ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2020 • **ФИЗИКА** • **Вып. 2**

УДК 621.37; 537.862; 517.925.42
PACS 05.45.Xt; 05.40.-a; 02.50.Ey

КРАТКОЕ СООБЩЕНИЕ

Обрывание и замыкание разложений по круговым кумулянтам

А. В. Долматова[1,2], **Д. С. Голдобин**[1,3]

[1] Институт механики сплошных сред УрО РАН
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1
email: Denis.Goldobin@gmail.com
[2] Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
127051, Москва, Большой Каретный пер., 19/1
[3] Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Обсуждается концепция кумулянтного разложения как универсального инструмента статистической физики. Так как в общем случае кумулянтный ряд является бесконечным, особый интерес вызывает вопрос о возможности его обрывания и построения конечного замыкания для уравнений макроскопической динамики системы. Для переменных на вещественной прямой данный вопрос достаточно хорошо изучен, однако при описании эффектов синхронизации в ансамблях осцилляторов, когда фазовая переменная лежит на окружности, ситуация оказывается иной. Для описания динамики подобных систем удобно использовать введенный ранее формализм круговых кумулянтов. Установлено, хотя единственным физически обоснованным обрыванием ряда круговых кумулянтов является однокумулянтное приближение, соответствующее анзацу Отта–Антонсена, учет поправок, вносимых кумулянтами более высоких порядков, может существенно улучшить представление динамики исследуемой системы.

Ключевые слова: теория синхронизации; кумулянтное разложение; круговые кумулянты; ансамбли осцилляторов

Поступила в редакцию 03.02.2020; принята к опубликованию 13.02.2020

Truncation and closure of circular cumulant series

A. V. Dolmatova[1,2], **D. S. Goldobin**[1,3]

[1] Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS, Akademika Koroleva St. 1, 614013 Perm, Russia
email: Denis.Goldobin@gmail.com

[2] Institute for Information Transmission Problems RAS (Kharkevich Institute), Bolshoy Karetny per., 19/1, 127051 Moscow, Russia

[3] Perm State University, Bukireva St. 15, 614990 Perm, Russia

This brief communication is devoted to the concept of cumulant decomposition as an universal tool of statistical physics. Since the cumulant series is infinite, the question of truncation of the cumulant expansions and constructing a finite closure for the equations of the macroscopic system dynamics are of particular interest. For variables on the real line, this issue is quite well elaborated. However, the situation is significantly different for the phase variable on the circumference. A concept of “circular” cumulants was recently introduced for describing the dynamics of such systems. Although truncation of circular cumulant expansions, except for the Ott-Antonsen case, is

© Долматова А. В., Голдобин Д. С., 2020

распространяется на условиях лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

forbidden, taking into account corrections introduced by higher-order cumulants can significantly improve representation of the dynamics of the analyzed system.

Keywords: synchronization theory; cumulant expansion; circular cumulants; oscillator ensembles

Received 03.02.2020; accepted 13.02.2020

doi: 10.17072/1994-3598-2020-2-05-09

Использование кумулянтного разложения является одним из наиболее общих подходов к описанию состояния системы в неравновесной статистической физике. При этом в общем случае кумулянтный ряд является бесконечным, поэтому для анализа реальных физических систем важной задачей является построение корректного замыкания уравнений для ограниченного числа кумулянтов.

В частности, один из наиболее значимых примеров использования кумулянтного подхода связан с кинетическим уравнением Больцмана, описывающим эволюцию одночастичной функции распределения плотности вероятности. Из данного уравнения можно получить бесконечную цепочку уравнений для моментов распределения по скорости частиц, которые представляют собой ни что иное, как законы сохранения массы, импульса (уравнение Навье–Стокса), полной механической энергии и т.д. [1]. При этом зачастую поведение системы описывается в терминах не полной, а внутренней энергии, т.е. из второго момента (полной энергии) вычитается вклад, связанный с квадратом первого момента, – кинетическая энергия макроскопического движения. С математической точки зрения, такое описание соответствует переходу от моментов к кумулянтам.

При анализе конкретных физических систем уместно использовать не бесконечное кумулянтное разложение, а некоторое его замыкание. Например, при описании течений несжимаемой жидкости принято ограничиваться уравнениями эволюции для нулевого и первого моментов (плотности и плотности импульса соответственно). При этом в уравнении для эволюции импульса присутствует градиент давления – величины, связанной со вторым кумулянтом распределения по скоростям, – система остается недоопределенной. Для замыкания используется то предположение, что актуальные для системы течения создают в поле давления и температуры вариации недостаточные для сколько-нибудь существенной вариации плотности. Закон сохранения массы при неизменной плотности требует бездивергентности течения. Наложение условия, что дивергенция скорости равна нулю, на уравнение Навье–Стокса позволяет исключить давление из задачи и найти поля скорости течений. Если же жидкость является сжимаемой, то принято полагать равным нулю третий кумулянт и описывать систему законами сохранения массы, импульса и энергии, которые дополняются соотношением между давлением и внутренней энергией – уравнением состояния. Описанные замыкания справедливы для слабо неравновесных систем (т.е. систем с малым числом Кнудсена), которым с хорошей точностью соответствуют практически все макроскопические процессы на поверхности Земли. Таким образом, уравнения механики сплошных сред являются, в сущности, примером применения кумулянтного разложения и его замыкания.

Важно заметить, что двухкумулянтное замыкание уравнений механики сплошных сред соответствует гауссовскому приближению распределения микроскопических скоростей. Однако в статистической физике нередко встречаются системы, в которых частицы представляют собой не молекулы или атомы, а более сложные макроскопические объекты: гранулы, камни, астероиды и т.д. Для подобных систем приближение малого числа Кнудсена может оказаться несправедливым. Более того, вследствие нарушения условия обратимости межчастичных столкновений распределение скоростей может становиться существенно негауссовским [2]. В этом случае двухкумулянтного замыкания оказывается недостаточно, и для корректного описания поведения системы может потребоваться учет поправок, соответствующих кумулянтам более высокого порядка.

Еще одним примером задач, в которых используется кумулянтное разложение, является описание движения Броуновских частиц [3, 4]. В этом случае уравнение Смолуховского для плотности вероятности может быть получено с помощью кумулянтного разложения по скоростям и построения его замыкания в пределе малой инерции.

Таким образом, кумулянтное разложение и его замыкания являются мощным инструментом теоретического анализа динамики стохастических систем (например, [3, 5, 6]). Вместе с тем построение приближенных замыканий, содержащих кумулянты высоких порядков, требует определенной осторожности. Важно понимать, что единственным физически обоснованным случаем конечного числа ненулевых кумулянтов является двухкумулянтное замыкание, соответствующее распределению Гаусса. Как только один из кумулянтов более высокого порядка оказывается ненулевым, ряд ненулевых кумулянтов становится бесконечным [7]. Тем не менее во многих случаях учет влияния третьего и четвертого кумулянтов на динамику первых двух позволяет построить более репрезентативное математическое описание системы и получить более точные результаты.

В классической статистической физике задачи традиционно связаны с переменными, лежащими на действительной прямой. Однако при изучении процессов самоорганизации в активных средах и теории управления становится важным описание фазовых переменных, определенных на окружности [8–10]. Для фазовых переменных φ традиционные моменты плохо описывают макроскопический порядок в системе. В этом случае естественной мерой порядка становятся параметры Курамото–Дайдо $Z_m = \langle e^{im\varphi} \rangle$ [11].

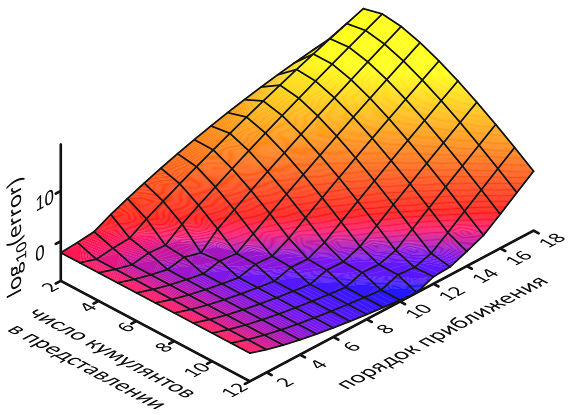
Важный прорыв в теории коллективных явлений в ансамблях фазовых элементов (например, осцилляторов с предельным циклом) связан с развитием теории Отта–Антонсена (ОА) [12], являющейся важным частным случаем теории Ватанабе–Строгаца [13]. В рамках теории ОА предложено замыкание $Z_m = Z_1^m$ для бесконечной цепочки уравнений, определяющих параметры порядка Курамото–Дайдо. Данное замыкание принято называть анзатцем Отта–Антонсена. Применение анзатца ОА позволяет получить самосогласованное уравнение динамики для Z_1.

В работе [14] был предложен новый подход, позволяющий описать параметры порядка Z_m в рамках моментного формализма с помощью введения соответствующих «круговых кумулянтов». Этот подход позволил выйти за пределы теории ОА и описать поведение систем, для которых теория ОА неприменима [14–17]. В рамках кумулянтного подхода теория ОА представляет собой частный случай, когда ненулевым является только первый кумулянт. В работах [14, 16] было показано, что учет поправок, соответствующих второму кумулянту, в системах, для которых теория ОА дает некорректные результаты, позволяет получить гораздо более точное описание динамики.

Подход, основанный на круговых кумулянтах, может быть также применен в задачах статистической физики, связанных с исследованием ориентационной динамики дипольных и квадрупольных систем, таких как ансамбли магнитных наночастиц, жидких кристаллов, активных броуновских частиц и т.д.

На практике применение подхода круговых кумулянтов к реальным системам сводится к нахождению физически релевантного обрывания кумулянтного ряда и дальнейшему построению соответствующего замыкания. В недавно опубликованной работе [18] было показано, что, в отличие от случая переменных, лежащих на прямой, однокумулянтное замыкание является единственным физически релевантным замыканием для переменных, лежащих на окружности. В терминах фаз такое замыкание в точности соответствует свернутому распределению Коши и лежит в основе анзатца ОА. Если количество ненулевых кумулянтов больше одного, то ряд ненулевых кумулянтов должен быть бесконечен для любого физически реализуемого распределения фаз. Тем не менее аналогично случаю линейных переменных при анализе многих систем оказывается полезен учет конечного числа поправок, соответствующих нескольким первым кумулянтам.

В некотором смысле здесь сохраняется симметрия между переменными на прямой и окружности. Для распределения Гаусса на прямой первые два момента характеризуют положение центра распределения и его ширину (дисперсия). При отклонении от распределения Гаусса третий и четвертый кумулянты характеризуют асимметрию распределения и его куртозис (степень «негауссовости» хвостов) соответственно. Для свернутого распределения Коши на окружности аргумент комплексного первого кругового кумулянта дает положение центра, а отклонение модуля первого кумулянта от единицы – ширину распределения. Отклонение от свернутого распределения Коши может быть количественно охарактеризовано вторым круговым кумулянтом: отличие его аргумента от удвоенного аргумента первого кумулянта определяет асимметрию распределения, а его абсолютная величина – искажение хвостов [16, 18]. Таким образом, в обоих случаях два числа задают базовое распределение, и еще два характеризуют отклонение от него.



Пример зависимости погрешности представления частоты генерации синоптических импульсов от количества используемых круговых кумулянтов при построении приближений разного порядка: когда порядок приближения превышает число кумулянтов, результаты начинают стремительно расходиться

При использовании формализма круговых кумулянтов важен аккуратный анализ построенного замыкания. Так, в работе [18] было показано, что в некоторых физических системах макроскопические переменные, определяющие коллективную динамику (например, частота генерации синоптических импульсов в нейронных сетях), могут зависеть от параметров порядка Курамото–Дайдо таким образом, что некорректное представление этих переменных в терминах круговых кумулянтов всегда оказывается расходящимся (см. рисунок). В работе [18] предложен регулярный подход к построению замыканий в случае, когда кумулянтный ряд представляет собой затухающую геометрическую прогрессию. Поправки более высокого порядка по некоторому кумулянту можно вводить только совместно с поправками, связанными со всеми более высокими кумулянтами, того же порядка точности. Показано, что иерархия кумулянтов в виде геометрической прогрессии характерна для многих типичных распределений; соответственно, предложенный подход может быть использован для широкого круга реальных физических систем, например, для описания ансамблей биологических и электрохимических осцилляторов.

Список литературы

1. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2002.
2. *Brilliantov N. V., Poeschel T.* Kinetic Theory of Granular Gases. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 2010.
3. *Wilemski G.* On the derivation of Smoluchowski equations with corrections in the classical theory of Brownian motion // J. Stat. Phys. 1976. Vol. 14. N. 2. P. 153–169. DOI: 10.1007/BF01011764
4. *Gardiner C. W.* Handbook of Stochastic Methods. Springer, 1983.
5. *Pikovsky A., Zaikin A., de la Casa M. A.* System size resonance in coupled noisy systems and in the Ising model // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 88. N. 5, 050601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.050601
6. *Zaks M. A., Neiman A. B., Feistel S., Schimansky-Geier L.* Noise-controlled oscillations and their bifurcations in coupled phase oscillators // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68, 0066206. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.066206
7. *Lukacs E.* Characteristic Functions. 2nd ed. London: Griffin, 1970.
8. *Winfree A. T.* Biological Rhythms and the Behavior of Populations of Coupled Oscillators // J. Theoret. Biol. 1967. Vol. 16. P. 15–42. DOI: 10.1016/0022-5193(67)90051-3
9. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. New York: Dover, 2003.
10. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
11. *Daido H.* Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: Bifurcation of the order function // Physica D 1996. Vol. 91. N. 12. P. 24–66. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00260-X
12. *Ott E., Antonsen T. M.* Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // Chaos 2008. Vol. 18, 037113. DOI: 10.1063/1.2930766
13. *Watanabe S., Strogatz S. H.* Integrability of a Globally Coupled Oscillator Array // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. P. 2391–2394. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.2391
14. *Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A.* Dynamics of Noisy Oscillator Populations Beyond the Ott-Antonsen Ansatz // Phys. Rev. Lett. 2018. Vol. 120, 264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.264101
15. *Голдобин Д. С., Тюлькина И. В., Клименко Л. С., Пиковский А.* К описанию коллективной динамики в ансамблях реальных осцилляторов // Вестник Пермского университета. Физика. 2018. № 3 (41). С. 5–7. DOI: 10.17072/1994-3598-2018-3-05-07
16. *Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A.* Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // Chaos. 2018. Vol. 28. 101101. DOI: 10.1063/1.5053576
17. *Тюлькина И. В., Голдобин Д. С., Клименко Л. С., Пиковский А. С.* Двухгрупповые решения для динамики ансамблей фазовых систем типа Отта–Антонсена // Известия вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61. №8–9. С. 718–728. DOI: 10.1007/s11141-019-09924-7
18. *Goldobin D. S., Dolmatova A. V.* Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series // Physical Review Research. 2019. Vol. 1, 033139. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.1.033139

References

1. Pitaevskii L. P., Lifshitz E. M. *Physical kinetics.* Course of Theoretical Physics. Vol. 10. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012.
2. Brilliantov N. V., Poeschel T. *Kinetic Theory of Granular Gases*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 2010.
3. Wilemski G. On the derivation of Smoluchowski equations with corrections in the classical theory of Brownian motion. *J. Stat. Phys.*, 1976, vol. 14, no. 2, pp. 153–169. DOI: 10.1007/BF01011764
4. Gardiner C. W. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer, 1983.
5. Pikovsky A., Zaikin A., de la Casa M. A. System size resonance in coupled noisy systems and in the Ising model. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, vol. 88, no. 5, 050601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.050601
6. Zaks M. A., Neiman A. B., Feistel S., Schimansky-Geier L. Noise-controlled oscillations and their bifurcations in coupled phase oscillators. *Phys. Rev. E,* 2003, vol. 68, 0066206. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.066206
7. Lukacs E. *Characteristic Functions*. 2nd ed. London: Griffin, 1970.
8. Winfree A. T. Biological Rhythms and the Behav-

ior of Populations of Coupled Oscillators. *J. Theoret. Biol*, 1967, vol. 16, p. 15–42. DOI: 10.1016/0022-5193(67)90051-3

9. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. New York: Dover, 2003.
10. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
11. Daido H. Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: Bifurcation of the order function. *Physica D,* 1996, vol. 91, no. 12, pp. 24–66. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00260-X
12. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos,* 2008, vol. 18, 037113. DOI: 10.1063/1.2930766
13. Watanabe S., Strogatz S. H. Integrability of a Globally Coupled Oscillator Array. *Phys. Rev. Lett*., 1993, vol. 70. pp. 2391–2394. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.2391
14. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of Noisy Oscillator Populations Beyond the Ott-Antonsen Ansatz. *Phys. Rev. Lett*., 2018, vol. 120, 264101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.264101
15. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovskii A. Towards the description of collective dynamics in ensembles of real oscillators. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2018, no. 3 (41), pp. 5–7. DOI: 10.17072/1994-3598-2018-3-05-07
16. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators. *Chaos*, 2018, vol. 28, 101101. DOI: 10.1063/1.5053576
17. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Two-bunch solutions for the dynamics of Ott-Antonsen phase ensembles. *Radiophys. Quantum Electron*., vol. 61, pp. 640–649. DOI: 10.1007/s11141-019-09924-7
18. Goldobin D. S., Dolmatova A. V. Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series. *Physical Review Research,* 2019, vol. 1, 033139. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.1.033139

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:
Долматова А. В., Голдобин Д. С. Обрывание и замыкание разложений по круговым кумулянтам // Вестник Пермского университета. Физика. 2020. № 2. С. 5–9. doi: 10.17072/1994-3598-2020-2-05-09

Please cite this article in English as:
Dolmatova A. V., Goldobin D. S. Truncation and closure of circular cumulant series. Bulletin of Perm University. Physics, 2020, no. 2, pp. 5–9. doi: 10.17072/1994-3598-2020-2-05-09