

УДК 532.5
PACS 47.10-ad

Параметры, определяющие минимум диссипативных потерь во вращающемся кольце жидкости

А. Д. Гербер, Е. А. Гербер

Тюменское высшее военно-инженерное командное училище им. А. И. Прошлякова
625001, Тюмень, Россия, ул. Л. Толстого 1
email: e.a.gerber@gmail.com

В данной работе рассматривается задача изучения тепловых процессов во вращающемся по инерции кольце вязкой капиллярной жидкости со свободными границами при отсутствии силы тяжести и наличии начального радиального возмущения. При этом на границах кольца нет теплообмена с окружающей средой. Известно, что рассматриваемая система, в зависимости от величины начальной угловой скорости, начального радиального возмущения и геометрии может находиться в различных режимах движения, таких как бесконечное расширение, схлопывание (кольцо превращается в круг), периодические колебания. В серии численных экспериментов, в которых изменялся лишь один из параметров системы, определяющих характер его движения, при неизменности остальных, был обнаружен эффект минимизации диссипативных потерь при определённых критических значениях вязкости, размеров кольца, давления в полостях. То есть был обнаружен новый режим движения кольца вязкой капиллярной жидкости, в котором, независимо от начального радиального возмущения, оно находится в состоянии с минимальными диссипативными потерями. Последнее означает, что распределение тангенциальной составляющей вектора скорости близко к линейной зависимости от радиуса кольца, свойственной его движению как твёрдого тела. Такое распределение скорости точек кольца приводит к тому, что слои жидкости не перемещаются относительно друг друга, а, следовательно, отсутствуют эффекты трения, приводящие к нагреву кольца и потерям начальной энергии вращения. Анализ математической модели, описывающей движение жидкого кольца, позволил получить аналитические формулы для вычисления критических значений динамической вязкости, силы поверхностного натяжения, разности давлений газа в полостях кольца, размеров кольца. Критические значения параметров, вычисленные по формулам и найденные в процессе численного эксперимента, совпали с хорошей точностью.

Ключевые слова: гидродинамика, теплоизолированное вязкое кольцо капиллярной жидкости, уравнение теплопроводности, уравнения Навье-Стокса

Поступила в редакцию 11.12.2016; принята к опубликованию 02.02.2017

Parameters defining the absence of dissipative losses in the rotating liquid ring

A. D. Gerber, E. A. Gerber

Tyumen higher military engineering command school named after A. I. Proshlyakov
Lev Tolstoy St. 1, 625001, Perm, Russia
email: e.a.gerber@gmail.com

The article covers the problem of studying thermal processes in rotating by inertia in the absence of gravity capillary viscous fluid ring with free boundaries that are acted by pressure of gas medium. Thus there is no heat exchange with the environment at the boundaries of the ring. System under consideration depending on the initial angular velocity, initial radial perturbation and geometry is able to be in different move modes such as infinite expansion, collapse, periodic oscillations. In a series of numerical experiments where only one parameter that determine the character of motion changed and the rest remaining unchanged the effect of minimization dissipative losses was detected at certain critical values of the parameters (viscosity, size, pressure in the cavity). That is, a new mode of ring motion was detected; mode in which regardless of the initial radial perturbations it has minimum dissipative losses. That means that the distribution of the tangential component of the velocity vector is close to a linear function of ring radius. Such kind of dependence inherent to a rigid body motion. That distribution causes liquid layers do not move relative to each other and therefore there are no friction effects, no heat losses of the ring and no loses of initial rotational energy. Analysis of the mathematical model of the motion of liquid ring yielded analytical formulas for calculating the critical values of dynamic viscosity, surface tension, the difference of the gas pressures in the cavities of the ring, the ring sizes. Critical parameters, calculated according to the formulas and found in the course of the numerical experiment coincide with good accuracy.

Keywords: hydrodynamics, thermally insulated viscous ring of capillary fluid, heat equation, Navier-Stokes equations

Received 11.12.2016; accepted 02.02.2017

doi: 10.17072/1994-3598-2017-1-5-10

1. Введение

В данной работе рассматривается задача изучения тепловых процессов во вращающемся по инерции кольце вязкой капиллярной жидкости со свободными границами при отсутствии силы тяжести и наличии начального радиального возмущения (рис. 1).

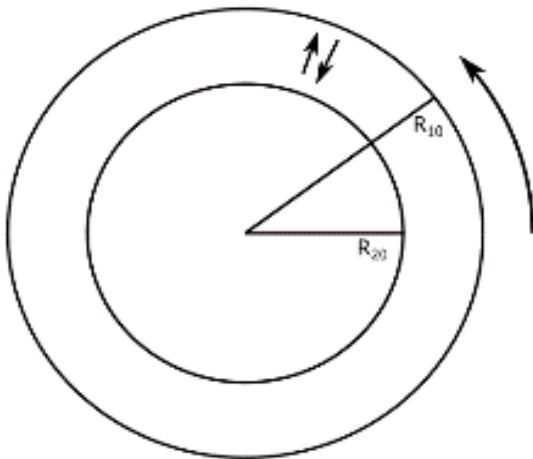


Рис. 1. Геометрия задачи: R_{10} , R_{20} – значения внешнего и внутреннего радиуса кольца в нулевой момент времени

Изучению закономерностей, связанных с изменением поля скоростей подобной системы аналитическими методами, были посвящены работы В. О. Бытева [1], В. В. Пухначева [2], О. М. Лаврентьевой [3–4]. В работах [6–7] был осуществлен

анализ подобной системы на основе использования приемов численного моделирования. Используемая методика численного моделирования полей температуры и скоростей была протестирована на известных решениях уравнений движения и теплопроводности, полученных В. О. Бытевым [1].

2. Формулировка задачи

Система уравнений гидродинамики для описания поведения ограниченного объема жидкости со свободными границами (процессов тепломассопереноса) строится на основе законов сохранения [5].

Подробно все преобразования уравнений Навье-Стокса и теплопроводности, используемых для описания рассматриваемой системы, были даны ранее в статьях [6, 7, 9]. В связи с этим приведем систему уравнений в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= 2\Psi, \\ \frac{d\Psi}{d\tau} \ln\left(1 + \frac{a}{\xi}\right) - \frac{a(\Psi^2 - 4\Psi)}{\xi(a + \xi)} - \int_0^a \omega^2(\tau, \eta) d\eta &= \\ &= \delta_2 \Delta p - \delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{\xi + a}} \right), \\ \delta_1 &= \frac{2R_{20}\sigma}{\rho v^2}, \quad \delta_2 = \frac{2R_{20}^2}{\rho v^2}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{2\Psi \omega}{a + \xi} &= 8 \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + 4(a + \xi) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$A \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = B \left((\eta + \xi) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) + \frac{\Psi^2}{(\eta + \xi)^2} + (\eta + \xi)^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right)^2,$$

где $\xi(t) = R_2^2(t)R_{20}^{-2}$ – безразмерный аналог размеров внутренней полости кольца; $\eta = (r^2 - R_2^2(t))R_{20}^{-2}$ – безразмерный аналог положения точки жидкого кольца с координатой r ; $\Psi(t) = ru_r v^{-1}$ – аналог для радиальной составляющей скорости точек кольца; $\omega(t, r) = u_\varphi R_{20}^2 v^{-1} r^{-1}$ – безразмерный аналог угловой скорости вращения точек кольца; $\Theta(t, r) = T(t, r)T_{baz}^{-1}$ – относительная температура точек жидкого кольца, T_{baz} – базовое значение температуры; $\tau = R_{20}^2 \nu t$ – аналог времени; $\rho, \mu, \nu, \sigma, C_p, k$ – плотность, динамическая и кинематическая вязкость, коэффициент поверхностного натяжения, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности жидкости, соответственно; Δp – разность давлений вне и внутри кольца. Система (1) дополняется начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \xi(0) &= 1, & \Psi(0) &= \Psi_0, \\ \left. \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right|_{\eta=0,a} &= 0, & \omega(0, \eta) &= C_0, \\ \Theta(0, \eta) &= f_0(\eta), & \left. \frac{\partial \Theta(\theta, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0,a} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь Ψ_0 – начальное значение радиального возмущения, C_0 – начальная безразмерная угловая скорость вращения кольца, $f_0(\eta)$ – начальное безразмерное распределение температуры (в работе используется начальное распределение $f_0(\eta) = 1$).

Основные результаты и обсуждение

В ранее опубликованной статье [9] уже был описан эффект минимизации диссипативных потерь в зависимости от изменения динамической вязкости жидкости при наличии начального возмущения радиальной составляющей вектора скорости примерно равной начальной тангенциальной скорости вращения кольца, т.е.

$$\begin{aligned} u_{\varphi 0} &= C_0 r R_{20}^2 \nu \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}, \\ u_{r 0} &= \Psi_0 \nu / r \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}, \end{aligned}$$

(величины составляющих вектора скорости найдены на основе начальных данных, приведенных в (11) при $\Psi_0 = 10$ и $C_0 = 3 \cdot 10^3$). Полученное там выражение для критического значения кинетической вязкости $\nu_{кр}$ было найдено из условия, что в системе уравнений (2) правая часть уравнения для радиальной составляющей скорости приравнивалась к нулю. Последнее возможно, если предпо-

ложить, что изменения радиальной составляющей скорости в (2) равны нулю. Все определяемые характеристики системы $\xi(t), \Psi(t), \omega(t, r), \Theta(t, r)$ представляют собой, при определенных условиях, совокупность периодически изменяющихся функций. Если предположить, что размеры кольца перестали меняться, т.е. $\xi(t) = \text{const} \rightarrow \Psi(t) \approx 0$, то получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\tau} &= \ln^{-1} \left(1 + \frac{a}{\xi} \right) \cdot \left(\frac{a(\Psi^2 - 4\Psi)}{\xi(a + \xi)} + \right. \\ &+ \int_0^a \omega^2(\tau, \eta) d\eta + \delta_2 \Delta p - \\ &\left. - \delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{\xi + a}} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом этого можно положить $\xi(t) = \xi(0) \approx 1$. Соответственно, значения параметров, при которых возможно такое поведение системы, определяются из равенства нулю правой части уравнения для радиального смещения (2). Таким образом, определяя нули правой части уравнения для радиального смещения, можно найти критические значения физических и механических параметров системы, при которых будет наблюдаться минимум диссипативных потерь. Более того, минимум диссипативных потерь будет наблюдаться в системе, в которой распределение тангенциальной составляющей вектора скорости имеет распределение близкое к линейно зависящему от радиуса. Такое распределение скорости характерно для вращающегося твердого тела, каждая точка которого вращается с одной и той же угловой скоростью и гарантирует отсутствие перемещения слоев жидкости относительно друг друга, т.е. их перемешивание. Это означает, что одна из искомым функций, а именно безразмерная угловая скорость будет практически неизменна, т.е. $\omega(t, \eta) \approx \text{const}$. Тогда, из уравнения для угловой скорости из (1) вновь приходим к требованию неизменности $\Psi(t)$ или равенству нулю правой части уравнения для радиальной составляющей скорости.

Для определения критических точек, определяющих поведения системы с минимумом диссипативных потерь, оценим интеграл от безразмерного аналога угловой скорости. Для большей определенности пренебрежем потерями энергии вращения за счет диссипации и запишем:

$$\int_0^a \omega^2(\tau, \eta) d\eta \approx a C_0^2. \quad (3)$$

С учетом (3) правая часть рассматриваемого уравнения (2) примет вид:

$$a C_0^2 - \frac{2R_{20}\sigma}{\rho \nu^2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}} \right) + \frac{2R_{20}^2}{\rho \nu^2} \Delta p = 0. \quad (4)$$

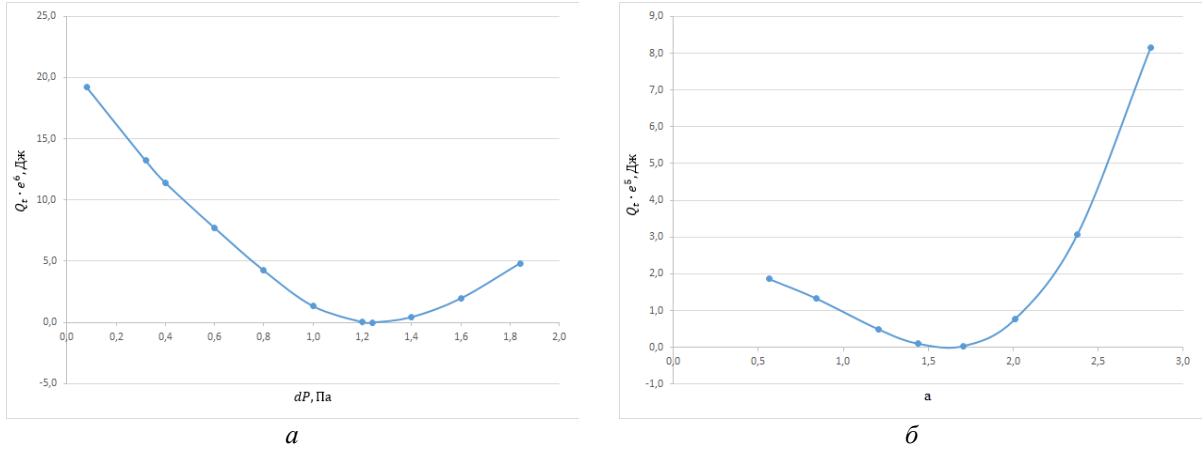


Рис. 2. Зависимость потерь энергии вращения за период колебаний: а – при изменении значения разности давлений в полостях жидкого кольца; б – при изменении значения безразмерного аналога размера жидкого кольца

При написании данного выражения предполагается, что разность давлений газа не зависит от размеров кольца. Действительно, из выражения для разности давления газа в полостях:

$$\Delta p = p_{2g} - p_{1g} = \frac{p_{20}}{\xi^\gamma} - p_{10},$$

где γ – показатель адиабаты; при $\xi(t) \approx 1$ получаем, что

$$\Delta p = p_{20} - p_{10}.$$

Разрешая (4) относительно различных параметров, входящих в эту формулу, можно найти критические значения параметров $a, v, \sigma, \Delta p$, определяющих поведение этой системы, при условии неизменности остальных.

Для критического значения кинетической вязкости v получаем уже известное из [9] выражение, приведенное там без учета разности давления:

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{2R_{20}\sigma \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}}\right) - 2R_{20}^2\Delta p}{a\rho C_0^2}}. \quad (5)$$

Критическое значение константы, описывающей силы поверхностного натяжения, можно найти по следующей формуле:

$$\sigma_{kr} = \frac{aC_0^2\rho v^2 + 2R_{20}^2\Delta p}{2R_{20} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}}\right)}. \quad (6)$$

Выражение для критического значения разности давлений газа в полостях:

$$\Delta p_{kr} = \frac{2R_{20}\sigma \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}}\right) - aC_0^2\rho v^2}{2R_{20}^2}. \quad (7)$$

Вопрос о критическом размере жидкого кольца a связан с решением кубического уравнения. Действительно, перепишем (4) в следующем виде:

$$a + \frac{2R_{20}\sigma}{\rho v^2 C_0^2} \frac{1}{\sqrt{1+a}} = \frac{2R_{20}\sigma}{\rho v^2 C_0^2} - \frac{2R_{20}^2}{\rho v^2 C_0^2} \Delta p. \quad (8)$$

С учетом обозначений и замены

$$\begin{aligned} K &= \frac{2R_{20}\sigma}{\rho v^2 C_0^2}, \\ D &= \frac{2R_{20}\sigma}{\rho v^2 C_0^2} - \frac{2R_{20}^2\Delta p}{\rho v^2 C_0^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{1+a}} &= z \end{aligned} \quad (9)$$

получаем кубическое уравнение:

$$z^3 - \frac{D+1}{K} z^2 + \frac{1}{K} = 0. \quad (10)$$

При этом значение безразмерного аналога размера кольца $a = 1/z^2 - 1$ выражается через решение z уравнения (10), полученное по известным формулам Кардано.

Ниже приведены результаты численных экспериментов, подтверждающих найденные зависимости. Эксперименты проводились при следующих геометрических, физических и начальных данных:

$$\begin{aligned} R_{20} &= 0.08 \text{ м}, R_{10} = 0.10 \text{ м}, a = 0.56, \\ \sigma &= 7.28 \cdot 10^{-2} \text{ Н·м}, \\ \Delta p &= p_{2g} - p_{1g} = 0 \text{ Па}, \\ C_p &= 4200 \text{ Дж·кг}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}, \\ k &= 0.56 \text{ Вт·м}^{-1}\cdot\text{К}^{-1}, \\ \rho &= 998 \text{ кг·м}^{-3}, \\ v &= 10^{-6} \text{ Па·с}, \\ C_0 &= 3 \cdot 10^3, \Psi_0 = 10, \\ T_{baz} &= 20 \text{ °С}, \Theta(0, r) = T(0, r) T_{baz}^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Характер зависимости величины энергии, выделившейся за один период колебания, и наличие критических значений для некоторых параметров представлены на рис. 2. Следует отметить, каждый из параметров (Δp , a , R_{20} , μ , σ) варьировался при условии неизменности остальных параметров.

В таблице представлены расчетные и экспериментальные критические значения каждого параметра и величины их несовпадения в процентах.

Критические значения параметров для вышеуказанного исходного набора значений

Параметр	Формула	Численный эксперимент	Отклонение, %
Δp , Па	1.24	1.22	2
a	1.81	1.71	6
R_{20} , м	0.06	0.061	2
μ , Па·с	0.00202	0.00201	0,5
σ , Н·м	0.0178	0.0175	2

3. Выводы

Полученные в процессе численного моделирования критические значения параметров достаточно хорошо согласуются с вычисленными по формулам (см. таблицу).

Анализ результатов численного эксперимента, по сквозному расчету температурного поля и поля скоростей, вращающегося по инерции жидкого теплоизолированного капиллярного кольца, показал наличие явления, связанного с существованием набора критических значений параметров системы, при которых каждая точка жидкого кольца вращается с практически постоянной угловой скоростью как твердое тело, с минимальными потерями энергии на трение между слоями жидкости.

Возникает вопрос о количественном влиянии величины начального возмущения на существование подобного явления при других начальных радиальных возмущениях, отличных от расчетных (гарантирующих малость амплитуды радиальных смещений).

На рис. 3 представлены результаты численного моделирования, связанного с поиском минимума диссипативных потерь при других абсолютных величинах начального радиального возмущения. Видно, что изменение величины радиального начального возмущения на три порядка обеспечивает лишь 5% отклонение величины критической вязкости, обеспечивающей минимум диссипативных потерь для данного начального возмущения, от критической вязкости, вычисленной по формуле (5). Для остальных параметров системы наблюдается примерно такая же картина. Таким образом, критические значения параметров системы, обеспечивающих минимизацию диссипативных потерь, можно находить по формулам (5)–(8).

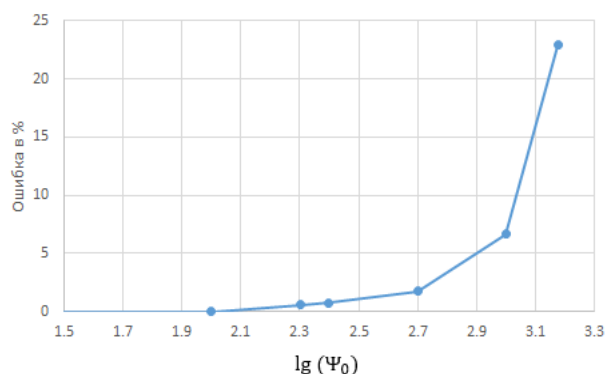


Рис. 3. Зависимость величины отклонения, %, между вязкостью, минимизирующей диссипативные потери для данного начального возмущения, и критическим значением вязкости, определенной по формуле (5), в зависимости от величины радиального возмущения

Следует отметить, что при значениях параметров движения системы, отличных от их критических значений, кольцо при тех же начальных возмущениях вновь находится в режиме периодического движения, однако при этом диссипация энергии имеет тенденцию к росту по мере удаления значения параметра от критического.

Детальное описание механизма влияния начального радиального возмущения на величину критического значения параметров, минимизирующих диссипативные потери энергии, требует дальнейшего исследования, что подразумевает анализ характера перемещений в пространстве элементов жидкого кольца. То есть требуется показать, что существует набор параметров системы, обеспечивающий существование решений уравнения для угловой скорости, которые на большей части кольца не зависят от пространственной переменной.

Список литературы

1. *Бытнев В. О.* Неуставившиеся движения кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами // Прикладная механика и техническая физика. 1970. № 3. С. 88–98.
2. *Пухначев В. В.* Неклассические задачи теории пограничного слоя. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1980.
3. *Лаврентьева О. М.* Неуставившиеся движения вращающегося кольца вязкой капиллярной жидкости // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. Института гидродинамики СО АН СССР. 1978. Вып. 31. С. 52–60.
4. *Лаврентьева О. М.* Предельные режимы движения вращающегося вязкого кольца // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. Института гидродинамики СО АН СССР. 1980. Вып. 44. С. 15–34

5. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. Л: Изд-во Лен. ун-та, 1978. 295 с.
6. Гербер Е. А., Кутрунов В. Н. О механизме и закономерностях периодических движений кольца капиллярной жидкости // Вестник Тюменского государственного университета. 2011. №7. С. 136–142.
7. Гербер Е. А., Кутрунов В. Н. Движение кольца вязкой капиллярной жидкости // Всерос. конф. «Нелинейные волны: теория и новые приложения»: тез. докл. Новосибирск, 2011. С. 23–24.
8. Гербер Е. А., Кутрунов В. Н. Ring v1.2. Свидетельство государственной регистрации программы для ЭВМ №2011613120. Роспатент. 2011.
9. Гербер А. Д., Гербер Е. А. О диссипативных потерях во вращающемся жидком капиллярном кольце // Вестник Пермского университета. Физика. 2016. №2 (33). С. 21–26.
4. Lavrent'eva O. M. Predel'nye rezhimy dvizheniia vrashchaiushchegosia viazkogo kol'tsa *Dinamika sploshnoi sredy* (Continuum Mechanics): Bulletin of the Hydrodynamics Institute of Siberian Branch of Academy of Sciences of the USSR. Novosibirsk, 1978, vol. 31, pp. 52–60 (In Russian).
5. Vallander S. V. *Lectures in Hydroaeromechanics*. Leningrad: Leningrad State University, 1978, 295 p. (In Russian).
6. Gerber E. A., Kutrunov V. N. On the mechanism and on the laws of periodic motions of ring of capillary liquid. *Bulletin of Tyumen State University*, 2011, no. 7, pp. 136–142 (In Russian).
7. Gerber E. A., Kutrunov V. N., Dvizhenie kol'tsa viazkoi kapilliarnoi zhidkosti (Motion of viscous capillary liquid ring). *Abstr. Of All-Russian Conf. "Nonlinear waves: theory and ne applications"*. Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the RAS, 2011, pp. 23–24 (In Russian).
8. Gerber E. A., Kutrunov V. N. *Ring v1.2*. Certificate of state registration of the computer program N. 2011613120. 2011
9. Gerber A. D., Gerber E. A. About dissipative losses into rotating capillary liquid ring. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2016, no.2 (33), pp. 21–26.

References

1. Bytev V. O. Unsteady motion of rotating ring of viscous incompressible liquid with free boundary. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1970, vol. 11, no. 3, pp. 432–438.
2. Pukhnachev V. V. *Neklassicheskie zadachi teorii pogramichnogo sloia* (Non-classical problems of the boundary-layer theory). Novosibirsk: Novosibirsk State University, 1980, 74 p. (In Russian).
3. Lavrent'eva O. M. Neustanovivsheesia dvizhenie vrashchaiushchegosia kol'tsa viazkoi kapilliarnoi zhidkosti. *Dinamika sploshnoi sredy* (Continuum

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Гербер А. Д., Гербер Е. А. Параметры, определяющие минимум диссипативных потерь во вращающемся кольце жидкости // Вестник Пермского университета. Физика. 2017. № 1 (35). С. 5–10. doi: 10.17072/1994-3598-2017-1-5-10

Please cite this article in English as:

Gerber A. D., Gerber E. A. Parameters defining the absence of dissipative losses in the rotating liquid ring // Bulletin of Perm University. Physics, 2017, no. 1 (35), pp. 5–10. doi: 10.17072/1994-3598-2017-1-5-10