

УДК 532.5.031, 532.23  
PACS 46.40.-f, 47.20.Cq

## Волновая динамика границы раздела в двухслойной системе невязких жидкостей в поле горизонтальных вибраций

А. В. Долматова<sup>a</sup>, Д. С. Голдобин<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН

614013, Пермь, ул. Ак. Королева, 1

email: anastasiya.v.dolmatova@gmail.com

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет

614990, Пермь, ул. Букирева, 15

Исследуется динамика волн на границе раздела в двухслойной системе невязких несмешивающихся жидкостей в поле высокочастотных горизонтальных вибраций. Анализ проводится в рамках длинноволнового приближения, применение которого обосновано тем, что для достаточно тонких слоев линейная неустойчивость системы носит длинноволновый характер. Получены нелинейные уравнения динамики границы раздела для двумерных и трехмерных течений в случае произвольного соотношения толщин слоев. Для трехмерного случая оказывается справедлив аналог теоремы Сквайра: самыми опасными оказываются продольные возмущения. Показано, что уравнения, описывающие динамику системы, являются полностью интегрируемыми и могут быть сопоставлены с уравнением Буссинеска для волн на мелкой воде, что позволяет сравнить действие поля вибраций с действием силы тяжести, а также рассмотреть возможность существования состояний, при которых более тяжелая жидкость оказывается над более легкой, т.е. состояний, которые соответствуют эффективной инверсии силы тяжести.

**Ключевые слова:** горизонтальные вибрации, несмешивающиеся жидкости, уравнение Буссинеска

*Поступила в редакцию 24.08.2018; принята к опубликованию 06.11.2018*

## Interfacial wave dynamics in a two-layer system of inviscid liquids subject to horizontal vibrations

A. V. Dolmatova<sup>a</sup>, D. S. Goldobin<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 614013, Perm

email: anastasiya.v.dolmatova@gmail.com

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990, Perm

We study the dynamics of waves at the interface in a two-layer system of inviscid immiscible liquids subject to high-frequency horizontal vibrations. The consideration is performed within the framework of the long-wavelength approximation, which is relevant as, for sufficiently thin layers, the linear instability of the flat-interface state is a long-wavelength one. Nonlinear governing equations of the interface dynamics for two- and three-dimensional flows are obtained for arbitrary ratio of the layer thicknesses. For the three-dimensional case, an analog of the Squire's theorem can be

formulated; the longitudinal perturbations are most dangerous. The wave dynamics equations are integrable and can be compared with the Boussinesq equation for the gravity waves in shallow water. With the latter examination, one can compare the effect of the vibrational field to the action of gravity, and also consider the possibility of a sustainable existence of the state where the heavy liquid overlies the light one, that is, state which corresponds to an effective gravity inversion.

**Keywords:** horizontal vibrations, immiscible liquids, Boussinesq equation

Received 24.08.2018; accepted 06.11.2018

doi: 10.17072/1994-3598-2018-4-38-46

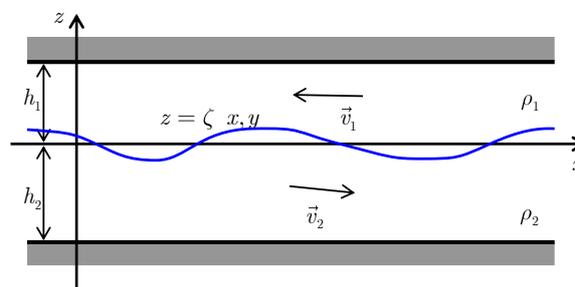
## 1. Введение

Первые экспериментальные исследования по использованию высокочастотных вибраций для стабилизации неустойчивых состояний многофазных систем были проведены в 60-е гг. прошлого века Г. Вольфом [1, 2]. В настоящее время интерес к возможным способам управления состояниями многофазных систем в поле тяжести или условиях невесомости сохраняется, поскольку имеется необходимость поддерживать стратифицированное состояние жидкостей и контролировать процессы конвекции в различных технологических системах, что хорошо видно по достаточно большому количеству работ, посвященных этому вопросу (см., например, [3–8]).

В своих экспериментах Вольф наблюдал возникновение волновых структур на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей в поле горизонтальных вибраций. Изучаемая система представлена на рис. 1. Первое достаточно полное теоретическое описание данного явления, с анализом линейной неустойчивости горизонтального состояния границы раздела, было выполнено в работе [9]. Позднее в работах [4, 10] была аналитически изучена нелинейная динамика волн, возникающих на поверхности слоя вязкой жидкости, подверженного горизонтальным вибрациям. Однако в работах Вольфа [1, 2] вязкие пограничные слои не превышали  $1/10$  толщины слоя жидкости даже для самых вязких из использовавшихся пар. По этой причине важно теоретическое исследование динамики системы в приближении невязких жидкостей. Кроме того, в случае невязких жидкостей существенным усложнением является консервативность динамики, а с точки зрения математической физики представляет интерес возможная интегрируемость итоговых уравнений. В работах [11, 12] была аналитически исследована нелинейная динамика волн, возникающих на границе раздела жидкостей, получены уравнения эволюции для двумерных течений ниже порога линейной неустойчивости в рамках длинноволнового приближения в случае, когда толщины слоев равны. Одновременно с этим был проведен численный счет и даны аналитические оценки для существенно нелинейных режимов динамики поверхности раз-

дела в случае маловязких жидкостей выше порога линейной неустойчивости [8].

В настоящей работе анализ уравнений динамики системы невязких жидкостей обобщается на случай произвольного соотношения толщин слоев и возможной неоднородности течений в горизонтальном направлении перпендикулярном вибрациям – рассматривается трехмерная задача. Уравнения получены для «нормальной» и «инвертированной» (тяжелая жидкость над легкой) конфигураций системы как выше, так и ниже порога линейной неустойчивости плоского состояния границы раздела. Интерес представляет сравнение полученных уравнений с уравнением Буссинеска для гравитационных волн на мелкой воде, позволяющее сопоставить влияние вибраций на систему с действием силы тяжести.



Система двух несмешивающихся жидкостей в поле горизонтальных вибраций

## 2. Постановка задачи и управляющие уравнения

Рассмотрим систему двух горизонтальных слоев несмешивающихся жидкостей, ограниченную сверху и снизу двумя твердыми непроницаемыми стенками (см. рисунок). На систему воздействуют высокочастотными горизонтальными линейно поляризованными вибрациями; скорость вибрационного движения системы  $(b/2)e^{i\omega t} + c.c.$  (здесь и далее «с.с.» означает комплексное сопряжение). Плотность верхней жидкости  $\rho_1$  меньше, чем плотность нижней жидкости  $\rho_2$ . Слои жидкостей имеют толщину  $h_1$  и  $h_2$  соответственно. Вибрации направлены вдоль горизонтальной оси  $x$ , верти-

кальная ось  $z$  перпендикулярна невозмущенной поверхности раздела жидкостей.

Для течения невязких жидкостей справедливо уравнение Эйлера

$$\rho_j \left( \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla) \mathbf{v}_j \right) = -\nabla p_j + \rho_j \mathbf{g}, \quad (1)$$

где  $j=1,2$  – номер слоя.

В описываемой системе в приближении бесконечно протяженных слоев всегда возможно состояние со строго горизонтальной границей раздела  $z = \zeta(x, y) = 0$  (основное состояние системы). Если система в горизонтальном направлении ограничена непроницаемыми боковыми стенками, поверхность раздела будет искривляться, однако на некотором расстоянии от этих стенок она по-прежнему будет оставаться практически горизонтальной. Для невязких жидкостей это состояние в обоих слоях описывается пространственно однородными пульсирующими полями скорости  $\mathbf{v}_{j0}$ :

$$\mathbf{v}_{j0} = a_j(t) \mathbf{e}_x, \quad a_j(t) = A_j e^{i\omega t} + c.c.,$$

$$A_1 = \frac{(h_1 + h_2) \rho_2 b}{2(h_2 \rho_1 + h_1 \rho_2)}, \quad A_2 = \frac{(h_1 + h_2) \rho_1 b}{2(h_2 \rho_1 + h_1 \rho_2)},$$

где  $j=1,2$ ,  $\mathbf{e}_x$  – единичный вектор вдоль оси  $x$ . Здесь амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  определены условием несжимаемости жидкости, которое для полного потока через вертикальное сечение системы дает  $A_1 h_1 + A_2 h_2 = (h_1 + h_2)(b/2)$ , и условием равенства горизонтальных компонент градиентов давления непосредственно над и под границей раздела:

$$\rho_j \frac{\partial v_{j0}}{\partial t} = -\frac{\partial p_j}{\partial x}$$

(см. (1)), откуда  $\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2$ .

Рассматривая движение невязких жидкостей, удобно ввести скалярный потенциал поля скорости  $\phi_j$ :  $\mathbf{v}_j = -\nabla \phi_j$ . В системе должен выполняться закон сохранения массы  $\text{div } \mathbf{v}_j = 0$ , т.е. потенциал скорости должен подчиняться уравнению Лапласа

$$\Delta \phi_j = 0. \quad (2)$$

Также необходимо учесть кинематические граничные условия на верхней и нижней границах:

$$\phi_{1z}(z = h_1) = \phi_{2z}(z = -h_2) = 0 \quad (3)$$

и на поверхности раздела  $z = \zeta(x, y)$

$$\dot{\zeta} = -\phi_{jz} + \nabla \phi_j \cdot \nabla \zeta. \quad (4)$$

Здесь и далее верхней точкой обозначена производная по времени, а буква в нижнем индексе обозначает частную производную по соответствующей координате.

При подстановке потенциального течения в уравнение Эйлера (1) можно получить:

$$\nabla \left( -\dot{\phi}_j + \frac{1}{2} (\nabla \phi_j)^2 \right) = \nabla \left( -\frac{1}{\rho_j} p_j - gz \right),$$

где  $g$  – ускорение свободного падения. Последнее уравнение определяет поле давления в объеме двух жидкостей для заданного поля потока:

$$p_j = p_{j0} + \rho_j \left( \dot{\phi}_j - \frac{1}{2} (\nabla \phi_j)^2 - gz \right). \quad (5)$$

Для получения замкнутой системы уравнений и граничных условий необходимо принять во внимание напряжение на границе раздела, т.е. определить граничные условия для  $\phi_j$ . Скачок давления при переходе через границу обусловливается поверхностным натяжением

$$z = \zeta(x, y): p_1 - p_2 = -\alpha \nabla \cdot \mathbf{n}, \quad (6)$$

где  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к границе раздела.

Линейный анализ устойчивости показал, что наиболее опасные неустойчивости в такой системе являются длинноволновыми [9, 12] поэтому дальнейшее рассмотрение будет проводиться в рамках длинноволнового приближения:

$$|\partial_x \mathbf{v}| \ll |\partial_z \mathbf{v}|.$$

Далее изучается также условие применимости данного приближения.

### 3. Длинноволновые структуры на границе раздела

Для анализа динамики длинноволновых структур, возникающих на границе раздела, применим стандартный метод многих масштабов с малыми параметрами  $\omega^{-1}$  и  $l^{-1}$ , где  $l$  – характерная длина возникающей структуры,  $\partial_x \sim l^{-1}$ .

#### 3.1. Двумерные течения

Для начала рассмотрим течения, однородные вдоль оси  $y$ . В этом случае достаточно рассматривать задачу в двумерной  $(x, z)$ -геометрии. В рамках длинноволнового приближения решение уравнения Лапласа (2) для  $\phi_j(x, t)$  с граничными условиями (3) имеет вид [11, 12]

$$\phi_j = -a_j(t)x + \Phi_j(x, t) - \frac{1}{2}(h_j - z)^2 \Phi_{jxx}(x, t) + \frac{1}{4!}(h_j - z)^4 \Phi_{jxxxx}(x, t) - \dots \quad (7)$$

В этом уравнение член  $-a_j(t)x$  представляет основное состояние с плоской границей раздела;  $\Phi_j(x, t)$  – произвольная функция от  $x$  и  $t$ . Для дальнейших вычислений удобно в полях деформации поверхности раздела  $\zeta(x, t)$  и потенциала  $\Phi(t, x)$  выделить две компоненты: «медленную» компоненту, осредненную по периоду вибраций, и пульсационную:

$$\begin{aligned}\zeta &= \eta(\tau, x) + \zeta(\tau, x)e^{i\omega\tau} + c.c. + \dots, \\ \Phi_j &= \varphi_j(\tau, x) + \psi_j(\tau, x)e^{i\omega\tau} + c.c. + \dots,\end{aligned}$$

$$B_0(\beta) = \frac{B_0(0)}{\cos^2 \beta}, \quad (11)$$

где  $\tau$  – «медленное» время, связанное с осредненной эволюцией. Для применения разложения по малому параметру  $\omega^{-1}$  необходимо определить иерархию малости переменных. Как было показано в работе [11], при малом отклонении от порога линейной устойчивости справедливы следующие оценки:  $\eta \sim \omega^{-1}$ ,  $\partial_x \sim \omega^{-1/2}$ . Тогда уравнения динамики границы раздела, полученные с учетом баланса напряжений (6), выражения для давления в объеме жидкостей (5) и граничных условий (4), имеют вид [11]

$$\left\{ \begin{aligned} B_0 \frac{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1}{h_1 h_2} (h_1 \varphi_1)_\tau &= \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{h_1^3 \rho_2 + h_2^3 \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \right] \eta_{xx} \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \eta^2 + \frac{B_1}{B_0} \eta, \quad (8) \\ \eta_\tau &= -(h_1 \varphi_1)_{xx}. \end{aligned} \right.$$

Здесь введен безразмерный вибрационный параметр

$$B \equiv \frac{\rho_* b^2}{\sqrt{\alpha(\rho_2 - \rho_1)g}} = B_0 + B_1,$$

где

$$B_0 = \frac{2(h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1)^3}{\rho_1 \rho_2 (\rho_2 - \rho_1)^2 (h_1 + h_2)^2} \quad (9)$$

– критическое значение вибрационного параметра, выше которого состояния с горизонтальной границей раздела становится линейно неустойчивым,  $B_1 \sim \omega^{-1}$  – малое отклонение от критического значения.

При выводе уравнений выбраны следующие единицы измерения: для длины:

$$L = \sqrt{\alpha / [(\rho_2 - \rho_1)g]},$$

для времени  $T = L/b$  и для плотности жидкостей  $\rho_*$ , другими словами, выполнен переход

$$\begin{aligned}(x, z) &\rightarrow (Lx, Lz), \quad t \rightarrow Tt, \quad \zeta \rightarrow L\zeta, \\ \Phi_j &\rightarrow (L^2/T)\Phi_j, \quad \rho_i \rightarrow \rho_* \rho_i.\end{aligned} \quad (10)$$

### 3.2. Трехмерные течения

Рассмотрим трехмерные течения, т.е. течения, неоднородные вдоль оси  $y$ . В этом случае порог линейной неустойчивости изменится и будет зависеть от вида возникающих волн. В частности, для плоских в ведущем порядке волн

$$\psi^{(0)}(x, y) \sim e^{i(k_x x + k_y y)}$$

можно сформулировать аналог теоремы Сквайра:

где  $\beta$  – угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и направлением вибраций,  $B_0(0)$  – порог линейной неустойчивости для двумерных волн, определяемый выражением (9). Из выражения (11) видно, что порог неустойчивости для трехмерных волн выше, чем для двумерных. Таким образом, трехмерные волны с одинаковыми масштабами по осям  $x$  и  $y$  могут быть рассмотрены только тогда, когда система уже неустойчива по отношению к двумерным волнам. Так как «двумерная» неустойчивость ведет к взрывному росту практически любых волн [11, 12], исследования трехмерных волн в этом случае не представляют интереса.

Однако согласно выражению (11) для малых углов  $\beta$  порог линейной неустойчивости остается близким к порогу линейной неустойчивости для двумерных течений, а это значит, что отклонение  $B_1$  по-прежнему мало, и эту систему можно рассматривать в рамках длинноволнового приближения. Случай плоских волн с малым значением угла  $\beta$  соответствует волновым структурам, для которых  $|\partial_y| \ll |\partial_x|$ . В этом случае можно рассматривать динамику системы за рамками  $(x, z)$ -геометрии, и эта динамика по-прежнему будет иметь физический смысл (в отличие от случая  $\partial_y \sim \partial_x$ ). Из этих соображений ниже будет рассмотрена система, для которой  $\partial_y^2 \sim \omega^{-1} \partial_x^2$ . Уравнения динамики трехмерных волн могут быть получены аналогично уравнениям для двумерных течений в безразмерном виде [13]:

$$\left\{ \begin{aligned} B_0 \frac{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1}{h_1 h_2} h_1 \varphi_{1\tau} &= \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{h_1^3 \rho_2 + h_2^3 \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \right] \eta_{xx} \\ &+ \frac{3}{2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \eta^2 + \frac{B_1}{B_0} \eta - \partial_x^{-2} \eta_{yy}, \quad (12) \\ \eta_\tau &= -h_1 \varphi_{1xx}. \end{aligned} \right.$$

При принятых граничных условиях действие оператора  $\partial_x^{-2}$  для поля  $\eta(x, y, \tau)$  определено однозначно.

### 3.3. Условия применимости длинноволнового приближения

Система уравнений (12) была получена в рамках длинноволнового приближения. Предположение о допустимости такого приближения в случае достаточно тонких слоев было сделано на основании более ранних работ [9, 12]. Теперь из уравнения (12) можно в явном виде получить условие, накладываемое на максимально допустимую толщину слоев жидкости, при котором длинноволновое приближение будет справедливо. Показатель экспоненциального роста  $\lambda$  линейных возмущений  $\sim [\exp \lambda t + i(k_x x + k_y y)]$  имеет вид

$$\lambda^2 = \frac{h_1 h_2 \left( - \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{h_1^3 \rho_2 + h_2^3 \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \right] k_x^4 + \frac{B_1}{B_0} k_x^2 - k_y^2 \right)}{B_0 (h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1)}. \quad (13)$$

Из уравнения (13) видно, что длинноволновые возмущения являются наиболее опасными, если выражение в квадратных скобках отрицательно:

$$\frac{h_1^3 \rho_2 + h_2^3 \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \leq 3. \quad (14)$$

Выражение (14) накладывает ограничение на максимальную толщину слоев  $h_1$  и  $h_2$ . Более полное доказательство длинноволнового характера линейной неустойчивости, включающее анализ возмущений конечной длины волны, может быть найдено в работе [9].

### 3.4. Итоговые уравнения

Приведем систему уравнений (12) к виду, удобному для дальнейшего анализа. Сначала рассмотрим поведение системы ниже порога линейной неустойчивости, т.е. при отрицательных  $B_1$ . Преобразуем координаты и переменные следующим образом:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x \sqrt{\frac{B_0}{(-B_1)} \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{h_1^3 \rho_2 + h_2^3 \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \right]}, \\ y &\rightarrow y \frac{B_0}{(-B_1)} \sqrt{1 - \frac{1}{3} \frac{h_1^3 \rho_2 + h_2^3 \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1}}, \\ t &\rightarrow t \sqrt{\frac{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1}{h_1 h_2} \frac{B_0^3}{B_1^2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{h_1^3 \rho_2 + h_2^3 \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \right]}, \\ \eta &\rightarrow \eta \frac{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{(-B_1)}{B_0}, \\ \tilde{\varphi}_1 &\rightarrow \frac{\varphi}{h_1} \frac{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \left[ 1 - \frac{1}{3} \frac{h_1^3 \rho_2 + h_2^3 \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

После данного преобразования, система уравнений (12) (ниже порога линейной неустойчивости) принимает следующий вид:

$$\ddot{\eta} - \eta_{xx} - \eta_{yy} + \left( \frac{3}{2} \eta^2 + \eta_{xx} \right)_{xx} = 0. \quad (16)$$

Полученное уравнение позволяет полностью описать эволюцию квазистационарных трехмерных волн, возникающих на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей под действием высокочастотных горизонтальных вибраций ниже порога линейной неустойчивости системы.

Аналогично рассмотрим динамику системы выше порога линейной неустойчивости ( $B_1 > 0$ ). Для описания динамики системы в этой области параметров необходимо заменить  $(-B_1)$  на  $B_1$  в преобразовании координат (15). Такое преобразование приведет к изменению знака второго слагаемого в уравнении (16).

В итоге, выше порога линейной неустойчивости динамика системы описывается уравнением

$$\ddot{\eta} + \eta_{xx} - \eta_{yy} + \left( \frac{3}{2} \eta^2 + \eta_{xx} \right)_{xx} = 0. \quad (17)$$

### 3.5. Динамика системы в инвертированном состоянии

Описанная в предыдущих разделах процедура вывода уравнения динамики границы раздела может быть повторена для случая, когда слой тяжелой жидкости расположен поверх слоя более легкой (назовем такое состояние системы «инвертированным»). Для этого достаточно заменить  $g$  на  $-g$  во всех уравнениях. При этом необходимо учесть, что в преобразовании координат (10) масштаб длины

$$L = \sqrt{\alpha / [(\rho_2 - \rho_1) g]}$$

должен оставаться вещественным, поэтому в этом выражении замена не требуется. С учетом этих поправок видно, что порог линейной неустойчивости  $B_0$  состояния с плоской границей раздела не меняется. В окрестности этого значения уравнения эволюции имеют следующий вид:

• ниже порога линейной неустойчивости для инвертированного состояния:

$$\ddot{\eta} + \eta_{xx} + \eta_{yy} - \left( \frac{3}{2} \eta^2 + \eta_{xx} \right)_{xx} = 0; \quad (18)$$

• выше порога линейной неустойчивости для инвертированного состояния:

$$\ddot{\eta} - \eta_{xx} + \eta_{yy} - \left( \frac{3}{2} \eta^2 + \eta_{xx} \right)_{xx} = 0. \quad (19)$$

## 4. Сравнение полученных уравнений с уравнением Буссинеска для волн на мелкой воде

Для понимания основных свойств динамики системы, уместно сравнить полученные уравнения (16)–(19) с уравнением Буссинеска для волн на мелкой воде.

### 4.1. Двумерные течения ( $\partial_y = 0$ )

Как было показано выше, характерные масштабы изменения полей в направлении оси  $y$  значительно больше, чем соответствующие масштабы вдоль оси  $x$ , поэтому, когда поперечный размер системы не слишком большой, можно ограничиться рассмотрением двумерных течений ( $\partial_y = 0$ ).

Сравним полученные уравнения (16)–(19) с уравнением Буссинеска для волн на мелкой воде в безразмерном виде (без вибраций и поверхностного натяжения) [14]:

$$\ddot{\eta} - gh \eta_{xx} - gh \left( \frac{3}{2} \frac{\eta^2}{h} + \frac{h^2}{3} \eta_{xx} \right)_{xx} = 0, \quad (20)$$

где  $h$  – толщина слоя. В безразмерном виде такое же уравнение описывает динамику двухслойной

системы жидкостей, не подверженную действию вибраций [15].

Динамика поверхности раздела *нормального состояния ниже порога линейной неустойчивости*  $V_0$ , описываемая уравнением (16), в двумерном случае соответствует так называемому «плюс»-уравнению Буссинеска [16, 17], которое отличается от уравнения (20) знаком перед слагаемым в скобках:

$$\ddot{\eta} - \eta_{xx} + \left( \frac{3}{2} \eta^2 + \eta_{xx} \right)_{xx} = 0. \quad (21)$$

«Плюс»-уравнение Буссинеска так же, как и оригинальное уравнение Буссинеска для волн на мелкой воде, является интегрируемым и имеет хорошо изученные солитонные решения (см. [16, 17]). Однако динамика этих двух уравнений существенно отличается. Для уравнения Буссинеска для волн на мелкой воде характерна коротковолновая неустойчивость, тогда как «плюс»-уравнение Буссинеска не имеет такой неустойчивости. Солитоны в «плюс»-уравнении могут быть неустойчивы: распадаться на пары устойчивых солитонов или взрывным образом (за конечное время) формировать бесконечные пики [16, 17].

Примечательно, что динамика поверхности раздела *нормального состояния выше порога линейной неустойчивости* (17) в двумерном случае соответствует уравнению (20) с отрицательным ускорением свободного падения  $g$ :

$$\ddot{\eta} + \eta_{xx} + \left( \frac{3}{2} \eta^2 + \eta_{xx} \right)_{xx} = 0. \quad (22)$$

Полученное уравнение описывает свободное падение слоя жидкости с горизонтального потолка, в этом случае состояние с плоской границей раздела, очевидно, является неустойчивым.

Также можно заметить, что динамика поверхности раздела *инвертированного состояния выше порога линейной неустойчивости* (19) в двумерном случае описывается уравнением, аналогичным оригинальному уравнению Буссинеска для волн на мелкой воде:

$$\ddot{\eta} - \eta_{xx} - \left( \frac{3}{2} \eta^2 + \eta_{xx} \right)_{xx} = 0. \quad (23)$$

Тем не менее это сходство не означает, что состояние с плоской границей раздела устойчиво, как это имеет место для волн на мелкой воде. Уравнение (19) строго получено для описываемой двухслойной системы, и присущие ему коротковолновые неустойчивости являются действительными физическими особенностями этой системы (это также можно увидеть из уравнения (13)), тогда как для волн на мелкой воде эти неустойчивости появляются в результате используемых приближений и находятся за пределами применимости этого уравнения.

Рассмотрим этот случай подробнее. Оригинальная система уравнений для гравитационных

волн на мелкой воде, полученная Буссинеском в работе [14], в наших терминах имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\eta} + \varphi_{xx} = -(\eta\varphi_x)_x + \frac{1}{6}\varphi_{xxxx}, \\ \dot{\varphi} + \eta = -\frac{1}{2}(\varphi_x)^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{xx}, \end{cases} \quad (24)$$

где нелинейное и дисперсионное слагаемые в правой части малы. Примечательно, что система уравнений (24) не подвержена коротковолновой неустойчивости: частота колебаний линейных волн вещественна:

$$\Omega^2 = k^2 \frac{1+k^2/6}{1+k^2/2}.$$

С точностью до поправок первого порядка, вносимых нелинейностью и дисперсией, система (24) может быть переписана в виде

$$\ddot{\eta} - \eta_{xx} - \left( (\varphi_x)^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \eta_{xx} \right)_{xx} = 0. \quad (25)$$

Для волн, распространяющихся в одном направлении,  $\partial_x = \pm \partial_t$ . Тогда  $(\varphi_x)^2 = (\varphi_t)^2 \approx \eta^2$ , и уравнение (25) принимает вид уравнения Буссинеска (23). Резюмируя, уравнение Буссинеска корректно описывает взаимодействие волн на мелкой воде только тогда, когда они распространяются в одну сторону и их скорость близка к 1.

Таким образом, коротковолновая неустойчивость в уравнении Буссинеска для волн на мелкой воде является не действительной характеристикой физической системы, а результатом используемого приближения, тогда как для инвертированного состояния в описываемой нами системе выше порога  $V_0$  эта неустойчивость действительно существует.

#### 4.2. Трехмерные течения

Для достаточно протяженных в поперечном направлении систем течения могут быть неоднородны по оси  $y$ . В ведущем порядке построенного разложения волны распространяются вдоль оси  $y$  без дисперсии и нелинейности (см. уравнения (16)–(19)), тогда как для распространения волн вдоль оси  $x$  дисперсия и нелинейность существенны. В трехмерном случае динамика *нормального состояния системы выше порога линейной неустойчивости* перестает соответствовать динамике слоя жидкости, падающего с потолка. Слагаемое  $\eta_{yy}$  входит со знаком «−» в уравнение (17), и со знаком «+» в трехмерную версию уравнения Буссинеска для волн на мелкой воде (20) с инвертированной силой тяжести. Уравнение (19), описывающее динамику *инвертированного состояния системы выше порога линейной неустойчивости*, также перестает соответствовать уравнению волн на мелкой воде, так как содержит слагаемые  $-\eta_{xx}$  и  $+\eta_{yy}$  (тогда как в уравнение для волн на мелкой воде оба слагаемых входят со знаком «−»). Таким образом, в отличие от двумерного случая в трехмерном случае сходства между уравнениями ди-

намики описываемой системы и уравнениями Буссинеска не наблюдаются.

## 5. Заключение

В данной работе проанализированы уравнения динамики двумерных и трехмерных волн, возникающих на границе раздела двухслойной системы невязких несмешивающихся жидкостей под действием высокочастотных горизонтальных вибраций. Уравнения получены в рамках длинноволнового приближения. Показано, что используемое приближение справедливо для достаточно тонких слоев жидкостей:

$$\frac{h_1^3 \rho_2 + h_2^3 \rho_1}{h_1 \rho_2 + h_2 \rho_1} < \frac{3\alpha}{(\rho_2 - \rho_1)g}.$$

Для случая трехмерных течений сформулирован аналог теоремы Сквайра (11), согласно которому порог неустойчивости для плоских возмущений возрастает при увеличении угла между волновым вектором и направлением вибраций. Таким образом, показано, что вблизи порога неустойчивости представляют интерес только структуры с «медленной» зависимостью от  $y$ . В работе проанализированы уравнения трехмерной динамики для двухслойной системы в поле вибраций выше и ниже порога линейной неустойчивости  $B_0$  для нормального и инвертированного состояний (16)–(19).

Для уравнений динамики системы, однородной вдоль оси  $y$ , т.е. для двумерных течений, может быть проведена аналогия с уравнениями Буссинеска для волн на мелкой воде. Примечательно, что выше порога линейной неустойчивости динамика основного состояния системы аналогична динамике слоя жидкости, падающего с потолка, тогда как динамика инвертированного состояния описывается тем же уравнением, что и гравитационные волны на мелкой воде. Тем не менее эта схожесть не означает, что система под действием вибраций становится такой же устойчивой, как горизонтальный слой жидкости в поле силы тяжести. Описываемая двухслойная система в поле горизонтальных вибраций действительно имеет коротковолновую неустойчивость, тогда как для гравитационных волн на мелкой воде эта неустойчивость возникает вследствие используемого приближения и лежит за пределами применимости уравнения Буссинеска к реальным физическим системам. Однако длинноволновые моды неустойчивости инвертированного состояния действительно могут быть стабилизированы вибрациями.

Для трехмерных течений, возникающих в двухслойной системе под действием вибраций, в отличие от случая волн на мелкой воде два горизонтальных направления не являются идентичными, вследствие чего схожесть с уравнениями Буссинеска исчезает.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-21-00090).

## Список литературы

1. Wolf G. H. The dynamic stabilization of the Rayleigh–Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium // *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*. 1969. Vol. 227. N. 3. P. 291–300.
2. Wolf G. H. Dynamic stabilization of the interchange instability of a liquid–gas interface // *Physical Review Letters*. 1970. Vol. 24. N. 9. P. 444–446.
3. Thiele U., Vega J. M., Knobloch E. Long-wave Marangoni instability with vibration // *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. Vol. 546. P. 61–87.
4. Shklyaev S., Alabuzhev A. A., Khenner M. Influence of a longitudinal and tilted vibration on stability and dewetting of a liquid film // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79. N. 5. P. 051603.
5. Nepomnyashchy A. A., Simanovskii I. B. The influence of vibration on Marangoni waves in two-layer films // *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. Vol. 726. P. 476–496.
6. Bratsun D. A., Stepkina O. S., Kostarev K. G., Mizhev A. I., Mosheva E. A. Development of concentration-dependent diffusion instability in reactive miscible fluids under influence of constant or variable inertia // *Microgravity Science and Technology*. 2016. Vol. 28. N. 6. P. 575–585.
7. Smorodin B. L., Myznikova B. I., Keller I. O. Asymptotic laws of thermovibrational convection in a horizontal fluid layer // *Microgravity Science and Technology*. 2017. Vol. 29. N. 1–2. P. 19–28.
8. Lyubimova T., Ivantsov A., Garrabos Y., Lecoutre C., Gandikota G., Beysens D. Band instability in near-critical fluids subjected to vibration under weightlessness // *Physical Review E*. 2017. Vol. 95. N. 1. P. 013105.
9. Любимов Д. В., Черепанов А. А. О возникновении стационарного рельефа на поверхности раздела жидкостей в вибрационном поле // *Известия Академии наук СССР. Механика жидкости и газа*. 1986. №6. С. 8–13.
10. Benilov E. S., Chugunova M. Waves in liquid films on vibrating substrates // *Physical Review E*. 2010. Vol. 81. N. 3. P. 036302.
11. Goldobin D. S., Kovalevskaya K. V., Lyubimov D. V. Elastic and inelastic collisions of interfacial solitons and integrability of a two-layer fluid system subject to horizontal vibrations // *Europhysics Letters*. 2014. Vol. 108. N. 5. P. 54001.
12. Goldobin D. S., Pimenova A. V., Kovalevskaya K. V., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P. Running interfacial waves in a two-layer fluid system subject to longitudinal vibrations // *Physical Review E*. 2015. Vol. 91. N. 5. P. 053010.
13. Pimenova A. V., Goldobin D. S., Lyubimova T. P. Comparison of the effect of horizontal vibrations on interfacial waves in a two-layer system of in-

- viscid liquids to effective gravity inversion // *Microgravity Science and Technology*. 2018. Vol. 30. P. 1–10.
14. Boussinesq J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond // *Journal de mathématiques pures et appliquées*. 1872. P. 55–108.
  15. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two–fluid system // *Journal of Fluid Mechanics*. 1999. Vol. 396. P. 1–36.
  16. Manoranjan V. S., Ortega T., Sanz-Serna J. M. Soliton and antisoliton interactions in the “good” Boussinesq equation // *Journal of mathematical physics*. 1988. Vol. 29. N. 9. P. 1964–1968.
  17. Bogdanov L. V., Zakharov V. E. The Boussinesq equation revisited // *Physica D*. 2002. Vol. 165. N. 3–4. P. 137–162.

## References

1. Wolf G. H. The dynamic stabilization of the Rayleigh–Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*. 1969, vol. 227, no. 3, pp. 291–300.
2. Wolf G. H. Dynamic stabilization of the interchange instability of a liquid–gas interface. *Physical Review Letters*. 1970, vol. 24, no. 9, pp. 444–446.
3. Thiele U., Vega J. M., Knobloch E. Long–wave Marangoni instability with vibration. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006. vol. 546. pp. 61–87.
4. Shklyaev S., Alabuzhev A. A., Khenner M. Influence of a longitudinal and tilted vibration on stability and dewetting of a liquid film. *Physical Review E*, 2009, vol. 79, no. 5, pp. 051603.
5. Nepomnyashchy A. A., Simanovskii I. B. The influence of vibration on Marangoni waves in two–layer films. *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. vol. 726. pp. 476–496.
6. Bratsun D. A., Stepinkina O. S., Kostarev K. G., Mizev A. I., Mosheva E. A. Development of concentration–dependent diffusion instability in reactive miscible fluids under influence of constant or variable inertia. *Microgravity Science and Technology*. 2016. V. 28. no. 6. pp. 575–585.
7. Smorodin B. L., Myznikova B. I., Keller I. O. Asymptotic laws of thermovibrational convection in a horizontal fluid layer. *Microgravity Science and Technology*, 2017, vol. 29, pp. 19–28.
8. Lyubimova T., Ivantsov A., Garrabos Y., Lecoutre C., Gandikota G., Beysens D. Band instability in near–critical fluids subjected to vibration under weightlessness. *Physical Review E*, 2017, vol. 95, no. 1, pp. 013105.
9. Lyubimov D. V., Cherepanov A. A. Development of a steady relief at the interface of fluids in a vibrational field. *Fluid Dynamics*, 1986, vol. 21, no 6, pp. 849–854.
10. Benilov E. S., Chugunova M. Waves in liquid films on vibrating substrates. *Physical Review E*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 036302.
11. Goldobin D. S., Kovalevskaya K. V., Lyubimov D. V. Elastic and inelastic collisions of interfacial solitons and integrability of a two–layer fluid system subject to horizontal vibrations. *Europhysics Letters*, 2014, vol. 108, no. 5, pp. 54001.
12. Goldobin D. S., Pimenova A. V., Kovalevskaya K. V., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P. Running interfacial waves in a two–layer fluid system subject to longitudinal vibrations. *Physical Review E*, 2015, vol. 91, no. 5, pp. 053010.
13. Pimenova A. V., Goldobin D. S., Lyubimova T. P. Comparison of the effect of horizontal vibrations on interfacial waves in a two–layer system of inviscid liquids to effective gravity inversion. *Microgravity Science and Technology*, 2018, vol. 30, pp. 1–10.
14. Boussinesq J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1872, pp. 55–108.
15. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two–fluid system. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, vol. 396, pp. 1–36.
16. Manoranjan V. S., Ortega T., Sanz-Serna J. M. Soliton and antisoliton interactions in the «good» Boussinesq equation. *Journal of mathematical physics*, 1988, vol. 29, no. 9, pp. 1964–1968.
17. Bogdanov L. V., Zakharov V. E. The Boussinesq equation revisited. *Physica D*, 2002, vol. 165, no. 3–4, pp. 137–162.

## Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Долматова А. В., Голдобин Д. С. Волновая динамика границы раздела в двухслойной системе невязких жидкостей в поле горизонтальных вибраций // Вестник Пермского университета. Физика. 2018. № 4 (42). С. 38–45. doi: 10.17072/1994-3598-2018-4-38-45

## Please cite this article in English as:

Dolmatova A. V., Goldobin D. S. Interface wave dynamics in a two-layer system of inviscid liquids subject to horizontal vibrations // *Bulletin of Perm University. Physics*, 2018, no. 4 (42), pp. 38–45. doi: 10.17072/1994-3598-2018-4-38-45