

УДК 532.22; 532.62  
PACS 47.55.P-, 68.15.+e

## Исследование амплитудных уравнений длинноволновой конвекции Марангони в слое бинарной смеси

С. В. Шкляев<sup>a</sup>, А. О. Иванцов<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: aivantsov@icmm.ru

Работа посвящена исследованию длинноволновой термо- и концентрационно-капиллярной конвекции в слое бинарной смеси. Несмотря на весьма продолжительную историю исследований конвекции бинарных смесей, интерес к ним не только не ослабевает, но и усиливается в ряде направлений, особенно в связи с использованием коллоидных наносuspензий и тонких слоев (пленок). На нижней границе слоя поддерживается постоянный поток тепла. Такая ситуация реализуется в случае, если теплопроводность подложки значительно меньше теплопроводности жидкости. Верхняя свободная граница жидкости предполагается недеформируемой, при этом поверхностное натяжение зависит как от температуры, так и от концентрации примеси. Получены нелокальные нелинейные амплитудные уравнения длинноволновой конвекции Марангони в слое бинарной смеси. Проведен слабонелинейный анализ структур для трех типов решеток: ромбической (в пространстве Фурье), квадратной и гексагональной. Определены условия устойчивости конечно амплитудных структур.

**Ключевые слова:** тонкие пленки; длинноволновая колебательная неустойчивость; слабонелинейный анализ; отбор структур

*Поступила в редакцию 24.03.2016; принята к опубликованию 08.04.2016*

## The study of amplitude equations for longwave Marangoni convection in a binary layer

S. V. Shklyayev<sup>a</sup>, A. O. Ivantsov<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics  
Akad. Koroleva St. 1, 614013, Perm

<sup>b</sup> Perm State University  
Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: aivantsov@icmm.ru

The work deals with the study of the long-wave thermal and solutocapillary convection in a layer of a binary mixture. Despite the long research history of the convection in a binary mixture, the interest to these studies does not decrease, moreover, it becomes more remarkable, especially in problems of the convection in colloidal nanosuspensions and the thin films. The constant heat flux is maintained at the lower boundary of the layer. This boundary condition is corresponded to the situation when the thermal conductivity of the substrate is much smaller than the thermal conductivity of the binary mixture. The free surface of the layer is supposed to be non-deformable and at the same time the surface tension depends on the temperature and the solute concentration. Non-

local nonlinear amplitude equations for longwave Marangoni convection in a binary layer are obtained. The weakly nonlinear analysis is carried out for pattern selection on the lattices of three types: rhombic (in Fourier space), square and hexagonal. The conditions of stability of finite amplitude structures are found.

**Keywords:** thin films; longwave oscillatory instability; weakly nonlinear analysis, pattern formations

*Received 24.03.2016; accepted 08.04.2016*

doi: 10.17072/1994-3598-2016-1-55-63

## 1. Введение

Одной из первых задач, в которой была обнаружена длинноволновая колебательная неустойчивость, является возбуждение нелинейных волн в конвекции Марангони. Эта задача изучена группой М. Веларде [1]; подробный обзор работ можно найти в [2]. Однако при получении уравнения Кортвега де Фриза (или его слабодиссипативного аналога) предполагалось, что нижняя поверхность свободная и недеформируемая, т.е. жидкость может двигаться вдоль нее без трения. Такое допущение позволяет рассматривать слабо затухающие волны, но оказывается малоприменимым с физической точки зрения. В более близких к реальности системах для появления длинноволновой колебательной неустойчивости необходимо наличие как минимум двух полей (амплитудных функций), зависящих от медленных координат.

С математической точки зрения в диссипативных системах существует два типа длинноволновых колебательных неустойчивостей. Один из них имеет место, например, в бинарных смесях с недеформируемыми поверхностями. В этом случае сами амплитудные функции (по крайней мере, в главном порядке) не влияют на нелинейную динамику, существенны лишь их градиенты. В таких системах эволюционные уравнения нелокальны – вместо системы амплитудных уравнений динамика возмущений определяется условиями разрешимости некоей неоднородной линейной задачи. Для этого типа неустойчивости характерно разделение времен: быстрые колебания с квадратичным (в ситуации общего положения) законом дисперсии и медленная, даже для режимов с конечной амплитудой, нелинейная эволюция.

Другой тип неустойчивости, как правило, обнаруживается в системах с деформируемыми границами. В этом случае длинноволновая конвекция описывается системой двух и более нелинейных амплитудных уравнений. Одной из амплитудных функций является отклонение поверхности или толщина слоя, причем эта функция присутствует в уравнениях и без градиентов. Неустойчивости такого типа не рассматриваются в настоящей статье.

В работе [3] была впервые обнаружена и исследована длинноволновая колебательная мода первого типа. Для гравитационной конвекции в слое би-

нарной смеси получена система уравнений Ландау, описывающая слабонелинейную динамику. Позднее в работе [4] было показано, что зависимость коэффициентов нелинейного взаимодействия для двух волн от угла между их волновыми векторами, найденная в [3], присуща широкому кругу задач, для которых выполнены следующие два необходимых условия: только градиенты амплитудных функций, а не сами функции определяют нелинейную динамику и закон дисперсии является квадратичным. В силу симметрии задачи в работе [3] существенны только кубические нелинейности, однако рассмотрены также эффекты небуссиновской конвекции, когда существенную роль играют квадратичные члены. В работе [3] рассмотрены только структуры на квадратной решетке (т.е. обладающие симметрией квадрата в плоскости слоя) и показано, что отбираются чередующиеся валы (alternating rolls) – суперпозиция двух стоячих волн, поляризованных вдоль базисных векторов решетки, со сдвигом фаз между волнами в  $90^\circ$ . Далее, говоря о «решении на решетке», мы будем иметь в виду идеально периодические решения, обладающие соответствующей симметрией. Разумеется, для таких режимов крайне важным является анализ устойчивости по отношению к внешним возмущениям, не принадлежащим рассматриваемой решетке, – в некотором смысле области устойчивости по отношению к внешним возмущениям аналогичны областям Буссе [5,6].

Длинноволновая колебательная мода для конвекции Марангони в слое бинарной смеси при наличии эффекта Соре была обнаружена и исследована в двумерной постановке в работе [7]. Позднее в [8] проведен отбор трехмерных структур с использованием общих результатов анализа бифуркаций с симметрией квадрата [9]. Показано, что для структур на квадратной решетке отбираются чередующиеся валы, которые являются устойчивыми и по отношению к внешним возмущениям с произвольным волновым вектором, не принадлежащим квадратной решетке [8].

Поскольку прямоугольные структуры (ромбические в Фурье-пространстве) являются неустойчивыми по отношению к валам или квадратным структурам для стационарных надкритических режимов, их исследование для более сложных волновых режимов обычно не проводится. Однако,

как показал анализ, проведенный в работе [8], для волновых прямоугольных режимов ситуация более сложная. В этом случае также устойчивы чередующиеся валы на прямоугольной решетке: суперпозиция двух стоячих волн с разностью фаз в  $90^\circ$ , поляризованных под углом друг к другу. Однопараметрическое семейство (в качестве параметра выступает угол между базисными векторами решетки) чередующихся валов на прямоугольной решетке является устойчивым по отношению к внешним возмущениям, если угол между базисными волновыми векторами превышает  $60^\circ$ . Следует отметить, что чередующиеся валы на квадратной решетке не являются предельным случаем чередующихся валов на прямоугольной решетке, поскольку для квадратов возникают дополнительные резонансы и важна генерация «наклонных волн» [3,8].

Еще более сложная ситуация обнаружена для структур на гексагональной решетке [4,10]. Показано, что наряду с известным вырождением гексагональных колебательных структур [11] для длинноволновой колебательной конвекции существуют еще два дополнительных вырождения, приводящие к тому, что в системе с кубической нелинейностью отбирается целое трехпараметрическое семейство решений. Отбор устойчивого представителя внутри этого семейства производится с учетом членов пятого порядка по амплитуде [4,10]. Отбираются либо волновые валы (wavy rolls; валы, искривленные в продольном направлении подобно гармонической волне); либо в системе вообще нет устойчивых решений и реализуется гетероклинический цикл: система блуждает между тремя неустойчивыми предельными циклами, поочередно притягиваясь и отталкиваясь от каждого из них. Исследована также устойчивость гексагональных структур относительно внешних возмущений.

Важно отметить, что волновые структуры, обладающие квадратной и гексагональной симметрией, могут быть одновременно устойчивыми: в зависимости от начальных условий система притягивается к представителю того или иного семейства. Однако подробный анализ устойчивости волновых структур на суперрешетках (комбинации двух квадратных решеток с заданным углом между базисными векторами) к настоящему времени не проведен. Для стационарных режимов устойчивость на суперрешетках изучена в [12], результаты работ [13,14] также могут быть использованы для стационарных конвективных течений. Ценность подобных исследований очевидна – в гидродинамических системах практически всегда отсутствует навязанная извне симметрия (единственным исключением является наличие границ для области формы параллелепипеда), поэтому проблема выбора между гексагональными и квадратными структурами крайне важна. Другой этап исследования длинноволновой колебательной конвекции

предполагает анализ модуляционной неустойчивости вышеописанных режимов вблизи порога (в некотором смысле аналогичной неустойчивости Бенджамина–Фейра [15]). Очевидно, что модуляция диспергирующих волн может играть определяющую роль в нелинейной эволюции и, в частности, в отборе структур.

В работах [16,17] изучаются структуры конечной амплитуды (конечными являются главные части возмущений температуры и концентрации, скорости конвективного течения малы вследствие предположений длинноволновости). В частности, получены области Буссе – области устойчивости регулярных волновых режимов относительно возмущений, не принадлежащих решетке.

В ряде работ было изучено влияние дополнительных осложняющих факторов, таких как наличие нерастворимого [18,19] или растворимого [20] поверхностно-активного вещества, деформация свободной границы [21-25], влияние теплового расширения [26,27].

Экспериментально и численно длинноволновая колебательная конвекция в слое бинарной смеси изучена недостаточно подробно. Конвекция Марангони исследовалась в работах [28,29], однако в этих экспериментах существенную роль играло испарение – эффект, не учтенный в теории.

В работах [30,31] для классической задачи – конвекция Марангони в слое жидкости, подогреваемой снизу, – была обнаружена область в пространстве параметров, где наиболее опасной является колебательная мода. Показано, что при определенном наборе параметров возможно мягкое возбуждение стационарных режимов или бегущих валов. Кроме того, вычисления показали, что даже жесткое возбуждение не обязательно приводит к разрыву слоя – случай крайне редкий в длинноволновых неустойчивостях систем с деформируемой границей.

Настоящая работа посвящена исследованию длинноволновой термо- и концентрационно-капиллярной конвекции в слое бинарной смеси. Несмотря на весьма продолжительную историю исследований конвекции бинарных смесей, интерес к ним не только не ослабевает, но и усиливается в ряде направлений, особенно в связи с использованием коллоидных наносuspensions и тонких слоев (пленок). Это связано с фундаментальными исследованиями гидромеханики многокомпонентных и многофазных систем, в которых неоднородности концентрации, влияя на изменение силовых полей, вызывают формирование разнообразных пространственно-временных структур.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим тонкий слой бинарной жидкости толщиной  $d$ . На нижней границе слоя ( $z = 0$ ) подерживается постоянный поток тепла. Такая ситу-

ация реализуется в случае, если теплопроводность подложки значительно меньше теплопроводности жидкости. В отсутствие движения жидкости в слое создается вертикальный градиент температуры, который, в свою очередь, благодаря эффекту термодиффузии создает градиент концентрации. Верхняя свободная граница жидкости предполагается недеформируемой, при этом поверхностное натяжение зависит как от температуры, так и от концентрации:

$$\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0) + \sigma_C(C - C_0). \quad (1)$$

Выбирая в качестве единиц измерения времени, длины, температуры, концентрации примеси, скорости и давления следующие величины:  $d^2/\kappa$ ,  $d$ ,  $ad$ ,  $ad\sigma_T/\sigma_C$ ,  $\kappa/d$ ,  $\rho\nu\kappa/d^2$  (где  $\kappa$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  – температуропроводность, плотность и кинематическая вязкость жидкости, соответственно), получим систему уравнений и граничных условий:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$P^{-1}(\vec{v}_t + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) = -\nabla p + \nabla^2 \vec{v}, \quad (3)$$

$$T_t + \vec{v} \cdot \nabla T = \nabla^2 T, \quad (4)$$

$$L^{-1}(C_t + \vec{v} \cdot \nabla C) = \nabla^2(C + \chi T), \quad (5)$$

$$z=0: \quad \vec{v} = 0, \quad (6)$$

$$T_z + 1 = (C + \chi T)_z = 0,$$

$$z=1: \quad w = 0, \quad (7)$$

$$T_z + BT = 0,$$

$$(C + \chi T)_z = 0,$$

$$\vec{u}_z = -M\nabla_2(T - C).$$

Здесь  $\vec{v} = \vec{u} + w\vec{e}_z$ ,  $\nabla_2$  – двумерная проекция градиента на плоскость  $(x, y)$ . Здесь и далее индексами обозначены частные производные по соответствующим координатам.

Задача (2)–(7) содержит следующие безразмерные параметры:

$$M = \frac{\sigma_T ad^2}{\rho\nu\kappa}, \quad B = \frac{qd}{k_{th}}, \quad (8)$$

$$\chi = \frac{\alpha\sigma_C}{\sigma_T}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad L = \frac{D}{\kappa}$$

(соответственно число Марангони, число Био, число Соре, число Прандтля и число Льюиса). Здесь  $q$ ,  $k_{th}$ ,  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от поверхности жидкости к окружающей среде, теплопроводность и коэффициент Соре соответственно. Также может быть введено число Шмидта  $S = P/L$ .

### 3. Линейная устойчивость

Краевая задача (2)–(7) имеет простое решение в случае, когда жидкость покоится:

$$T_0 = \frac{1+B}{B} - z, \quad (9)$$

$$C_0 = const + \chi z,$$

$$\vec{v}_0 = 0.$$

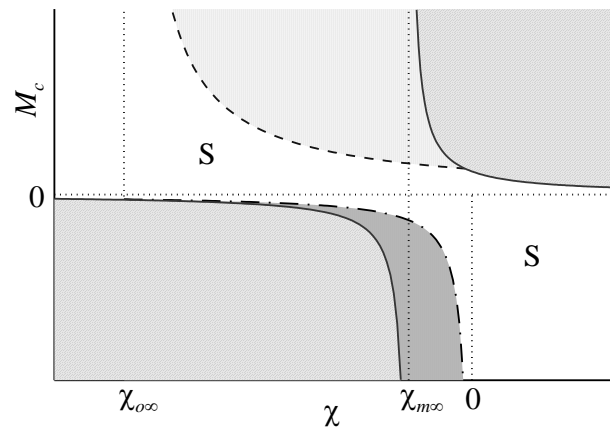
Линейная устойчивость данного положения равновесия была исследована в работе [7] для случая  $k \sim B^{1/4}$  (см. рисунок).

В работе [7] были получены граница длинноволновой колебательной неустойчивости и аналитическая формула для длинноволновой монотонной моды неустойчивости:

$$M_0^{(0)} = 48m_0^{(0)} = 48 \frac{L}{\chi_L}, \quad (10)$$

$$\chi_L = \chi + L + \chi L.$$

В частности, было показано, что когда  $\chi < \chi_{m\infty} = -L/(1+L)$ , неустойчивость имеет место при отрицательных числах Марангони, т.е. при нагреве сверху.



Карта линейной устойчивости слоя бинарной жидкости: сплошная линия – граница монотонной неустойчивости, полученной в [7], штрихпунктирная линия – новая мода монотонной неустойчивости [21], пунктирная линия – колебательная неустойчивость

В работе [21] рассмотрен случай  $k \sim \sqrt{B}$  и показано, что такое приближение расширяет область параметров, в которой наблюдается развитие длинноволновой монотонной неустойчивости (см. рисунок):

$$M_* = 48m_0^{(B)} = 48 \frac{L(k^2 + B)}{\chi_L k^2 + \chi B}. \quad (11)$$

#### 4. Слабонелинейный анализ устойчивости

##### 4.1. Вывод амплитудных уравнений

Рассмотрим нелинейную эволюцию длинноволновых возмущений масштаба  $O(B^{-1/2})$ . Введем малый параметр по формуле  $B = \epsilon^2 \beta$ , растянем продольные координаты  $(X, Y) = \epsilon(x, y)$  и перемасштабируем время  $\tau = \epsilon^4 t$ . Заметим, что при  $\beta = 1$ ,  $\epsilon = \sqrt{B}$ , однако введение параметра  $\beta$  упрощает анализ предельных случаев.

Возмущения скорости, температуры и концентрации запишем в виде:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \epsilon \bar{U}, \\ w &= \epsilon^2 W, \\ T &= T_0 + \Theta, \\ C &= C_0 + \Sigma.\end{aligned}$$

Таким образом, возмущения температуры и концентрации предполагаются конечными, в то время как возмущения скорости – малыми. При этом продольные компоненты скорости значительно больше вертикальной компоненты.

Подставляя данные в систему (2)–(7), получим в нулевом порядке разложения по малому параметру следующую систему:

$$\begin{aligned}\Theta_0'' &= 0, \\ \Sigma_0'' &= 0,\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}p_0' &= 0, \\ U_0'' &= \nabla p_0, \\ W_0' &= -\nabla \cdot U_0,\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}z = 0: \quad U_0 &= 0, \\ \Theta_0' &= \Sigma_0' = W_0 = 0, \\ z = 1: \quad \Theta_0' &= \Sigma_0' = W_0 = 0, \\ U_0' &= -48m_0 \nabla (\Theta_0 - \Sigma_0).\end{aligned}\tag{14}$$

Решение данной задачи, соответствующее возмущениям температуры и концентрации примеси, однородным поперек слоя и течения, которые генерируются локальными изменениями поверхностного натяжения, ( $h = \Theta_0 - \Sigma_0$ ), имеет вид:

$$\begin{aligned}\Theta_0 &= F(X, Y, \tau), \\ \Sigma_0 &= G(X, Y, \tau), \\ p_0 &= -72m_0 h, \\ U_0 &= -m_0 (12z^2(1-z)) \nabla h, \\ W_0 &= m_0 (12z(2-3z)) \nabla^2 h.\end{aligned}\tag{16}$$

В первом порядке получим систему:

$$\begin{aligned}L_1(F, G) &\equiv \nabla^2 F - m_0 \nabla^2 h - \beta F = 0, \\ L_2(F, G) &\equiv L \nabla^2 (G + \chi F) + \chi m_0 \nabla^2 h = 0.\end{aligned}$$

Её решение может быть записано в виде

$$\begin{aligned}F &= \sum_{|\vec{k}|=K} A_{\vec{k}}(\tau) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + c.c., \\ G &= -\frac{\beta K - m_0 K^2}{m_0 K^2} F.\end{aligned}\tag{17}$$

Условие разрешимости задачи второго порядка приводит к следующим уравнениям для амплитудных функций:

$$\begin{aligned}L_1(F_1, G_1) &= \dot{F} + m_1 \nabla^2 h + \frac{m_0}{30} \left( 9m_0 \frac{\chi_L}{L} - 7 \right) \nabla^4 h - \\ &- \frac{\beta^2}{3} F - \frac{\beta m_0}{30} \nabla^2 h + \frac{m_0^2}{10} \left( 1 + \frac{2}{P} \right) \nabla \cdot (\nabla^2 h \nabla h) + \\ &+ \frac{m_0^2}{10} \nabla^2 (P^{-1} (\nabla h)^2 + 6\Phi) + \frac{312m_0^2}{35P} \vec{J} \cdot \nabla F - \\ &- \frac{48m_0^2}{35} \nabla \cdot (\nabla h \cdot \nabla F \nabla h) + \\ &+ \frac{3}{5} \beta m_0 (\nabla \cdot (F \nabla h) + \nabla h \cdot \nabla F),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_2(F_1, G_1) &= \dot{G} - \chi m_1 \nabla^2 h - \\ &- \frac{\chi m_0}{30} \left( 9m_0 \frac{\chi_L}{L} - 7 \right) \nabla^4 h + \\ &+ \frac{312m_0^2}{35P} \vec{J} \cdot \nabla G - \\ &- \frac{\chi m_0^2}{10} \left( 1 + L^{-1} + \frac{2}{P} \right) \nabla \cdot (\nabla^2 h \nabla h) - \\ &- \frac{\chi m_0^2}{10} \nabla^2 (P^{-1} (\nabla h)^2 + 6\Phi) + \\ &+ \frac{48m_0^2}{35} \nabla \cdot ((\Phi - \nabla h \cdot \nabla F) \nabla h) - \\ &- \frac{3}{5} \chi \beta m_0 \nabla \cdot (F \nabla h),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \nabla \zeta - \nabla^2 h \nabla h, \\ \nabla^2 \zeta &= \nabla \cdot (\nabla^2 h \nabla h).\end{aligned}$$

Полученная система является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений для функций  $F_1, G_1$ .

##### 4.2. Отбор структур

Анализ полученных амплитудных уравнений позволяет предсказать режим конвекции вблизи

порога устойчивости. Правые части в системе для амплитудных функций содержат квадратичные и кубические нелинейные слагаемые, поэтому волновые вектора удовлетворяют следующему резонансному условию:

$$s_1 \vec{k}_1 + s_2 \vec{k}_2 + s_3 \vec{k}_3 = \vec{k}, \quad (18)$$

где  $|\vec{k}_l| = |\vec{k}| = K$  ( $l=1,2,3$ ) и  $s_1, s_2$  равны  $\pm 1$ . Для квадратичных членов  $s_3 = 0$ , для кубических  $s_3 = \pm 1$ . Подставляя (17) в амплитудные уравнения и учитывая условие (18), получим следующее нелинейное уравнение для амплитуд Фурье гармоник:

$$\alpha \dot{A}_{\vec{k}} = \gamma A_{\vec{k}} - \left( N_0 |A_{\vec{k}}|^2 + \sum_{\vec{q}} N_{\vec{k}\vec{q}} |A_{\vec{q}}|^2 \right) A_{\vec{k}} + Q A_{\vec{k}}^* A_{-\vec{k}-\vec{k}},$$

$$\alpha = K^2 (1 + L - (1 + \chi) m_0) + \beta,$$

$$\gamma = K^2 \beta_K \left[ L \frac{m_1}{m_0} - \frac{K^2}{30} (9m_0 \chi_L - 7L) - \frac{\beta}{30} \frac{K^2 - 9\beta}{\beta_K} (L - \chi m_0) \right],$$

$$N_0 = \frac{144}{35L} \beta_K^2 (K^2 (L^2 - m_0) + \beta_K),$$

$$N_{\vec{k}\vec{q}} = N(\theta_{\vec{k}\vec{q}}) = \frac{2}{3} N_0 (1 + 2 \cos^2 \theta_{\vec{k}\vec{q}}),$$

$$Q = \frac{K^2 \beta_K^2}{10} \left( 5(1+L) - 5 \frac{(1+\chi)LK^2}{\chi\beta + \chi_L K^2} - S^{-1} \right),$$

где  $\vec{q}$  обозначает все волновые вектора решения (17), удовлетворяющие условию (18), кроме вектора  $\vec{k}$ ,  $\theta_{\vec{k}\vec{q}}$  – угол между векторами  $\vec{q}$  и  $\vec{k}$ .

Полученное амплитудное уравнение исследовалось ранее в работе [12]. Для того чтобы применить критерии, полученные в работе [12], сделаем следующие замены:

$$\begin{aligned} T_1 &= N(\pi/6) / N_0 = \frac{5}{3}, \\ T_2 &= N(\pi/3) / N_0 = 1, \\ T_3 &= N(\pi/2) / N_0 = \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Кроме того, величина  $\hat{\gamma}$ , характеризующая скорость роста в [12], в данном случае определяется как  $\hat{\gamma} = \gamma N_0 / Q^2$ . Тогда, применяя критерии устойчивости, можем сделать следующие выводы:

- 1) валы неустойчивы по отношению к формированию как квадратов ( $T_3 < 1$ ), так и гексагонов ( $\hat{\gamma} < 1/(1-T_2) \rightarrow \infty$ );
- 2) квазипериодические структуры неустойчивы, потому что коэффициенты  $Q_2 = 1 - T_1 - T_2 + T_3 = -1$  и  $Q_3 = 1 - 2T_1 + 2T_2 - T_3 = -1$  отрицательны;
- 3) условие  $T_3 < 1$  гарантирует устойчивость квадратов по отношению к валам, потому что  $Q_2 < 0$ ;
- 4) квадраты становятся устойчивыми по отношению к формированию гексагональных структур при

$$\frac{N_0 \gamma}{Q^2} > \hat{\gamma}_{sh} = \frac{1+T_3}{Q_2^2} = \frac{5}{3};$$

- 5) в случае если  $(2+T_2)/(1-T_2)^2$  велико, гексагоны устойчивы по отношению к валам;
- 6) условие  $Q_3 < 0$  гарантирует, что гексагональные структуры устойчивы по отношению к квадратным.

Граница, разделяющая области устойчивости «верхних» и «нижних» гексагонов, определяется условием  $Q = 0$  (в центральной части «верхних» гексагонов жидкость движется вверх, в «нижних» – вниз). Легко показать, что неравенство  $S > 1/5$  (которое выполняется для всех известных нам бинарных жидкостей) гарантирует, что  $Q$  положительно, следовательно, отбираются верхние гексагоны.

## 5. Заключение

Проведен слабонелинейный анализ устойчивости длинноволновой термо- и концентрационно-капиллярной конвекции в слое бинарной смеси. Получены нелокальные нелинейные амплитудные уравнения, описывающие развитие длинноволновой монотонной неустойчивости. Определены условия устойчивости конечно амплитудных структур. Показано, что «верхние» гексагоны устойчивы во всем интервале их существования, структуры симметрии квадрата становятся устойчивы при числах Марангони больших определенного порога. Кроме того, показано, что гексагональные структуры формируются жестким образом, возможно подкритическое развитие неустойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке из средств гранта РФФИ 14-01-96027 p\_урал\_a.

## Список литературы

1. Garazo A. N., Velarde M. G. Dissipative Korteweg–de Vries description of Marangoni–Benard oscillatory convection // Physics of Fluids A. 1991. Vol. 3. P. 2295–2300.

2. *Nepomnyashchy A. A., Velarde M. G., Colinet P.* Interfacial Phenomena and Convection. London: CRC Press, 2001. 384 p.
3. *Pismen L. M.* Selection of long-scale oscillatory convective patterns // *Physical Review A*. 1988. Vol. 38. P. 2564–2572.
4. *Shklyaev S. V., Nepomnyashchy A. A., Oron A.* Oscillatory long-wave Marangoni convection in a layer of a binary liquid: Hexagonal patterns // *Physical Review E*. 2011. Vol. 84, 056327.
5. *Schluter A., Lortz D., Busse F. H.* On stability of steady finite-amplitude convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 1965. Vol. 23. P. 129–144.
6. *Busse F. H.* On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below // *Journal of Mathematical Physics*. 1967. Vol. 46. P. 140–150.
7. *Oron A., Nepomnyashchy A. A.* Long-wavelength thermocapillary instability with the Soret effect // *Physical Review E*. 2004. Vol. 69, 016313.
8. *Shklyaev S. V., Nepomnyashchy A. A., Oron A.* Three-dimensional oscillatory long-wave Marangoni convection in a binary liquid layer with Soret effect: Bifurcation analysis // *Physics of Fluids*. 2007. Vol. 19, 072105.
9. *Silber M., Knobloch E.* Hopf bifurcation on a square lattice // *Nonlinearity*. 1991. Vol. 4. P. 1063–1106.
10. *Shklyaev S. V., Nepomnyashchy A. A., Oron A.* Long-wave oscillatory convection in a binary liquid: Hexagonal patterns // *Europhysics Letters*. 2009. Vol. 86, 14005.
11. *Roberts M., Swift J. W., Wagner D. H.* The Hopf bifurcation on a hexagonal lattice / In: *Multiparameter Bifurcation Theory*. Eds. *Golubitsky M., Guckenheimer J.* // *Contemporary Mathematics*. 1986. Vol. 56. P. 283–317.
12. *Golovin A. A., Nepomnyashchy A. A., Pismen L. M.* Pattern formation in large-scale Marangoni convection with deformable interface // *Physica D*. 1995. Vol. 81. P. 117–147.
13. *Silber M., Skeldon A. C.* Parametrically excited surface waves: Two-frequency forcing, normal form symmetries, and pattern selection // *Physical Review E*. 1999. Vol. 59. P. 5446–5456.
14. *Skeldon A. C., Guidoboni G.* Pattern selection for Faraday waves in an incompressible viscous fluid // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 2007. Vol. 67. P. 1064–1100.
15. *Benjamin T. B., Feir J. E.* The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. Vol. 27. P. 417–430.
16. *Shklyaev S. V., Nepomnyashchy A. A., Oron A.* Oscillatory longwave Marangoni convection in a binary liquid. Part 1: Rhombic patterns // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 2013. Vol. 73. N. 6. P. 2203–2223.
17. *Shklyaev S. V., Nepomnyashchy A. A., Oron A.* Oscillatory longwave Marangoni convection in a binary liquid. Part 2: Square patterns // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 2014. Vol. 74. N. 4. P. 1005–1024.
18. *Mikishev A. B., Nepomnyashchy A. A.* Long-wavelength Marangoni convection in a liquid layer with insoluble surfactant: Linear theory. *Microgravity Science and Technology*. 2010. Vol. 22. P. 415–423.
19. *Mikishev A. B., Nepomnyashchy A. A.* Nonlinear large-scale Marangoni convection in a heated liquid layer with insoluble surfactant // *Physical Review E*. 2010. Vol. 82, 046306.
20. *Shklyaev S. V., Nepomnyashchy A. A.* Longwave Marangoni convection in a surfactant solution between poorly conducting boundaries // *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. Vol. 718. P. 428–456.
21. *Podolny A., Oron A., Nepomnyashchy A. A.* Long-wave Marangoni instability in a binary-liquid layer with deformable interface in the presence of Soret effect: Linear theory // *Physics of Fluids*. 2005. Vol. 17, 104104.
22. *Podolny A., Oron A., Nepomnyashchy A. A.* Linear and nonlinear theory of longwave Marangoni instability with the Soret effect at finite Biot numbers // *Physics of Fluids*. 2006. Vol. 18, 054104.
23. *Podolny A., Nepomnyashchy A. A., Oron A.* Long-wave Marangoni instability in a binary liquid layer on a thick solid substrate // *Physical Review E*. 2007. Vol. 76, 026309.
24. *Bestehorn M., Borcia I. D.* Thin film lubrication dynamics of a binary mixture: Example of an oscillatory instability // *Physics of Fluids*. 2010. Vol. 22, 104102.
25. *Morozov M., Oron A., Nepomnyashchy A. A.* Nonlinear dynamics of long-wave Marangoni convection in a binary mixture with the Soret effect // *Physics of Fluids*. 2013. Vol. 25, 052107.
26. *Podolny A., Nepomnyashchy A. A., Oron A.* Long-wave coupled Marangoni-Rayleigh instability in a binary liquid layer in the presence of the Soret effect // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2008. Vol. 3. P. 1–26.
27. *Podolny A., Nepomnyashchy A. A., Oron A.* Rayleigh-Marangoni instability of binary fluids with small Lewis number and nano-fluids in the presence of the Soret effect // *Fluid Dynamics and Materials Processing*. 2010. Vol. 6. P. 13–39.
28. *Zhang J., Behringer R. P., Oron A.* Marangoni convection in binary mixtures // *Physical Review E*. 2007. Vol. 76, 016306.
29. *Zhang J., Oron A., Behringer R. P.* Novel pattern forming states for Marangoni convection in vola-

tile binary liquids // *Physics of Fluids*. 2011. Vol. 23, 072102.

30. Shklyayev S. V., Khenner M., Alabuzhev A. A. Oscillatory and monotonic modes of long-wave Marangoni convection in a thin film // *Physical Review E*. 2010. Vol. 82, 025302(R).
31. Shklyayev S. V., Khenner M., Alabuzhev A. A. Long-wave Marangoni convection in a thin film heated from below // *Physical Review E*. 2012. Vol. 85, 016328.

## References

1. Garazo A. N., Velarde M. G. Dissipative Korteweg-de Vries description of Marangoni-Benard oscillatory convection. *Physics of Fluids A*, 1991, vol. 3, pp. 2295–2300.
2. Nepomnyashchy A. A., Velarde M. G., Colinet P. *Interfacial Phenomena and Convection*. London: CRC Press, 2001. 384 p.
3. Pismen L. M. Selection of long-scale oscillatory convective patterns. *Physical Review A*, 1988, vol. 38, pp. 2564–2572.
4. Shklyayev S. V., Nepomnyashchy A. A., Oron A. Oscillatory long-wave Marangoni convection in a layer of a binary liquid: Hexagonal patterns. *Physical Review E*, 2011, vol. 84, 056327.
5. Schluter A., Lortz D., Busse F. H. On stability of steady finite-amplitude convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 1965, vol. 23, pp. 129–144.
6. Busse F. H. On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below. *Journal of Mathematical Physics*, 1967, vol. 46, pp. 140–150.
7. Oron A., Nepomnyashchy A. A. Long-wavelength thermocapillary instability with the Soret effect. *Physical Review E*, 2004, vol. 69, 016313.
8. Shklyayev S. V., Nepomnyashchy A. A., Oron A. Three-dimensional oscillatory long-wave Marangoni convection in a binary liquid layer with Soret effect: Bifurcation analysis. *Physics of Fluids*, 2007, vol. 19, 072105.
9. Silber M., Knobloch E. Hopf bifurcation on a square lattice. *Nonlinearity*, 1991, vol. 4, pp. 1063–1106.
10. Shklyayev S. V., Nepomnyashchy A. A., Oron A. Long-wave oscillatory convection in a binary liquid: Hexagonal patterns. *Europhysics Letters*, 2009, vol. 86, 14005.
11. Roberts M., Swift J. W., Wagner D. H. The Hopf bifurcation on a hexagonal lattice. In: Golubitsky M., Guckenheimer J. (Ed.) *Multiparameter Bifurcation Theory*. Contemporary Mathematics. 1986. vol. 56, pp. 283–317.
12. Golovin A. A., Nepomnyashchy A. A., Pismen L. M. Pattern formation in large-scale Marangoni convection with deformable interface. *Physica D*, 1995, vol. 81, pp. 117–147.
13. Silber M., Skeldon A. C. Parametrically excited surface waves: Two-frequency forcing, normal form symmetries, and pattern selection. *Physical Review E*, 1999, vol. 59, pp. 5446–5456.
14. Skeldon A. C., Guidoboni G. Pattern selection for Faraday waves in an incompressible viscous fluid. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2007, vol. 67, pp. 1064–1100.
15. Benjamin T. B., Feir J. E. The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 27, pp. 417–430.
16. Shklyayev S. V., Nepomnyashchy A. A., Oron A. Oscillatory longwave Marangoni convection in a binary liquid. Part 1: Rhombic patterns. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2013, vol. 73, no. 6, pp. 2203–2223.
17. Shklyayev S. V., Nepomnyashchy A. A., Oron A. Oscillatory longwave Marangoni convection in a binary liquid. Part 2: Square patterns. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 2014, vol. 74, no. 4, pp. 1005–1024.
18. Mikishev A. B., Nepomnyashchy A. A. Long-wavelength Marangoni convection in a liquid layer with insoluble surfactant: Linear theory. *Microgravity Science and Technology*, 2010, vol. 22, pp. 415–423.
19. Mikishev A. B., Nepomnyashchy A. A. Nonlinear large-scale Marangoni convection in a heated liquid layer with insoluble surfactant. *Physical Review E*, 2010, vol. 82, 046306.
20. Shklyayev S. V., Nepomnyashchy A. A. Longwave Marangoni convection in a surfactant solution between poorly conducting boundaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, vol. 718, pp. 428–456.
21. Podolny A., Oron A., Nepomnyashchy A. A. Long-wave Marangoni instability in a binary-liquid layer with deformable interface in the presence of Soret effect: Linear theory. *Physics of Fluids*, 2005, vol. 17, 104104.
22. Podolny A., Oron A., Nepomnyashchy A. A. Linear and nonlinear theory of longwave Marangoni instability with the Soret effect at finite Biot numbers. *Physics of Fluids*, 2006, vol. 18, 054104.
23. Podolny A., Nepomnyashchy A. A., Oron A. Long-wave Marangoni instability in a binary liquid layer on a thick solid substrate. *Physical Review E*, 2007, vol. 76, 026309.
24. Bestehorn M., Borcia I. D. Thin film lubrication dynamics of a binary mixture: Example of an oscillatory instability. *Physics of Fluids*, 2010, vol. 22, 104102.
25. Morozov M., Oron A., Nepomnyashchy A. A. Nonlinear dynamics of long-wave Marangoni convection in a binary mixture with the Soret effect. *Physics of Fluids*, 2013, vol. 25, 052107.



26. Podolny A., Nepomnyashchy A. A., Oron A. Long-wave coupled Marangoni-Rayleigh instability in a binary liquid layer in the presence of the Soret effect. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2008, vol. 3, pp. 1–26.
27. Podolny A., Nepomnyashchy A. A., Oron A. Rayleigh-Marangoni instability of binary fluids with small Lewis number and nano-fluids in the presence of the Soret effect. *Fluid Dynamics and Materials Processing*, 2010, vol. 6, pp. 13–39.
28. Zhang J., Behringer R. P., Oron A. Marangoni convection in binary mixtures. *Physical Review E*, 2007, vol. 76, 016306.
29. Zhang J., Oron A., Behringer R. P. Novel pattern forming states for Marangoni convection in volatile binary liquids. *Physics of Fluids*, 2011, vol. 23, 072102.
30. Shklyayev S. V., Khenner M., Alabuzhev A. A. Oscillatory and monotonic modes of long-wave Marangoni convection in a thin film. *Physical Review E*, 2010, vol. 82, 025302(R).
31. Shklyayev S. V., Khenner M., Alabuzhev A. A. Long-wave Marangoni convection in a thin film heated from below. *Physical Review E*, 2012, vol. 85, 016328.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Шкляев С. В., Иванцов А. О. Исследование амплитудных уравнений длинноволновой конвекции Марангони в слое бинарной смеси // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2016. № 1 (32). С. 55–63. doi: 10.17072/1994-3598-2016-1-55-63

**Please cite this article in English as:**

Shklyayev S. V., Ivantsov A. O. The study of amplitude equations for longwave Marangoni convection in a binary layer // Bulletin of Perm University. Series: Physics, 2016, no. 1 (32), pp. 55–63. doi: 10.17072/1994-3598-2016-1-55-63