

УДК 532.51  
PACS 47.55 Dz

## Свободные колебания капли, погруженной в вязкую безграничную жидкость

Ю. К. Братухин, С. О. Макаров

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: som@psu.ru

Аналитически точно решена задача о свободных колебаниях капли, погруженной в жидкость, заполняющую все пространство в условиях невесомости. Обе жидкости считаются вязкими, инертными, несжимаемыми и взаимно насыщенными, форма капли слабо отклоняется от сферической. Найдено точное решение системы уравнений гидродинамики в приближении Стокса с учетом граничных условий на деформированной поверхности капли. Для самой крупномасштабной моды определены коэффициенты затухания, частоты колебаний и критические параметры, определяющие инертность, вязкость и упругость, при которых возникает аperiodический режим движения. Показано, что с увеличением плотности и вязкости капли аperiodический режим движения наступает при меньших значениях безразмерного коэффициента поверхностного натяжения.

**Ключевые слова:** капля; свободные колебания; критические параметры

*Поступила в редакцию 23.02.2019; принята к опубликованию 27.03.2019*

## Free oscillations of drop immersed in a viscous boundless liquid

Yu. K. Bratukhin, S. O. Makarov

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: som@psu.ru

The problem on free oscillations of liquid drop immersed in another liquid filling the whole space is solved analytically. It is assumed that both of liquids are viscous, inert, incompressible and mutually saturated; the shape of drop is slightly deviates from spherical; the amplitude of oscillations is much less than the wavelength. The exact solution of hydrodynamic equations in Stokes approximation is obtained with boundary conditions on the deformable surface of the drop. For the largescale mode decrement, oscillations frequencies, and critical parameters at which an aperiodic mode of motion occurs are determined. It is shown that with an increase in viscosity and density of the drop, the aperiodic mode occurs at lower values of the dimensionless surface tension coefficient.

**Keywords:** drop; free oscillations; critical parameters

*Received 23.02.2019; accepted 27.03.2019*

doi: 10.17072/1994-3598-2019-1-60-65

## 1. Введение

При оценке собственных частот колеблющихся каплей обычно используется полученная Рэлеем формула [1], в которой не учитываются вязкость капли, инертность и вязкость окружающей среды. Последующие работы, обзор которых приведен в [2, 3], содержали аналитическое и численное моделирование динамики колебаний капли для определенных соотношений плотностей фаз и вязкостей [4-7]. Ниже определены частоты и коэффициенты затухания свободных колебаний капли вязкой несжимаемой жидкости, погруженной в другую вязкую несжимаемую жидкость для любых соотношений плотностей и вязкостей жидкостей.

## 2. Постановка задачи. Уравнения и граничные условия

При решении задачи будем предполагать, что сила тяжести отсутствует; все параметры жидкостей (плотности  $\rho_i$ , кинематические и динамические коэффициенты вязкости  $\nu_i$  и  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2$  для первой (внешняя жидкость) и второй (капля) сред соответственно и коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей  $\sigma_0$ ) постоянны; жидкости неразстворимы одна в другой; на бесконечности жидкость неподвижна, давление постоянно; форма капли слабо отклоняется от сферической:

$$r = R(\theta, \varphi, t) = a(1 + \varepsilon(\theta, \varphi, t)),$$

$$|\varepsilon(\theta, \varphi, t)| \ll 1,$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  – меридиональный и азимутальный углы сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в центре недеформируемой капли; амплитуда колебаний много меньше длины волны. Как известно [8], такое предположение позволяет в уравнении Навье-Стокса пренебречь конвективным членом  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$  по сравнению с  $\partial\mathbf{v}/\partial t$ . Поскольку в сферически симметричных системах частоты не зависят от «магнитного» квантового числа [9], анализ ограничим рассмотрением аксиально-симметричных колебаний.

Введём безразмерные переменные. Для этого выберем в качестве единиц измерения: длины – радиус  $a$  невозмущённой капли, скорости  $\sigma_0/\eta_1$ , давления  $\sigma_0/a$  и времени  $a^2/\nu_1$ . В задачу войдут следующие безразмерные параметры: плотность  $\rho = \rho_2/\rho_1$ , кинематический  $\nu = \nu_2/\nu_1$  и динамический  $\eta = \eta_2/\eta_1$  коэффициенты вязкости и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = \sigma_0 a/\eta_1 \nu_1$ . Заметим, что независимых параметров только три, так как  $\rho = \eta/\nu$ .

В этих условиях распределение скоростей  $\mathbf{v}_i$  и давлений  $p_i$  в обеих средах ( $i = 1, 2$ ) определится

следующей системой уравнений гидродинамики [8]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \Delta \mathbf{v}_1,$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} = -\nabla p_2 + \eta \Delta \mathbf{v}_2,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$
(2.1)

К этим уравнениям необходимо присоединить граничные условия на свободной деформируемой поверхности капли: нормальные к границе составляющие скорости должны быть порознь равны нормальной составляющей скорости границы раздела, а касательные составляющие скорости и касательные и нормальные составляющие напряжений непрерывны [8]. Запишем эти условия в сферической системе координат, учитывая геометрически очевидные формулы, связывающие орты нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $r = R(\theta, t) = (1 + \varepsilon(\theta, t))$  и касательной  $\boldsymbol{\tau}$  к меридиональному сечению этой поверхности с радиальным  $\mathbf{e}_r$ , меридиональным  $\mathbf{e}_\theta$  ортами сферической системы координат:

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_r + \sin \alpha \mathbf{e}_\theta,$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\sin \alpha \mathbf{e}_r + \cos \alpha \mathbf{e}_\theta,$$

$$\sin \alpha = \frac{-R'}{\sqrt{R^2 + R'^2}} \cong -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \frac{1}{R} + 0(\varepsilon^2),$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R'^2}} \cong 1 + 0(\varepsilon^2).$$

Используя эти формулы и известное [9] выражение для средней кривизны  $H$  слабо деформированной сферы  $2H = 2 - (\Delta \varepsilon + 2\varepsilon)$ , получим следующую систему граничных условий в линейном по  $\varepsilon$  приближении:

$$r = R(\theta, t) = 1 + \varepsilon(\theta, t):$$

$$v_{r1} = v_{r2} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t},$$

$$v_{\theta 1} = v_{\theta 2},$$

$$p_1 - p_2 + 2 - (\varepsilon'' + \varepsilon' \operatorname{ctg} \theta + 2\varepsilon) =$$

$$= 2 \frac{\partial v_{r1}}{\partial r} - 2\eta \frac{\partial v_{r2}}{\partial r},$$

$$\left( \frac{\partial v_{r1}}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta 1}}{\partial r} - \frac{v_{\theta 1}}{r} \right) =$$

$$= \eta \left( \frac{\partial v_{r2}}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta 2}}{\partial r} - \frac{v_{\theta 2}}{r} \right).$$
(2.2)

На бесконечности ставим обычные условия, вытекающие из принципа излучения [10]: все функции должны иметь вид распространяющихся волн, фазы которых уходят в бесконечность, а ам-

плитуды убывают до нуля; в начале координат функции ограничены:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty : v_1 &\rightarrow 0; p_1 \text{ постоянно;} \\ r = 0 : p_2, v_2 &\text{ ограничены.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

### 3. Свободные колебания капли

Уравнения (2.1) для обеих фаз однотипны. Поэтому вначале найдём решение системы уравнений такого вида, пригодное как для внешней, так и для внутренней областей. После разделения пространственных и временных переменных (константа разделения  $-\lambda$ ) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} -\lambda \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Амплитуды функций при временном множителе  $\exp(-\lambda t)$  обозначены теми же буквами, что и сами функции.

Следуя [9], будем искать решение (3.1) в форме суперпозиции векторных шаровых функций  $\mathbf{v}_{lm}(r, \theta, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \mathbf{v}_{lm}(r, \theta, \varphi), \\ p(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ \mathbf{v}_{lm.}(r, \theta, \varphi) &= f_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \mathbf{e}_r + \\ &\quad + g_{lm}(r) r \nabla Y_{lm}(\theta, \varphi), \\ Y_{lm}(\theta, \varphi) &= P_l^{(m)}(\theta) \exp(im\varphi). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выполним расчёты для отдельной моды с фиксированными «квантовыми» числами  $l$  и  $m$ . Ради краткости записи промежуточных формул не будем временно помечать амплитуды  $f_{lm}(r)$ ,  $g_{lm}(r)$  и  $q_{lm}(r)$  индексами и указывать у них аргумент:

$$\begin{aligned} \nabla \times (f Y_{lm} \mathbf{e}_r) &= f \nabla Y_{lm} \times \mathbf{e}_r, \\ \nabla \times [\nabla \times (f Y_{lm} \mathbf{e}_r)] &= \\ &= f' \mathbf{e}_r \times (\nabla Y_{lm} \times \mathbf{e}_r) + \\ &\quad + f \nabla \times (\nabla Y_{lm} \times \mathbf{e}_r) = \\ &= f' [\nabla Y_{lm} \mathbf{e}_r^2 - \mathbf{e}_r (\mathbf{e}_r \nabla Y_{lm})] + \\ &\quad + f [\nabla Y_{lm} (\nabla \mathbf{e}_r) + (\mathbf{e}_r \nabla) \nabla Y_{lm} - \\ &\quad - \mathbf{e}_r \nabla^2 Y_{lm} - (\nabla Y_{lm} \nabla) \mathbf{e}_r] = \\ &= f' \nabla Y_{lm} + l(l+1) f r^{-2} Y_{lm} \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

При выполнении последнего преобразования были использованы геометрически очевидные правила

дифференцирования ортов сферической системы координат [9]. В частности,

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_r \nabla) \nabla Y_{lm} &= \frac{\partial}{\partial r} \nabla Y_{lm} = \\ &= -\frac{\partial Y_{lm}}{r^2 \partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{\csc \theta \partial Y_{lm}}{r^2 \partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi = -\frac{\nabla Y_{lm}}{r}, \\ (\nabla Y_{lm} \nabla) \mathbf{e}_r &= \frac{\partial Y_{lm}}{r^2 \partial \theta} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{\csc^2 \theta \partial Y_{lm}}{r^2 \partial \varphi} = \frac{\nabla Y_{lm}}{r}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем выражения для касательных к поверхности сферы мод и градиента давления

$$\begin{aligned} \nabla \times [\nabla \times (gr \nabla Y_{lm})] &= \\ &= -(gr)'' \nabla Y_{lm} - l(l+1)(gr)' r^{-2} Y_{lm} \mathbf{e}_r, \\ \nabla p_{lm} &= q' Y_{lm} \mathbf{e}_r + q \nabla Y_{lm}. \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в (3.1) и собирая амплитуды при одинаковых векторных шаровых функциях, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения радиальных функций  $f$ ,  $g$  и  $q$ :

$$\begin{aligned} -\frac{q' r^2}{\eta} - l(l+1) [f - (gr)'] + \frac{\lambda f r^2}{\nu} &= 0, \\ -\frac{q}{\eta} - [f' - (gr)'] + \frac{\lambda gr}{\nu} &= 0, \\ (fr^2)' &= l(l+1) gr, \end{aligned}$$

точное решение которой удаётся выразить через степенные и сферические функции Бесселя первого и второго рода  $j_l(t)$  и  $n_l(t)$  порядка  $l$ :

$$f = \frac{A}{r} j_l(kr) + \frac{B}{r} n_l(kr) + Cr^{l-1} + \frac{D}{r^{l+2}}, \quad (3.4)$$

$$k \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}},$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{A}{(l+1)r} \left[ -j_l(kr) + \frac{r}{l} k j_{l-1}(kr) \right] + \\ &\quad + \frac{B}{lr} \left[ n_l(kr) - \frac{r}{l+1} k n_{l+1}(kr) \right] + \\ &\quad + \frac{C}{l} r^{l-1} - \frac{D}{(l+1)r^{l+2}}, \end{aligned}$$

$$p = \lambda \rho \left( \frac{C}{l} r^l - \frac{D}{(l+1)r^{l+1}} \right).$$

Общее решение (3.4) используем для определения наименьшей частоты свободных колебаний капли. Поскольку для несжимаемых жидкостей радиальные пульсации, описываемые сферически

симметричной модой  $l = 0$  невозможны, а мода с  $l = 1$  представляет собой поступательное движение капли [8], то наименьшей возможной частоте колебаний соответствует мода с  $l = 2$ . Моде с этой частотой соответствует 5 колебательных движений различной симметрии. Радиальные функции для аксиально-симметричной моды ( $m = 0$ ), удовлетворяющие условиям (2.3), таковы (индексы  $l = 2$  и  $m = 0$  у функций опускаем):

$$f_1 = \frac{A}{r^4} + \frac{B}{r} h_2^{(1)}(x), \quad (3.5)$$

$$g_1 = -\frac{A}{3r^4} + \frac{B}{r} \left[ \frac{x}{6} h_1^{(1)}(x) - \frac{1}{3} h_2^{(1)}(x) \right],$$

$$q_1 = -\frac{\lambda A}{3r^3},$$

$$x = \sqrt{\lambda} r,$$

$$f_2 = Cr + \frac{D}{r} j_2(y),$$

$$g_2 = \frac{Cr}{2} + \frac{D}{r} \left[ \frac{y}{6} j_1(y) - \frac{1}{3} j_2(y) \right],$$

$$q_2 = \frac{\lambda \rho C}{2} r^2,$$

$$y = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}} r.$$

Здесь  $h_l^{(1)}(t) = j_l(t) + i n_l(t)$  – сферические функции Ханкеля первого рода порядка  $l$  [9].

#### 4. Обсуждение результатов

Система уравнений (2.1)–(2.2) представляет собой задачу по определению свободных колебаний капли, вызванных начальной деформацией её формы. В результате такого возмущения капля и окружающая её жидкость под действием капиллярных сил приходят в движение, скорость которого определяется экспоненциальным множителем  $\exp(-\lambda t)$ , где декремент  $\lambda$ , константа разделения временных и пространственных переменных [9], в общем случае комплексный. Его действительная  $\text{Re } \lambda$  и мнимая  $\text{Im } \lambda = \omega$  части определяют соответственно коэффициент затухания и частоту колебаний капли.

Определим значение декремента для начального возмущения формы капли вида  $r = 1 + \varepsilon_0 P_2(\theta)$ . Для этого необходимо выразить постоянные интегрирования  $A, B, C, D$ , входящие в формулы (3.5), через амплитуду начального возмущения  $\varepsilon_0$  с помощью граничных условий (2.2). Условием выполнения этой операции является равенство нулю определителя системы однородных линейных уравнений (2.2). После уменьшения на единицу порядка получающегося при этом определителя и

сокращения одинаковых множителей получим следующее уравнение:

$$\det[a_{ik}] = 0, \quad (4.1)$$

$$a_{11} = -2,$$

$$a_{12} = 6i + 6x - 3ix^2 - x^3,$$

$$a_{13} = -3,$$

$$a_{14} = 6 - 3y^2 + \text{ctg } y (y^3 - 6y),$$

$$a_{21} = 1,$$

$$a_{22} = -3i - 3x + ix^2,$$

$$a_{23} = -1,$$

$$a_{24} = -3 + y^2 + 3y \text{ctg } y,$$

$$a_{31} = 48 - 2x^2,$$

$$a_{32} = -144i - 144x + 60ix^2 + 12x^3,$$

$$a_{33} = s - 3x^2,$$

$$a_{34} = s(3 - 3y \text{ctg } y - y^2) + 12\eta[-15 + 6y^2 + \text{ctg } y(15y - y^3)],$$

$$a_{41} = 16,$$

$$a_{42} = -48i - 48x + 21ix^2 + 5x^3 - ix^4,$$

$$a_{43} = -6\eta,$$

$$a_{44} = \eta[-48 + 21y^2 - y^4 + \text{ctg } y(48y - 5y^3)],$$

$$s = 12\eta - 24 \frac{\sigma}{\lambda},$$

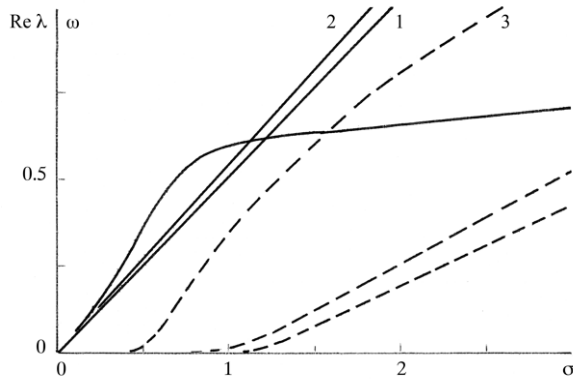
$$x = \sqrt{\lambda},$$

$$y = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}.$$

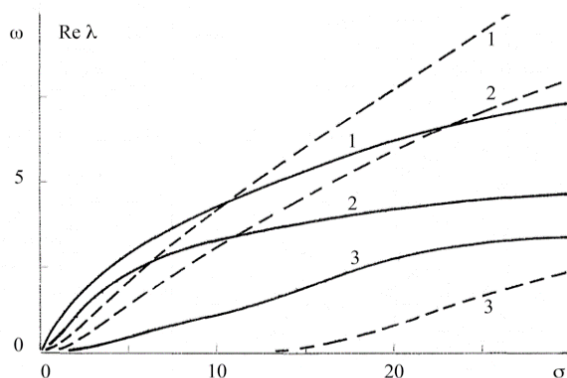
Уравнение (4.1) содержит три параметра  $\rho = \eta/\nu$ ,  $\eta$  и  $\sigma$ , определяющие соответственно инертность, вязкость и упругость гетерогенной системы. При отсутствии вязкости в обеих жидкостях и при исчезающе малой плотности внешней среды (4.1) вырождается в уравнение  $\lambda^2 = -8\sigma/\eta$ , которое, будучи записано в размерной форме, определяет вычисленную Рэлеем собственную частоту невязкой капли в невесомом невязком газе  $\omega^2 = 8\sigma_0/(\rho_2 a^3)$  [1]. Реальная часть декремента  $\lambda$  для этого и только для этого случая равна нулю. Для всех остальных значений параметров она положительна.

В другом предельном случае аномально большой вязкости  $\eta$ , как и следовало ожидать, декремент действительный и положительный  $\lambda = 2\sigma/\eta$ . Зависимость декрементов от величины поверхностного натяжения  $\sigma$  для промежуточных случаев определялась численно. Были рассмотрены три

гипотетические одинаковые по вязкости ( $\eta=1$ ), но различные по плотности ( $\rho = 0, 1; 1$  и  $10$ ) жидкости (рис. 1) и три одинаковых по кинематической вязкости ( $\nu = 1$ ) и сильно различающиеся по динамической вязкости ( $\eta = 0,1; 1$  и  $10$ ) жидкости (рис. 2).



**Рис. 1.** Зависимость коэффициента затухания  $Re \lambda$  (сплошные линии) и частоты колебаний  $\omega$  (пунктир) от поверхностного натяжения  $\sigma$  для жидкостей, одинаковых по вязкости ( $\eta=1$ ), но различных по плотности ( $\rho=0,1$  – кривые 1;  $\rho=1$  – кривые 2;  $\rho=10$  – кривые 3)



**Рис. 2.** Зависимость коэффициента затухания  $Re \lambda$  (сплошные линии) и частоты колебаний  $\omega$  (пунктир) от поверхностного натяжения  $\sigma$  для жидкостей, одинаковых по кинематической ( $\nu=1$ ), но различных по динамической вязкости ( $\eta = 0,1$  – кривые 1;  $\eta = 1$  – кривые 2;  $\eta = 10$  – кривые 3)

Как видно из графиков, с увеличением плотности и вязкости капли аperiодический режим ( $\omega \rightarrow 0$ ) движения наступает при меньших  $\sigma$  – инертная и вязкая капли только при достаточно большом поверхностном натяжении возвращаются в положение равновесия, совершив несколько колебаний. Коэффициенты затухания для всех гете-

рогенных систем при малых  $\sigma$  выходят на близкие асимптоты  $\lambda \cong 0,5\sigma$ .

Все кривые при больших значениях  $\sigma$ , достигаемых в невязких системах ( $\eta_1 = \eta_2 \rightarrow 0$ ) при конечном значении размерного поверхностного натяжения  $\sigma_0$ , пройдя через максимум, выходят на асимптоту  $\omega^2 \cong 8\sigma$ .

### Список литературы

1. *Strutt J. W., Lord Rayleigh.* On the capillary phenomena of jets // *Proceedings of Royal Society.* 1879. Vol. 29. P. 71–97.
2. *Azuma H., Yoshihara S.* Three-dimensional large-amplitude drop oscillations: experiments and theoretical analysis // *Journal of Fluid Mechanics.* 1999. Vol. 393. P. 309–332.
3. *Lyubimov D. V., Kononov V. V., Lyubimova T. P., Egry I.* Small amplitude shape oscillations of a spherical liquid drop with surface viscosity // *Journal of Fluid Mechanics.* 2011. Vol. 677. P. 204–217.
4. *Miller C. A., Scriven L. E.* The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid // *Journal of Fluid Mechanics.* 1968. Vol. 32. P. 417–435.
5. *Prosperetti A.* Normal-mode analysis for the oscillations of a viscous liquid drop in an immiscible liquid // *Journal de Mecanique.* 1980. Vol. 19. N. 1. P. 149–182.
6. *Basaran O. A., Scott T. C., Byers C. H.* Drop oscillations in liquid-liquid systems // *AIChE Journal.* 1989. Vol. 35. N. 8. P. 1263–1270.
7. *Lalanne B., Tanguy S., Risso F.* Effect of rising motion on the damped shape oscillations of drops and bubbles // *Physics of Fluids.* 2013. Vol. 25. P. 1–22.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. *Братухин Ю. К., Макаров С. О.* Гидродинамическая устойчивость межфазных поверхностей. Пермь: изд-во Перм. ун-та, 2005. 239 с.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

### References

1. *Strutt J. W., Lord Rayleigh.* On the capillary phenomena of jets. *Proceedings of Royal Society*, 1879, vol. 29, pp. 71–97.
2. *Azuma H., Yoshihara S.* Three-dimensional large-amplitude drop oscillations: experiments and theoretical analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, vol. 393, pp. 309–332.
3. *Lyubimov D. V., Kononov V. V., Lyubimova T. P., Egry I.* Small amplitude shape oscillations of a spherical liquid drop with surface viscosity. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, vol. 677, pp. 204–217.

4. Miller C. A., Scriven L. E. The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 1968, vol. 32, pp. 417–435.
5. Prosperetti A. Normal-mode analysis for the oscillations of a viscous liquid drop in an immiscible liquid. *Journal de Mecanique*, 1980, vol. 19, no. 1, pp. 149–182.
6. Basaran O. A., Scott T. C., Byers C. H. Drop oscillations in liquid-liquid systems. *AIChE Journal*, 1989, vol. 35, no. 8, pp. 1263–1270.
7. Lalanne B., Tanguy S., Risso F. Effect of rising motion on the damped shape oscillations of drops and bubbles. *Physics of Fluids*, 2013, vol. 25, pp. 1–22.
8. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of Theoretical Physics, vol. 6. Fluid Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987, 554 p.
9. Bratukhin Yu. K., Makarov S. O. *Hydrodynamic stability of interfaces*. Perm: Perm University Press, 2005, 239 p. (In Russian).
10. Tichonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of mathematical physics*. Oxford: Pergamon Press, 1963, 766 p.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Братухин Ю. К., Макаров С. О. Свободные колебания капли, погруженной в вязкую безграничную жидкость // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 1. С. 60–65. doi: 10.17072/1994-3598-2019-1-60-65

**Please cite this article in English as:**

Bratukhin Yu. K., Makarov S. O. Free oscillations of drop immersed in a viscous boundless liquid. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2019, no. 1, pp. 60–65. doi: 10.17072/1994-3598-2019-1-60-65