

УДК 621.37; 517.925.42  
PACS 05.45.Xt

## О связи между распределением фаз Ватанабэ–Строгаца и круговыми кумулянтами

Д. С. Голдобин<sup>a,b</sup>, Л. С. Клименко<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН

614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1

email: Denis.Goldobin@gmail.com

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет

614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: lyudmilaklimenko@gmail.ru

Теории Ватанабэ–Строгаца и Отта–Антонсена послужили основой для строгих и всесторонних исследований коллективных явлений в широком классе парадигматических моделей ансамблей связанных осцилляторов. Недавно был предложен подход «круговых» кумулянтов для построения теории возмущений для подхода Отта–Антонсена. В этой статье выводится связь между распределением фаз Ватанабэ–Строгаца и круговыми кумулянтами исходных фаз. Эти соотношения важны для интерпретации подхода круговых кумулянтов в контексте теорий Ватанабэ–Строгаца и Отта–Антонсена. Особое внимание уделяется случаю иерархии круговых кумулянтов; этот случай типичен при построении теорий возмущений для подходов Ватанабэ–Строгаца и Отта–Антонсена.

**Ключевые слова:** теория Ватанабэ–Строгаца; теория Отта–Антонсена; круговые кумулянты

*Поступила в редакцию 02.05.2019; принята к опубликованию 30.05.2019*

## On relationships between the distribution of Watanabe–Strogatz phases and circular cumulants

D. S. Goldobin<sup>a,b</sup>, L. S. Klimenko<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Koroleva St. 1, 614013, Perm

email: Denis.Goldobin@gmail.com

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

email: lyudmilaklimenko@gmail.ru

The theories of Watanabe–Strogatz and Ott–Antonsen served as the basis for rigorous and comprehensive investigations of collective phenomena in a broad class of paradigmatic models of ensembles of coupled oscillators. Recently, the “circular cumulant” approach was suggested for constructing a perturbation theory for the Ott–Antonsen approach. In this paper we derived the relationship between the distribution of Watanabe–Strogatz phases and the circular cumulants of the original phases. These relationships are important for interpreting the approach of circular cumulants in the context of the Watanabe–Strogatz and Ott–Antonsen theories. Particular attention is

devoted to the case of the hierarchy of circular cumulants; this case is typical when constructing perturbation theories on top of the Watanabe–Strogats and Ott–Antonsen theories.

**Keywords:** Watanabe–Strogatz theory; Ott–Antonsen theory; circular cumulants

Received 02.05.2019; accepted 30.05.2019

doi: 10.17072/1994-3598-2019-2-24-34

## 1. Введение

Динамика связанных автоколебательных систем представляет интерес в связи с многими приложениями в физике, биологии и технике [1, 2]. В случае слабой связи можно использовать универсальный подход, основанный на фазовом приближении, согласно которому рассматривается только динамика фаз осцилляторов, в то время как амплитуды считаются алгебраически связанными с фазами. Знаменитая модель Курамото описывает систему фазовых осцилляторов, связанных через среднее поле, и позволяет аналитически описать переход к синхронизации. Для определенного класса фазовых систем в общем поле (см., например, [2]) Ватанабэ и Строгац (ВС) [3–5] и Отт и Антонсен (ОА) [6] развили аналитические подходы.

В подходе ВС фазам ансамбля идентичных элементов  $\varphi_k$  с помощью преобразования Мёбиуса (см. уравнение (2.4)) могут быть сопоставлены вспомогательные фазы  $\psi_k$ , причем распределение последних является «замороженным», и только комплексный параметр преобразования может нетривиально эволюционировать со временем. Переход к синхронизации может быть охарактеризован с помощью этого комплексного параметра, определяющего связь между замороженным набором фаз  $\psi_k$  и набором наблюдаемых истинных фаз  $\varphi_k$ .

Теория ОА представляет собой другой подход, позволяющий получить замкнутые уравнения для эволюции комплексных параметров порядка  $N^{-1} \sum_{k=1}^N e^{i\varphi_k}$  в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$ .

Недавно в работах [7–10] был предложен новый подход – формализм «круговых» кумулянтов, который позволяет строить теорию возмущений для систем, неточно удовлетворяющих условиям теорий ВС и ОА. Стоит отметить, что этот подход существенно отличается от теории возмущений, разработанной в работе [11] на основе переменных ВС. Для последней остается сложный вопрос вычисления параметров порядка из переменных ВС и возникает проблема расходимости разложений для состояний с высокой степенью синхронности, тогда как именно такие состояния представляют наибольший интерес с точки зрения приложений. Сравнение этих двух подходов и интерпретация формализма круговых кумулянтов являются пред-

метом настоящей работы: формально, ставится задача интерпретации кумулянтов в терминах теории ВС. Заметим, что ранее значительное внимание в литературе уделялось интерпретации и пониманию теорий ВС и ОА (см., например, [5, 12–15]).

Материал статьи организован следующим образом: в разделе 2 приводятся существенные для настоящей работы элементы теорий ВС и ОА; в разделе 3 представлены соотношения между круговыми кумулянтами и переменными ВС; в разделе 4 описан вывод этих соотношений; заключение представлено в разделе 5.

## 2. Подходы Ватанабэ–Строгаца и Отта–Антонсена и круговые кумулянты

### 2.1. Теории Ватанабэ–Строгаца и Отта–Антонсена

Динамика ансамбля  $N$  идентичных фазовых элементов вида:

$$\dot{\varphi}_k = \Omega(t) + \text{Im}\left(2h(t)e^{-i\varphi_k}\right), \quad (2.1)$$

где  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $\Omega(t)$  и  $h(t)$  – произвольные функции времени, имеет  $N-3$  интеграла движения [3–5, 12] и может быть описана с помощью обыкновенного дифференциального уравнения для комплексной переменной  $z$ :

$$\dot{z} = i\Omega(t)z + h(t) - h^*(t)z^2. \quad (2.2)$$

Динамика вспомогательных фаз  $\psi_k$ , известных как переменные Ватанабэ–Строгаца (ВС), является одинаковой для всех фазовых элементов:

$$\dot{\psi}_k = \Omega(t) + \text{Im}\left(2h(t)z^*\right). \quad (2.3)$$

Переменные  $z$  и  $\psi_k$  связаны с исходными фазами  $\varphi_k$  преобразованием Мёбиуса:

$$e^{i\varphi_k} = \frac{z + e^{i\psi_k}}{1 + z^* e^{i\psi_k}}; \quad e^{i\psi_k} = \frac{e^{i\varphi_k} - z}{1 - z^* e^{i\varphi_k}}; \quad (2.4)$$

связь является взаимнооднозначной при дополнительном условии  $\sum_{k=1}^N e^{i\psi_k} = 0$ .

В термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  естественно описывать эволюцию системы в терминах плотности вероятности распределения фаз  $w(\varphi, t)$ , подчиняющейся Мастер-уравнению:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( (\Omega(t) - ih(t)e^{-i\varphi} + ih^*(t)e^{i\varphi}) w \right) = 0.$$

В Фурье-пространстве, где

$$w(\varphi, t) = (2\pi)^{-1} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j(t)e^{-ij\varphi} + c.c.) \right), \quad (2.5)$$

здесь и далее *c.c.* обозначает комплексное сопряжение, Мастер-уравнение принимает вид

$$\dot{a}_j = ji\Omega a_j + jha_{j-1} - jh^* a_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

где  $a_0 = 1$ .

В работе [6] было показано, что уравнение (2.6) допускает частное решение вида  $a_j = (a_1)^j$ , где  $a_1$  подчиняется замкнутому уравнению динамики

$$\dot{a}_1 = i\Omega a_1 + h - h^* a_1^2. \quad (2.7)$$

Множество решений, для которых  $a_j = (a_1)^j$ , называют многообразием Отта–Антонсена.

Важно отметить, что в термодинамическом пределе  $a_1$  является комплексным параметром порядка: действительно,  $Re^{i\Phi} \equiv \langle e^{i\varphi} \rangle = a_1$ . Таким образом, на базе теории Отта–Антонсена [6] открывается возможность для всестороннего и строгого изучения разнообразных коллективных явлений в ансамблях фазовых элементов (см. [12–14, 16–22]).

В переменных Ватанабэ–Строгаца при  $N \rightarrow \infty$  динамика переменной  $z$  по-прежнему описывается уравнением (2.2) и плотность вероятности  $W(\psi, t)$  представляет собой замороженную волну произвольной формы, бегущую с переменной во времени скоростью (2.3). Хотя уравнения (2.7) и (2.2) подобны друг другу, в общем случае  $z$  не является параметром порядка, более того, вычисление параметра порядка  $a_1$  из переменной  $z$  и  $W(\psi, t)$  является трудоемкой задачей. Решение ОА в терминах переменных ВС соответствуют случаю  $W(\psi, t) = (2\pi)^{-1}$  и  $z = a_1$ . Отметим, что из теории Ватанабэ–Строгаца следует нейтральная устойчивость многообразия Отта–Антонсена для ансамбля идеальных идентичных элементов, так как динамика  $W(\psi, t)$  представляет собой распространение волны постоянного профиля, а не релаксацию к однородному распределению. Однако подход ОА может быть обобщен на случай ансамбля с неидеальной идентичностью элементов (например, с разбросом индивидуальных собственных частот  $\Omega$ ). Как было показано в работах [6, 23], в ситуациях, представляющих практический интерес, неидентичность приводит к тому, что многообразие ОА становится притягивающим. Поскольку в реальности практически невозможно добиться идеальной идентичности, решения ОА являются притягивающими.

## 2.2. Круговые кумулянты

Описание динамики системы в окрестности множества ОА в терминах  $a_j$  оказывается пробле-

матичным для состояний с высокой степенью синхронности, когда  $|a_1|$  близко к 1, и ряд  $a_j = (a_1)^j$  обладает медленной сходимостью. В связи с этим оказывается эффективным переход от рассмотренных моментов  $a_j = \langle e^{ij\varphi_k} \rangle$  к формально соответствующим им кумулянтам  $K_j$ , которые можно определить из производящей функции:

$$F(\zeta) \equiv \langle \exp(\zeta e^{i\varphi_k}) \rangle \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{\zeta^j}{j!}, \quad (2.8)$$

$$\ln(F(\zeta)) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} K_j \frac{\zeta^j}{j!}.$$

В частности, первые три кумулянта имеют вид:

$$K_1 = a_1, \quad K_2 = a_2 - a_1^2, \quad K_3 = a_3 - 3a_2 a_1 + 2a_1^3.$$

В терминах  $K_j$  уравнение (2.6) приобретает следующий вид:

$$\dot{K}_j = ij\Omega K_j + h\delta_{1j} - jh^* \left( K_{j+1} + \sum_{m=1}^j \frac{(j-1)!}{(m-1)!(m-j)!} K_{j-m+1} K_m \right),$$

где  $\delta_{1j} = 1$ , если  $j = 1$ , и  $\delta_{1j} = 0$  во всех остальных случаях. Вывод уравнений для  $K_j$  из уравнений для моментов (2.6) приведен в работе [7]; аналогичный вывод может быть проведен и для некоторых других случаев, отклоняющихся от вида (2.6) (или вида (2.1)).

Для некоторых физических задач зачастую оказывается более удобным использовать иные величины

$$\kappa_j \equiv \frac{K_j}{(j-1)!} \quad (2.9)$$

(см. [7, 9]), динамика которых подчиняется уравнению

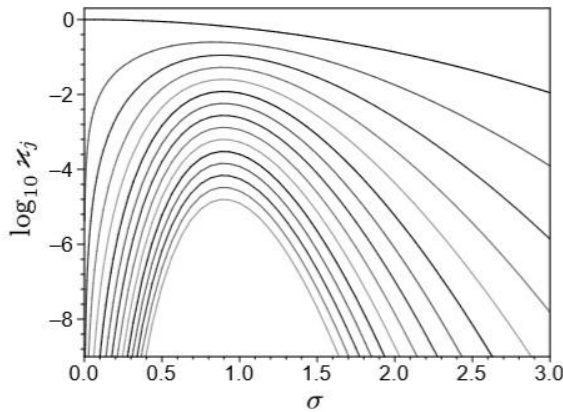
$$\dot{\kappa}_j = ij\Omega \kappa_j + h\delta_{1j} - jh^* \left( j\kappa_{j+1} + \sum_{m=1}^j \kappa_{j-m+1} \kappa_m \right). \quad (2.10)$$

Следуя работам [7, 9], величины  $\kappa_j$  будем называть «круговыми» кумулянтами.

При построении теории возмущений для подхода Отта–Антонсона кумулянтный подход обладает рядом существенных преимуществ:

- В терминах круговых кумулянтов решение ОА принимает очень простой вид:  $\kappa_1 = a_1$  и для всех старших кумулянтов  $\kappa_{j \geq 2} = 0$ .
- Если ряд  $a_j$  медленно сходится при  $|a_1| \rightarrow 1$ , то в терминах круговых кумулянтов при  $|a_1| \rightarrow 1$  необходимо  $|\kappa_{j \geq 2}| \rightarrow 0$ , и проблема сходимости ряда  $\kappa_j$  не возникает.
- Внутренний шум  $\sigma$ , который является индивидуальным для каждого осциллятора и нарушает вид ОА, создает для круговых кумулянтов иерархию вида  $\kappa_j \sim \sigma^{2(j-1)}$  [7, 9]. Более того, нормальное распределение на окружности (*wrapped Gaussian distribution*) для фаз с  $a_1 = \exp\{i\Phi - \sigma^2/2\}$  (и, соот-

ветственно,  $a_1 = \exp\{ji\Phi - j^2\sigma^2/2\}$ ), которое возникает при некоторых нарушениях свойств ОА (т.е., отличии вида уравнений от (2.1)) [24], дает ярко выраженную иерархию кумулянтов для произвольного значения величины  $\sigma$  (см. рисунок). Таким образом, формирование иерархий  $\kappa_j$  часто встречается в конкретных физических проблемах. Наличие таких иерархий является благоприятным условием для построения аналитических аппроксимаций.



Первые 15 круговых кумулянтов  $\kappa_j$  для нормального распределения на окружности шириной  $\sigma$

На рисунке для  $\sigma^2 \ll 1$  можно видеть иерархию  $\kappa_j \sim \sigma^{2(j-1)}$ , для  $\sigma^2 \gg 1$  —  $\kappa_j \sim e^{-\sigma^2/2}$ , а для промежуточных значений  $\sigma^2$ , где нет малого параметра, формируется некоторая промежуточная иерархия вида  $|\kappa_{j+1}/\kappa_j| \approx \varepsilon$  (здесь  $\varepsilon$  принимает значение, не превышающее 0.462). Для ансамбля Курамото с гауссовым шумом и распределением частот индивидуальных осцилляторов по Лоренцу подобная картина [9] наблюдается для стационарных режимов. Когда в системе можно ввести малый параметр  $\varepsilon$ , формируются иерархии вида  $\kappa_j \sim \varepsilon^{j-1}$  или  $\kappa_j \sim \varepsilon^j$ ; если малого параметра нет, для  $\kappa_j$  наблюдаются некоторые промежуточные, но явно выраженные геометрические прогрессии. В работе [7], где нарушение общего вида ОА (2.1) было вызвано гауссовым внутренним шумом интенсивности  $\sigma^2$ , иерархия вида  $\kappa_j \sim \sigma^{2(j-1)}$  была обнаружена для возмущенного решения ОА. На этом основании в настоящей работе последнему типу иерархии будет уделяться особое внимание, но при этом не будет упускаться из виду, что возможны и другие типы.

Может быть сформулировано наблюдение: закон  $|\kappa_{j+1}/\kappa_j| \approx \varepsilon < 1$ , обобщающий все перечисленные выше иерархии, очень часто возникает для конкретных физических систем как в теоретических результатах, так и в экспериментальных дан-

ных. По состоянию на сегодняшний день авторы не могут представить строгого математического обоснования распространенности такого наблюдения. Отметим, что наличие иерархии не является таким же сильным ограничением на вид ряда кумулянтов, как конкретные замыкания, уменьшающие число степеней свободы (например, редукции Отта–Антонсена или Гаусса): при наличии иерархии кумулянты остаются определенными с точностью до коэффициента порядка 1.

### 3. Результаты

#### 3.1. Вычисление плотности вероятности фаз Ватанабэ–Строгаца из круговых кумулянтов

В первую очередь установим соотношения между  $W(\psi)$  и  $w(\varphi)$ , представляя первое в терминах  $A_j = \int_0^{2\pi} W(\psi) e^{ij\psi} d\psi$  и последнее — в терминах круговых кумулянтов  $\kappa_j$  или  $K_j = (j-1)! \kappa_j$ . В Фурье-пространстве функция распределения  $W(\psi)$  имеет вид

$$W(\psi) = (2\pi)^{-1} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j e^{-ij\psi} + c.c.) \right].$$

Тогда уравнение (2.4) дает

$$\int W(\psi) e^{im\psi} d\psi = \int w(\varphi) \left( \frac{e^{i\varphi} - z}{1 - z^* e^{i\varphi}} \right)^m d\varphi, \quad (3.1)$$

и можно получить (подробный вывод приведен в разделе 4)

$$A_j = \left( 1 + \sum_{m=2}^{\infty} p_m \hat{Q}_m \right) A_j^{(0)}. \quad (3.2)$$

Здесь

$$\hat{Q}_m \equiv \frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial K_1} \right)^m,$$

а  $p_j$  — моменты, соответствующие кумулянтам  $K_j$  за вычетом  $K_1$ , т. е.

$$\begin{aligned} p_1 &= 0, \\ p_2 &= K_2, \\ p_3 &= K_3, \\ p_4 &= K_4 + 3K_2^2, \\ p_5 &= K_5 + 10K_3K_2, \\ p_6 &= K_6 + 15K_4K_2 + 10K_3^2 + 15K_2^3, \\ p_7 &= K_7 + 21K_5K_2 + 35K_4K_3 + 105K_3K_2^2 \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Иными словами,  $p_j$  соответствуют моментам  $a_j$ , которые, в свою очередь, подверглись процедуре удаления первого момента  $a_1$ . И

$$A_j^{(0)} = \left( \frac{K_1 - z}{1 - z^* K_1} \right)^j. \quad (3.4)$$

Наряду с  $A_j$  необходимо вычислить  $z$ . Для  $W(\psi)$  условие  $A_1 = 0$  навязывает выражение для  $z$ : действительно, на основании уравнения (3.2) это условие может быть записано как

$$0 = A_1 = \left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} p_j \hat{Q}_j\right) A_1^{(0)},$$

что дает условие вида

$$z - K_1 = \sum_{j=2}^{\infty} p_j \frac{(z^*)^{j-1} (1 - |z|^2)}{(1 - z^* K_1)^j}. \quad (3.5)$$

Из условия (3.5), можно вычислить  $z$  с любой требуемой точностью. Для различных иерархий  $\kappa_j$  возникают и быстро убывающие иерархии  $p_j$ , обеспечивающие быструю сходимость итерационной схемы:

$$z_0 = K_1,$$

$$z_1 = K_1 + \frac{K_1^* K_2}{1 - |K_1|^2},$$

...

$$z_n = K_1 + \sum_{j=2}^{n+1} p_j \frac{(z_{n-1}^*)^{j-1} (1 - |z_{n-1}|^2)}{(1 - z_{n-1}^* K_1)^j}, \dots \quad (3.6)$$

Точное значение  $z = z_n + \mathcal{O}(p_{n+2})$  или, как можно увидеть из уравнения (3.3),

$$z = z_n + \begin{cases} \mathcal{O}(\varepsilon^{\text{ceil}(n/2)+1}) & \text{при } \kappa_j \sim \varepsilon^{j-1}; \\ \mathcal{O}(\varepsilon^{n+2}) & \text{при } \kappa_j \sim \varepsilon^j. \end{cases}$$

Здесь функция  $\text{ceil}(x)$  возвращает наименьшее целое число, большее или равное  $x$ .

В частности, для иерархии  $\kappa_j \sim \varepsilon^{j-1}$  можно вычислить, что  $z \approx Z_0 = z^{(0)} = K_1$  (опущены поправки  $\sim \varepsilon$ );  $z \approx Z_1 = z^{(0)} + z^{(1)}$  (опущены поправки  $\sim \varepsilon^2$ ), где

$$z^{(1)} = \frac{K_1^* K_2}{1 - |K_1|^2};$$

$z \approx Z_2 = z^{(0)} + z^{(1)} + z^{(2)}$  (опущены поправки  $\sim \varepsilon^3$ ), где

$$z^{(2)} = \frac{K_1^{*2} K_3}{(1 - |K_1|^2)^2} + \frac{2K_1^{*3} K_2^2 + K_1 |K_2|^2}{(1 - |K_1|^2)^3}.$$

Отметим, что для вычисления  $Z_{n \geq 1}$  при  $\kappa_j \sim \varepsilon^{j-1}$  требуется использование итерационной схемы (3.6) до  $z_{2n-1}$ . Далее,  $z \approx Z_3 = z^{(0)} + z^{(1)} + z^{(2)} + z^{(3)}$  (опущены поправки  $\sim \varepsilon^4$ ), где

$$\begin{aligned} z^{(3)} &= \frac{K_1^{*3} K_4}{(1 - |K_1|^2)^3} + \\ &+ \frac{K_3 (8K_1^{*4} K_2 + 2K_2^* |K_1|^2) + K_3^* K_2 K_1^2}{(1 - |K_1|^2)^4} + \\ &+ \frac{10K_1^{*5} K_2^3 + |K_2|^2 (K_2 K_1^* + 5K_2 K_1^* |K_1|^2 + 3K_2^* K_1^3)}{(1 - |K_1|^2)^5}. \end{aligned}$$

Используя уравнение (3.4), можно получить рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_j^{(0)}}{\partial K_1} &= \frac{\partial}{\partial K_1} \left( \frac{K_1 - z}{1 - z^* K_1} \right)^j = \\ &= j \frac{(1 - |z|^2) (K_1 - z)^{j-1}}{(1 - z^* K_1)^{j+1}} = \\ &= \frac{j}{1 - |z|^2} (z^{*2} A_{j+1}^{(0)} + 2z^* A_j^{(0)} + A_{j-1}^{(0)}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отметим, что  $A_0^{(0)} = 1$  и  $\partial A_1^{(0)} / \partial K_1 \neq 0$  (условие  $A_1 = 0$  выполняется для заданных  $z$  и  $K_1$  и не требует, чтобы частная производная  $\partial A_1^{(0)} / \partial K_1$  обращалась в ноль).

### 3.2. Законы подобия параметров порядка $A_j$ фаз Ватанабэ–Строгаца при иерархии круговых кумулянтов вида $\kappa \sim \varepsilon^{j-1}$

Выделим иерархию явным образом, введя обозначение  $\kappa_j \equiv \varepsilon^{j-1} s_{j-1}$ .

Поскольку  $z - K_1 \sim \varepsilon$  и  $A_j^{(0)} \sim \varepsilon^j$ , применяя рекуррентное соотношение (3.7), в ведущем порядке можно получить для  $m \leq j$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_m A_j^{(0)} &\approx \frac{j!}{m!(j-m)!} \frac{A_{j-m}^{(0)}}{(1 - |z|^2)^m} = \\ &= \frac{C_m^j (s_0 - z)^{j-m}}{(1 - |z|^2)^m (1 - z^* s_0)^{j-m}} \approx C_m^j \frac{(-\varepsilon s_0^* s_1)^{j-m}}{(1 - |s_0|^2)^{2j-m}}, \end{aligned}$$

и для  $m > j$ :

$$\hat{Q}_m A_j^{(0)} \sim (z^*)^{m-j} A_0^{(0)} \sim (z^*)^{m-j}.$$

Здесь  $C_m^j \equiv j! / [m!(j-m)!]$ . При  $p_j \sim \varepsilon^{\text{ceil}(j/2)}$ , удерживая только ведущие вклады в выражении для  $A_j$ , можно получить для нечетных  $j$

$$\begin{aligned} A_j &\approx \sum_{m=j-1}^{j+1} p_m \hat{Q}_m A_j^{(0)} \approx \frac{\varepsilon^{(j+1)/2}}{(1 - |s_0|^2)^j} \times \\ &\times \left( \frac{-j s_0^* s_1}{1 - |s_0|^2} \frac{p_{j-1}}{\varepsilon^{(j+1)/2}} + \frac{p_j}{\varepsilon^{(j+1)/2}} + \frac{j s_0^*}{1 - |s_0|^2} \frac{p_{j+1}}{\varepsilon^{(j+1)/2}} \right), \end{aligned}$$

и для четных  $j$ :

$$A_j \approx p_j \hat{Q}_j A_j^{(0)} \approx \frac{\varepsilon^{j/2}}{(1 - |s_0|^2)^j} \frac{p_j}{\varepsilon^{j/2}}.$$

Вычисления  $\hat{Q}_j A_j^{(0)}$  и  $\hat{Q}_{j+1} A_j^{(0)}$  подробно проведены в разделе 4.

Для нечетных  $j$

$$p_j \approx \frac{(j-1)j!!}{6} K_3 K_2^{\frac{j-3}{2}} = \varepsilon^{\frac{j+1}{2}} \frac{(j-1)j!!}{3} s_2 s_1^{\frac{j-3}{2}}.$$

Для четных  $j$

$$p_j \approx (j-1)!! K_2^{j/2} = \varepsilon^{j/2} (j-1)!! s_1^{j/2}.$$

Следовательно,

$$A_j \approx \begin{cases} \frac{\varepsilon^{\frac{j+1}{2}} j!! (j-1) \left( s_2 + \frac{3s_0^*}{1-|s_0|^2} s_1^2 \right) s_1^{\frac{j-3}{2}}}{3(1-|s_0|^2)^j} & \text{при чётных } j; \\ \frac{\varepsilon^{j/2} (j-1)!!}{(1-|s_0|^2)^j} s_1^{j/2} & \text{при нечётных } j. \end{cases} \quad (3.8)$$

Можно заметить, что  $A_j \sim \varepsilon^{\text{ceil}(j/2)}$ , тогда как  $A_0 \sim \varepsilon^j$ .

**3.2.1. Круговые кумулянты для фаз Ватанабэ–Строгаца.** Кумулянты  $\mathcal{K}_j$  величин  $e^{i\psi}$  при  $\langle e^{i\psi} \rangle = 0$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 &= A_2, \\ \mathcal{K}_3 &= A_3, \\ \mathcal{K}_4 &= A_4 - 3A_2^2, \\ \mathcal{K}_5 &= A_5 - 10A_3A_2, \\ \mathcal{K}_6 &= A_6 - 15A_4A_2 - 10A_3^2 + 30A_2^3, \\ \mathcal{K}_7 &= A_7 - 21A_5A_2 - 35A_4A_3 + 210A_3A_2^2, \\ \mathcal{K}_8 &= A_8 - 28A_6A_2 - 56A_5A_3 - 35A_4^2 + \\ &\quad + 420A_4A_2^2 + 560A_3^2A_2 - 630A_2^4, \\ \mathcal{K}_9 &= A_9 - 36A_7A_2 - 84A_6A_3 - 126A_5A_4 + 560A_3^3 + \\ &\quad + 756A_3A_2^2 + 2520A_4A_3A_2 - 7560A_3A_2^3, \dots \end{aligned}$$

Подставляя в (3.8), можно получить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 &= \varepsilon \frac{s_1}{(1-|s_0|^2)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \mathcal{K}_3 &= \varepsilon^2 \frac{2}{(1-|s_0|^2)^3} \left( s_2 + \frac{3s_0^* s_1^2}{1-|s_0|^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ \mathcal{K}_4 &= \varepsilon^2 \cdot 0 + \varepsilon^3 \frac{3!}{(1-|s_0|^2)^4} \times \\ &\quad \times \left( s_3 + \frac{4 \cdot 2s_2 s_1 s_0^*}{1-|s_0|^2} + \frac{12s_1^3 s_0^{*2}}{(1-|s_0|^2)^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_5 &= \varepsilon^3 \cdot 0 + \varepsilon^4 \frac{4!}{(1-|s_0|^2)^5} \left( s_4 + \frac{5(2s_3 s_1 + s_2^2) s_0^*}{1-|s_0|^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{55s_2 s_1^2 s_0^{*2}}{(1-|s_0|^2)^2} + \frac{55s_1^4 s_0^{*3}}{(1-|s_0|^2)^3} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_6 &= \varepsilon^4 \cdot 0 + \varepsilon^5 \frac{5!}{(1-|s_0|^2)^6} \left( s_5 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12(s_4 s_1 + s_3 s_2) s_0^*}{1-|s_0|^2} + \frac{78(s_3 s_1^2 + s_2^2 s_1) s_0^{*2}}{(1-|s_0|^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{364s_2 s_1^3 s_0^{*3}}{(1-|s_0|^2)^3} + \frac{273s_1^5 s_0^{*4}}{(1-|s_0|^2)^4} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_7 &= \varepsilon^5 \cdot 0 + \varepsilon^6 \frac{6!}{(1-|s_0|^2)^7} \left( s_6 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7(2s_5 s_1 + 2s_4 s_2 + s_3^2) s_0^*}{1-|s_0|^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{35(3s_4 s_1^2 + 6s_3 s_2 s_1 + s_2^3) s_0^{*2}}{(1-|s_0|^2)^2} + \frac{140(4s_3 s_1^3 + 6s_2^2 s_1^2) s_0^{*3}}{(1-|s_0|^2)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3280s_2 s_1^4 s_0^{*4}}{(1-|s_0|^2)^4} + \frac{1428s_1^6 s_0^{*5}}{(1-|s_0|^2)^5} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^7), \dots \end{aligned}$$

Уравнение (3.8) является достаточным только для вычисления старшего члена в выражении для  $\mathcal{K}_j$ , но старшие члены для  $j \geq 4$  равны 0. Приведенные выше результаты были получены с помощью пакета аналитических вычислений Maple; при этом использовалось  $z = z_n$ , вычислявшееся по рекуррентным соотношениям (3.6).

Могут быть введены переменные  $\mathcal{S}_j$ , определяемые соотношением  $\mathcal{K}_j = \varepsilon^{j-1} (j-1)! \mathcal{S}_{j-1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \frac{s_1}{(1-|s_0|^2)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \mathcal{S}_2 &= \frac{1}{(1-|s_0|^2)^3} \left( s_2 + \frac{3s_0^* s_1^2}{1-|s_0|^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \mathcal{S}_3 &= \frac{1}{(1-|s_0|^2)^4} \left( s_3 + \frac{8s_2 s_1 s_0^*}{1-|s_0|^2} + \frac{12s_1^3 s_0^{*2}}{(1-|s_0|^2)^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \mathcal{S}_4 &= \frac{1}{(1-|s_0|^2)^5} \left( s_4 + \frac{5(2s_3 s_1 + s_2^2) s_0^*}{1-|s_0|^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{55s_2 s_1^2 s_0^{*2}}{(1-|s_0|^2)^2} + \frac{55s_1^4 s_0^{*3}}{(1-|s_0|^2)^3} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \mathcal{S}_5 &= \frac{1}{(1-|s_0|^2)^6} \left( s_5 + \frac{12(s_4 s_1 + s_3 s_2) s_0^*}{1-|s_0|^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{78(s_3 s_1^2 + s_2^2 s_1) s_0^{*2}}{(1-|s_0|^2)^2} + \frac{364s_2 s_1^3 s_0^{*3}}{(1-|s_0|^2)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{273s_1^5 s_0^{*4}}{(1-|s_0|^2)^4} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_6 &= \frac{1}{(1-|s_0|^2)^7} \left( s_6 + \frac{7(2s_5s_1 + 2s_4s_2 + s_3^2)s_0^*}{1-|s_0|^2} + \right. \\
&+ \frac{35(3s_4s_1^2 + 6s_3s_2s_1 + s_2^3)s_0^{*2}}{(1-|s_0|^2)^2} + \frac{140(4s_3s_1^3 + 6s_2^2s_1^2)s_0^{*3}}{(1-|s_0|^2)^3} + \\
&+ \left. \frac{3280s_2s_1^4s_0^{*4}}{(1-|s_0|^2)^4} + \frac{1428s_1^6s_0^{*5}}{(1-|s_0|^2)^5} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\
&\dots, \\
\mathcal{S}_j &= \frac{1}{(1-|s_0|^2)^{j+1}} \left( s_j + \frac{\alpha_{j2}s_0^*}{1-|s_0|^2} \sum_{j_1+j_2=j} s_{j_1}s_{j_2} \right. \\
&+ \frac{\alpha_{j3}s_0^{*2}}{(1-|s_0|^2)^2} \sum_{j_1+j_2+j_3=j} s_{j_1}s_{j_2}s_{j_3} + \dots + \\
&+ \frac{\alpha_{jk}s_0^{*k}}{(1-|s_0|^2)^{k-1}} \sum_{j_1+j_2+\dots+j_k=j} s_{j_1}s_{j_2}\dots s_{j_k} + \dots + \\
&+ \left. \frac{\alpha_{jj}s_0^{*j-1}}{(1-|s_0|^2)^{j-1}} s_1^j \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \dots,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где  $\alpha_{mk} = \frac{(2m+k)!}{k!(2m+1)!}$ . Выражение  $\mathcal{S}_j$  было проверено вычислениями вплоть до  $j=10$ .

**3.2.2. Обратное преобразование  $\{\mathcal{K}_j\} \mapsto \{K_j\}$ .** На основании уравнения (2.4), по аналогии с соотношением (3.1), можно написать

$$\int d\varphi w(\varphi) e^{im\varphi} = \int d\psi W(\psi) \left( \frac{e^{i\psi} + z}{1+z^*e^{i\psi}} \right)^m.$$

Случай этого соотношения отличается от случая  $\{a_m\} \mapsto \{A_m\}$  знаком при  $z$  и тем фактом, что  $\mathcal{S}_0 = 0$  ( $\mathcal{K}_m = \varepsilon^{m-1}(m-1)!\mathcal{S}_{m-1}$ ). Следовательно,

$$a_j = \left( 1 + \sum_{m=2}^{\infty} A_m \hat{\mathcal{Q}}_m \right) \left( \frac{\mathcal{S}_0 + z}{1+z^*\mathcal{S}_0} \right)^j \Bigg|_{\mathcal{S}_0=0},$$

$$\text{где } \hat{\mathcal{Q}}_m \equiv \frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial \mathcal{S}_0} \right)^m.$$

Используя последнее выражение, находим

$$a_1 = z + (1-|z|^2) \sum_{m=2}^{\infty} A_m (-z^*)^{m-1}$$

и для  $j \geq 2$

$$a_j = z^j + \sum_{m=2}^{\infty} A_m (z^*)^{m-j} \sum_{l=1}^j C_l^j C_m^{l-1+m} (-1)^{l+m} (1-|z|^2)^l.$$

Следует отметить, что в этих выражениях  $z$  и ряд  $\{\mathcal{K}_j | j=2,3,\dots\}$  являются входными параметрами, которые определяют ведущий порядок  $\{a_j\}$ , включая параметр порядка  $a_1$ .

Далее, подобно тому, как это сделано в предыдущем подразделе, можно получить

$$s_0 = z + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$s_1 = (1-|z|^2)^2 \mathcal{S}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$s_2 = (1-|z|^2)^3 (\mathcal{S}_2 - 3z^* \mathcal{S}_1^2) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$s_3 = (1-|z|^2)^4 (\mathcal{S}_3 - 8z^* \mathcal{S}_2 \mathcal{S}_1 + 12z^{*2} \mathcal{S}_1^3) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

...

$$\begin{aligned}
s_j &= (1-|z|^2)^{4j+1} \left( \mathcal{S}_j - \alpha_{j2} z^* \sum_{j_1+j_2=j} \mathcal{S}_{j_1} \mathcal{S}_{j_2} + \right. \\
&+ \alpha_{j3} z^{*2} \sum_{j_1+j_2+j_3=j} \mathcal{S}_{j_1} \mathcal{S}_{j_2} \mathcal{S}_{j_3} + \dots + \\
&+ \alpha_{jk} (-z^*)^{k-1} \sum_{j_1+j_2+\dots+j_k=j} \mathcal{S}_{j_1} \mathcal{S}_{j_2} \dots \mathcal{S}_{j_k} + \dots + \\
&+ \left. \alpha_{jj} (-z^*)^{m-1} \mathcal{S}_1^m \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \dots
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Уравнения (3.9) и (3.10) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  являются взаимно обратными преобразованиями, и это свойство имеет место для произвольного порядка обрывания ряда  $n$  (что также было подтверждено численными расчетами для случайных множеств  $\{s_j\}$ ). Примечательно, что уравнения (3.9) и (3.10) принимают гораздо более сложный вид в терминах  $K_j$  и  $\mathcal{K}_j$  (в суммах по  $j_1, j_2, \dots, j_k$  появляются очень громоздкие коэффициенты).

## 4. Вывод соотношений

### 4.1. Преобразование параметров порядка Курамото–Даидо $a_j$ в параметры $A_j$ для распределения фаз Ватанабэ–Строгаца

Обратимся к уравнению (3.1) и воспользуемся Фурье-представлением для плотности вероятности  $W(\psi) = (2\pi)^{-1} \left[ 1 + \sum_j (A_j e^{-ij\psi} + c.c.) \right]$ . Для моментов  $A_j$  можно получить разложение по  $z$  вида

$$A_1 = -z + (1-|z|^2) (a_1 + z^* a_2 + z^{*2} a_3 + z^{*3} a_4 + z^{*4} a_5 + z^{*5} a_6 + \dots), \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= z^2 + (1-|z|^2) (-2za_1 + (1-3|z|^2)a_2 + \\
&+ (2-4|z|^2)z^* a_3 + (3-5|z|^2)z^{*2} a_4 + \\
&+ (4-6|z|^2)z^{*3} a_5 + (5-7|z|^2)z^{*4} a_6 + \dots),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= -z^3 + (1-|z|^2) (3z^2 a_1 + (-3+6|z|^2)za_2 + \\
&+ (1-8|z|^2+10|z|^4)a_3 + (3-15|z|^2+15|z|^4)z^* a_4 + \\
&+ (6-24|z|^2+21|z|^4)z^{*2} a_5 + \\
&+ (10-35|z|^2+28|z|^4)z^{*3} a_6 + \dots),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= z^4 + (1-|z|^2) (-4z^3 a_1 + (6-10|z|^2)z^2 a_2 + \\
&+ (-4+20|z|^2-20|z|^4)za_3 + \\
&+ (1-15|z|^2+45|z|^4-35|z|^6)a_4 + \\
&+ (4-36|z|^2+84|z|^4-56|z|^6)z^* a_5 + \\
&+ (10-70|z|^2+140|z|^4-84|z|^6)z^{*2} a_6 + \dots), \dots
\end{aligned}$$

Отметим, что для дальнейших вычислений строятся разложения в ряды по  $\varepsilon$  с использованием соотношения  $\kappa_j = \varepsilon^{j-1} s_{j-1}$ , однако многие окончательные результаты представимы в виде, не содержащем малый параметр  $\varepsilon$ . Такие результаты будут справедливы независимо от характера иерархии кумулянтов. Выражая моменты  $a_j$  через кумулянты  $\kappa_j = \varepsilon^{j-1} s_{j-1}$ , разложение (4.1) для  $A_1$  можно привести к виду:

$$\begin{aligned} A_1 = & -z + (1 - |z|^2)(s_0 + z^* s_0^2 + z^{*2} s_0^3 + z^{*3} s_0^4 + \dots) + \\ & + \varepsilon z^* s_1^2 (1 - |z|^2) \left( 1 + 3z^* s_0 + 6(z^* s_0)^2 + \dots + \right. \\ & + \frac{(m+2)!}{2!m!} (z^* s_0)^m + \dots \left. \right) + \varepsilon^2 (1 - |z|^2) \left[ 2z^{*2} s_2 \times \right. \\ & \times \left( 1 + 4z^* s_0 + 10(z^* s_0)^2 + \dots + \frac{(m+3)!}{3!m!} (z^* s_0)^m + \dots \right) + \\ & + 3z^{*3} s_1^2 \left( 1 + 5z^* s_0 + 15(z^* s_0)^2 + \dots + \frac{(m+4)!}{4!m!} (z^* s_0)^m + \right. \\ & \left. + \dots \right) \left. \right] + \varepsilon^3 (1 - |z|^2) \left[ 6z^{*3} s_3 \left( 1 + 5z^* s_0 + 15(z^* s_0)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \dots + \frac{(m+5)!}{5!m!} (z^* s_0)^m + \dots \right) + 20z^{*4} s_2 s_1 \left( 1 + 6z^* s_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 21(z^* s_0)^2 + \dots + \frac{(m+6)!}{6!m!} (z^* s_0)^m + \dots \right) + 15z^{*5} s_1^3 \times \right. \\ & \left. \times \left( 1 + 7z^* s_0 + 28(z^* s_0)^2 + \dots + \frac{(m+7)!}{7!m!} (z^* s_0)^m + \dots \right) \right] + \\ & + \varepsilon^4 (1 - |z|^2) \left[ 24z^{*4} s_4 (1 + 6z^* s_0 + \dots) + \right. \\ & + 90z^{*5} s_3 s_1 (1 + 7z^* s_0 + \dots) + 40z^{*5} s_2^2 (1 + 7z^* s_0 + \dots) + \\ & + 210z^{*6} s_2 s_1^2 (1 + 8z^* s_0 + \dots) + \\ & \left. + 105z^{*7} s_1^4 (1 + 9z^* s_0 + \dots) \right] + \dots \\ = & -z + (1 - |z|^2) \left[ s_0 F_0 + \varepsilon z^* s_1 F_2 + \varepsilon^2 (2z^{*2} s_2 F + \right. \\ & + 3z^{*3} s_1^2 F_4) + \varepsilon^3 (6z^{*3} s_3 F_4 + 20z^{*4} s_2 s_1 F_5 + \\ & + 15z^{*5} s_1^3 F_6) + \varepsilon^4 (24z^{*4} s_4 F_5 + 90z^{*5} s_3 s_1 F_6 + \\ & \left. + 40z^{*5} s_2^2 F_6 + 210z^{*6} s_2 s_1^2 F_7 + 105z^{*7} s_1^4 F_8) + \dots \right], \end{aligned}$$

где  $F_m \equiv \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\xi^m} \frac{1}{1-\xi} \Big|_{\xi=z^* s_0} = \frac{1}{(1-z^* s_0)^{m+1}}$ .

Запишем  $A_j = A_j^{(0)} + \varepsilon A_j^{(1)} + \varepsilon^2 A_j^{(2)} + \dots$  (следует отметить, что разложение по  $A_j^{(n)}$  не является истинным разложением в ряд по степеням  $\varepsilon$ , поскольку для истинного разложения необходимо также раскладывать в ряд  $z$ ). Тогда сопоставление  $A_1$  с разложением по  $A_j^{(n)}$  позволяет найти

$$\begin{aligned} A_1^{(0)} &= -z + (1 - |z|^2) \frac{s_0}{1 - z^* s_0}, \\ A_1^{(1)} &= s_1 \hat{Q}_2 A_1^{(0)}, \\ A_1^{(2)} &= (2s_2 \hat{Q}_3 + 3s_1^2 \hat{Q}_4) A_1^{(0)}, \\ A_1^{(3)} &= (6s_3 \hat{Q}_4 + 20s_2 s_1 \hat{Q}_5 + 15s_1^3 \hat{Q}_6) A_1^{(0)}, \\ A_1^{(4)} &= (24s_4 \hat{Q}_5 + 90s_3 s_1 \hat{Q}_6 + 40s_2^2 \hat{Q}_6 + \\ & \quad + 210s_2 s_1^2 \hat{Q}_7 + 105s_1^4 \hat{Q}_8) A_1^{(0)}, \\ A_1^{(5)} &= (120s_5 \hat{Q}_6 + 504s_4 s_1 \hat{Q}_7 + 420s_3 s_2 \hat{Q}_7 + 1120s_2^2 s_1 \hat{Q}_8 + \\ & \quad + 1260s_3 s_1^2 \hat{Q}_8 + 2520s_2 s_1^3 \hat{Q}_9 + 945s_1^5 \hat{Q}_{10}) A_1^{(0)}, \dots \end{aligned}$$

где  $\hat{Q}_m \equiv \frac{1}{m!} \left( \frac{\partial}{\partial s_0} \right)^m$ .

Примечательно, что уравнения для  $A_1^{(m)}$ , суммируемые в  $A_1$ , формируют группы, в которых можно заметить  $p_m$ , определяемые уравнениями (3.3). А именно,

$$A_1 = \left( 1 + \sum_{m=2}^{\infty} p_m \hat{Q}_m \right) A_1^{(0)},$$

что соответствует выражениям (3.2), (3.4).

Из уравнения (4.2) для  $A_2$ , аналогично случаю  $A_1$ , находим, что

$$\begin{aligned} A_2^{(0)} &= z^2 + (2 - 2|z|^2) z s_0 + (1 - 4|z|^2 + 3|z|^4) s_0^2 + \\ & + (2 - 6|z|^2 + 4|z|^4) z^* s_0^3 + (3 - 8|z|^2 + 5|z|^4) z^{*3} s_0^5 + \dots = \\ & = (s_0 - z)^2 (1 + 2z^* s_0 + 3(z^* s_0)^2 + 4(z^* s_0)^3 + 5(z^* s_0)^4 + \dots) = \\ & = (s_0 - z)^2 \frac{d}{d\xi} \frac{1}{1-\xi} \Big|_{\xi=z^* s_0} = \frac{(s_0 - z)^2}{(1 - z^* s_0)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^{(1)} &= (1 - 4|z|^2 + 3|z|^4) s_1 + 3(2 - 6|z|^2 + 4|z|^4) z^* s_0 s_1 + \\ & + 6(3 - 8|z|^2 + 5|z|^4) z^{*2} s_0^2 s_1 + \\ & + 10(4 - 10|z|^2 + 6|z|^4) z^{*3} s_0^3 s_1 + \dots = \\ & = \frac{s_1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s_0^2} A_2^{(0)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^{(2)} &= (2 - 6|z|^2 + 4|z|^4) z^* 2s_2 + \\ & + (3 - 8|z|^2 + 5|z|^4) z^{*2} (8s_0 s_2 + 3s_1^2) + \\ & + (4 - 10|z|^2 + 6|z|^4) z^{*3} (20s_0^2 s_2 + 15s_0 s_1^2) + \dots = \\ & = \frac{2s_2}{3!} \frac{\partial^3}{\partial s_0^3} A_2^{(0)} + \frac{3s_1^2}{4!} \frac{\partial^4}{\partial s_0^4} A_2^{(0)}. \end{aligned}$$

$$A_2^{(3)} = \dots = \left( \frac{6s_3}{4!} \frac{\partial^4}{\partial s_0^4} + \frac{20s_2 s_1}{5!} \frac{\partial^5}{\partial s_0^5} + \frac{15s_1^3}{6!} \frac{\partial^6}{\partial s_0^6} \right) A_2^{(0)}.$$

Аналогично для  $A_3$ :



$$\begin{aligned}
A_3^{(0)} &= -z^3 + (3-3|z|^2)z^2s_0 + (-3+9|z|^2-6|z|^4)zs_0^2 + \\
&+ (1-9|z|^2+18|z|^4-10|z|^6)s_0^3 + \\
&+ (3-18|z|^2+30|z|^4-15|z|^6)z^*s_0^4 + \\
&+ (6-30|z|^2+45|z|^4-21|z|^6)z^{*2}s_0^5 + \dots = \\
&= (s_0 - z)^3 \left( 1 + 3\xi + 6\xi^2 + 10\xi^3 + 15\xi^4 + \dots \right) \Big|_{\xi=z^*s_0} \\
&= (s_0 - z)^3 \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{1}{1-\xi} \Big|_{\xi=z^*s_0} = \frac{(s_0 - z)^3}{(1 - z^*s_0)^3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3^{(1)} &= (-3+9|z|^2-6|z|^4)zs_1 + \\
&+ 3(1-9|z|^2+18|z|^4-10|z|^6)s_0s_1 + \\
&+ 6(3-18|z|^2+30|z|^4-15|z|^6)z^*s_0^2s_1 + \\
&+ 10(6-30|z|^2+45|z|^4-21|z|^6)z^{*2}s_0^3s_1 + \dots = \\
&= \frac{s_1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s_0^2} A_3^{(0)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3^{(2)} &= (1-9|z|^2+18|z|^4-10|z|^6)2s_2 + (3-18|z|^2+ \\
&+ 30|z|^4-15|z|^6)z^*(8s_0s_2 + 3s_1^2) + (6-30|z|^2+ \\
&+ 45|z|^4-21|z|^6)z^{*2}(20s_0^2s_2 + 15s_0s_1^2) + \dots = \\
&= \frac{2s_2}{3!} \frac{\partial^3}{\partial s_0^3} A_3^{(0)} + \frac{3s_1^2}{4!} \frac{\partial^4}{\partial s_0^4} A_3^{(0)}.
\end{aligned}$$

$$A_3^{(3)} = \dots = \left( \frac{6s_3}{4!} \frac{\partial^4}{\partial s_0^4} + \frac{20s_2s_1}{5!} \frac{\partial^5}{\partial s_0^5} + \frac{15s_1^3}{6!} \frac{\partial^6}{\partial s_0^6} \right) A_3^{(0)}.$$

Полученные выражения для  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и результаты аналогичных вычислений для  $A_4$  и  $A_5$  могут быть записаны в общем виде (3.2) и (3.4). Таким образом, естественно предположить, что уравнения (3.2) и (3.4) выполняются для всех  $A_j$ .

#### 4.2. Вычисление операторов $\hat{Q}_j A_j^{(0)}$ и $\hat{Q}_{j+1} A_j^{(0)}$

Для  $m = j$ , в соответствии с рекуррентным соотношением (3.7), существует только одна возможность получить  $A_j^{(0)}$  из  $A_0^{(0)}$ , действуя оператором  $\hat{Q}_m A_j^{(0)}$ : при каждом дифференцировании выбирать переход между элементами  $j' \rightarrow j' - 1$ , что дает множитель  $j'/(1 - |z|^2)$ . Легко получить

$$\frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial s_0^j} A_j^{(0)} = \frac{1}{j!} \frac{j!}{(1 - |z|^2)^j} A_0^{(0)} = \frac{1}{(1 - |z|^2)^j}.$$

Для  $m = j + 1$  путь от  $A_j^{(0)}$  к  $A_0^{(0)}$  должен содержать один переход  $j' \rightarrow j'$ , дающий множитель  $2j'z^*/(1 - |z|^2)$ , а остальные переходы имеют вид  $j'' \rightarrow j'' - 1$  и дают множитель  $j''/(1 - |z|^2)$ , что в совокупности для  $j'' = j, j - 1, j - 2, \dots, 1$  дает  $j!/(1 - |z|^2)^j$ . Таким образом, остается просуммировать возможные переходы  $j' \rightarrow j'$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(j+1)!} \frac{\partial^{j+1}}{\partial s_0^{j+1}} A_j^{(0)} &= \frac{1}{(j+1)!} \sum_{j'=1}^j j' \frac{2z^* j!}{(1 - |z|^2)^{j+1}} A_0^{(0)} = \\
&= \frac{z^* j}{(1 - |z|^2)^{j+1}}.
\end{aligned}$$

Для  $m = j + 2$ , путь от  $A_j^{(0)}$  к  $A_0^{(0)}$  должен содержать либо один переход типа  $j' \rightarrow j' + 1$  или два перехода  $j' \rightarrow j'$ . При переходе  $j' \rightarrow j' + 1$ , дающем множитель  $j'z^{*2}/(1 - |z|^2)$ ,  $(j + 1)$ -ин переход  $j'' \rightarrow j'' - 1$ , который дает в совокупности на двух участках пути – до и после  $j' \rightarrow j' + 1$  – множитель

$$\frac{j \cdot (j-1) \cdot \dots \cdot (j'+1)}{(1 - |z|^2)^{j-j'}} \frac{(j'+1)!}{(1 - |z|^2)^{j'+1}},$$

дает вклад

$$\sum_{j'=1}^j \frac{j' z^{*2} (j'+1) j!}{(j+2)! (1 - |z|^2)^{j+2}} A_0^{(0)} = \frac{j z^{*2}}{3(1 - |z|^2)^{j+2}}.$$

При двух переходах  $j'_1 \rightarrow j'_1$  и  $j'_2 \rightarrow j'_2$ , которые дают множители  $2j'_1 z^*/(1 - |z|^2)$  и  $2j'_2 z^*/(1 - |z|^2)$ , и  $j$  переходах  $j'' \rightarrow j'' - 1$ , дающих совокупный множитель  $j!/(1 - |z|^2)^j$ , получаем вклад

$$\begin{aligned}
\sum_{j'_1=1}^j \sum_{j'_2=1}^j \frac{4j'_1 j'_2 z^{*2} j!}{(j+2)! (1 - |z|^2)^{j+2}} A_0^{(0)} &= \\
&= \left( \sum_{j'_1=1}^j j'_1 \right)^2 \frac{4z^{*2}}{(j+1)(j+2)(1 - |z|^2)^{j+2}}.
\end{aligned}$$

Окончательно суммируя, находим

$$\frac{1}{(j+2)!} \frac{\partial^{j+2}}{\partial s_0^{j+2}} A_j^{(0)} = \frac{j \left( j^2 + \frac{4}{3} j + \frac{2}{3} \right) z^{*2}}{(j+2)(1 - |z|^2)^{j+2}}.$$

## 5. Заключение

В работе выведена взаимосвязь между распределением переменных Ватанабэ–Строгаца  $\psi_k$  и «круговыми» кумулянтами  $\kappa_m$  для ансамблей фазовых элементов. Параметр преобразования ВС  $z$  и амплитуда в Фурье пространстве  $A_j$  распределения  $W(\psi)$  определяются уравнениями (3.5) и (3.2)–(3.4) соответственно. Настоящие уравнения справедливы безотносительно каких-либо допущений относительно круговых кумулянтов  $\kappa_j$ . Дальнейшие результаты относятся к важному случаю иерархии круговых кумулянтов  $\kappa_j = \varepsilon^{j-1} s_{j-1}$ , этот случай соответствует эволюции ансамбля в  $\varepsilon$ -окрестности решения Отга–Антонсена [7]. Таким образом, можно сделать два строгих утверждения. (i) В случае внутренних шумов интенсивности  $\varepsilon$  возмущенное решение ОА представляет собой иерархию  $\kappa_j - \varepsilon^{j-1}$ . (ii) Если интенсивность собственного шума не превышает  $\varepsilon$ , а начальное состояние имеет вид иерархии  $\kappa_j - \varepsilon^{j-1}$ , иерархия сохраняется в масштабах времени  $\mathcal{O}(1)$ .

При иерархии круговых кумулянтов для  $\phi_k$ , при которой в общем случае не требуется иерархия Фурье-амплитуд  $a_j = \langle e^{ij\phi} \rangle$ , амплитуды  $A_j = \langle e^{ij\psi} \rangle$  подчиняются иерархии  $A_{2m-1}, A_{2m} - \epsilon^m$  (см. уравнение (3.8)). Тем не менее  $A_j$  является плохим представителем состояния ансамбля, поскольку ведущий порядок  $A_j$  для всех  $j$  определяется исключительно переменными  $\kappa_1 = s_0$  и  $\kappa_2 = \epsilon s_1$ ; кроме того, ведущие члены  $A_j$  взаимно сокращаются в выражениях для кумулянтов высокого порядка для  $\psi$ . Круговые кумулянты для  $\psi$  и  $\phi$  подчиняются одинаковой иерархии; в ведущем порядке их взаимные преобразования определяются уравнениями (3.9) и (3.10). Эти преобразования остаются точно взаимно обратными для произвольного порядка их обрывания.

Авторы признательны Аркадию Пиковскому за то, что он привлек их внимание к проблеме, исследованной в настоящей работе, плодотворные обсуждения и комментарии. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-42-04120).

### Список литературы

1. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Vicente C. J. P., Ritort F., Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Reviews of Modern Physics*. 2005. Vol. 77. N. 1. P. 137–185.
2. Pikovsky A., Rosenblum M. Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives // *Chaos*. 2015. Vol. 25. N. 9. 097616.
3. Watanabe S., Strogatz S. H. Integrability of a globally coupled oscillator array // *Physical Review Letters*. 1993. Vol. 70. N. 16, 2391.
4. Watanabe S., Strogatz S. H. Constants of motion for superconducting Josephson arrays // *Physica D*. 1994. Vol. 74. N. 3–4. P. 197–253.
5. Marvel S. A., Mirollo R. E., Strogatz S. H. Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action // *Chaos*. 2009. Vol. 19. N. 4. 043104.
6. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // *Chaos*. 2008. Vol. 18. N. 3, 037113.
7. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott-Antonsen ansatz // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 120. N. 26, 264101.
8. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A. К описанию коллективной динамики в ансамблях реальных осцилляторов // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2018. № 3 (41). С. 5–7.
9. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // *Chaos*. 2018. Vol. 28. N. 10, 101101.
10. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Двухгрупповые решения для динамики ансамблей фазовых систем типа Отта–Антонсена // *Известия вузов. Радиофизика*. 2018. Т. 61. № 8–9. С. 718–728.
11. Vlasov V., Rosenblum M., Pikovsky A. Dynamics of weakly inhomogeneous oscillator populations: perturbation theory on top of Watanabe–Strogatz integrability // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016. Vol. 49. N. 31, 31LT02.
12. Pikovsky A., Rosenblum M. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 101. N. 26, 264103.
13. Pazó D., Montbrió E. Low-dimensional dynamics of populations of pulse-coupled oscillators // *Physical Review X*. 2014. Vol. 4. N. 1, 011009.
14. Montbrió E., Pazó D., Roxin A. Macroscopic description for networks of spiking neurons // *Physical Review X*. 2015. Vol. 5. N. 2, 021028.
15. Chen B., Engelbrecht J. R., Mirollo R. Hyperbolic geometry of Kuramoto oscillator networks // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2017. Vol. 50. N. 35, 355101.
16. Abrams D. M., Mirollo R., Strogatz S. H., Wiley D. A. Solvable model for chimera states of coupled oscillators // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 101. N. 8, 084103.
17. Nagai K. H., Kori H. Noise-induced synchronization of a large population of globally coupled non-identical oscillators // *Physical Review E*. 2010. Vol. 81. N. 6, 065202.
18. Braun W., Pikovsky A., Matias M. A., Colet P. Global dynamics of oscillator populations under common noise // *EPL (Europhysics Letters)*. 2012. Vol. 99. N. 2, 20006.
19. Pimenova A. V., Goldobin D. S., Rosenblum M., Pikovsky A. Interplay of coupling and common noise at the transition to synchrony in oscillator populations // *Scientific Reports*. 2016. Vol. 6, 38518.
20. Goldobin D. S., Долматова А. В., Розенблюм М., Пиковский А. Синхронизация в ансамблях Курамто–Сакагучи при конкурирующем влиянии общего шума и глобальной связи // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2017. Т. 25. № 6. С. 5–37.
21. Dolmatova A. V., Goldobin D. S., Pikovsky A. Synchronization of coupled active rotators by common noise // *Physical Review E*. 2017. Vol. 96. N. 6, 062204.
22. Zaks M. A., Tomov P. Onset of time dependence in ensembles of excitable elements with global repulsive coupling // *Physical Review E*. 2016. Vol. 93. N. 2, 020201.
23. Pietras B., Daffertshofer A. Ott-Antonsen attractiveness for parameter-dependent oscillatory systems // *Chaos*. 2016. Vol. 26. N. 10, 103101.
24. Hannay K. M., Forger D. B., Booth V. Macroscopic models for networks of coupled biological oscil-

lators // *Science Advances*. 2018. Vol. 4. N. 8, e1701047.

## References

1. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Vicente C. J. P., Ritort F., Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of Modern Physics*. 2005, vol. 77, no. 1, pp. 137–185.
2. Pikovsky A., Rosenblum M. Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives. *Chaos*. 2015, vol. 25, no. 9, 097616.
3. Watanabe S., Strogatz S. H. Integrability of a globally coupled oscillator array. *Physical Review Letters*. 1993, vol. 70, no. 16, 2391.
4. Watanabe S., Strogatz S. H. Constants of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D*. 1994, vol. 74, no. 3–4, pp. 197–253.
5. Marvel S. A., Mirolo R. E., Strogatz S. H. Identical phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Möbius group action. *Chaos*. 2009, vol. 19, no. 4, 043104.
6. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos*. 2008, vol. 18, no. 3, 037113.
7. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott-Antonsen ansatz. *Physical Review Letters*. 2018, vol. 120, no. 26, 264101.
8. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovskii A. Towards the description of collective dynamics in ensembles of real oscillators. *Bulletin of Perm University. Physics*. 2018, no. 3 (41), pp. 5–7 (In Russian).
9. Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators. *Chaos*. 2018, vol. 28, no. 10, 101101.
10. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Two-Bunch Solutions for the Dynamics of Ott–Antonsen Phase Ensembles. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2019, vol. 61, no. 8–9, pp. 640–649.
11. Vlasov V., Rosenblum M., Pikovsky A. Dynamics of weakly inhomogeneous oscillator populations: perturbation theory on top of Watanabe–Strogatz integrability. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016, vol. 49, no. 31, 31LT02.
12. Pikovsky A., Rosenblum M. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators. *Physical Review Letters*. 2008, vol. 101, no. 26, 264103.
13. Pazó D., Montbrió E. Low-dimensional dynamics of populations of pulse-coupled oscillators. *Physical Review X*. 2014, vol. 4, no. 1, 011009.
14. Montbrió E., Pazó D., Roxin A. Macroscopic description for networks of spiking neurons. *Physical Review X*. 2015, vol. 5, no. 2, 021028.
15. Chen B., Engelbrecht J. R., Mirolo R. Hyperbolic geometry of Kuramoto oscillator networks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2017, vol. 50, no. 35, 355101.
16. Abrams D. M., Mirolo R., Strogatz S. H., Wiley D. A. Solvable model for chimera states of coupled oscillators. *Physical Review Letters*. 2008, vol. 101, no. 8, 084103.
17. Nagai K. H., Kori H. Noise-induced synchronization of a large population of globally coupled non-identical oscillators. *Physical Review E*. 2010, vol. 81, no. 6, 065202.
18. Braun W., Pikovsky A., Matias M. A., Colet P. Global dynamics of oscillator populations under common noise. *EPL (Europhysics Letters)*. 2012, vol. 99, no. 2, 20006.
19. Pimenova A. V., Goldobin D. S., Rosenblum M., Pikovsky A. Interplay of coupling and common noise at the transition to synchrony in oscillator populations. *Scientific Reports*. 2016, vol. 6, 38518.
20. Goldobin D. S., Dolmatova A. V., Rosenblum M., Pikovsky A. Synchronization in Kuramoto–Sakaguchi ensembles with competing influence of common noise and global coupling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017, vol. 25, no. 6, pp. 5–37 (In Russian).
21. Dolmatova A. V., Goldobin D. S., Pikovsky A. Synchronization of coupled active rotators by common noise. *Physical Review E*. 2017, vol. 96, no. 6, 062204.
22. Zaks M. A., Tomov P. Onset of time dependence in ensembles of excitable elements with global repulsive coupling. *Physical Review E*. 2016, vol. 93, no. 2, 020201.
23. Pietras B., Daffertshofer A. Ott-Antonsen attractiveness for parameter-dependent oscillatory systems. *Chaos*. 2016, vol. 26, no. 10, 103101.
24. Hannay K. M., Forger D. B., Booth V. Macroscopic models for networks of coupled biological oscillators. *Science Advances*. 2018, vol. 4, no. 8, e1701047.

### Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Голдобин Д. С., Клименко Л. С. О связи между распределением фаз Ватанабэ–Строгаца и круговыми кумулянтами // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 2. С. 24–34. doi: 10.17072/1994-3598-2019-2-24-34

### Please cite this article in English as:

Goldobin D. S., Klimenko L. S. On relationships between the distribution of Watanabe–Strogatz phases and circular cumulants. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2019, no. 2, pp. 24–34. doi: 10.17072/1994-3598-2019-2-24-34