

УДК 532.5  
PACS 47.56.+r, 47.20.-k

## Устойчивость плоскопараллельных и двумерных течений жидкости над пористой средой

**К. Б. Циберкин**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: kbtsiberkin@psu.ru

Представлен сравнительный анализ задач о линейной устойчивости плоскопараллельного и двумерного стационарного течений в двухслойной системе «жидкость–пористая среда». Рассмотрен слой несжимаемой вязкой жидкости со свободной недеформируемой верхней границей, стекающий по верхней границе однородной насыщенной пористой среды. Фильтрация описывается моделью Бринкмана. Стационарные решения при различных параметрах задачи построены численно методом установления. С применением численного метода стрельбы построены семейства нейтральных кривых для плоских нормальных возмущений, распространяющихся вдоль потока. Проведено сопоставление нейтральных кривых плоскопараллельного и двумерного стационарного течения при различной пористости и относительной толщине пористой среды. Найдено, что в широкой области параметров критические числа Рейнольдса двумерного течения превышают порог устойчивости плоскопараллельного потока в 2 раза, при этом критические волновые числа сопоставимы между собой. В случае двумерного течения значительно усиливается подавление коротковолновых возмущений. При большой относительной толщине пористого слоя происходит резкая дестабилизация двумерного течения, порог устойчивости которого становится ниже, чем у плоскопараллельного потока. Критические волновые числа отвечают возмущениям с большой длиной волны и стремятся к нулю по мере увеличения пористости среды. При низкой пористости нейтральная кривая становится бимодальной.

**Ключевые слова:** смежные течения; пористая среда; устойчивость течения

*Поступила в редакцию 01.02.2019; принята к опубликованию 19.03.2019*

## Stability of plane-parallel and two-dimensional flows over porous medium

**K. B. Tsiberkin**

Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: kbtsiberkin@psu.ru

The paper presents a comparative study of linear stability problems for the plane-parallel and two-dimensional stationary flow in double layer system of fluid and porous medium. An incompressible fluid flows over homogeneous saturated porous layer. The fluid top is a free rigid boundary. Porous medium is described by the Brinkman model. Two-dimensional stationary solutions are built numerically by iterative procedure of establishment method. Sets of the neutral curves are obtained by the shooting method; perturbations are assumed to be flat linear waves travelling down the flow.

The neutral curves are compared for plane-parallel and two-dimensional stationary flow for different porosity and thickness of porous layer. The critical Reynolds numbers are almost twice larger than the stability threshold of plane parallel problem while the critical wave numbers close these two cases. If the porous layer is thick, the two-dimensional problem rapidly destabilized. Its stability threshold becomes lower that for plane-parallel flow. The long-wave instability realizes. Critical wave numbers are small and tends to zero at high porosities. The neutral curve become bimodal at low porosity.

**Keywords:** coupled flows; porous medium; flow stability

Received 01.02.2019; accepted 19.03.2019

doi: 10.17072/1994-3598-2019-1-52-59

## 1. Введение

Проблема взаимодействия течений в однородной жидкости и пористой среде, имеющих смежную границу, а также вопрос об устойчивости течений в таких системах имеют приложения в области разработки накопителей энергии, таких как топливные ячейки и конденсаторы с пористыми диэлектриками, проточные аккумуляторы, а также разработки систем охлаждения [1, 2]. Описание взаимодействующих потоков даётся в рамках разнообразных моделей, полученных как эмпирически, так и путём осреднения уравнений Навье–Стокса на масштабе пор [1, 3, 4]. Детально исследованы динамика конвективных явлений [5] и свойства плоскопараллельного течения [6, 7].

Большинство работ по описанной тематике посвящено плоскопараллельному течению в канале заданной ширины, без поперечной компоненты скорости. Однако ряд недавних исследований показывает возможность реализации двумерного течения, при котором происходит поперечный переток жидкости в пористую среду [8, 9]. В работе [9] представлен подробный численный анализ профилей скорости при различных значениях параметров пористой среды и её толщины.

В настоящей работе анализируется линейная устойчивость двумерного течения. Рассчитаны семейства нейтральных кривых в приближении нормальных плоских возмущений. Результаты сопоставлены с нейтральными кривыми для плоскопараллельного течения.

## 2. Стационарные течения

### 2.1. Гидродинамическая модель

Рассматривается плоское течение однородной несжимаемой вязкой жидкости в канале, ограниченном снизу слоем пористой среды на непроницаемой подложке (рис. 1). Полная толщина системы равна  $h$ , толщина пористого слоя –  $h_p$ . Канал находится в поле тяжести и наклонён под углом  $\alpha$  к горизонту, что обуславливает возникновение течения в системе.

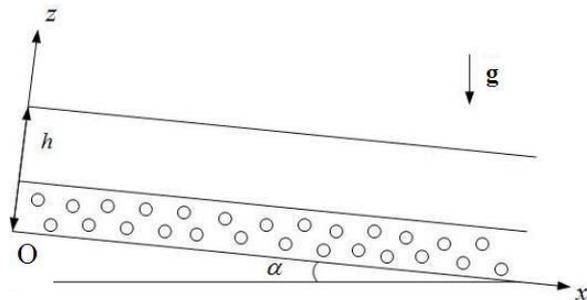


Рис. 1. Геометрия задачи

Стационарное движение однородной жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где  $\mathbf{v} = \{u, v\}$  – скорость течения,  $P$  – поле давления,  $\rho$ ,  $\nu$  – кинематическая вязкость и плотность жидкости,  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения свободного падения. Фильтрация жидкости в пористой среде описывается моделью Бринкмана:

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + \frac{(\mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p}{\varphi^2} = -\frac{\nabla P_p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v}_p - \frac{\nu}{K} \mathbf{v}_p + \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_p = 0,$$

где  $\varphi$ ,  $K$  – пористость и проницаемость среды, индекс  $p$  обозначает поля скорости и давления внутри пористой среды.

На нижней границе пористой среды ставится условие прилипания:

$$z = 0: \quad \mathbf{v}_p = 0. \quad (3)$$

Верхняя граница однородной жидкости – свободная недеформируемая:

$$z = h: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad v = 0. \quad (4)$$

На границе раздела сред задаются непрерывность компонент скорости и условия баланса касательных и нормальных компонент тензора напряжений согласно модели Ochoa-Tapia–Whitaker [4]:

$$z = h_p : \mathbf{v} = \varphi \mathbf{v}_p, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_p}{\partial z}, \quad (5)$$

$$P - 2\nu\rho \frac{\partial v}{\partial z} = P_p - 2\nu\rho \frac{\partial v_p}{\partial z}.$$

Следуя предшествующим работам об устойчивости плоскопараллельного течения в двухслойной системе [7], используются следующие масштабы величин:

$$[r] = h, \quad [t] = \frac{h^2}{\nu},$$

$$[v] = \frac{gh^2 \sin \alpha}{\nu}, \quad [P] = \rho gh \sin \alpha$$

и безразмерные управляющие параметры:

$$Re = \frac{gh^3 \sin \alpha}{\nu^2}, \quad Da = \frac{K}{h^2}, \quad d = \frac{h_p}{h},$$

соответственно, числа Рейнольдса, Дарси и относительная толщина пористого слоя. Выбранные масштабы в плоскопараллельной задаче позволяют получить профили стационарных течений, которые не зависят явно от  $Re$ .

В терминах безразмерных переменных уравнения (1)–(2) и граничные условия (3)–(5) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + Re(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \Delta \mathbf{v} - \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\sin \alpha}, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + \frac{Re}{\varphi^2} (\mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p = -\nabla P_p + \Delta \mathbf{v}_p - \frac{\mathbf{v}_p}{Da} - \frac{\boldsymbol{\gamma}}{\sin \alpha}, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_p = 0,$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \{\sin \alpha, \cos \alpha\},$$

$$z = 0 : \mathbf{v}_p = 0,$$

$$z = 1 : \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad v = 0,$$

$$z = d : \mathbf{v} = \varphi \mathbf{v}_p, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_p}{\partial z}, \quad (8)$$

$$P - 2\nu\rho \frac{\partial v}{\partial z} = P_p - 2\nu\rho \frac{\partial v_p}{\partial z},$$

здесь  $\boldsymbol{\gamma}$  – единичный вектор, направленный вертикально вверх.

В уравнении фильтрации (7) сохранено нелинейное инерционное слагаемое  $(\mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p$ . Расчёты показывают, что его учёт приводит к увеличению поперечной скорости течения в однородной жидкости и согласованному уменьшению продольной компоненты, при этом значения скорости внутри пористого слоя изменяются мало. В работе [10] был представлен сравнительный анализ устойчивости плоскопараллельного течения с учётом и без учёта инерционного слагаемого в уравнении филь-

трации. Найдено, что связанный с изменением модели сдвиг критических чисел Рейнольдса мал, а структура нейтральных кривых не претерпевает качественных изменений. Важнейшей особенностью линеаризованной задачи является ослабление подавления коротковолновых возмущений.

Задача (6)–(8) допускает хорошо изученное решение в виде плоскопараллельного течения, однако оно не является единственным. С использованием специального преобразования скорости может быть построено двумерное стационарное решение [8]. Оба решения и их устойчивость обсуждаются ниже.

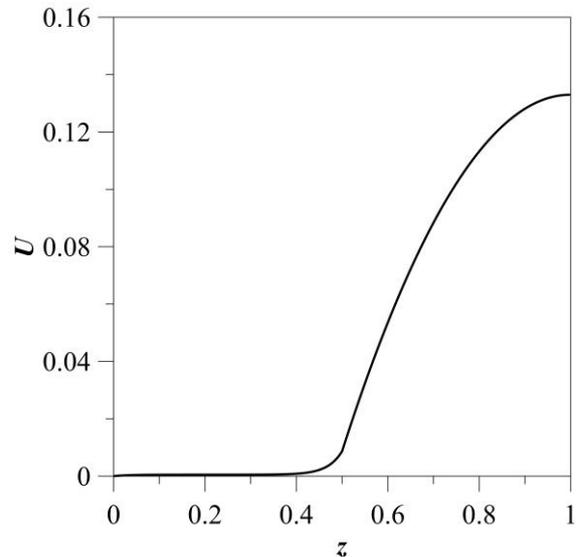
## 2.2. Плоскопараллельное (одномерное) течение

В предположении, что профиль скорости имеет вид  $\mathbf{v} = \{u(z), 0\}$ , уравнения для стационарного течения линеаризуются и значительно упрощаются, допуская аналитическое построение решения. Оно имеет следующий вид:

$$U = (z - d) - \frac{z^2 - d^2}{2} + \varphi U_p(d),$$

$$U_p = 2A \sinh(Da^{-1/2} z) - \frac{\exp(-Da^{-1/2} z) - 1}{Da}, \quad (9)$$

$$A = \frac{1 - d - Da^{1/2} \exp(-Da^{-1/2} z)}{2Da^{1/2} \cosh(Da^{-1/2} d)}.$$



**Рис. 2.** Профиль скорости стационарного плоскопараллельного течения при  $Re = 10^3$ ,  $Da = 10^{-3}$ ,  $d = 0.50$ ,  $\varphi = 0.90$

В однородной жидкости реализуется профиль, подобный течению Пуазейля (рис. 2). В пористой среде при низкой проницаемости реализуется плоский профиль скорости с пограничными слоями вблизи нижней границы слоя и границы раздела сред; при высокой проницаемости пограничные слои сливаются. Распределение давления в жидко-

сти в обеих средах при этом соответствует гидростатическому в состоянии равновесия:

$$P = (1 - z) \operatorname{ctg} \alpha. \quad (10)$$

### 2.3. Двумерное течение

Использование преобразования Бермана [11]:

$$u = U(z) - xV'(z), \quad v = V(z), \quad (11)$$

где штрихом обозначена производная по координате  $z$ , позволяет построить уравнения для двумерного стационарного течения. Данное преобразование удовлетворяет уравнению неразрывности, поскольку получено введением функции тока специального вида.

Подстановка (11) в уравнения (6)–(8) даёт следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} V^{(4)} - \operatorname{Re}(VV''' - V'V'') &= 0, \\ U'' - \operatorname{Re}(U'V - UV') + 1 &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$V_p^{(4)} - \frac{V_p''}{\operatorname{Da}} - \frac{\operatorname{Re}}{\varphi^2}(V_p V_p''' - V_p' V_p'') = 0, \quad (13)$$

$$U_p'' - \frac{U_p}{\operatorname{Da}} - \frac{\operatorname{Re}}{\varphi^2}(U_p' V_p - U_p V_p') + 1 = 0$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} z = 0: V_p &= 0, \quad U_p = 0, \quad V_p' = 0, \\ z = 1: V &= 0, \quad U' = 0, \quad V'' = 0, \\ z = d: V &= \varphi V_p, \quad V' = \varphi V_p', \quad U = \varphi U_p, \\ U' &= U_p', \quad V'' = V_p'', \quad P - 2V' = P_p - 2V_p'. \end{aligned} \quad (14)$$

Переход к уравнениям для  $U$  и  $V$  подробно описан в [8, 9]. При равенстве  $V$  и  $V_p$  нулю задача сводится к уравнениям для плоскопараллельного течения.

Профиль давления благодаря наличию поперечной компоненты отличается от гидростатического и восстанавливается по распределению скорости  $V$ :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{Re}(V'' - VV'), \\ \frac{dP_p}{dz} &= -\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{Re}\left(V_p'' - \frac{1}{\varphi^2} V_p V_p'\right) - \frac{V_p}{\operatorname{Da}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из структуры уравнений следует, что характерный масштаб поперечной компоненты скорости равен  $1 / \operatorname{Re}$ .

Ввиду нелинейности задача (12)–(15) решается численно. Уравнения для скорости (12)–(13) интегрируются по явной конечно-разностной схеме методом установления. В качестве начального приближения для него выбирается кусочно-линейная функция, частично удовлетворяющая условиям на внешних границах системы. Пространственная сетка, на которой выполняется расчёт, имеет 1000

узлов. Итерационный процесс продолжается до достижения требуемой относительной погрешности, заданной в расчётах на уровне  $10^{-8}$ . Поле давления на каждой итерации вычисляется из конечно-разностного выражения для производных (15). Характерная структура рассчитанных профилей продольной и поперечной скоростей показана на рис. 3.

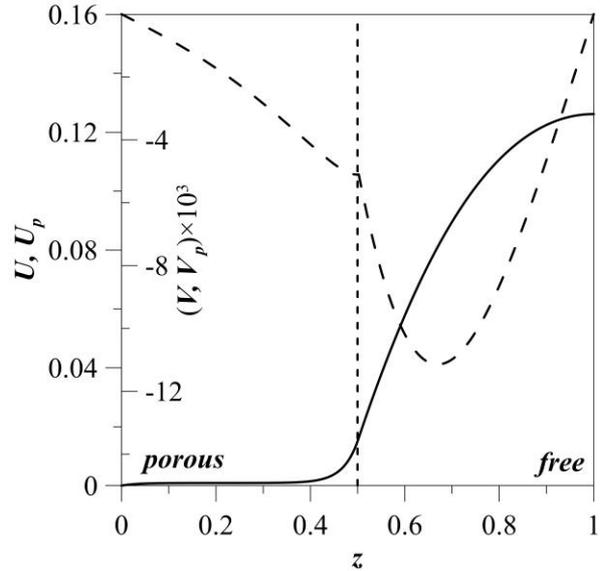


Рис. 3. Компоненты скорости стационарного двумерного течения при  $Re = 10^3$ ,  $Da = 10^{-3}$ ,  $d = 0.50$ ,  $\varphi = 0.90$ : сплошная линия – продольная, штриховая – поперечная скорости

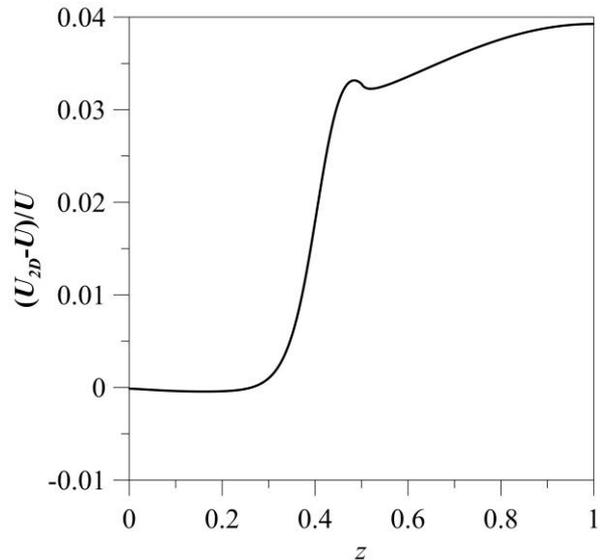


Рис. 4. Относительное отличие продольной компоненты скорости  $U$  для одномерного и двумерного течений при  $Re = 10^3$ ,  $Da = 10^{-3}$ ,  $d = 0.50$ ,  $\varphi = 0.90$

На рис. 4 показано относительное отличие между компонентами скорости  $U$  в двумерном и

плоскопараллельном потоке. Видно, что оно достигает 4%. Различие скоростей течения в пористом слое мало. По мере приближения к пограничному слою в пористой среде различие профилей скорости возрастает, что связано с наличием перетока жидкости внутрь пористой среды и сопутствующим ускорением продольного течения. Этот эффект обеспечивает локальный пик разности скоростей течения. Наконец, указанный переток жидкости через границу раздела приводит и к общему увеличению расхода через поперечное сечение канала, что отражается в увеличении продольной скорости однородной жидкости.

### 3. Устойчивость течений

#### 3.1. Линейная задача устойчивости

Устойчивость плоскопараллельного течения при различных значениях параметров подробно изучена в предшествующих работах [6, 7]. Анализ устойчивости двумерного течения выполнен приближённо по отношению к нормальным возмущениям методом стрельбы [12].

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений для возмущений используется метод Рунге–Кутты–Мерсона с адаптивным шагом. Стационарный профиль скорости при необходимости достраивается в промежуточных точках вдоль координаты  $z$  по формулам кусочно-линейной интерполяции. Для этого стационарный профиль двумерного течения предварительно табулируется на равномерной сетке размером 2000 узлов.

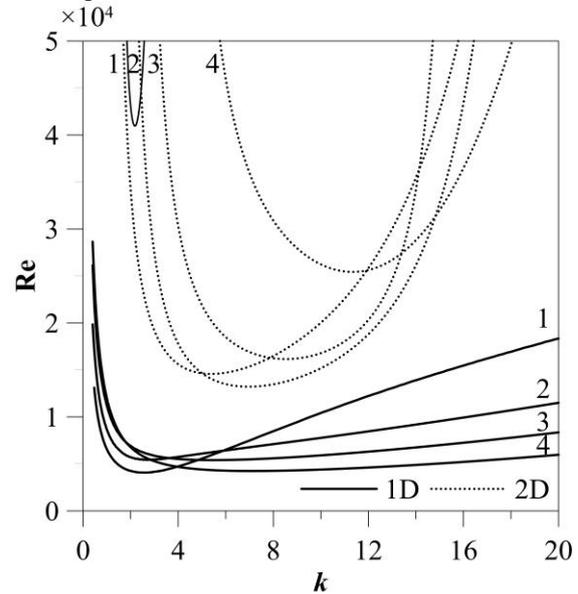
Ниже приводятся семейства нейтральных кривых, полученных для двумерного потока, в сравнении с нейтральными кривыми плоскопараллельного течения, при различных значениях толщины пористого слоя.

#### 3.2. Толщина пористой среды $d = 0.35$

При относительно малой толщине пористого слоя на всех нейтральных кривых существует один выраженный минимум (рис. 5), отвечающий механизму неустойчивости сдвигового течения: в переходной области между потоками вблизи границы раздела происходит резкое увеличение скорости, и сдвиговые напряжения в этой области обуславливают возможность генерации мелкомасштабных вихрей наподобие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Наиболее коротковолновые возмущения в двумерном течении эффективно подавляются.

Неустойчивость плоскопараллельного течения определяется крупномасштабными возмущениями с волновым числом  $k \sim 2 \div 3$ . Для него характерна слабая зависимость порога устойчивости от сил вязкого трения в системе, и поэтому предполагается [7], что с крупномасштабными возмущениями

связан механизм развития неустойчивости в окрестностях точки перегиба профиля скорости. Такая точка существует в слое пористой среды. Выполнение условий применимости теоремы Рэлея дополнительно обеспечивается разрывом второй производной продольной компоненты скорости на границе.



**Рис. 5.** Нейтральные кривые для плоскопараллельного (1D) и двумерного (2D) течений при толщине пористой среды  $d = 0.35$ , числе Дарси  $Da = 10^{-3}$  и различной пористости  $\varphi$ : 1 – 0.95, 2 – 0.80, 3 – 0.70, 4 – 0.60. Сплошной линией в верхней части графика обозначена ветвь нейтральной кривой 1 для двумерного течения, отвечающая крупномасштабным возмущениям

В случае наибольшей пористости ( $\varphi = 0.95$ ) в рассматриваемой области параметров для двумерного течения обнаруживается также ветвь нейтральной кривой, связанная с крупномасштабными возмущениями (тонкая сплошная линия в верхней части рис. 5). Она полностью располагается внутри области коротковолновой неустойчивости; при меньшей пористости критическое число этой ветви быстро увеличивается.

Глобальное критическое число Рейнольдса для двумерного потока приблизительно вдвое превосходит таковое для плоскопараллельного, критическое волновое число также увеличивается. В обоих случаях выражено смещение минимума кривых в коротковолновую область по мере уменьшения пористости. Значение критического числа Рейнольдса в рассмотренных случаях проявляет немонотонные и противоположные друг другу зависимости от пористости среды. Для плоскопараллельного течения в интервале пористости  $\varphi = 0.70 \div 0.95$  имеет место максимум  $Re_{crit}$ , тогда как двумерное течение в этом интервале яв-

ляется наименее устойчивым, а последующее уменьшение пористости стабилизирует поток.

### 3.3. Толщина пористой среды $d = 0.50$

При увеличении толщины пористой среды до значения  $d = 0.50$  качественная структура нейтральных кривых и зависимости порогов устойчивости от пористости существенно изменяются. Доминирующими становятся крупномасштабные возмущения, описанные выше. Ослабляется подавление коротковолновых возмущений для двумерного течения и усиливается – для плоскопараллельного (рис. 6). Порог неустойчивости двумерного течения приближается к порогу для плоскопараллельного, но критическое значение  $Re$  по-прежнему остаётся несколько больше.

### 3.4. Толщина пористой среды $d = 0.75$

При большой толщине пористой среды нейтральные кривые, рассчитанные для плоскопараллельного течения, сохраняют структуру с одним минимумом. Течение незначительно стабилизируется и ещё больше усиливается подавление коротковолновых возмущений. В то же время происходит изменение топологии нейтральных кривых двумерного течения (рис. 7) – две различные ветви сливаются в непрерывную кривую (это происходит при промежуточном значении  $d \approx 0.60$ ).

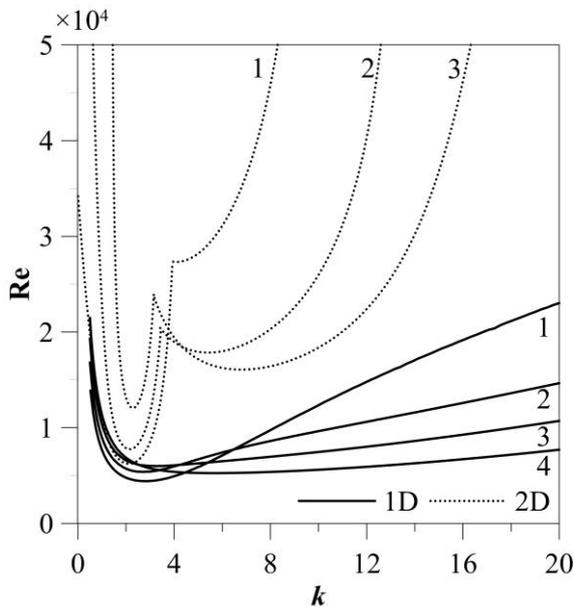


Рис. 6. Нейтральные кривые для плоскопараллельного (1D) и двумерного (2D) течений при толщине пористой среды  $d = 0.50$ , числе Дарси  $Da = 10^{-3}$  и различной пористости  $\phi$ : 1 – 0.95, 2 – 0.80, 3 – 0.70, 4 – 0.60

Выражено резкое понижение порога устойчивости, связанное с не проявляющимся ранее минимумом нейтральной кривой в области малых волновых чисел и одновременным усилением по-

давления возмущений с большими  $k$ . При высокой пористости ( $\phi = 0.95$ ) проявляется тенденция к преобладанию длинноволновой неустойчивости; число Рейнольдса остаётся конечным как минимум до значения  $k \sim 10^{-4}$ . При малой пористости нейтральная кривая становится бимодальной, что связано с усилением сдвиговых напряжений вблизи границы раздела.

В области малых  $k$  двумерное течение является менее устойчивым, чем плоскопараллельное. Выраженное различие критических чисел Рейнольдса и соответствующих волновых чисел позволяет ожидать возможность экспериментальной проверки описанных изменений характеристик устойчивости.

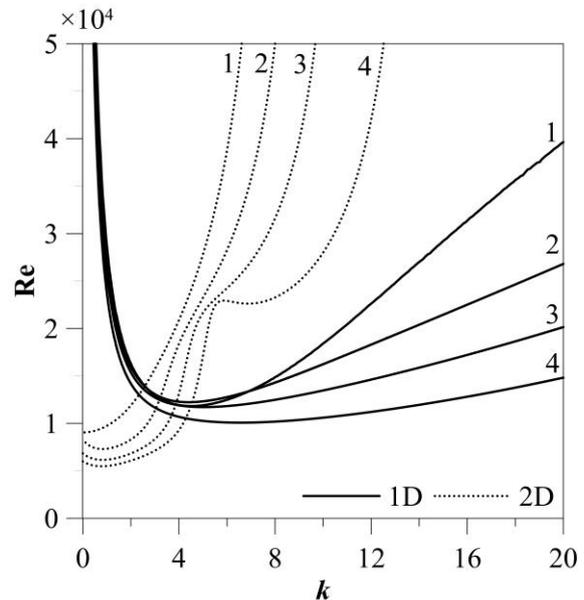


Рис. 7. Нейтральные кривые для плоскопараллельного (1D) и двумерного (2D) течений при толщине пористой среды  $d = 0.75$ , числе Дарси  $Da = 10^{-3}$  и различной пористости  $\phi$ : 1 – 0.95, 2 – 0.80, 3 – 0.70, 4 – 0.60

## 4. Заключение

По итогам анализа нейтральных кривых двумерного стационарного течения над пористой средой выявлено, что увеличение её толщины приводит к существенной дестабилизации потока с формированием длинноволновой неустойчивости.

В предшествующих работах описаны два механизма развития неустойчивости течения в двухслойной системе. Первый из них связан с влиянием точки перегиба, расположенной в пористом слое, а также разрывом второй производной скорости течения на границе раздела сред. Соответствующие минимумы нейтральных кривых проявляют слабую зависимость от вязкости. Вторым механизмом, соответствующим малым длинам волн ( $k > 8$ ), связан с резким перепадом скорости на

границе раздела и подобен неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. В плоскопараллельном течении этот механизм реализуется только при низких проницаемостях пористой среды ( $Da < 10^{-4}$ ) и не проявляется для значений параметров, использованных в данной статье ( $Da \sim 10^{-3}$ ), однако для двумерного течения он играет важную роль. Причины возникновения обнаруженной длинноволновой неустойчивости подлежат более детальному исследованию.

При достаточно малых толщинах пористого слоя двумерное течение более устойчиво, чем плоскопараллельное. Соответственно, при предотвращении развития нелинейных вихревых структур, возникающих на границе раздела, можно ожидать перестроения плоскопараллельного течения к двумерному. При большой толщине пористого слоя, напротив, возможен переход от двумерного течения к плоскопараллельному при увеличении числа Рейнольдса.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 18-71-00057).

### Список литературы

1. Nield D. A., Bejan A. Convection in porous media. Cham: Springer, 2017. 988 p.
2. Hill A. A., Straughan B. Poiseuille flow in a fluid overlying a porous medium // *Journal of Fluid Mechanics*. 2008. Vol. 603. P. 137–149. DOI: 10.1017/S0022112008000852
3. Beavers G. S., Joseph D. D. Boundary conditions at a naturally permeable wall // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. Vol. 30 (1). P. 197–207. DOI: 10.1017/S0022112067001375
4. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid - I. Theoretical development // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1995. Vol. 38. P. 2635–2646. DOI: 10.1016/0017-9310(94)00346-W
5. Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. Vibration effect on double-diffusive instability in an inhomogeneous porous layer underlying a binary fluid layer // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2018. Vol. 117. P. 627–644. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.034
6. Camporeale C., Mantelli E., Manes C. Interplay among unstable modes in films over permeable walls // *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. Vol. 719. P. 527–550. DOI: 10.1017/jfm.2013.16
7. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Baydina D. T., Kolchanova E. A., Tsiberkin K. B. Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium // *Physical Review E*. 2016. Vol. 94, 013104. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.013104
8. Hsieh P.-Ch., Hsu P.-Ya. Hydraulic analysis of a two-dimensional water flow down a hillslope // *Journal of Engineering Mechanics*. 2018. Vol. 144, 04018020. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001432
9. Циберкин К. Б. Двумерные течения в каналах ограниченной ширины, частично заполненных пористой средой // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2018. Т. 11. № 4. С. 439–448. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.4.34
10. Tsiberkin K.B. Effect of inertial terms on fluid-porous medium flow coupling // *Transport in Porous Media*. 2018. Vol. 121 (1). P. 109–120. DOI: 10.1007/s11242-017-0951-8
11. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls // *Journal of Applied Physics*. 1953. Vol. 24. P. 1232–1235. DOI: 10.1063/1.1721476
12. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.

### References

1. Nield D. A., Bejan A. *Convection in porous media*. Cham: Springer, 2017. 988 p.
2. Hill A. A., Straughan B. Poiseuille flow in a fluid overlying a porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, vol. 603, pp. 137–149. DOI: 10.1017/S0022112008000852
3. Beavers G. S., Joseph D. D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 30 (1), pp. 197–207. DOI: 10.1017/S0022112067001375
4. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid - I. Theoretical development. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1995, vol. 38, pp. 2635–2646. DOI: 10.1016/0017-9310(94)00346-W
5. Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. Vibration effect on double-diffusive instability in an inhomogeneous porous layer underlying a binary fluid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, vol. 117, pp. 627–644. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.034
6. Camporeale C., Mantelli E., Manes C. Interplay among unstable modes in films over permeable walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, vol. 719, pp. 527–550. DOI: 10.1017/jfm.2013.16
7. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Baydina D. T., Kolchanova E. A., Tsiberkin K. B. Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium. *Physical Review E*, 2016, vol. 94, 013104. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.013104
8. Hsieh P.-Ch., Hsu P.-Ya. Hydraulic analysis of a two-dimensional water flow down a hillslope. *Journal of Engineering Mechanics*, 2018, vol. 144,

04018020. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001432
9. Tsiberkin K. B. Two-dimensional flows in finite-width channels partially filled with porous medium. *Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11 (4), pp. 439–448. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.4.34
10. Tsiberkin K. B. Effect of inertial terms on fluid–porous medium flow coupling. *Transport in Porous Media*, 2018, vol. 121 (1), pp. 109–120. DOI: 10.1007/s11242-017-0951-8
11. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls. *Journal of Applied Physics*, 1953, vol. 24, pp. 1232–1235. DOI: 10.1063/1.1721476
12. Gershuni G. Z., Zhuhovitskij E. M., Nepomnjaschij A. A. *Ustojchivost' konvektivnyh techenij* (Stability of convective flows). M.: Nauka, 1989, 320 p. (In Russian).

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Циберкин К. Б. Устойчивость плоскопараллельных и двумерных течений жидкости над пористой средой // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 1. С. 52–59. doi: 10.17072/1994-3598-2019-1-52-59

**Please cite this article in English as:**

Tsiberkin K. B. Stability of plane-parallel and two-dimensional flows over porous medium. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2019, no. 1, pp. 52–59. doi: 10.17072/1994-3598-2019-1-52-59