуда линейной токовой нагрузки на поверхности индуктора определяется в соответствии с работой

$$J = \frac{\sqrt{2nN\eta}}{pP} I, \quad (43)$$

где I – фазный ток (А), n – число фаз, N – число витков на полюс и фазу, η – коэффициент, учитывающий потери в обмотке, P – число пар полюсов. Формулы, учитывающие зазоры и различную электропроводность сред, приведены в работе [12]. Выражения в цилиндрических координатах можно найти в работе [13], плотность источников теплоты можно определить по соотношению (9) с учётом (39). Следует отметить, что силовое и тепловое действия бегущего поля проявляются только при отличном от нуля скольжении магнитного поля.

Ещё один вариант аналитического расчёта использован в работах К. Мазурика (*Konstantin Mazurik*) [55], который он с соавторами применяет и к вращающимся магнитным полям.

2.4. Вращающееся магнитное поле

Вращающееся магнитное поле (ВМП) можно рассматривать как вариант БМП, в котором фаза магнитного поля изменяется в азимутальном направлении, тогда как у БМП – вдоль некоторой прямой.

В работе [56] представлена аналитическая модель воздействия вращающегося магнитного поля с компонентами

$$B_r = B_0 \sin \{ \alpha - \Omega t \}, \quad B_\alpha = B_0 \cos \{ \alpha - \Omega t \} \quad (44)$$

на жидкую зону проводника при зонной плавке полупроводниковых кристаллов, принципиальная схема приведена на рис. 3.

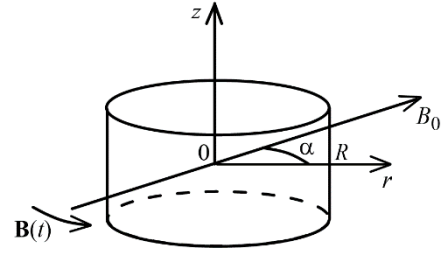


Рис. 3. Схема к расчёту вращающегося магнитного поля

В приближении постоянной электропроводности решается уравнение (22) в цилиндрической системе координат, решение находится в виде суперпозиции (25) в соответствии с (44). Граничное условие (15) подразумевается только для индукционных токов, внешнее же поле на бесконечном удалении считается однородным.

Решения получены для проводника B_e и внешней области B_o , которые сшиваются условиями (7):

$$\begin{aligned} B_r (r \leq R) &= -\frac{a_* X \{r\} - b_* Y \{r\}}{r} \sin \{ \alpha - \Omega t \} + \\ &+ \frac{a_* X \{r\} + b_* Y \{r\}}{r} \cos \{ \alpha - \Omega t \}, \\ B_\alpha (r \leq R) &= \\ &= -\left(a_* \frac{\partial X \{r\}}{\partial r} - b_* \frac{\partial Y \{r\}}{\partial r} \right) \cos \{ \alpha - \Omega t \} - \\ &- \left(a_* \frac{\partial Y \{r\}}{\partial r} + b_* \frac{\partial X \{r\}}{\partial r} \right) \sin \{ \alpha - \Omega t \}, \\ B_r (r > R) &= B_0 \sin \{ \alpha - \Omega t \} + \\ &+ \frac{c_*}{r^2} \sin \{ \alpha - \Omega t \} + \frac{d_*}{r^2} \cos \{ \alpha - \Omega t \}, \\ B_\alpha (r > R) &= \\ &= B_0 \cos \{ \alpha - \Omega t \} + \\ &+ \frac{c_*}{r^2} \cos \{ \alpha - \Omega t \} + \frac{d_*}{r^2} \sin \{ \alpha - \Omega t \}. \end{aligned} \quad (45)$$

Мгновенные значения действующей на жидкую фазу электродинамической силы приведены в работе [56], а усреднённая за период сила определяется соотношениями

$$F_r = -\frac{1}{2\mu\mu_0}(a_*^2 + b_*^2) \times \left(X X'' + Y Y'' + \frac{1}{r}(X'^2 - Y'^2) - \frac{1}{r^2}(X X' - Y Y') \right), \quad (46)$$

$$F_\alpha = \frac{1}{2\mu\mu_0 r}(a_*^2 + b_*^2) \times \left(X'' Y - Y'' X + \frac{1}{r}(X' Y - Y' X) \right).$$

Коэффициенты в уравнениях (45), (46) имеют вид

$$\begin{aligned} a_* &= \frac{-2B_0 R V_*}{V_*^2 + W_*^2}, \\ b_* &= \frac{-2B_0 R W_*}{V_*^2 + W_*^2}, \\ c_* &= \frac{2B_0 R^3 (X_R Y_R' - Y_R X_R')}{V_*^2 + W_*^2}, \\ d_* &= 2B_0 R^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{X_R V_*}{V_*^2 + W_*^2} - \frac{Y_R W_*}{V_*^2 + W_*^2} \right], \\ V_* &= X_R + R X_R', \quad W_* = Y_R + R Y_R', \\ X\{r\} &= \Re \left\{ J_1^{bes} \left\{ \sqrt{-ikr} \right\} \right\}, \\ Y\{r\} &= \Im \left\{ J_1^{bes} \left\{ \sqrt{-ikr} \right\} \right\}, \quad k = \sqrt{\mu\mu_0 \sigma \Omega}, \\ X_R &= X\{R\}, \quad Y_R = Y\{R\}, \\ X_R' &= \left. \frac{\partial X\{r\}}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad X'' = \frac{\partial^2 X\{r\}}{\partial r^2}, \\ Y_R' &= \left. \frac{\partial Y\{r\}}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad Y'' = \frac{\partial^2 Y\{r\}}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (47)$$

В соотношениях (47) символами \Re и \Im обозначены соответственно действительная и мнимая части комплексного числа, J_1^{bes} – функция Бесселя.

Ещё одна методика аналитического расчёта низкочастотного ВМП предложена в работе [57].

2.5. Переменное магнитное поле

Общая схема систем для индукционного нагрева приведена на рис. 4: нагреваемый материал (загрузка) помещается в индуктор, который представляет собой катушку или систему катушек. Переменный ток в катушке создаёт магнитное поле, которое, меняясь со временем в проводнике, возбуждает в нём вихревые токи, разогревающие этот проводник. Таким проводником может быть

либо материал, разогреваемый непосредственно для плавки или термообработки, либо нагревательный элемент, для плавления непроводящего материала, например стекла [58].

В работах Л.Л. Тира [24] с соавторами применяется аналитический метод расчёта электромагнитной и тепловой обстановки в проводнике, помещённом в индукционную печь. Следующие формулы получены в осесимметричном приближении без учёта конечной высоты проводящей жидкости и сил поверхностного натяжения. В работе [24] указывается, что результаты расчётов расходятся с экспериментом не более чем на 15%. Расчётная схема приведена на рис. 4.

В рассматриваемой осесимметричной системе векторный потенциал имеет только азимутальную составляющую A_φ и удовлетворяет уравнению (23)

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{2}{\delta^2} \right) A_\varphi = 0. \quad (48)$$

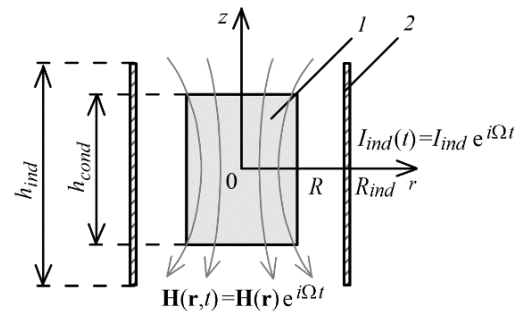


Рис. 4. Схема индукционного нагрева: 1 – нагреваемый материал, 2 – индуктор

Представив векторный потенциал в виде произведения амплитудной и гармонической части (24) и поступая аналогично с выражениями для напряжённостей электрического и магнитного полей (17), имеем выражения для амплитуд

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -i\Omega \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (49)$$

Решением уравнения (48) является выражение

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{2\mu\mu_0 R_{ind}}{\pi R} J_L^{ind} \int_0^\infty \frac{I_1^{bes} \left\{ r \sqrt{i \frac{2}{\delta^2} + \lambda^2} \right\}}{a_* + b_*} \times \\ &\quad \times K_1^{bes} \{ \lambda r \} \cdot \sin \frac{\lambda h_{coil}}{2} \cdot \cos \lambda z \, d\lambda, \quad (50) \\ a_* &= \sqrt{i \frac{2}{\delta^2} + \lambda^2} I_0^{bes} \left\{ R \sqrt{i \frac{2}{\delta^2} + \lambda^2} \right\} K_1^{bes} \{ \lambda r \}, \\ b_* &= \lambda I_1^{bes} \left\{ R \sqrt{i \frac{2}{\delta^2} + \lambda^2} \right\} K_1^{bes} \{ \lambda R \}, \end{aligned}$$

здесь $J_L^{ind} = \frac{N_{ind} I_{ind}}{h_{ind}}$ – линейная плотность тока в индукторе, N_{ind} , I_{ind} , h_{ind} – число витков, сила тока и высота индуктора соответственно, I_0^{bes} , I_1^{bes} , K_1^{bes} – модифицированные функции Бесселя, ξ – коэффициент, равный отношению значений индукции магнитного поля у основания мениска при наличии и отсутствии тигля, его значения приведены в работе [24]. Для систем, где выполняется условие

$$D_H > 100, \quad (51)$$

векторный потенциал в проводнике можно считать следующим образом:

$$A_\varphi = \frac{\delta \mu \mu_0 J_L^{ind} \xi}{i} \sqrt{(a_* - b_*)^2 + a_*^2} \times \exp\{-\rho_* + i(c_* - \rho_*)\}. \quad (52)$$

Здесь δ – характерная глубина проникновения магнитного поля, определяемая соотношением (12), вид вспомогательных коэффициентов a_* , b_* , c_* , X_* , Y_* , ρ_* приведён ниже. Из формулы (52) находятся выражения для плотности индукционного тока, аксиальной и радиальной компонент напряжённости поля в проводнике

$$\begin{aligned} J_\varphi &= \delta \mu \mu_0 \sigma \xi \Omega J_L^{ind} \sqrt{(a_* - b_*)^2 + a_*^2} \times \\ &\quad \times \exp\{-\rho_* + i(c_* - \rho_*)\}, \\ H_r &= \xi J_L^{ind} \sqrt{(e_* - f_*)^2 + e_*^2} \times \\ &\quad \times \exp\{-\rho_* + i((2\pi - g_*) - \rho_*)\}, \\ H_z &= \xi J_L^{ind} \sqrt{[(a_* - b_*)^2 + a_*^2] \left[1 + \frac{2\delta}{r} + \frac{\delta^2}{r^2}\right]} \times \\ &\quad \times \exp\{-\rho_* + i((c_* - d_*) - \rho_*)\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Радиальная и аксиальная компоненты сил определяются в соответствии с выражениями (10) и (53):

$$\begin{aligned} F_r &= \frac{\mu \mu_0}{2} \Re \{J \cdot H_r^*\} = \delta \sigma \Omega (\mu \mu_0 \xi J_L^{ind})^2 \times \\ &\quad \times \left[(a_* - b_*)^2 + a_*^2 \right] \sqrt{1 + \frac{2\delta}{r} + \frac{\delta^2}{r^2}} \times \\ &\quad \times \exp\{-2\rho_* + i d_*\}, \\ F_z &= \frac{\mu \mu_0}{2} \Re \{J \cdot H_z^*\} = \delta \sigma \Omega (\mu \mu_0 \xi J_L^{ind})^2 \times \\ &\quad \times \sqrt{[(a_* - b_*)^2 + a_*^2] \left[(e_* - f_*)^2 + e_*^2 \right]} \times \\ &\quad \times \exp\{-2\rho_* + i(2\pi + c_* - g_*)\}. \end{aligned} \quad (54)$$

Безразмерные вспомогательные коэффициенты для соотношений (52)–(54) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_* &= \frac{1}{2\pi} (\arctg(X_*) + \arctg(Y_*)), \\ b_* &= \frac{\delta}{4\pi} \left(\frac{h_{ind} + 2z}{\delta^2 + (h_{ind} + z)^2} + \frac{h_{ind} - 2z}{\delta^2 + (h_{ind} - z)^2} \right), \\ c_* &= \arctg \frac{a_*}{a_* - b_*}, \quad d_* = \arctg \left(1 + \frac{\delta}{r} \right), \\ e_* &= \frac{\delta}{2\pi(R_{ind} - R)} \left(\frac{1}{1 + X_*^2} - \frac{1}{1 + Y_*^2} \right), \\ f_* &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - X_*^2}{1 + X_*^2} - \frac{1 - Y_*^2}{1 + Y_*^2} \right), \\ X_* &= \frac{h_{ind} + 2z}{2(R_{ind} - R)}, \quad Y_* = \frac{h_{ind} - 2z}{2(R_{ind} - R)}, \\ g_* &= \arctg \left(1 - \frac{e_*}{d_*} \right), \quad \rho_* = \frac{R - r}{\delta}. \end{aligned} \quad (55)$$

В работах иранских авторов М.Х. Таваколи (*Mohammed Hossein Tavakoli*), Х. Карбасчи (*Hossein Karbaschi*) и М. Хонармандни (*Moh'taram Honarmandnia*) с соавторами [59–63] для решения электромагнитной задачи в осесимметричной постановке применён следующий метод. Уравнение вида (18) решается при помощи введения вспомогательной функции $\Phi_B = rA_\varphi$ и приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_B}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_B}{\partial z} \right) = -\mu \mu_0 J_\varphi. \quad (56)$$

Далее, следуя (20), плотность токов в правой части уравнения определяется для индуктора с учётом тока, создаваемого источником переменного тока J_{ind}^{main} и токов самоиндукции J_{ind}^{eddy} , а для материала – индукционными токами J_{cond}^{eddy} :

$$J_\varphi = \begin{cases} J_{ind}^{main} + J_{ind}^{eddy} = J_{ind} \cos \Omega t - \\ \quad - \frac{\sigma_{ind}}{r} \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}, \\ J_{cond}^{eddy} = -\frac{\sigma_{cond}}{r} \frac{\partial \Phi_B}{\partial t}. \end{cases} \quad (57)$$

Первое уравнение в соотношениях (57) записано для катушки индуктора, второе – для материала проводника.

Согласно (16) и (21), для уравнения (56) ставятся граничные условия на оси симметрии и на бесконечности:

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \Phi_B \Big|_{r, z \rightarrow \infty} = 0. \quad (58)$$

Представляя функцию

$$\Phi_B = C(r, z) \cos \Omega t + S(r, z) \sin \Omega t,$$

где C и S – амплитуды функции магнитного потока «в фазе» и «со сдвигом фазы», авторы получают распределения источников теплоты в катушке индуктора и в материале

$$q(r, z) = \begin{cases} \frac{\sigma_{ind} \Omega^2}{2r^2} \left(C^2 + \left(\frac{J_{ind} r}{\sigma_{ind} \Omega} - S \right)^2 \right), \\ \frac{\sigma_{cond} \Omega^2}{2r^2} (C^2 + S^2). \end{cases} \quad (59)$$

Выражение для электродинамических сил не приводится.

Схожий метод получения решения уравнения для векторного потенциала (19) применён М. Краничем (*M. Kranjc*) с соавторами в работе [64]. Для осесимметричной системы, где присутствует только азимутальная компонента векторного потенциала A_φ , вводится дополнительная переменная $Y = A_\varphi / r$. Полагая градиент электрического потенциала $\nabla U = U / 2\pi r$, уравнение диффузии векторного потенциала принимает вид

$$\frac{r}{\mu} \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} - 3 \frac{1}{\mu} \frac{\partial Y}{\partial r} - \frac{r}{\mu} \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + \sigma \left(\frac{U}{2\pi r} + r \frac{\partial Y}{\partial t} \right) = 0. \quad (60)$$

С учётом условий (16) и (21) граничные условия для уравнения (60) принимают вид

$$r = 0: \begin{cases} H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -r \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) = \\ = r \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial Y}{\partial r} = 0, \end{cases} \quad (61)$$

$$r \rightarrow \infty: Y = 0.$$

На границах проводник-диэлектрик ставится условие неразрывности тангенциальных компонент напряжённости магнитного поля (7).

Объёмная мощность источников теплоты рассчитывалась как

$$q = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^* \}, \quad (62)$$

здесь, \mathbf{J} и \mathbf{E} находятся из соотношений (8).

В работе [65] Т. Янковски (*Todd A. Jankowski*) и соавторов предлагается несколько упрощённая система для расчёта теплового действия ПМП. Главным допущением является наличие только осевой составляющей магнитного поля индуктора H_z , для которой авторы решают уравнение вида (26). Граничные условия на оси симметрии определены как (16), но вместо условий на бесконечном удалении (15) авторы задают поле на поверхности проводника:

$$\begin{aligned} H_z|_{r=R} &= H_{surf} = \frac{N_{ind} I_{ind}}{h_{ind}} \cdot K_n, \\ K_n &= a_* \left(1 - \frac{R}{R_{ind}} \right) + \frac{R^2}{R_{ind}^2}, \\ a_* &= \frac{1 + 1.535604b_*^2 + 0.273728b_*^4}{1 + 1.035808b_*^2} - \frac{8b_*}{3\pi}, \\ b_* &= \frac{R_{ind}}{h_{ind}}, \end{aligned} \quad (63)$$

здесь H_{surf} – напряжённость поля на поверхности проводника, I_{ind} – сила тока в индукторе, K_n – модифицированный коэффициент Нагаоки (*H. Nagaoaka*), дающий поправку на конечную длину индуктора и проводника, рассчитанный в работе [66].

Уравнение диффузии магнитного поля (26) с учётом (63) приводится к безразмерному виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} - i \frac{2}{\varepsilon} \eta &= 0, \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0, \\ \eta|_{\rho=1} &= 1, \quad \eta = \frac{H_z}{H_{surf}}, \quad \rho = \frac{r}{R}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{R}, \end{aligned} \quad (64)$$

и решается методом многих масштабов [67], представляя безразмерное магнитное поле суммой вида

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + O(\varepsilon^2) \quad (65)$$

и давая в главном порядке разложения

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-\chi} (\cos \chi - i \sin \chi) + O(\varepsilon), \\ \chi &= \frac{1 - \rho}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (66)$$

Энергию электромагнитного поля, попадающую в проводник, можно рассчитать через вектор Умова-Пойнтинга $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (Вт/(м²·с), который с учётом

$E_\varphi = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_z}{\partial r}$ имеет только радиальную компоненту

$$P_r = \frac{N_{ind}^2 I_{ind}^2}{\sigma h_{ind}^2 R} K_n \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + i \right) + O(\varepsilon^2). \quad (67)$$

Точное решение для задачи (64) получено в работе [68]:

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{N_{ind}^2 I_{ind}^2}{\sigma h_{ind}^2 R} K_n (p_* + i q_*), \\ p_* &= \sqrt{2\varepsilon} \frac{\text{ber}\{z_*\} \text{ber}'\{z_*\} + \text{bei}\{z_*\} \text{bei}'\{z_*\}}{\text{ber}^2\{z_*\} + \text{bei}^2\{z_*\}}, \\ q_* &= \sqrt{2\varepsilon} \frac{\text{ber}\{z_*\} \text{ber}'\{z_*\} - \text{bei}\{z_*\} \text{bei}'\{z_*\}}{\text{ber}^2\{z_*\} + \text{bei}^2\{z_*\}}, \\ z_* &= \sqrt{2} / \varepsilon, \end{aligned} \quad (68)$$

где ber и bei – функции Кельвина [69], штрихом обозначены производные этих функций. Объёмная мощность источников теплоты рассчитывается как

$$q = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{P} \}. \quad (69)$$

Представленный в работе [65] метод обеспечивает расхождение с точным значением, не превосходящее 1.5 % в диапазоне $\varepsilon = 0 \dots 0.5$, далее расхождение резко возрастает. Такая методика позволяет рассчитывать тепловое действие токов, расчёт силового действия по соотношению (9) будет корректен только в случае строго аксиального магнитного поля.

В работе [48] предложен метод расчёта магнитных полей индуктора и индукционных токов, возникающих в проводнике. Полное магнитное поле представлено в виде суммы известного поля индуктора $\mathbf{H}_o(\mathbf{r}) \cos \Omega t$ и поля вихревых токов $\mathbf{H}_e(\mathbf{r})$ (11), поле вихревых токов, в свою очередь, – суммой гармоник $\mathbf{H}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_2(\mathbf{r})$ (25). Тогда уравнение (22) может быть записано как система уравнений, содержащая только амплитуды трёх гармоник полей:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{H}_1 = \frac{2}{\delta^2} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_o), \\ \nabla^2 \mathbf{H}_2 = -\frac{2}{\delta^2} \mathbf{H}_1. \end{cases} \quad (70)$$

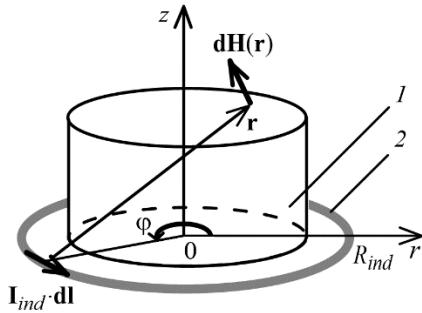


Рис. 5. Схема к расчёту поля индуктора: 1 – проводник, 2 – кольцо индуктора

Схема к определению амплитуды \mathbf{H}_o приведена на рис. 5. В осесимметричном приближении, представив индуктор набором кольцевых витков радиусом R_{ind} с током I_{ind} , результирующая амплитуда поля в точке проводника с радиусом-вектором \mathbf{r} рассчитывается согласно принципу суперпозиции и закону Био-Савара-Лапласа

$$\mathbf{H}_o(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} d\mathbf{H}_o^k(\mathbf{r}),$$

$$d\mathbf{H}_o^k(\mathbf{r}) = \{ d\mathbf{H}_{or}^k(r, z), d\mathbf{H}_{oz}^k(r, z) \},$$

$$d\mathbf{H}_{or}^k(r, z) = \frac{I_{ind} R_{ind} (z - z_k) \cos \varphi}{4\pi (\Delta^2 - 2R_{ind} r \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi,$$

$$d\mathbf{H}_{oz}^k(r, z) = \frac{I_{ind} R_{ind} (R_{ind} - r \cos \varphi)}{4\pi (\Delta^2 - 2R_{ind} r \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi, \quad (71)$$

$$\Delta^2 = R_{ind}^2 + r^2 + (z - z_k)^2,$$

здесь индекс k относится к номеру витка в индукторе ($k \in [1 \dots N]$).

Система уравнений (70) решается численно относительно амплитуд гармоник полей вихревых токов, а на их основании по соотношениям (9) и (10) определяются усреднённые распределения источников теплоты и электродинамических сил:

$$q = \frac{1}{2\sigma} \left((\nabla \times \mathbf{H}_1)^2 + (\nabla \times \mathbf{H}_2)^2 \right), \quad (72)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2\mu\mu_0} \left((\nabla \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{H}_1 + (\nabla \cdot \mathbf{H}_2) \mathbf{H}_2 + \nabla (\mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_2^2) \right). \quad (73)$$

Процедура осреднения и методика решения системы уравнений (70) подробно описаны в работе [70].

3. Эффекты воздействия электромагнитного поля на проводник

3.1. Постоянное магнитное поле

Как уже отмечалось ранее, при отсутствии внешнего электрического поля движение проводящей среды в постоянном магнитном поле является единственной причиной возникновения электрических токов (6). В этом случае безындукционное приближение (29) не применимо. Действие магнитного поля может быть стабилизирующим и для изотермических течений, как показано, например, в работах З. Хуссейна (*Zakir Hussain*) с соавторами [1,2], так и для случая тепловой конвекции Рэлея-Бенара (*Rayleigh-Bénard*), рассмотренной в работе [71]. В работе [72] показано, что в течениях типа Рэлея-Бенара для металлов ($Pr \sim 10^{-2}$) могут возникать колебания основного течения, продольные и поперечные в зависимости от чисел Гартмана и Прандтля, перестраивающиеся одни в другие при изменении Ha .

В серии работ Т. Тагава (*Toshio Tagawa*) и Х. Озо (*Hiroyuki Ozoe*) [73–75] рассмотрен тепломассоперенос металла в кубической области с горизонтальным градиентом температуры и постоянным магнитным полем. В работе [73] теоретически предсказано, а в [74] экспериментально подтверждено, что усиление магнитного поля в диапазоне

На $\in [0...100]$ приводит к интенсификации теплообмена между стенками, дальнейшее увеличение поля На $\in (100...573)$ подавляет движение расплава и уменьшает теплоперенос. В работе [75] показано, что действие электрического тока дополнительно стабилизирует течение, однако известны случаи [76], когда малое возмущение скорости вызывает малое возмущения магнитного поля, пренебрегать которыми нельзя, так как они, усиливая породившие их возмущения, становятся в рассматриваемом течении существенными.

Взаимодействие постоянного магнитного поля с движущейся проводящей жидкостью обуславливает возникновение разности потенциалов на поверхностях, перпендикулярных как направлению течения проводящей жидкости, так и магнитному полю аналогично эффекту Холла. Этот эффект применяется при измерении расхода жидкого металла при его перекачке [3]. Подробная теория проектирования МГД-устройств изложена в монографиях [4, 18].

3.2. Бегущее магнитное поле

Бегущее магнитное поле давно применяется в металлургии для управления потоками расплавленного металла, например, в МГД-насосах и перемешивателях расплава [5, 6]. Управление кристаллизацией при непрерывной разливке металла представлено в работах А.И. Цаплина [8–12] и др., в которых изучается теплофизика кристаллизации и деформации непрерывных слитков при перемешивании жидкой фазы с переменной интенсивностью. На основе сопряжённой системы уравнений переноса энергии, импульса, концентрации легирующих элементов для осреднённых течений и уравнений деформирования растущей твёрдой фазы с учётом пластичности показано влияние напряжённостей и частот БМП на конечную структуру кристаллизующегося слитка. Основное внимание при описании гидродинамики перемешивания уделяется макроскопическому усреднённому тепломассопереносу. Турбулентный вклад в тепломассоперенос учитывается феноменологическими соотношениями. Например, в [9] коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности имеют вид:

$$v_{turb} = v_{lam} (1 + 2,6 \cdot 10^{-3} Re), \quad \chi_{turb} = v_{turb} Pr^{-1/3}, \quad (74)$$

где $Re = ul / \nu$ – число Рейнольдса, l – характерная длина, $Pr = c\eta / \lambda$ – число Прандтля.

В работах [13, 33] показана возможность управления тепломассопереносом в системах с развитой термогравитационной конвекцией при помощи реверсирования течения. В работе [13] реверсирование течения используется для управления температурой расплава магния и предотвра-

щения его возможного перегрева вследствие экзотермической реакции восстановления титана на его поверхности. БМП создаёт течения, которые отводят тепло с поверхности в объём расплава, таким образом, во-первых, создается однородное поле температуры, во-вторых, эффективно используется тепло химической реакции для поддержания магния в жидком состоянии, что позволяет экономить энергию на подогрев магния. В работе [33] показано, как происходит управление течением над фронтом кристаллизации при зонной плавке и направленной кристаллизации вертикальным методом Бриджмена. Прикладывая БМП, можно либо подавить, либо усилить термогравитационное течение расплава, т.е. изменять тепловые условия на фронте кристаллизации, таким образом можно управлять, например, формой фронта, что необходимо для формирования монокристалла с заданной ориентацией кристаллографических осей.

В настоящее время вопросами управления движением металла бегущими и вращающимися магнитными полями активно занимается лаборатория физической гидродинамики Института механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь. В работах [16, 17] разработана математическая модель МГД-насоса для жидкого магния. Более того, его конструкция реализована на практике. В статьях [14, 15] представлены результаты лабораторных экспериментов и расчётов, моделирующих тепломассоперенос в промышленных ваннах с расплавленным алюминием, показаны способы управления вертикальными градиентами температуры и коэффициентами теплоотдачи.

Познакомиться с наиболее важными результатами, касающимися влияния БМП на течения в проводящих средах, читатель может в обзоре П. Рудольфа (*Peter Rudolph*) [77], составленном в 2008 г. В обзоре также есть ссылки на работы, посвящённые влиянию нескольких вариантов полей, приложенных одновременно, например, постоянного и БМП.

3.3. Вращающееся магнитное поле

Вращающееся магнитное поле широко представлено работами пермской гидродинамической школы. В работе В. А. Демина [56] исследована динамика изменения силы Лоренца, показано, что при низких частотах ВМП внутри проводника поле можно считать однородным, а объёмная сила Лоренца имеет только азимутальную компоненту и вызывает следующее за полем движение. Однако с ростом частоты нарастает радиальная часть силы Лоренца, направленная к оси вращения, и при $D_H \approx 7.5$ радиальная составляющая становится сравнима по величине с азимутальной.

Теоретические исследования влияния ВМП на структуру и устойчивость течений ведутся под руководством Т. П. Любимовой. В работе [78] фор-

мулируется система уравнений тепломассопереноса во ВМП и исследуются монотонный и колебательный типы неустойчивости, определяются параметры ВМП, при которых реализуются указанные виды неустойчивости течений. В статье [22] показана возможность управления концентрацией примесей при выращивании кремниевых монокристаллов, так как приложенное вращающееся магнитное поле малой интенсивности может уменьшить радиальную сегрегацию легирующей примеси в выращенном кристалле.

В работе [21] С. Ю. Хрипченко с соавторами теоретически и экспериментально исследуют влияние относительного положения индуктора и тигля на эффективность магнитогидродинамического перемешивания металла. Экспериментальные работы [19, 20], посвященные изучению влияния перемешивания затвердевающего металла одновременным действием БМП и ВМП, показывают, как частота и интенсивность перемешивания влияют на зернистость твердых растворов и сплавов с эвтектикой, длину структурных зон, размер зёрен, распределение структурных компонентов, твердость и другие механические характеристики сплава в слитках, отливаемых при наличии МГД-перемешивания.

В работе Ф. Марти (*Ph. Marthy*) с соавторами [57] исследуется устойчивость течений в ВМП. Важным критерием, характеризующим движение проводящей жидкости наряду с числами Прандтля, Грасгофа и параметром диффузии магнитного поля, является число Тейлора

$$T_m = \frac{\mu_0 \sigma \Omega B^2 R^2}{2P\rho\nu^2}, \quad (75)$$

показывающее отношение между вращающей магнитной силой и силами вязкого трения, здесь P , как и в соотношении (43), – число пар полюсов.

Авторами теоретически показано, что воздействие ВМП в интервале чисел Тейлора $T_m \in (10^3 \dots 10^5)$, где электромагнитные силы преобладают над силами инерции, позволяет стабилизировать изначально нестационарные течения. Переход к конкретному режиму зависит от отношения высоты к диаметру цилиндрической области. В работе [32] Дж. С. Уолкер (*J. S. Walker*) с соавторами детально исследуют отмеченные Ф. Марти эффекты стабилизации, показывая влияние числа Прандтля на генерацию неустойчивостей.

Познакомиться с наиболее важными результатами, касающимися влияния ВМП на течения в проводящих средах, читатель может в обзоре П. Долда (*P. Dold*) и К. В. Бенца (*K. W. Benz*) [23], составленном в 1999 г.

3.4. Переменное магнитное поле

В работах А. Бермудеса (*Alfredo Bermúdez*) с различными соавторами (основные – Д. Гомес

(*Dolores Gómes*), Р. Родригез (*Rodolfo Rodríguez*)) [79–85] особое внимание уделяется нахождению аналитических решений для уравнений диффузии переменного магнитного поля в проводнике, переноса тепловой энергии и даже распределений скоростей в расплаве металла. В работах [79, 80] подробно рассматривается электромагнитная задача, записанная в терминах векторного потенциала, и способ её реализации методом конечных элементов. В приложении к статье [79] приведена упрощённая задача тепломассопереноса в переменном электромагнитном поле, имеющая аналитическое решение для распределения скоростей, пригодная для тестирования вычислительных алгоритмов. В статье [81] предпринята попытка получить аналитическое решение задачи о конвекции металла в переменном электромагнитном поле, тепловая конвекция реализована в приближении Буссинеска. Пространственные распределения электромагнитной силы и источников теплоты считаются известными, учитывается вклад турбулентной вязкости. Авторы доказывают существование единственных решений для двух задач с определёнными наборами параметров. В работе [82] в осесимметричной постановке численно исследуется конвекция расплава кремния в печи с индукционным нагревом тигля. Особое внимание уделяется радиационному теплообмену на поверхности, приведён аналитический вид тепловых граничных условий, учитывающих излучение в системах сложной формы. Показан пример, имеющий аналитическое решение, который можно использовать для верификации алгоритмов.

Нахождение индукционных токов и их магнитных полей важно не только для управления нагревом или течениями расплавов, индукционные токи, возникающие в самой установке в результате взаимной индукции компонентов установки, влияют на её эффективность. В работе [83] приведены аналитические выражения для векторного потенциала магнитного поля индуктора, а также эффективного значения силы тока в индукторе, к которому приложено широтно-импульсно-модулированное напряжение. Далее в [84] учитываются нелинейности, вызванные неоднородностью электропроводности и ферромагнитными эффектами, а в работе [85] подробно обсуждается реализация предложенных техник методом конечных элементов. Подобные работы находят применение в проектировании, конструировании индукторов печей или двигателей для обеспечения низкого уровня электрических потерь, см., например, [86].

Вопросы расчёта векторного потенциала и его реализации методом конечных объёмов в системе Open FOAM очень подробно описаны в работе В. Галиндо (*Vladimir Galindo*) [87].

Тепловое действие ПМП определяется двумя факторами. С одной стороны, в проводнике магнитное поле сосредоточено в пределах слоя тол-

щиной δ и, как следует из выражения (12), убывает с ростом частоты внешнего поля ($\delta \sim \Omega^{-1/2}$), там же текут индукционные токи и, следовательно, там же действуют источники джоулевой теплоты. То есть с ростом частоты прогреваемая область сокращается. С другой стороны, как видно из формулы (72), мощность источников возрастает пропорционально квадрату градиента напряжённости индукционных токов, среднее значение которого можно рассчитать как $\langle \nabla H \rangle = H_{surf} / \delta$, напряжённость поля на поверхности конечна и может быть оценена, например, по соотношению (63). Таким образом, объёмная мощность, выделяемая в слое δ с ростом частоты увеличивается. Характерная картина тепловыделения рассчитана в работах [88, 89] и показана на рис. 6. Суммарная мощность тепловых источников

$$P = \int_V q \cdot dV \quad (76)$$

имеет экстремум в интервале $D_H \in [10 \dots 20]$ [24].

При нагреве ферромагнетиков [90] ниже температуры Кюри необходимо учитывать в уравнениях диффузии ПМП нелинейную связь индукции и напряжённости магнитного поля внутри материала (уравнение (5)).

В работе [60] изучается влияние относительных размеров индуктора и образца для достижения максимального тепловыделения, а в работе [91] геометрия индуктора оптимизируется с точки зрения обеспечения однородного разогрева образца. В работе [61] исследуется взаимодействие различных моделей тиглей и индукторов, для поиска оптимальной пары для роста кристалла, а в [63, 92] моделируются тепловые условия в целой установке по производству кремниевых монокристаллов методом Чохральского (индукционно разогревается тигель, в котором находится расплав кремния; приведены картины течений), в работе [58] при моделировании течения расплава кремния наряду с тепловым действием индукционно нагреваемого тигля учитывается механическое перемешивание.

В работах тайваньской группы под руководством М.-Ш. Хуанга (*Ming-Shan Huang*) [38–41] изучаются вопросы оптимальной термообработки: в [38] – однородное поле температуры с помощью нагрева индуктором из нескольких слоёв витков, в [39, 40] – эффективный прогрев деталей сложной формы индукторами сложной формы; [41] – легирование поверхности магниевых сплавов одновременным действием лазера и ПМП, которое перемешивает расплав в ванне проплавления. Применение ПМП обеспечивает наибольшую износостойкость изделий.

В работе [42] отмечаются положительные эффекты при термообработке ПМП никелевых сплавов: ПМП действием индукционных токов умень-

шает сегрегацию компонентов, увеличивает коэффициенты диффузии элементов сплава, отвечающих за интерметаллидные фазы, увеличивая размеры этих фаз, и, таким образом, при повышении качества изделия уменьшается время его термообработки. В работе [43] показана связь индукционного нагрева и вызываемых механических напряжений в деталях сложной формы. Следует отметить, что для эффективного прогрева разных частей детали одновременно применяется несколько частот ПМП.

Для эффективного нагрева в индукционных печах могут применяться индукционные системы, содержащие не только активные катушки, подключённые к источнику тока, но и пассивные, ток в которых появляется вследствие эффекта взаимной индукции (см., например, [93]). Пассивная катушка возбуждает колебания частоты, кратной частоте активной катушки. Такая система при правильном выборе пары частот обеспечивает лучший прогрев материала.

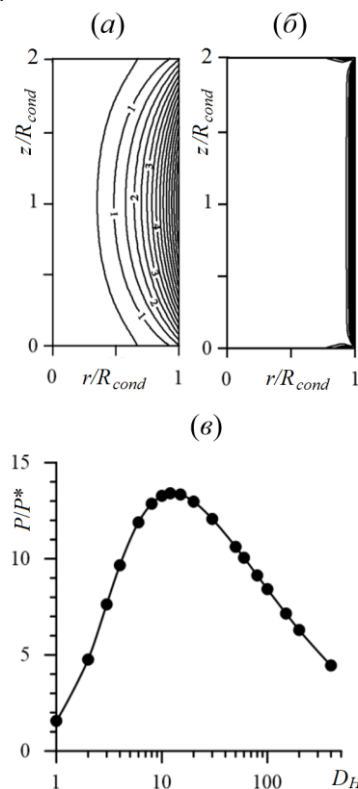


Рис. 6. Характерные распределения источников теплоты при $D_H = 12$ (а) и $D_H = 1000$ (б) и зависимость суммарной мощности тепловыделения от параметра диффузии магнитного поля (в), $P^* = H_{ind}^2 / (\sigma R_{ind}^2) \cdot V$

В работах Р. Германа (*R. Hermann*) с соавторами [34–36] экспериментально и теоретически исследуется зонная плавка при помощи ПМП. Показано, как с помощью сдвига фазы между частями составного индуктора можно управлять течениями в жидкой зоне и перейти от двухвихревой структу-

ры течения к одновихревой, которая обеспечивает большую стабильность роста кристалла.

В цикле работ Ф. Бьюля (*François Bioul*) и Ф. Дюпрэ (*François Dupret*) [37, 94, 95] исследуется силовое влияние переменного магнитного поля на поверхностные течения. В статье [94] аналитические решения уравнения для векторного потенциала вида (27) находятся с помощью асимптотических приближений модифицированных функций Бесселя как функции глубины δ и порядка приближения ε . Авторами получено аналитическое выражение для векторного потенциала на границе проводящей области, а также внутри области для малых на ненулевых глубин δ . В работе [95] приведены безразмерные усреднённые электромагнитная сила, магнитный поток и избыточная температура (перегрев над условным нулём температуры). Как и в статье [94], решения представлены суммами по порядку приближения вида

$$T = \sum_j T_j \varepsilon^j + o(\varepsilon).$$

Приводятся распределения сил и функции тока, реализующиеся в рассматриваемых системах. В [37] численно рассматривается конвекция ртути при зонной плавке. Показано, как с помощью двух независимых индукторов создать на поверхности электромагнитные силы, противодействующие конвекции Марангони, возникающей в следствие неоднородного нагрева ПМП, и таким образом управлять течениями в зоне плавления.

В работе [96] исследуется формирование капель, образующихся на конце титановой проволоки при индукционном нагреве. Получены зависимости размеров от силы и частоты тока в индукторе, которые используются для проектирования режимов производства однородных титановых порошков. Расчёт геометрии капель проводился методом *Volume of Fluid (VoF)*.

Течение проводящей жидкости, помещённой в ПМП, принято считать индукционно-навязанным (*AMF-driven flow*), поскольку объёмные силы Лоренца зачастую формируют определённые структуры течений, подчиняющиеся общим законам [24–26, 47, 97–99]. Во-первых, в жидкости, помещённой в ПМП развивается осреднённое двухтороидальное течение, на которое накладываются пульсации скорости, как это показано на рис. 7, а, во-вторых, максимальная скорость течения линейно зависит от напряжённости (силы тока в индукторе) (см. рис. 7, б).

Часто в качестве меры скорости применяется так называемая скорость Альфвена

$$u_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}, \quad (77)$$

здесь B_0 – масштаб индукции магнитного поля.

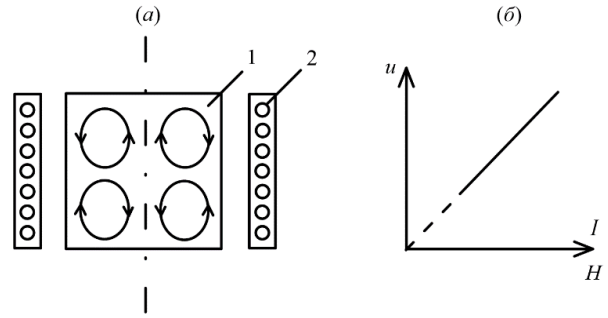
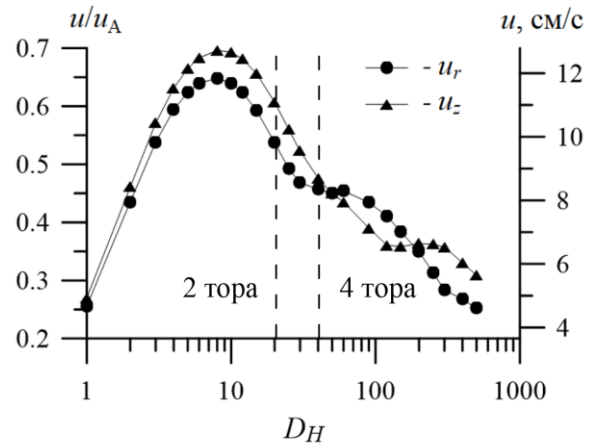
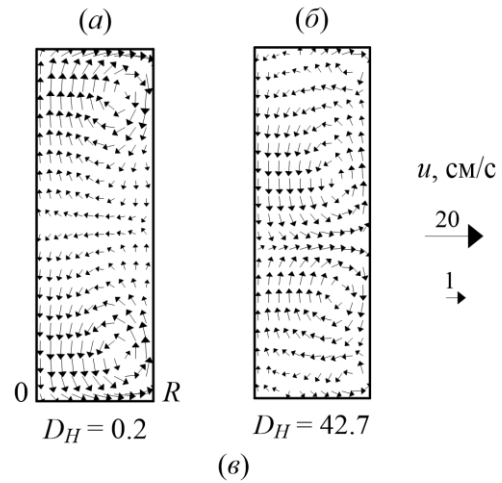


Рис. 7. Общие закономерности индукционно-навязанных течений: а – структура течений при частоте максимального нагрева; б – характерная зависимость скорости от силы тока и напряжённости ПМП



ты (параметра диффузии ПМП): а – стационарное двухтороидальное течение при $D_H = 0.2$; б – четырёхтороидальное при $D_H = 42.7$; в – зависимость скорости. Штриховыми линиями ограничены области параметра D_H , где реализуются 2- и 4-х вихревые изотермические течения

Интенсивность индукционно-навязанного течения зависит не только от амплитуды ПМП, но и от частоты, от которой зависит распределение силы Лоренца и, следовательно, структура течений. На

рис. 8 показана динамика изменений структуры изотермических течений галинстана (сплав GaInSn с температурой плавления $-19\text{ }^{\circ}\text{C}$) в цилиндрических областях и скорости от параметра диффузии магнитного поля [100]. Так, двухтороидальная структура осреднённого течения наблюдается, когда частота ПМП невелика, и оно достаточно глубоко проникает в проводник. По мере увеличения частоты индукционные токи и их поля запираются во всё более тонком слое и меняют свою структуру; динамика изменения структуры ротора силы Лоренца показана в работе [47]. Следует отметить сходство зависимостей $u_{\max}(D_H)$ и $q(D_H)$ (рис. 8, в и рис. 6, в): наибольшее тепловое действие и силовое ПМП оказывает при $D_H \approx 10$, при котором относительная глубина проникновения ПМП (см. соотношение (31)) $\delta/L = 1/\sqrt{5} \approx 45\%$.

Кроме частоты структура течений определяется геометрией магнитного поля, в которое помещена проводящая жидкость. На рис. 9 [101] показаны неизотермические течения, которые могут реализоваться в расплаве никеля при разном положении индуктора относительно расплава. В расчётной модели [101] учитывались неоднородное тепловыделение джоулевыми источниками и излучение с поверхности расплава, поэтому структура течений для схемы рис. 9, в отличается от изотермической картины на рис. 9, а: центральный вихрь образован подъёмным течением нагреваемого у боковой поверхности расплава (расположение источников теплоты показано на рис. 6).

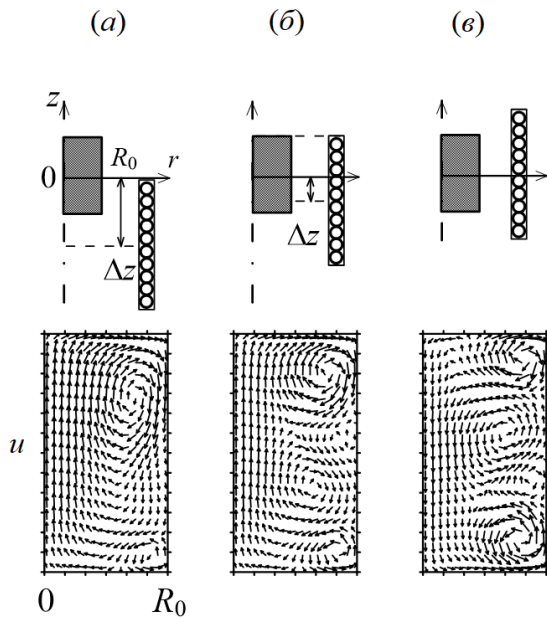


Рис. 9. Структуры течений при различных относительных положениях расплава и индуктора

Для организации определённого перемешивания расплава в тигле индукторной печи могут

применяться составные индукторы [30, 31, 102]. В работе [30] индукторная система содержит несколько наборов обмоток, которые питаются от разных источников, работающих со сдвигом фазы, создающим бегущее ПМП. Такое подключение обеспечивает одновихревое движение расплава в тигле. Аналогичного эффекта добиваются в работе [31], используя вместо нескольких источников конденсаторные батареи и индуктивные элементы. Недостатком таких методов является то, что частота, необходимая для эффективного перемешивания, составляет $0,1 \dots 10$ Гц, а частота нагрева и плавления – 1 кГц и выше. В работе [102] предложено использовать двухсекционный индуктор с независимыми источниками питания для временного переключения на режим течения расплава, при котором течение на поверхности направлено от центра. Такой режим нужен для очистки поверхности от оксидных плёнок, как это показано на рис. 10.

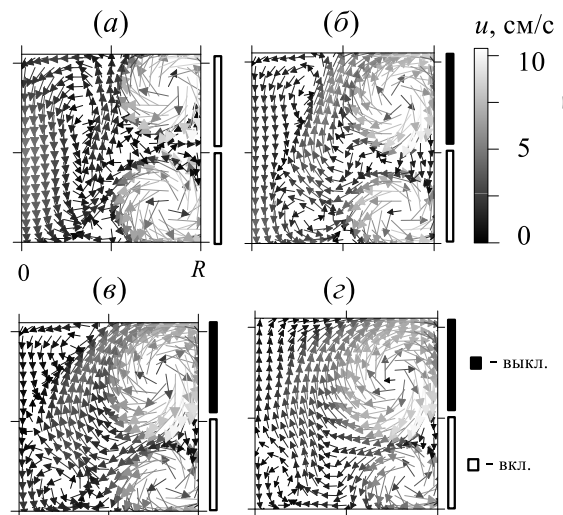


Рис. 10. Перестройка поля скорости при смене режима работы индуктора: а – начальное состояние – включены обе секции индуктора; б–г – верхняя выключена, на второй больший ток: б – спустя $\Delta t = 1$ с после смены режима; в – $\Delta t = 2$ с; г – $\Delta t = 3$ с

В интервале $D_H \in [20 \dots 50]$ у неизотермических течений наблюдаются области на поверхности, в которой расплав движется к оси симметрии (см. рис. 8, в), в этих областях могут сосредотачиваться лёгкие поверхностные включения, например, оксидные плёнки. Зависимость размера этой области от параметра диффузии ПМП приведена в работе [101], а карта устойчивости на плоскости параметров $D_H - \Delta z$ – в работе [100].

В совместных работах учёных Казанского государственного технического университета и Университета Лейбница (г. Ганновер, Германия) разработан метод воздействия на структуру

затвердевающего металла низкочастотными пульсациями силы Лоренца [27, 28], генерируемыми индуктором в ПМП. Рабочий ток, изменяющийся с частотой, обеспечивает магнитогидродинамический резонанс в расплаве. Показано, что интенсификация течений измельчает зерно в кристаллизующемся металле, что повышает его механическую прочность.

Течение расплава в ПМП может быть турбулентным, и на осреднённые течения накладываются пульсации скорости, которые могут быть сравнимы по амплитуде с основным течением [24]. Вопросы учёта турбулизации течения в ПМП рассмотрены в работах [103, 104]. Там же приводятся выражения для турбулентной вязкости, анализируются спектры пульсаций скорости.

В работе [105] исследован вклад в формирование структуры течений свободной тепловой конвекции, вызванной неоднородным нагревом, и перемешивания электродинамической силой Лоренца. Относительное влияние двух указанных механизмов представлено параметром

$$A = \frac{Ha^2 \int (\nabla \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV}{Gr \int \left(\frac{\partial T}{\partial r} \boldsymbol{\omega} \right) \cdot dV}, \quad (78)$$

подынтегральное выражение в числителе соотношения (78) равно скалярному произведению ротора силы Лоренца и вихря скорости, тогда числитель может интерпретироваться как полная мощность электродинамических сил в объёме жидкости, по аналогии, знаменатель – полная мощность сил Архимеда. В слабых магнитных полях должна преобладать тепловая конвекция, в сильных – навязанная силой Лоренца.

Для определения границы перехода от одного доминирующего механизма к другому строятся зависимости скорости от числа Гартмана при выбранном параметре диффузии магнитного поля, как показано на рис. 11, значение числа Гартмана, при котором характер зависимости меняется, говорит о смене доминирующего фактора. Установившаяся линейная зависимость при $A = 0.1$ говорит о преобладании вынужденной конвекции, а, значит, при больших числах Гартмана ($A \gg 1$) задачу о конвекции в переменном магнитном поле можно разбить на три этапа:

- 1) решение магнитной задачи (нахождение индукционных токов, их магнитных полей, источников теплоты и сил Лоренца),
- 2) решение задачи об изотермической вынужденной конвекции,
- 3) расчёт температурного поля, уточнение поля скоростей.

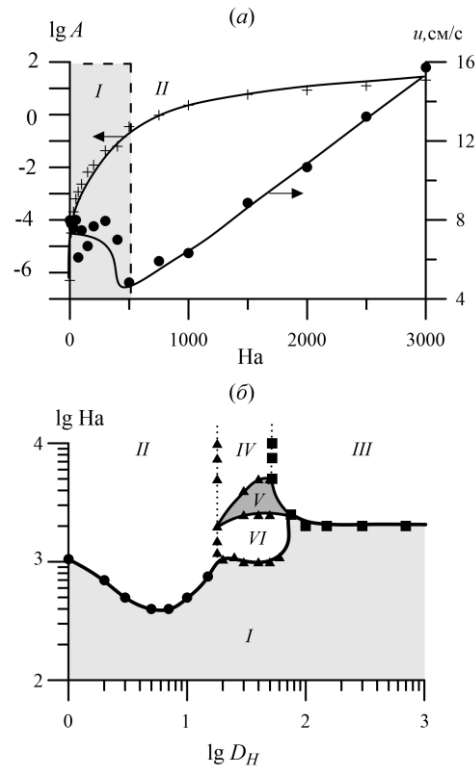


Рис. 11. Переход между механизмами формирования структуры течения: а – зависимости параметра A и максимальной скорости от числа Гартмана, рассчитанные для $D_H = 7$; б – карта реализующихся режимов

Известно, что в сильных полях теряется зависимость от теплофизических свойств жидкости (в качестве характеристики взято число Прандтля). Зависимости максимальной скорости от числа Гартмана сливаются с предельной $Pr = 0$, как это показано на рис. 12. Это пороговое значение числа Гартмана, характеризующее напряжённость магнитного поля, которое обеспечивает индукционную навязанность течения, зависит от параметра D_H (частоты поля).

В работах китайских учёных Р. Чена и Я. Янга (*Rui-run Chen, Yaohua Yang*) с соавторами экспериментально и теоретически исследуются плавка и направленная кристаллизация в индукционной печи с холодным тиглем [49, 106–109]. В этой технологии ПМП с высокой частотой достаточно велико для того, чтобы сила Лоренца, возникающая на поверхности расплава, отжимала его от водоохлаждаемой стенки тигля и держала на некотором расстоянии на всём протяжении процесса. В статьях рассматриваются поля, искривлённый профиль мениска, распределения температур и скоростей, а также их влияние на структуру затвердевшего металла. В работе [108] определена сила, действующая на электропроводную частицу в расплаве, помещённом в ПМП

$$F_p = -\frac{3}{2} \frac{\sigma - \sigma_p}{2\sigma + \sigma_p} V_p F_L, \quad (79)$$

здесь σ и σ_p – электропроводности расплава и частицы соответственно, V_p – объём частицы, F_L – электродинамическая сила. Вопросы сепарации магнитных частиц ПМП рассмотрены в работе [110].

В работе [111] анализируется напряжённое состояние твёрдой плёнки, покрывающей плоскую поверхность расплавленного металла в ПМП. Искривлённый мениск, его колебания и конечная форма рассмотрены в работах [112, 113]. В [114] описана система из двух химически реагирующих жидкостей: расплав металла под слоем расплавленной соли. Исследованы форма межфазной поверхности, течения, реализующиеся в ПМП, и перенос компонентов, участвующих в химической реакции.

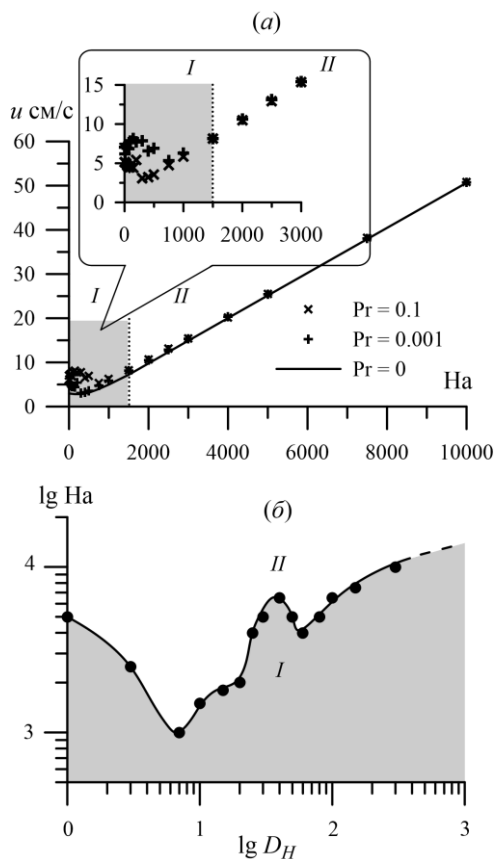


Рис. 12. Влияние сильного поля: а – зависимости параметра максимальной скорости от числа Гартмана, рассчитанные различных чисел Прандтля и $D_H = 7$; б – зависимость порога индукционной навязанности течений от параметра диффузии магнитного поля

В совместной работе учёных лаборатории гидродинамики ИМСС УрО РАН, г. Пермь и магнитной гидродинамики Гельмгольц-центра, Дрезден-

Россендорф, Германия [44] предложено использование индукционных токов для определения уровня жидкого магния в закрытой стальной реторте при производстве титана. Реторта – вертикальный цилиндр высотой около 4 м и диаметром 1.5 м, разогретый до 850 °С. Индукционные токи возбуждаются в жидком магнии дополнительными токами различных частот, подаваемых на нагревательные элементы печи вместе с питающим током технической частоты. На крышке реторты устанавливаются сенсорные кольца, которые регистрируют поля индукционных токов, зависящие от высоты расплава в реторте, а также от положения и размера титановых образований, выделившихся в процессе химической реакции на стенках и дне реторты.

Аналогичный принцип регистрации разности фаз между возбуждающими и регистрирующими контурами применён в работе [45] для создания точного расходомера для металлических расплавов.

4. Заключение

Современные научные журналы предъявляют высокие требования к работам, посвящённым моделированию различных явлений и процессов, поэтому хорошим тоном, а иногда и требованием является наличие раздела, посвящённого верификации математической модели (*model validation*). В табл. 2 приведены работы, которые, на взгляд автора, удобны для такой верификации, поскольку отвечают следующим принципам: во-первых, представленные системы просты, как правило, это цилиндрические области или плоские слои; во-вторых, работы содержат достаточное количество исходных данных для подстановки в уравнения; наконец, их результаты наглядны. Указанный список работ, несомненно, не является исчерпывающим, но служит отправной точкой, и даёт возможность читателю найти интересующие сведения по библиографическим ссылкам.

Таблица 2. Работы, рекомендуемые для верификации моделей

№	Верификация (результаты авторов)	Работа
<i>Тепломассоперенос</i>		
1	Турбулентный тепломассоперенос в объёме жидкости (распределение и колебания температуры расплава в заданных точках вертикального цилиндра, заполненного жидким натрием, с фиксированными температурами на торцах)	[115] ^{В,Н}

Продолжение Табл. 2

Окончание Табл. 2

№	Верификация (результаты авторов)	Работа
<i>Постоянное магнитное поле</i>		
2	Течение Гартмана (одномерное распределение безразмерной скорости в постоянном магнитном поле; изотермическому течению соответствует решение при $Gr = 0$)	[18, 53]
<i>Бегущее магнитное поле</i>		
3	Напряжённость, сила Лоренца, индукционные токи (формулы для магнитных полей в проводнике с учётом зазоров и магнитных элементов, аналитические выражения для сил и токов)	[12] ^{А,В,Н} [55] ^{А,В}
<i>Вращающееся магнитное поле</i>		
4	Сила Лоренца, индукция магнитного поля (аналитическое выражение для индукции и силы Лоренца для любых частот)	[56] ^А
5	Сила Лоренца (аналитическое выражение для силы Лоренца)	[78] ^А
<i>Переменное магнитное поле</i>		
6	Одномерное осесимметричное проникновение переменного поля в проводник (аналитические зависимости от координаты r напряжённости магнитного поля, вектора Пойнтинга и мощности источников теплоты)	[65] ^А
7	Двумерное осесимметричное проникновение переменного поля в проводник (аналитические зависимости от координаты r напряжённости магнитного поля, электромагнитной силы и мощности источников теплоты)	[24] ^А
8	Изотермическое течение в поле электромагнитных сил (объёмное распределение скоростей для двух значений параметра диффузии магнитного поля)	[47] ^{В,Н}
9	Вынужденная (квазиизотермическая) конвекция (распределения скоростей вертикальной вдоль радиуса и радиальной вдоль направления, параллельного оси симметрии)	[24] ^Н

№	Верификация (результаты авторов)	Работа
10	Объёмный разогрев объёма электромагнитным полем с радиационной теплоотдачей (разогрев графитового цилиндра в индукционной печи с учётом излучения)	[65] ^{В,Н}
11	Профиль скорости поверхностных течений (распределение радиальной скорости на поверхности)	[25, 26] ^{В,Н}
12	Максимальная скорость течения (график зависимости максимальной скорости течения от магнитной индукции)	[47] ^{В,Н}
<i>Тепловые граничные условия</i>		
13	Стационарное неоднородное излучение (аналитическое пространственное распределение температуры в полости вида «шаровый слой»)	[82] ^А
14	Нестационарное однородное излучение (аналитическая зависимость температуры от времени при изотермическом остывании плиты при радиационной теплоотдаче)	[101] ^А

Примечание: ^А – аналитическое выражение; ^В – вычислительный эксперимент; ^Н – натурный эксперимент

Список литературы

- Hussain Z., Elazab A., Hussain S., Zhang H. Instability of three dimensional electrically conducting fluid of magnetohydrodynamics Couette flow // AIP Adv. 2019. Vol. 9, 105214.
- Yang Zh., Hussain Z., Hussain A., Hussain S., et al. Instability of magnetohydrodynamic flow of Hartmann layers between parallel plates // AIP Adv. 2019. Vol. 9, 055003.
- Pavlinov A., Khalilov R., Mamikyn A., Kolesnichenko I. Eddy current flowmeter for sodium flow // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2017. Vol. 208, 012031.
- Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогиродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
- Лиелпетер Я. Я. Жидкометаллические индукционные МГД-машины. Рига: Зинатне, 1969. 246 с.
- Гельфгат Ю. М., Лиелаусис О. А., Щербинин Э. В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. Рига: Зинатне, 1976. 248 с.
- Yesilyurt S., Motakef S., Grugel R., Mazuruk K. The effect of the traveling magnetic field (TMF)

- on the buoyancy-induced convection in the vertical Bridgman growth of semiconductors // *J. Cryst. Growth*. 2004. Vol. 263. N. 1–4. P. 80–89.
8. Цаплин А. И. Динамика циркуляции жидкого ядра кристаллизующегося непрерывного слитка в бегущем поле индуктора // *Магнитная гидродинамика*. 1986. Т. 22. № 1. С. 127–131.
 9. Цаплин А. И., Грачёв А. Б. Экспериментально-расчетное моделирование электромагнитного перемешивания жидкого ядра слитка // *Магнитная гидродинамика*. 1987. Т. 23. № 2. С. 103–108.
 10. Зеленецкий А. Б., Хрипченко С. Ю., Цаплин А. И. Моделирование кристаллизации металла в плоском слое при электромагнитном перемешивании // *Магнитная гидродинамика*. 1992. Т. 28. № 1. С. 96–100.
 11. Цаплин А. И., Рогатчиков Ю. М. Моделирование воздействия роликового непрерывного перемешивателя в машинах непрерывного литья заготовок // *Магнитная гидродинамика*. 1993. Т. 29. № 2. С. 105–112.
 12. Цаплин А. И. Теплофизика внешних воздействий при кристаллизации стальных слитков на машинах непрерывного литья. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. 238 с.
 13. Tsaplin A. I., Nikulin I. L., Nechaev V. N. Modeling of electromagnetic actions in sponge titanium production // *Magnetohydrodynamics*. 2015. Vol. 51. N. 4. P. 749–755.
 14. Khripchenko S., Lekomtsev S., Denisov S., Dolgikh V., et al. Laboratory model of the aluminum furnace with MHD stirring induced by a rod-like inductor generating a travelling magnetic field // *Magnetohydrodynamics*. 2017. Vol. 53. N. 2. P. 273–280.
 15. Lekomtsev S. V., Khripchenko S. Y. evaluation of the temperature regime of the rods of the inductor of an MHD stirrer for possible use in an industrial aluminum furnace // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2018. Vol. 59. N. 7. P. 1189–1196.
 16. Khripchenko S., Khalilov R., Kolesnichenko I., Denisov S., et al. Numerical and experimental modelling of various MHD induction pumps // *Magnetohydrodynamics*. 2010. Vol. 46. N. 1. P. 85–97.
 17. Denisov S., Dolgikh V., Khalilov R., Kolesnichenko I., et al. The MHD travelling magnetic field pump for liquid magnesium // *Magnetohydrodynamics*. 2013. Vol. 49. N. 1–2. P. 223–229.
 18. Курко И. М., Курко Г. Е. Магнитная гидродинамика. Современное видение проблем. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009. 632 с.
 19. Siraev R. R., Khripchenko S. Y. Liquid metal exposed to rotating and travelling magnetic fields in crucibles with circular and square cross-sections // *Magnetohydrodynamics*. 2018. Vol. 54. N. 3. P. 287–297.
 20. Denisov S., Dolgikh V., Khripchenko S., Kolesnichenko I., et al. The effect of traveling and rotating magnetic fields on the structure of aluminum alloy during its crystallization in a cylindrical crucible // *Magnetohydrodynamics*. 2014. Vol. 50. N. 4. P. 407–422.
 21. Khripchenko S. Y., Denisov S. A., Dolgikh V. M., Kolesnichenko I. V., et al. Influence of the position of the MHD stirrer relative to the crucible on the driven liquid metal flow // *Magnetohydrodynamics*. 2018. Vol. 54. N. 4. P. 383–390.
 22. Khlybov O. A., Lyubimova T. P. Effect of rotating magnetic field on mass transfer during directional solidification of semiconductors // *Magnetohydrodynamics*. 2016. Vol. 52. N. 1. P. 61–70.
 23. Dold P., Benz K. W. Rotating magnetic fields: fluid flow and crystal growth applications // *Prog. Cryst. Growth Ch.* 1999. Vol. 38. pp. 7–38.
 24. Тур Л. Л.; Губченко А. П. Индукционные плавильные печи для процессов повышенной точности и чистоты. Москва: Энергоатомиздат, 1988. 120 с.
 25. Tarapore E. D., Evans J. W. Fluid velocities in induction melting furnaces: Part I. Theory and laboratory experiments // *Metall. Trans. B*. 1976. Vol. 7. P. 343–451.
 26. Tarapore E. D., Evans J. W., Langfeldt J. Fluid velocities in induction melting furnaces: Part II. large scale measurements and predictions // *Metall. Trans. B*. 1977. Vol. 8. P. 179–184.
 27. Musaeva D., Ilin V., Baake E., Geza V. Numerical simulation of the melt flow in an induction crucible furnace driven by a Lorentz force pulsed at low frequency // *Magnetohydrodynamics*. 2015. Vol. 51. N. 4. P. 771–784.
 28. Musaeva D., Baake E., Ilin V., Jarczyk G. Analysis of the AlMgSi-alloy structure formed under the influence of low-frequency pulsed Lorentz force // *Magnetohydrodynamics*. 2017. Vol. 53. N. 2. P. 245–254.
 29. Nikulin I. L. Numerical simulation of melt flow control by controlling averaged electromagnetic forces generated in high frequency magnetic field // *Magnetohydrodynamics*. 2016. Vol. 52, № 4. pp. 527–534.
 30. Floymayr J. Coreless induction furnace and method of melting and stirring metals in this furnace: pat. patent US 3472941 USA. 1969. Vol. 2, № 12. pp. 1–3.
 31. Frizen V. E., Smolianov I. A., Sarapulov S. F. Induction crucible furnace with reactive power non-symmetrical compensation of inductor sections // *SIELA–2018 Proc. IEEE*, 2018. P. 1–4.
 32. Walker J. S., Volz M. P., Mazuruk K. Rayleigh-Bénard instability in a vertical cylinder with a rotating magnetic field // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2004. Vol. 47. N. 8–9. P. 1877–1887.

33. Mazuruk K. Control of melt convection using traveling magnetic fields // *Adv. Space Res.* 2002. Vol. 29. N. 4. P. 541–548.
34. Hermann R., Priede J., Behr G., Gerbeth G., *et al.* Influence of growth parameters and melt convection on the solid-liquid interface during RF-floating zone crystal growth of intermetallic compounds // *J. Cryst. Growth.* 2001. Vol. 223. N. 4. P. 577–587.
35. Hermann R., Behr G., Gerbeth G., Priede J., *et al.* Magnetic field controlled FZ single crystal growth of intermetallic compounds // *J. Cryst. Growth.* 2005. Vol. 275. N. 1–2. P. e1533–e1538.
36. Hermann R., Gerbeth G., Priede J. Magnetic field controlled floating-zone single crystal growth of intermetallic compounds // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2013. Vol. 220. N. 1. P. 227–241.
37. Bioul F., Dupret F. Free surface shear flows induced by Marangoni and alternating electromagnetic forces // *J. Non-Equilibrium Thermodyn.* 2005. Vol. 30. N. 3. P. 205–213.
38. Huang M. S., Huang Y. L. Effect of multi-layered induction coils on efficiency and uniformity of surface heating // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2010. Vol. 53. N. 11–12. P. 2414–2423.
39. Shih S.-Y., Nian S.-C., Huang M.-S., Huang R.-C., *et al.* Nonplanar mold surface heating using external inductive coil and magnetic shielding materials // *Int. Commun. Heat Mass.* 2016. Vol. 71. P. 44–55.
40. Shih S.-Y., Nian S.-C., Huang M.-S. Comparison between single- and multiple-zone induction heating of largely curved mold surfaces // *Int. Commun. Heat Mass.* 2016. Vol. 75. P. 24–35.
41. Zhou J., Xu J., Huang S., Hu Z., *et al.* Effect of laser surface melting with alternating magnetic field on wear and corrosion resistance of magnesium alloy // *Surf. Coatings Technol.* 2017. Vol. 309. P. 212–219.
42. Li C., Guo G., Yuan Zh., Xuan W., *et al.* Chemical segregation and coarsening of γ' precipitates in Ni-based superalloy during heat treatment in alternating magnetic field // *J. Alloys Compd.* 2017. Vol. 720. P. 272–276.
43. Hömberg D., Qingzhe L., Montavo-Urqizo J., Nadolski D., *et al.* Simulation of multi-frequency-induction-hardening including phase transitions and mechanical effects // *Finite Elem. Anal. Des.* 2016. Vol. 121. P. 86–100.
44. Krauter N., Stefani F., Gundrum T., Wondrak T., *et al.* Multi-frequency inductive system for magnesium level detection in a titanium reduction reactor // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2018. Vol. 424, 012087.
45. Looney R., Priede J. Concept of a next-generation electromagnetic phase-shift flowmeter for liquid metals // *Flow Meas. Instrum.* 2019. Vol. 65. P. 128–135.
46. Zhanwei S., Xinghus Z. A. φ - Ω method for 3-D eddy current analysis // *Appl. Math. Mech.* 1998. Vol. 19. N. 11. P. 1017–1023.
47. Cramer A., Galindo V., Zennaro M. Frequency dependence of an alternating magnetic field driven flow // *Magnetohydrodynamics.* 2015. Vol. 51, N. 1. P. 133–147.
48. Nikulin I. L., Perminov A. V., Tsaplin A. I. Mathematical model of conducting fluid convection in a non-uniform alternating magnetic field // *Magnetohydrodynamics.* 2013. Vol. 49. N. 1–2. P. 203–209.
49. Chen R., Yang Y., Wang Q., Ding H., *et al.* Dimensionless parameters controlling fluid flow in electromagnetic cold crucible // *J. Mater. Process. Technol.* 2018. Vol. 255. P. 242–251.
50. Gellert M., Rüdiger G., Schultz M., Guseva A., *et al.* Nonaxisymmetric MHD instabilities of Chandrasekhar states in Taylor-Couette geometry // *Astrophys. J.* 2016. Vol. 823, 99.
51. Хрипченко С. Ю. Электровихревые течения в каналах МГД-устройств. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 261 с.
52. Tagawa T. Linear stability of parallel flow of liquid metal in a rectangular duct driven by a constant pressure gradient under the influence of a uniform magnetic field // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2018. Vol. 424, 012016.
53. Sposito G., Ciofalo M. One-dimensional mixed MHD convection // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2006. Vol. 49, № 17–18. P. 2939–2949.
54. Любимова Т. П., Скуридин Р. В., Файзрахманова И. С. Влияние магнитного поля на гистерезисные переходы при выращивании кристаллов методом плавающей зоны // *Письма в журнал технической физики.* 2007. Т. 33. № 17. С. 61–68.
55. Volz M. P., Mazuruk K. Lorentz body force induced by travelling magnetic fields // *Magnetohydrodynamics.* 2004. Vol. 40, N. 2. P. 117–126.
56. Демин В. А., Макаров Д. В. Влияние вращающегося магнитного поля на расплав в цилиндрической жидкой зоне // *Вестник Пермского университета. Физика.* 2004. № 1. С. 106–111.
57. Marthy P., Witkowski L. M., Trombetta P., Tomasino T., *et al.* On the stability of rotating MHD flows / In: Alemany A. *et al.* (Eds.) *Transfer phenomena in magnetohydrodynamic and electroconducting flows.* Springer: 1999. P. 327–343.
58. Jacoutot L., Fautrelle Y., Gagnoud A., Brun P., *et al.* Numerical modeling of coupled phenomena in a mechanically stirred molten-glass bath heated by induction // *Chem. Eng. Sci.* 2008. Vol. 63. N. 9. P. 2391–2401.
59. Tavakoli M. H., Karbaschi H., Samavat F., Mohammadi-Manesh E. Numerical study of induction heating in melt growth systems—Frequency selection // *J. Cryst. Growth.* 2010. Vol. 312. N. 21. P. 3198–3203.

60. *Tavakoli M. H., Karbaschi H., Samavat F.* Influence of workpiece height on the induction heating process // *Math. Comput. Model.* 2011. Vol. 54. N. 1–2. P. 50–58.
61. *Khodamoradi H., Tavakoli M. H., Mohammedi K.* Influence of crucible and coil geometry on the induction heating process in Czochralski crystal growth system // *J. Cryst. Growth.* 2015. Vol. 421. P. 66–74.
62. *Honarmandnia M., Tavakoli M. H., Sadeghi H.* Global simulation of an RF Czochralski furnace during different stages of germanium single crystal growth // *Cryst. Eng. Comm.* 2016. Vol. 18. N. 21. P. 3942–3948.
63. *Honarmandnia M., Tavakoli M. H., Sadeghi H.* Global simulation of an RF Czochralski furnace during different stages of germanium single crystal growth, part II: to investigate the effect of the crucible's relative position against the RF coil on the isotherms, flow fields and thermo-elastic stresses // *Cryst. Eng. Comm.* 2017. Vol. 19. N. 3. P. 576–583.
64. *Kranjc M., Zupanic A., Miklavcic D., Jarm T.* Numerical analysis and thermographic investigation of induction heating // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2010. Vol. 53. N. 17–18. P. 3585–3591.
65. *Jankowski T. A., Pawley N. H., Gonzales L. M., Ross C. A., et al.* Approximate analytical solution for induction heating of solid cylinders. *Appl. Math. Model.* 2016. Vol. 40. P. 2770–2782.
66. *Kennedy M. W., Akhtar S., Bakken J. A., Aune R. E.* Empirical verification of a short-coil correction factor // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2014. Vol. 61. N. 5. P. 2573–2583.
67. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1984. 454 с.
68. *Davis E. J.* Conduction and induction heating. Herts, UK: The Institution of Engineering and Technology, 1990. 417 p.
69. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967. 780 с.
70. *Нукулин И. Л., Перминов А. В.* Математическая модель процессов тепломассопереноса и диффузии магнитного поля в индукционной печи // *Инженерно-физический журнал.* 2016. Т. 89. № 2. С. 388–399.
71. *Mistrangelo C., Bühler L.* Magneto-convective instabilities in horizontal cavities // *Phys. Fluids.* 2016. Vol. 28, 024104.
72. *Hudoba A., Molokov S.* The effect of the Prandtl number on magnetoconvection in a horizontal fluid layer // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2018. Vol. 116. P. 1292–1303.
73. *Tagawa T., Ozoe H.* Enhancement of heat transfer rate by application of a static magnetic field during natural convection of liquid metal in a cube // *J. Heat Transfer.* 1997. Vol. 119. N. 2. P. 265–271.
74. *Tagawa T., Ozoe H.* Enhanced heat transfer rate measured for natural convection in liquid gallium in a cubical enclosure under a static magnetic field // *J. Heat Transfer.* 1998. Vol. 120. N. 4. P. 1027–1032.
75. *Tagawa T., Ozoe H.* The natural convection of liquid metal in a cubical enclosure with various electro-conductivities of the wall under the magnetic field // *Int. J. Heat Mass Transf.* 1998. Vol. 41. N. 13. P. 1917–1928.
76. *Баранников В. А., Зимин В. Д.* Неустойчивость покоя неизотермической проводящей жидкости в щели ферромагнитного массива при протекании электрического тока // *Магнитная гидродинамика.* 1982. № 2. С. 117–122.
77. *Rudolph P.* Travelling magnetic fields applied to bulk crystal growth from the melt: The step from basic research to industrial scale // *J. Cryst. Growth.* 2008. Vol. 310. N. 7–9. P. 1298–1306.
78. *Бурнышева А. В., Любимова Т. П.* Колебательная неустойчивость адвективного течения в горизонтальном цилиндре в присутствии вращающегося магнитного поля // *Известия РАН. Механика жидкости и газа.* 2012. № 5. С. 3–10.
79. *Bermúdez A., Gómez D., Muñiz M. C., Salgado P., et al.* Numerical simulation of a thermo-electromagneto-hydrodynamic problem in an induction heating furnace // *Appl. Numer. Math.* 2009. Vol. 59. N. 9. P. 2082–2104.
80. *Bermúdez A., Reales R., Rodríguez R., Salgado P.* Numerical analysis of a finite-element method for the axisymmetric eddy current model of an induction furnace // *IMA J. Numer. Anal.* 2010. Vol. 30. N. 3. P. 654–676.
81. *Bermúdez A., Muñoz-Sola R., Vázquez R.* Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating // *J. Math. Anal. Appl.* 2010. Vol. 368. N. 2. P. 444–468.
82. *Bermúdez A., Gómez D., Muñiz M. C., Vázquez R.* A thermo-electrical problem with a nonlocal radiation boundary condition // *Math. Comput. Model.* 2011. Vol. 53. N. 1–2. P. 63–80.
83. *Bermúdez A., Domínguez O., Gómez D., Salgado P.* Finite element approximation of nonlinear transient magnetic problems involving periodic potential drop excitations // *Comput. Math. with Appl.* 2013. Vol. 65. N. 8. P. 1200–1219.
84. *Bermúdez A., Gómez D., Salgado P., Rodríguez R.* Numerical solution of a transient nonlinear axisymmetric eddy current model with nonlocal boundary conditions // *Math. Mod. Meth. Appl. S.* 2013. Vol. 23. N. 13. P. 2495–2521.
85. *Bermúdez A., Gómez D., Rodríguez R., Venegas P.* Numerical analysis of a transient nonlinear axisymmetric eddy current model // *Com-*

- put. Math. Appl. 2015. Vol. 70. N. 8. P. 1984–2005.
86. *Burke P.* Induction heating and melting systems having improved induction coils: patent US 4874916. USA, 1989.
 87. *Beckstein P., Galindo V., Vukčević V.* Efficient solution of 3D electromagnetic eddy-current problems within the finite volume framework of OpenFOAM // *J. Comput. Phys.* 2017. Vol. 344. P. 623–646.
 88. *Perminov A. V., Nikulin I. L.* Mathematical model of the processes of heat and mass transfer and diffusion of the magnetic field in an induction furnace // *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2016. Vol. 89. N. 2. P. 397–409.
 89. *Nikulin I. L., Perminov A. V.* Numerical investigation of electromagnetic effects and averaged metal melt flows generated by high-frequency magnetic field // *Magneto hydrodynamics.* 2016. Vol. 52. N. 1. P. 135–144.
 90. *Luozzo N. Di, Fontana M., Arcondo B.* Modeling of induction heating of carbon steel tubes: Mathematical analysis, numerical simulation and validation // *J. Alloy Compd.* 2012. Vol. 536. P. S564–S568.
 91. *Jakubovičová L., Gašparec A., Kopas P., Sága M.* Optimization of the induction heating process in order to achieve uniform surface temperature // *Procedia Eng.* 2016. Vol. 136. P. 125–131.
 92. *Munakata T., Someya S., Tanasawa I.* Three-dimensional CZ silicon melt flow under induction heating // *J. Cryst. Growth.* 2005. Vol. 275. N. 1–2. P. 1565–1569.
 93. *Fishman O., Nadot V., Peysakhovich V., Mortimer J.* Induction furnace with improved efficiency coil system: patent US 6542535B2. USA, 2003. Vol. 2, № 12.
 94. *Bioul F., Dupret F.* Application of asymptotic expansions to model two-dimensional induction heating systems. Part I: Calculation of electromagnetic field distribution // *IEEE Trans. Magn.* 2005. Vol. 41. N. 9. P. 2496–2505.
 95. *Bioul F., Dupret F.* Application of asymptotic expansions to model two-dimensional induction heating systems. Part II: Calculation of equivalent surface stresses and heat flux // *IEEE Trans. Magn.* 2005. Vol. 41. N. 9. P. 2508–2514.
 96. *Lu L., Zhang S., Xu J., He H., et al.* Numerical study of titanium melting by high frequency inductive heating // *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2017. Vol. 108. P. 2021–2028.
 97. *Galpin J. M., Fautrelle Y.* Liquid-metal flows induced by low-frequency alternating magnetic fields // *J. Fluid Mech.* 1992. Vol. 239. P. 383–408.
 98. *Kirpo M., Jakovičs A., Baake E., Nacke B.* Analysis of experimental and simulation data for liquid metal flow in a cylindrical container // *Proc. of International Scientific Colloquium: Modeling for Material Processing, Riga.* 2006. P. 36–41.
 99. *Ščepanskis M., Jakovičs A., Baake E., Nacke B.* Solid inclusions in an electromagnetically induced recirculated turbulent flow: Simulation and experiment // *Int. J. Multiph. Flow.* 2014. Vol. 64. P. 19–27.
 100. *Nikulin I. L.* Analysis of possibilities of melt surface cleaning by controlling AMF frequency and distribution // *Magneto hydrodynamics.* 2017. Vol. 53. N. 3. P. 537–546.
 101. *Nikulin I. L.* Mathematical modelling of AMF geometry and frequency impacts on volume and surface melt flows at induction melting // *Magneto hydrodynamics.* 2016. Vol. 52. N. 4. P. 513–526.
 102. *Nikulin I. L.* Numerical simulation of melt flow control by controlling averaged electromagnetic forces generated in high frequency magnetic field // *Magneto hydrodynamics.* 2016. Vol. 52. N. 4. P. 527–533.
 103. *Umbrashko A., Baake E., Nacke B., Jakovičs A.* Modeling of the turbulent flow in induction furnaces // *Metall. Mater. Trans. B.* 2006. Vol. 37. P. 831–838.
 104. *Ščepanskis M., Jakovičs A., Baake E., Nacke B.* Analysis of the oscillating behaviour of solid inclusions in induction crucible furnaces // *Magneto hydrodynamics.* 2012. Vol. 48. N. 4. P. 677–686.
 105. *Nikulin I. L., Perminov A. V.* Mathematical modelling of frequency and force impacts on averaged metal flows in alternating magnetic field // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2019. Vol. 128. P. 1026–1032.
 106. *Yang J.R., Chen R., Ding H., Guo J. et al.* Thermal characteristics of induction heating in cold crucible used for directional solidification // *Appl. Therm. Eng.* 2013. Vol. 59. N. 1–2. P. 69–76.
 107. *Yang Y., Chen R., Guo J., Ding H., et al.* Experimental and numerical investigation on mass transfer induced by electromagnetic field in cold crucible used for directional solidification // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2017. Vol. 114. P. 297–306.
 108. *Chen R., Yang Y., Gong X., Guo J., et al.* Numerical research on magnetic field, temperature field and flow field during melting and directionally solidifying TiAl alloys by electromagnetic cold crucible // *Metall. Mater. Trans. B.* 2017. Vol. 48. N. 6. P. 3345–3358.
 109. *Yang Y., Chen R., Guo J., Ding H., et al.* Numerical analysis for electromagnetic field influence on heat transfer behaviors in cold crucible used for directional solidification // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2018. Vol. 122. P. 1128–1137.
 110. *Abbas M., Bossis G.* Separation of two attractive

- ferromagnetic ellipsoidal particles by hydrodynamic interactions under alternating magnetic field // *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 95, 062611.
111. Nikulin I. L. Analysis of AMF impact on oxide scab rupture and surface cleaning in induction melting technology // *Magnetohydrodynamics*. 2019. Vol. 55. N. 1–2. P. 141–148.
 112. Buliński P. et al. Effect of turbulence modelling in numerical analysis of melting process in an induction furnace // *Arch. Metall. Mater.* 2015. Vol. 60, № 3A. pp. 1575–1579.
 113. Buliński P., Smolka J., Golak S., Przyłucki R., et al. Numerical and experimental investigation of heat transfer process in electromagnetically driven flow within a vacuum induction furnace // *Appl. Therm. Eng.* 2017. Vol. 124. P. 1003–1013.
 114. Courtessole C., Etay J. Flows and mass transfers in two superimposed liquid layers in an induction furnace // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2013. Vol. 65. P. 893–906.
 115. Teimurazov A. S., Frick P. G. Numerical study of molten magnesium convection in a titanium reduction apparatus // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2016. Vol. 57, N. 7. P. 1264–1275.
- ## References
1. Hussain Z., Elazab A., Hussain S., Zhang H. Instability of three dimensional electrically conducting fluid of magnetohydrodynamics Couette flow. *AIP Adv.*, 2019, vol. 9, 105214.
 2. Yang Zh., Hussain Z., Hussain A., Hussain S., et al. Instability of magnetohydrodynamic flow of Hartmann layers between parallel plates. *AIP Adv.*, 2019, vol. 9, 055003.
 3. Pavlinov A., Khalilov R., Mamikyn A., Kolesnichenko I. Eddy current flowmeter for sodium flow. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2017, vol. 208, 012031.
 4. Vatazhin A. B., Liubimov G. A., Regirer S. A. *Magnitogidrodinamicheskie techeniia v kanalakh* (Magnetohydrodynamics flows in channels). Moscow: Nauka, 1970. 672 p. (In Russian).
 5. Lielpeter Y. Y. *Zhidkometallicheskie indukcionnye MGD-mashiny* (Liquid metal induction MHD machines). Riga: Zinatne, 1969. 246 p. (In Russian).
 6. Gelfgat Y. M., Lielausis O. A., Shcherbinin E. V. *Zhidkii metall pod deistviem elektromagnitnykh sil* (Liquid metal under electromagnetic forces). Riga: Zinatne, 1976. 248 p. (In Russian).
 7. Yesilyurt S., Motakef S., Grugel R., Mazuruk K. The effect of the traveling magnetic field (TMF) on the buoyancy-induced convection in the vertical Bridgman growth of semiconductors. *J. Cryst. Growth*, 2004, vol. 263, no. 1–4, pp. 80–89.
 8. Tsaplin A. I. Liquid-core circulation in crystallizing a continuous casting in the traveling field of a coil. *Magnetohydrodynamics*, 1986, vol. 22, no. 1, pp. 108–112.
 9. Tsaplin A. I., Grachev V. G. Simulating electromagnetic stirring in a liquid casting core *Magnetohydrodynamics*, 1987, vol. 23, no. 2, pp. 203–207.
 10. Zelenetskii A. B., Khripchenko S. Yu., Tsaplin A. I. Modelling of metal crystallization in a flat layer at electromagnetic stirring. *Magnetohydrodynamics*, 1992, vol. 28, no. 1, pp. 85–88.
 11. Tsaplin A. I., Rogachikov Yu. M. Modeling the action of an electromagnetic roll mixer in continuous casting machines. *Magnetohydrodynamics*, 1993, vol. 29, no. 2, pp. 105–112.
 12. Tsaplin A. I. *Teplofizika vneshnikh vozddeistvii pri kristallizatsii stal'nykh slitkov na mashinakh nepreryvnogo lit'ia* (Thermophysics of external influences during crystallization of steel ingots on continuous casting machines). Yekateringburg: UB RAS, 1995. 238 p. (In Russian)
 13. Tsaplin A. I., Nikulin I. L., Nechaev V. N. Modelling of electromagnetic actions in sponge titanium production. *Magnetohydrodynamics*, 2015, vol. 51, no. 4, pp. 749–755.
 14. Khripchenko S., Lekomtsev S., Denisov S., Dolgikh V., et al. Laboratory model of the aluminum furnace with MHD stirring induced by a rod-like inductor generating a travelling magnetic field. *Magnetohydrodynamics*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 273–280.
 15. Lekomtsev S. V., Khripchenko S. Y. evaluation of the temperature regime of the rods of the inductor of an MHD stirrer for possible use in an industrial aluminum furnace. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 7, pp. 1189–1196.
 16. Khripchenko S., Khalilov R., Kolesnichenko I., Denisov S., et al. Numerical and experimental modelling of various MHD induction pumps *Magnetohydrodynamics*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 85–97.
 17. Denisov S., Dolgikh V., Khalilov R., Kolesnichenko I., et al. The MHD travelling magnetic field pump for liquid magnesium. *Magnetohydrodynamics*, 2013, vol. 49, no. 1–2, pp. 223–229.
 18. Kirko I. M., Kirko G. E. *Magnitnaia gidrodinamika. Sovremennoe videnie problem* (Magnetohydrodynamics. Modern view). Moscow-Izhevsk: Regular and chaotic dynamics, 2009. 632 p. (In Russian).
 19. Siraev R. R., Khripchenko S. Y. Liquid metal exposed to rotating and travelling magnetic fields in crucibles with circular and square cross-sections. *Magnetohydrodynamics*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 287–297.
 20. Denisov S., Dolgikh V., Khripchenko S., Kolesnichenko I., et al. The effect of traveling and rotating magnetic fields on the structure of alumi-

- num alloy during its crystallization in a cylindrical crucible. *Magnetohydrodynamics*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 407–422.
21. Khripchenko S. Y., Denisov S. A., Dolgikh V. M., Kolesnichenko I. V., et al. Influence of the position of the MHD stirrer relative to the crucible on the driven liquid metal flow. *Magnetohydrodynamics*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 383–390.
 22. Khlybov O. A., Lyubimova T. P. Effect of rotating magnetic field on mass transfer during directional solidification of semiconductors. *Magnetohydrodynamics*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 61–70.
 23. Dold P., Benz K. W. Rotating magnetic fields: fluid flow and crystal growth applications. *Prog. Cryst. Growth Ch.*, 1999, vol. 38, pp. 7–38.
 24. Тир Л. Л., Губченко А. П. Индукционные плавильные печи для процессов повышенной точности и чистоты. Москва: Энергоатомиздат, 1988. 120 с.
 25. Tarapore E. D., Evans J. W. Fluid velocities in induction melting furnaces: Part I. Theory and laboratory experiments. *Metall. Trans. B.*, 1976, vol. 7, pp. 343–451.
 26. Tarapore E. D., Evans J. W., Langfeldt J. Fluid velocities in induction melting furnaces: Part II. large scale measurements and predictions. *Metall. Trans. B.*, 1977, vol. 8, pp. 179–184.
 27. Musaeva D., Ilin V., Baake E., Geza V. Numerical simulation of the melt flow in an induction crucible furnace driven by a Lorentz force pulsed at low frequency. *Magnetohydrodynamics*, 2015, vol. 51, no. 4, pp. 771–784.
 28. Musaeva D., Baake E., Ilin V., Jarczyk G. Analysis of the AlMgSi-alloy structure formed under the influence of low-frequency pulsed Lorentz force. *Magnetohydrodynamics*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 245–254.
 29. Nikulin I. L. Numerical simulation of melt flow control by controlling averaged electromagnetic forces generated in high frequency magnetic field. *Magnetohydrodynamics*, 2016, vol. 52, № 4, pp. 527–534.
 30. Floymayr J. Coreless induction furnace and method of melting and stirring metals in this furnace: patent US 3472941 USA. 1969.
 31. Frizen V. E., Smolianov I. A., Sarapulov S. F. Induction crucible furnace with reactive power non-symmetrical compensation of inductor sections. *Proc. of SIELA-2018*, pp. 1–4.
 32. Walker J. S., Volz M., Mazuruk K. Rayleigh–Bénard instability in a vertical cylinder with a rotating magnetic field. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2004, vol. 47, no. 8–9, pp. 1877–1887.
 33. Mazuruk K. Control of melt convection using traveling magnetic fields. *Adv. Space Res.*, 2002, vol. 29, no. 4, pp. 541–548.
 34. Hermann R., Priede J., Behr G., Gerbeth G., et al. Influence of growth parameters and melt convection on the solid-liquid interface during RF-floating zone crystal growth of intermetallic compounds. *J. Cryst. Growth*, 2001, vol. 223, no. 4, pp. 577–587.
 35. Hermann R., Behr G., Gerbeth G., Priede J., et al. Magnetic field controlled FZ single crystal growth of intermetallic compounds. *J. Cryst. Growth*, 2005, vol. 275, no. 1–2, pp. e1533–e1538.
 36. Hermann R., Gerbeth G., Priede J. Magnetic field controlled floating-zone single crystal growth of intermetallic compounds. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2013, vol. 220, no. 1, pp. 227–241.
 37. Bioul F., Dupret F. Free surface shear flows induced by Marangoni and alternating electromagnetic forces. *J. Non-Equilibrium Thermodyn.*, 2005, vol. 30, no. 3, pp. 205–213.
 38. Huang M. S., Huang Y. L. Effect of multi-layered induction coils on efficiency and uniformity of surface heating. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2010, vol. 53, no. 11–12, pp. 2414–2423.
 39. Shih S.-Y., Nian S.-C., Huang M.-S., Huang R.-C., et al. Nonplanar mold surface heating using external inductive coil and magnetic shielding materials. *Int. Commun. Heat Mass.*, 2016, vol. 71, pp. 44–55.
 40. Shih S.-Y., Nian S.-C., Huang M.-S. Comparison between single- and multiple-zone induction heating of largely curved mold surfaces. *Int. Commun. Heat Mass*, 2016, vol. 75, pp. 24–35.
 41. Zhou J., Xu J., Huang S., Hu Z., et al. Effect of laser surface melting with alternating magnetic field on wear and corrosion resistance of magnesium alloy. *Surf. Coatings Technol.* 2017, vol. 309, pp. 212–219.
 42. Li C., Guo G., Yuan Zh., Xuan W., et al. Chemical segregation and coarsening of γ' precipitates in Ni-based superalloy during heat treatment in alternating magnetic field. *J. Alloy Compd.* 2017, vol. 720, pp. 272–276.
 43. Hömberg D., Qingzhe L., Montavo-Urquiza J., Nadolski D., et al. Simulation of multi-frequency-induction-hardening including phase transitions and mechanical effects. *Finite Elem. Anal. Des.*, 2016, vol. 121, pp. 86–100.
 44. Krauter N., Stefani F., Gundrum T., Wondrak T., et al. Multi-frequency inductive system for magnesium level detection in a titanium reduction reactor. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 424, 012087.
 45. Looney R., Priede J. Concept of a next-generation electromagnetic phase-shift flowmeter for liquid metals. *Flow Meas. Instrum.*, 2019, vol. 65, pp. 128–135.
 46. Zhanwei S., Xinghus Z. A. φ - Ω method for 3-D eddy current analysis. *Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 19, no. 11, pp. 1017–1023.

47. Cramer A., Galindo V., Zennaro M. Frequency dependence of an alternating magnetic field driven flow. *Magnetohydrodynamics*, 2015, vol. 51, N. 1, pp. 133–147.
48. Nikulin I. L., Perminov A. V., Tsaplin A. I. Mathematical model of conducting fluid convection in a non-uniform alternating magnetic field. *Magnetohydrodynamics*, 2013, vol. 49, N 1–2, pp. 203–209.
49. Chen R., Yang Y., Wang Q., Ding H., et al. Dimensionless parameters controlling fluid flow in electromagnetic cold crucible. *J. Mater. Process. Technol.*, 2018, vol. 255, pp. 242–251.
50. Gellert M., Rüdiger G., Schultz M., Guseva A., et al. Nonaxisymmetric MHD instabilities of Chandrasekhar states in Taylor–Couette geometry. *Astrophys. J.*, 2016, vol. 823, 99.
51. Khripchenko S. Yu. *Elektrovikhrevyte techeniia v kanalakh MGD-ustroystv* (Electric induced vortex flows in channels of MHD-devices) Yekaterinburg: UB RAS, 2009. 261 p. (In Russian).
52. Tagawa T. Linear stability of parallel flow of liquid metal in a rectangular duct driven by a constant pressure gradient under the influence of a uniform magnetic field. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 424, 012016.
53. Sposito G., Ciofalo M. One-dimensional mixed MHD convection. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2006, vol. 49, № 17–18, pp. 2939–2949.
54. Lyubimova T.P., Skuridin R. V., Faizrahmanova I. S. Effect of a magnetic field on the hysteresis transitions during floating-zone crystal growth. *Tech. Phys. Lett.*, 2007, vol. 33, no. 9, pp. 744–747.
55. Volz M. P., Mazuruk K. Lorentz body force induced by travelling magnetic fields *Magnetohydrodynamics*, 2004, vol. 40, N. 2, pp. 117–126.
56. Demin V. A., Makarov D. V. Vliianie vrashchayushchegosia magnitnogo polia na rasplav v tsilindricheskoi zhidkoi zone (Effect of rotating magnetic field on a melt in cylindrical liquid zone). *Bulletin of Perm University. Physics*, 2004, no. 1, pp. 106–111 (In Russian).
57. Marthy P., Witkowski L. M., Trombetta P., Tomasino T., et al. On the stability of rotating MHD flows / In: Alemany A. et al (Eds.) *Transfer phenomena in magnetohydrodynamic and electroconducting flows*. Springer: 1999, pp. 327–343.
58. Jacoutot L., Fautrelle Y., Gagnoud A., Brun P., et al. Numerical modeling of coupled phenomena in a mechanically stirred molten-glass bath heated by induction. *Chem. Eng. Sci.*, 2008, vol. 63, no. 9, pp. 2391–2401.
59. Tavakoli M. H., Karbaschi H., Samavat F., Mohammadi-Manesh E. Numerical study of induction heating in melt growth systems—Frequency selection. *J. Cryst. Growth.*, 2010, vol. 312, no. 21, pp. 3198–3203.
60. Tavakoli M. H., Karbaschi H., Samavat F. Influence of workpiece height on the induction heating process. *Math. Comput. Model.*, 2011, vol. 54, no. 1–2, pp. 50–58.
61. Khodamoradi H., Tavakoli M. H., Mohammadi K. Influence of crucible and coil geometry on the induction heating process in Czochralski crystal growth system. *J. Cryst. Growth*, 2015, vol. 421, pp. 66–74.
62. Honarmandnia M., Tavakoli M. H., Sadeghi H. Global simulation of an RF Czochralski furnace during different stages of germanium single crystal growth. *Cryst. Eng. Comm.*, 2016, vol. 18, no. 21, pp. 3942–3948.
63. Honarmandnia M., Tavakoli M. H., Sadeghi H. Global simulation of an RF Czochralski furnace during different stages of germanium single crystal growth, part II: to investigate the effect of the crucible’s relative position against the RF coil on the isotherms, flow fields and thermo-elastic stresses. *Cryst. Eng. Comm.*, 2017, vol. 19, no. 3, pp. 576–583.
64. Kranjc M., Zupanic A., Miklavcic D., Jarm T. Numerical analysis and thermographic investigation of induction heating. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2010, vol. 53, no. 17–18, pp. 3585–3591.
65. Jankowski T. A., Pawley N. H., Gonzales L. M., Ross C. A., et al. Approximate analytical solution for induction heating of solid cylinders. *Appl. Math. Model.*, 2016, vol. 40, pp. 2770–2782.
66. Kennedy M. W., Akhtar S., Bakken J. A., Aune R. E. Empirical verification of a short-coil correction factor. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 2014, vol. 61, no. 5, pp. 2573–2583.
67. Nayfeh A. H. *Perturbation methods*. New-York: Wiley, 1973. 454 p.
68. Davis E. J. *Conduction and induction heating*. Herts, UK: The Institution of Engineering and Technology, 1990. 417 p.
69. Angot A. *Complements de mathematiques a l’usage des ingenieurs de l’electrotechnique et des telecommunications*. Paris: Éditions de la Revue d’Optique, 1965. 864 p. (In French).
70. Perminov A. V., Nikulin I. L. Mathematical model of the processes of heat and mass transfer and diffusion of the magnetic field in an induction furnace. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2016, vol. 89, no. 2, pp. 397–409.
71. Mistrangelo C., Bühler L. Magneto-convective instabilities in horizontal cavities. *Phys. Fluids*, 2016, vol. 28, 024104.
72. Hudoba A., Molokov S. The effect of the Prandtl number on magnetoconvection in a horizontal fluid layer. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 116, pp. 1292–1303.
73. Tagawa T., Ozoe H. Enhancement of heat transfer rate by application of a static magnetic field during natural convection of liquid metal in a cube. *J. Heat Transfer*, 1997, vol. 119, no. 2, pp. 265–271.

74. Tagawa T., Ozoe H. Enhanced heat transfer rate measured for natural convection in liquid gallium in a cubical enclosure under a static magnetic field. *J. Heat Transfer*, 1998, vol. 120, no. 4, pp. 1027–1032.
75. Tagawa T., Ozoe H. The natural convection of liquid metal in a cubical enclosure with various electro-conductivities of the wall under the magnetic field. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1998, vol. 41, no. 13, pp. 1917–1928.
76. Баранников В. А., Зимин В. Д. Неустойчивость покоя неизотермической проводящей жидкости в щели ферромагнитного массива при протекании электрического тока. *Magneto-hydrodynamics*, 1982, no. 2. С. 117–122.
77. Rudolph P. Travelling magnetic fields applied to bulk crystal growth from the melt: The step from basic research to industrial scale. *J. Cryst. Growth*, 2008, vol. 310, no. 7–9, pp. 1298–1306.
78. Burnysheva A. V., Lyubimova T. P. Oscillatory instability of advective flow in a horizontal cylinder in the presence of a rotating magnetic field. *Fluid Dynamics*, 2012, vol. 47, no. 5, pp. 557–563.
79. Bermúdez A., Gómez D., Muñiz M, pp., Salgado P., et al. Numerical simulation of a thermo-electromagneto-hydrodynamic problem in an induction heating furnace. *Appl. Numer. Math.*, 2009, vol. 59, no. 9, pp. 2082–2104.
80. Bermúdez A., Reales R., Rodríguez R., Salgado P. Numerical analysis of a finite-element method for the axisymmetric eddy current model of an induction furnace. *IMA J. Numer. Anal.*, 2010, vol. 30, no. 3, pp. 654–676.
81. Bermúdez A., Muñoz-Sola R., Vázquez R. Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating. *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, vol. 368, no. 2, pp. 444–468.
82. Bermúdez A., Gómez D., Muñiz M., Vázquez R. A thermo-electrical problem with a nonlocal radiation boundary condition. *Math. Comput. Model.*, 2011, vol. 53, no. 1–2, pp. 63–80.
83. Bermúdez A. Domínguez O., Gómez D., Salgado P. Finite element approximation of nonlinear transient magnetic problems involving periodic potential drop excitations. *Comput. Math. with Appl.*, 2013, vol. 65, no. 8, pp. 1200–1219.
84. Bermúdez A., Gómez D., Salgado P., Rodríguez R. Numerical solution of a transient nonlinear axisymmetric eddy current model with nonlocal boundary conditions. *Math. Mod. Meth. Appl. S.*, 2013, vol. 23, no. 13, pp. 2495–2521.
85. Bermúdez A., Gómez D., Rodríguez R., Venegas P. Numerical analysis of a transient nonlinear axisymmetric eddy current model. *Comput. Math. Appl.*, 2015, vol. 70, no. 8, pp. 1984–2005.
86. Burke P. Induction heating and melting systems having improved induction coils: patent US 4874916. USA, 1989.
87. Beckstein P., Galindo V., Vukčević V. Efficient solution of 3D electromagnetic eddy-current problems within the finite volume framework of OpenFOAM. *J. Comput. Phys.*, 2017, vol. 344, pp. 623–646.
88. Perminov A. V., Nikulin I. L. Mathematical model of the processes of heat and mass transfer and diffusion of the magnetic field in an induction furnace. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2016, vol. 89, no. 2, pp. 397–409.
89. Nikulin I. L., Perminov A. V. Numerical investigation of electromagnetic effects and averaged metal melt flows generated by high-frequency magnetic field. *Magneto-hydrodynamics*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 135–144.
90. Luozzo N. Di, Fontana M., Arcondo B. Modeling of induction heating of carbon steel tubes: Mathematical analysis, numerical simulation and validation. *J. Alloy Compd.*, 2012, vol. 536, pp. S564–S568.
91. Jakubovičová L., Gašparec A., Kopas P., Sága M. Optimization of the induction heating process in order to achieve uniform surface temperature. *Procedia Eng.*, 2016, vol. 136, pp. 125–131.
92. Munakata T., Someya S., Tanasawa I. Three-dimensional CZ silicon melt flow under induction heating. *J. Cryst. Growth*, 2005, vol. 275, no. 1–2, pp. 1565–1569.
93. Fishman O., Nadot V., Peysakhovich V., Mortimer J. *Induction furnace with improved efficiency coil system*: patent US 6542535B2. USA, 2003.
94. Bioul F., Dupret F. Application of asymptotic expansions to model two-dimensional induction heating systems. Part I: Calculation of electromagnetic field distribution. *IEEE Trans. Magn.*, 2005, vol. 41, no. 9, pp. 2496–2505.
95. Bioul F., Dupret F. Application of asymptotic expansions to model two-dimensional induction heating systems. Part II: Calculation of equivalent surface stresses and heat flux. *IEEE Trans. Magn.*, 2005, vol. 41, no. 9, pp. 2508–2514.
96. Lu L., Zhang S., Xu J., He H., et al. Numerical study of titanium melting by high frequency inductive heating. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2017, vol. 108, pp. 2021–2028.
97. Galpin J. M., Fautrelle Y. Liquid-metal flows induced by low-frequency alternating magnetic fields. *J. Fluid Mech.*, 1992, vol. 239, pp. 383–408.
98. Kirpo M., Jakovičs A., Baake E., Nacke B. Analysis of experimental and simulation data for liquid metal flow in a cylindrical container. *Proc. of International Scientific Colloquium: Modeling for Material Processing*, Riga. 2006, pp. 36–41.

99. Ščepanskis M., Jakovičs A., Baake E., Nacke B. Solid inclusions in an electromagnetically induced recirculated turbulent flow: Simulation and experiment. *Int. J. Multiph. Flow*, 2014, vol. 64, pp. 19–27.
100. Nikulin I. L. Analysis of possibilities of melt surface cleaning by controlling AMF frequency and distribution. *Magnetohydrodynamics*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 537–546.
101. Nikulin I. L. Mathematical modelling of AMF geometry and frequency impacts on volume and surface melt flows at induction melting. *Magnetohydrodynamics*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 513–526.
102. Nikulin I. L. Numerical simulation of melt flow control by controlling averaged electromagnetic forces generated in high frequency magnetic field. *Magnetohydrodynamics*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 527–533.
103. Umbrashko A., Baake E., Nacke B., Jakovičs A. Modeling of the turbulent flow in induction furnaces. *Metall. Mater. Trans. B.*, 2006, vol. 37, pp. 831–838.
104. Ščepanskis M., Jakovičs A., Baake E., Nacke B. Analysis of the oscillating behaviour of solid inclusions in induction crucible furnaces. *Magnetohydrodynamics*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 677–686.
105. Nikulin I. L., Perminov A. V. Mathematical modelling of frequency and force impacts on averaged metal flows in alternating magnetic field. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2019, vol. 128, pp. 1026–1032.
106. Yang J.R., Chen R., Ding H., Guo J. et al. Thermal characteristics of induction heating in cold crucible used for directional solidification. *Appl. Therm. Eng.*, 2013, vol. 59, no. 1–2, pp. 69–76.
107. Yang Y., Chen R., Guo J., Ding H., et al. Experimental and numerical investigation on mass transfer induced by electromagnetic field in cold crucible used for directional solidification. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2017, vol. 114, pp. 297–306.
108. Chen R., Yang Y., Gong X., Guo J., et al. Numerical research on magnetic field, temperature field and flow field during melting and directionally solidifying TiAl alloys by electromagnetic cold crucible. *Metall. Mater. Trans. B.*, 2017, vol. 48, no. 6, pp. 3345–3358.
109. Yang Y., Chen R., Guo J., Ding H., et al. Numerical analysis for electromagnetic field influence on heat transfer behaviors in cold crucible used for directional solidification. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 122, pp. 1128–1137.
110. Abbas M., Bossis G. Separation of two attractive ferromagnetic ellipsoidal particles by hydrodynamic interactions under alternating magnetic field. *Phys. Rev. E*, 2017, vol. 95, 062611.
111. Nikulin I. L. Analysis of AMF impact on oxide scab rupture and surface cleaning in induction melting technology. *Magnetohydrodynamics*, 2019, vol. 55, no. 1–2, pp. 141–148.
112. Buliński P. et al. Effect of turbulence modelling in numerical analysis of melting process in an induction furnace. *Arch. Metall. Mater.*, 2015, vol. 60, № 3A, pp. 1575–1579.
113. Buliński P., Smolka J., Golak S., Przyłucki R., et al. Numerical and experimental investigation of heat transfer process in electromagnetically driven flow within a vacuum induction furnace. *Appl. Therm. Eng.*, 2017, vol. 124, pp. 1003–1013.
114. Courtessole C., Etay J. Flows and mass transfers in two superimposed liquid layers in an induction furnace. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2013, vol. 65, pp. 893–906.
115. Teimurazov A. S., Frick P. G. Numerical study of molten magnesium convection in a titanium reduction apparatus. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, N. 7, pp. 1264–1275.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Никулин И.Л. Силовые и энергетические воздействия магнитного поля на проводящую среду. Модели и эксперименты // Вестник Пермского университета. Физика. 2020. № 2. С. 10–37. doi: 10.17072/1994-3598-2020-2-10-37

Please cite this article in English as:

Nikulin I. L. Force and energy impacts of magnetic field on a conducting medium. Models and experiments. Bulletin of Perm University. Physics, 2020, no. 2, pp. 10–37. doi: 10.17072/1994-3598-2020-2-10-37