

УДК 537.611.2; 537.622.3
PACS 75.30.Ds, 75.20.-g

Спин-волновое описание двумерного парамагнетика в магнитном поле

К. Б. Циберкин^a, Т. С. Белозерова^a, В. К. Хеннер^{a,b}

^a Пермский государственный национальный исследовательский университет

614990, Пермь, ул. Букирева, 15

email: kbtsiberkin@psu.ru

^b University of Louisville

40292, Natural Science Bldg. 310, Louisville, KY, USA

email: vkhenn01@louisville.edu

Исследуется возможность возникновения коллективных спиновых возбуждений в двумерном парамагнитном кристалле с диполь-дипольным взаимодействием частиц при отсутствии обменных эффектов, находящемся в однородном постоянном магнитном поле. В состоянии насыщения магнитные моменты ориентированы вдоль поля. Свойства парамагнетика в пределе низких температур описаны на основе представления Холстейна–Примакова в терминах спиновых волн. Проанализированы дисперсионные соотношения для спиновых волн в парамагнитной системе на квадратной и гексагональной решётках. Показано, что длина спиновых волн, которые могут возникать в системе, и ширина их энергетического спектра определяются ориентацией приложенного поля. В ортогональном поле реализуются длинноволновые возбуждения, тогда как в параллельном магнитном поле энергетически выгодны возбуждения с конечными длинами волн порядка постоянной решётки. Проведено прямое численное моделирование динамики группы взаимодействующих магнитных моментов во внешнем поле различной ориентации. Получены временные зависимости и Фурье-спектры поперечной компоненты полного спина системы и дипольной части энергии. Результаты моделирования согласуются с расчётами в рамках спин-волнового подхода.

Ключевые слова: парамагнетик; дипольное взаимодействие; спиновые волны

Поступила в редакцию 22.08.2016; принята к опубликованию 31.08.2016

Spin-wave approach to the 2D paramagnetic under the magnetic field

К. В. Tsiberkin^a, Т. S. Belozerova^a, V. K. Henner^{a,b}

^a Perm State University,

Bukirev St. 15, 614990, Perm, Russia

email: kbtsiberkin@psu.ru

^b University of Louisville

40292, Natural Science Bldg. 310, Louisville, KY, USA

email: vkhenn01@louisville.edu

We study the possibility of collective spin excitations in 2D paramagnetic crystal with the dipole-dipole interaction and without the exchange interaction. The crystal is under uniform constant magnetic field. All the magnetic moments are oriented along the magnetic field at the saturation. Using the Holstein–Primakoff transformation, we describe the properties of paramagnetic in terms of the spin waves at the low-temperature limit. We obtain the dispersion relations for spin waves at

the square and hexagonal flat lattices. It is shown the wavelength of the collective excitations and their bandwidth are determined by the external magnetic field direction. The long-wave perturbations have the lowest energy when the magnetic field is orthogonal to the lattice plane, and the short-wave perturbations are the most preferable when the field is parallel to the lattice. We provide the direct numerical simulation of the group of interacting magnetic moments under the constant external field with different orientation to the lattice. The total transversal spin and dipole energy evolution in time and their Fourier-spectrum are considered. The numerical results match the analytical calculation in spin-wave approach.

Keywords: paramagnetic; dipolar interaction; spin waves

Received 22.08.2016; accepted 31.08.2016

doi: 10.17072/1994-3598-2016-2-35-48

1. Введение

Исследование магнитных и тепловых характеристик спиновых систем обладает большой значимостью для дальнейшего развития теории магнитных резонансов и релаксации [1–3]. Исключив из системы влияние электронов проводимости, сверхтонких взаимодействий и иных факторов, можно рассматривать непосредственно магнитные явления, учитывая дополнительные эффекты с помощью методов теории возмущений.

Во многих веществах наиболее значимыми являются обменные эффекты и спин-орбитальное взаимодействие [4–7]. Однако при отсутствии обменных взаимодействий существенным фактором, определяющим динамику и термодинамические свойства системы, является дипольное взаимодействие магнитных моментов частиц [4, 8].

Дипольное взаимодействие является одним из важнейших механизмов поперечной релаксации намагниченности при ядерном магнитном резонансе [8–10]. Также оно приводит к потенциальной возможности возникновения дальнего порядка ядерных магнитных моментов в некоторых солях и основаниях, например CaF_2 , LiF , LiH , Ca(OH)_2 [8], а при некоторых условиях – обуславливает возникновение вихревой структуры в спиновой подсистеме [11]. Все эти особенности в итоге определяют уширение и форму резонансных линий, статическую и динамическую магнитную восприимчивость дипольных систем, определение которых является одной из основных задач теории магнитного резонанса [1, 9, 10].

Учёт дипольного взаимодействия важен при описании свойств парамагнитных диэлектриков в твёрдой фазе, например, H и O в чистом виде [12, 13], или внедрённых в кристаллы диамагнетиков [14, 15], солей редкоземельных элементов, в которых расстояние между магнитными атомами столь велико, что обменное взаимодействие практически исчезает [4, 16].

В [17–19] исследуются спиновые волны в парамагнитных металлах, связанные со свободными

электронами. В таком случае преобладает обменное взаимодействие между электронами, а дипольное рассматривается как поправка [19].

Вещества, состоящие из атомов, полный момент электронных оболочек которых в основном состоянии равен нулю, могут проявлять слабые парамагнитные свойства благодаря их ядерному магнетизму. Характерными примерами таких изотопов являются ^{13}C , обладающий ненулевым ядерным магнитным моментом, а также изотопы диамагнитных диэлектриков – ^3H при высоком давлении, ^{10}B , ^{11}B , ^{14}N , ^{15}N , ^{21}Ne и др. [16, 20].

Вполне естественно, что дипольное взаимодействие имеет низкую интенсивность и становится значимым только при температурах $<1\text{ K}$ для электронной подсистемы [4, 21], и $T < 1\text{ мК}$ для ядерных спинов [1], когда характерная энергия тепловых флуктуаций $k_B T$ становится сопоставимой с энергией дипольного взаимодействия $E_d \sim \mu^2 / a_0^3$ (здесь k_B – постоянная Больцмана, μ – величина магнитного момента, a_0 – расстояние между частицами). Приведённые критические температуры получаются при подстановке в E_d величины магнитного момента порядка магнетона Бора $\mu_B \approx 0.927 \cdot 10^{-20}$ эрг / Гс для электронов и ядерного магнетона $\mu_N \approx 5.051 \cdot 10^{-24}$ эрг / Гс – для ядер.

Динамические свойства парамагнетиков (отклик на переменные магнитные поля) активно изучаются с использованием разнообразных подходов. Значительный объём сведений накоплен экспериментами в области ЯМР и ЭПР [1, 8, 10, 12–15]. Теоретические разработки, наиболее успешно работающие с полностью магнитными решётками и магнитно-разбавленными веществами, позволяют рассчитать ширину и форму резонансных линий в различных условиях и для разнообразных соединений [1, 8–10], спрогнозировать частотный спектр резонанса и временную эволюцию намагниченности при релаксационных процессах, спиновом эхе и др. [1–3, 10, 18, 22].

При помещении идеального парамагнетика в постоянное магнитное поле отдельные диполи ориентируются параллельно ему, а температурная зависимость полной намагниченности выражается

функцией Бриллюэна [4]. В пределе низких температур и сильных внешних полей парамагнетик достигает насыщения, и магнитные моменты ориентируются вдоль поля.

Принимая такое упорядоченное состояние за основное, можно рассмотреть отклонение от него малого числа спинов. Поскольку в системе присутствует дипольное взаимодействие, отклонение одного магнитного момента от равновесия влияет на соседние частицы, и при низких температурах это определяет возможность возникновения коллективных возбуждений, подобных спиновым волнам в ферромагнитных материалах, которые подробно исследованы, в том числе с применением формализма Холстейна–Примакова и его аналогов [23].

В работах [24, 25] в рамках спин-волнового подхода изучены динамические свойства парамагнитных спиновых систем с дипольным взаимодействием вблизи состояния насыщения при низкой температуре. Их авторами получены уравнения для эволюции спиновых температур, связанных с зеемановской и дипольной частью энергии, а также выражения для формы резонансных кривых. Иными словами, в [24, 25] развит низкотемпературный аналог теории насыщения Провоторова [1, 26]. В качестве конкретного примера в указанных работах представлено описание ЯМР при сверхнизких температурах на парамагнитных ядрах кристалла с простой кубической решёткой. Авторы указанных работ подчёркивают, что экспериментальная проверка теории возможна только при работе с температурами порядка 1 мК и ниже, и до сегодняшнего дня такие эксперименты неизвестны [27].

В работе [28] с использованием аналогичного подхода рассчитаны относительная намагниченность, продольная компонента тензора изотермической статической магнитной восприимчивости и теплоёмкость двумерной решётки, находящейся в ортогональном ей постоянном магнитном поле.

При описании макроскопических свойств парамагнетиков обычно принимается отсутствие межчастичных взаимодействий. Наиболее яркие результаты, детально описанные теоретически и подтверждённые экспериментом, связаны с аномальным поведением теплоёмкости магнитной подсистемы в области температур до 0.01–1 К. В зависимости теплоёмкости кристалла от температуры выявляется характерный пик: теплоёмкость в какой-то момент перестаёт монотонно убывать по закону T^3 , обусловленному фононами в решётке, а, наоборот, резко возрастает. После прохождения максимума дальнейший спад теплоёмкости происходит по экспоненциальному закону. Эта зависимость описывается законом Шоттки, полученным для идеальной двухуровневой системы [5]:

$$C \sim \exp(-\Delta / T) / T^2,$$

где Δ – расстояние между энергетическими уровнями. В рамках спин-волнового подхода для си-

стемы с дипольным взаимодействием выявляется отклонение от этого закона [28], но обнаружить его, по оценкам, возможно лишь при $T < 1$ мК. В указанной температурной области проявляются, к примеру, коллективные эффекты в парамагнитных газах (например, в парах Rb) [29, 30]. В известных работах по измерению теплоёмкости кристаллов нижний предел температуры составляет 1–10 мК, и закон Шоттки ещё выполняется [5–7, 31].

В настоящей работе производится сравнение энергетического спектра спиновых волн в двумерном парамагнитном кристалле, помещённом в однородное постоянное магнитное поле, направленное ортогонально или параллельно его плоскости, и определяющем однородно упорядоченное равновесное состояние. Возможность спонтанного упорядочения системы не рассматривается. Получены дисперсионные соотношения для спиновых волн в указанных случаях. Показано, что в перпендикулярном поле коллективные возбуждения – длинноволновые, а в параллельном поле выгодным становится возникновение коротких волн. Результаты подтверждаются численным моделированием динамики системы взаимодействующих магнитных моментов на двумерной решётке и анализом энергии дипольного взаимодействия.

2. Гамильтониан системы с дипольным взаимодействием

2.1. Структура гамильтониана

Рассматривается система, состоящая из N одинаковых частиц (где N – термодинамически большое число) с ненулевым спином, расположенных в узлах двумерной кристаллической решётки заданной структуры. Полагается справедливым приближение Борна–Оппенгеймера о неподвижности атомных ядер. Принято, что связанные с узлами решётки магнитные моменты могут свободно ориентироваться в любом направлении. Система помещена в однородное и постоянное магнитное поле напряжённостью H_0 , направленное либо перпендикулярно, либо параллельно плоскости решётки. Учитывается только магнитное дипольное взаимодействие отдельных частиц. Влиянием границ системы пренебрегается, так как число частиц на них $\sim N^{1/2}$ и относительно мало в термодинамическом пределе [32].

Рассматриваемые далее конфигурации системы изображены на рис. 1. Рис. 1, *а* иллюстрирует сферическую систему координат для одного из узлов решётки. Внешнее магнитное поле определяет направление оси z . На рис. 1, *б*, *в* показаны системы декартовых координат, в которых проведены дальнейшие вычисления, для квадратной и гексагональной решётки соответственно (ось z направлена из плоскости рисунка на читателя), и кристаллографические оси решёток [10] и [11].

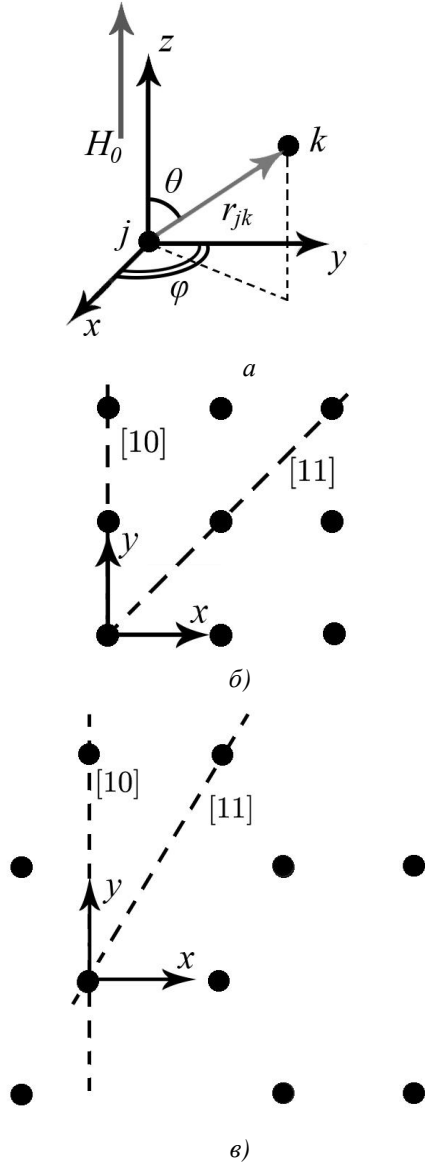


Рис. 1. Геометрия задачи: а – сферическая система координат для узла относительно магнитного поля; системы координат на плоскости: б – квадратная решётка; в – гексагональная решётка; штриховые линии показывают кристаллографические оси

Принято, что в основном состоянии все магнитные моменты ориентированы вдоль поля, и продольная намагничённость достигает насыщения (при $T = 0$ или $H_0 \rightarrow \infty$). Конечно, в реальности при ненулевых температурах систему разупорядочивают тепловые флуктуации. Благодаря дипольному взаимодействию могут возникать не только локализованные возмущения, но и коллективные, охватывающие обширные области. Их можно представить в виде суперпозиции элементарных возбуждений, используя методы вторичного квантования.

Гамильтониан спиновой системы с дипольным взаимодействием может быть разбит на сумму двух слагаемых [1, 3]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_Z + \mathcal{H}_{dd}. \quad (2.1)$$

Зеемановская часть гамильтониана описывает взаимодействие с внешним магнитным полем (здесь и далее используется система единиц, где $\hbar = 1$):

$$\mathcal{H}_Z = -\gamma \mathbf{H}_0 \cdot \sum_{j=1}^N \mathbf{S}_j, \quad (2.2)$$

где γ – гиромагнитное отношение, \mathbf{S}_j – оператор спинового момента, N – число частиц в системе, а индекс j нумерует все узлы решётки.

Гамильтониан дипольного взаимодействия может быть представлен в виде [1, 3]

$$\mathcal{H}_{dd} = \frac{\gamma^2}{2} \sum_{j \neq k} \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r_{jk}^3} - \frac{3r_{jk}^\alpha r_{jk}^\beta}{r_{jk}^5} \right) S_j^\alpha S_k^\beta, \quad (2.3)$$

латинские индексы нумеруют отдельные частицы, а греческие – обозначают координаты; \mathbf{r}_{jk} – радиус-вектор, соединяющий частицы с индексами j и k . Гамильтониан (2.3) может быть представлен в виде суммы секулярной части, которая коммутирует с оператором энергии Зеемана, и несекулярной части [1–3, 10]:

$$\mathcal{H}_{dd} = \mathcal{H}_{dd}^s + \mathcal{H}_{dd}^n, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{H}_{dd}^s = \frac{\gamma^2}{2} \sum_{j \neq k} a_{jk} \left(S_j^z S_k^z - \frac{1}{4} (S_j^+ S_k^- + S_j^- S_k^+) \right), \quad (2.5)$$

$$\mathcal{H}_{dd}^n = \frac{\gamma^2}{2} \sum_{j \neq k} \left(b_{jk} S_j^+ S_k^+ + 2c_{jk} S_j^+ S_k^z + h.c. \right), \quad (2.6)$$

где введены коэффициенты

$$a_{jk} = \frac{1 - 3 \cos^2 \theta_{jk}}{r_{jk}^3}, \quad b_{jk} = \frac{\sin^2 \theta_{jk}}{r_{jk}^3} e^{-2i\varphi_{jk}}, \quad (2.7)$$

$$c_{jk} = \frac{\sin \theta_{jk} \cos \theta_{jk}}{r_{jk}^3} e^{-i\varphi_{jk}},$$

здесь θ_{jk} – угол между векторами \mathbf{H}_0 и \mathbf{r}_{jk} , φ_{jk} – азимутальный угол для вектора \mathbf{r}_{jk} (рис. 1, а); аббревиатура *h.c.* обозначает эрмитово сопряжение всех предшествующих операторов; $S^\pm = S^x \pm iS^y$ – циклические компоненты оператора спина.

В случае двумерной решётки наиболее простым для анализа оказывается случай, когда внешнее поле ортогонально решётке. При этом полярный угол $\theta_{jk} = \pi/2$ одинаков для всех частиц и требуется учитывать лишь различие φ_{jk} . Вклад в гамильтониан вносит как секулярная, так и несекулярная компонента, поскольку

$$a_{jk} = +\frac{1}{r_{jk}^3}, \quad b_{jk} = -\frac{e^{-2i\varphi_{jk}}}{r_{jk}^3}, \quad c_{jk} = 0. \quad (2.8)$$

Когда поле ориентировано в плоскости решётки, важным становится его направление относительно кристаллографических осей. Азимутальный угол φ можно положить равным нулю, принимая, что ось x лежит в плоскости материала; углы θ_{jk} для разных атомов будут отличаться. Далее рассмотрены наиболее простые случаи, когда поле ориентировано вдоль направлений $[10]$ и $[11]$ (показаны штриховыми линиями на рис. 1, б, в). В двумерной решётке, лежащей в плоскости xOz , второй индекс Вейсса всегда равен 0, и поэтому здесь и далее он явно не указывается.

В теории магнитного резонанса показывается, что вклад несекулярных членов в вероятности изменения ориентации отдельных спинов в решётке мал по сравнению с секулярными и тем более зеемановской энергией, и поэтому в первом приближении по интенсивности дипольного взаимодействия ими можно пренебречь [1, 10]. Тем не менее далее несекулярная часть учитывается, поскольку её вклад может быть диагонализирован линейным преобразованием операторов [4, 9].

2.2. Гамильтониан в терминах спиновых волн

Формализм Холстейна–Примакова, первоначально разработанный для описания ферромагнетиков [9, 23, 32–35] и расширенный в дальнейшем на антиферромагнетики [9, 35, 36], позволяет анализировать коллективные явления и в системах с дипольным взаимодействием [4, 9, 24, 25]. Преимуществом этого подхода, относящегося к методам вторичного квантования, является возможность получения дисперсионных соотношений для спиновых волн и расчёта макроскопических свойств магнитных систем напрямую из преобразований гамильтониана без необходимости рассматривать уравнения движения магнитных моментов. Ниже последовательно описано его применение к дипольной системе.

В общем случае преобразование Холстейна–Примакова нелинейно. Циклические компоненты и z -компонента спина переписываются в терминах бозевских операторов как

$$n_j = \beta_j^\dagger \beta_j, \quad S_j^z = S - \beta_j^\dagger \beta_j,$$

$$S_j^+ \approx \sqrt{2S} \sqrt{1 - \frac{\beta_j^\dagger \beta_j}{2S}} \beta_j,$$

$$S_j^- \approx \sqrt{2S} \beta_j^\dagger \sqrt{1 - \frac{\beta_j^\dagger \beta_j}{2S}},$$

где S – абсолютная величина спина, n_j – оператор числа спиновых отклонений на узле j ; он определяет, насколько магнитный момент отклонился от оси z ; изменение проекции спина поля S^z на единицу приводит к такому же изменению собственного числа оператора n_j , но последнее меняется в пределах от 0 до $2S+1$, а S^z – в интервале от $-S$ до $+S$.

Наконец, здесь введены β_j^\dagger и β_j – операторы рождения и уничтожения элементарных возбуждений на узлах решётки, соответственно. Они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [\beta_j, \beta_k^\dagger]_- &= \delta_{jk}, \\ [\beta_j, \beta_k]_- &= [\beta_j^\dagger, \beta_k^\dagger]_- = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В пределе низких температур среднее число элементарных возбуждений оказывается малым, т.е. справедливо отношение $\langle n_j \rangle / 2S \ll 1$.

Это позволяет разложить операторы S^{\pm} в ряд по степеням указанного отношения. В линейном приближении для них получается:

$$\begin{aligned} S_j^+ &\approx \sqrt{2S} \beta_j, \\ S_j^- &\approx \sqrt{2S} \beta_j^\dagger, \end{aligned} \quad (2.10)$$

преобразование оператора S^z является точным.

От операторов рождения и уничтожения спиновых отклонений на отдельных узлах удобно перейти к их Фурье-образам, соответствующим спиновым волнам, которые распространяются уже по всей решётке:

$$\begin{aligned} \beta_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikr} \beta_k, \quad \beta_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ikr} \beta_k^\dagger, \\ [\beta_k, \beta_{k'}^\dagger]_- &= \delta_{kk'}, \\ [\beta_k, \beta_{k'}]_- &= [\beta_k^\dagger, \beta_{k'}^\dagger]_- = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где N – полное число частиц в системе, \mathbf{k} – волновой вектор коллективного спинового отклонения – спиновой волны. Фактически, переход (2.11) заключается в обычном математическом представлении сложной функции в виде суперпозиции элементарных гармоник.

Воспользуемся далее линеаризованным представлением Холстейна–Примакова (2.10) в отдельных компонентах гамильтониана спиновой системы (2.2), (2.5) и (2.6). Направляя ось z вдоль приложенного магнитного поля, преобразуем зеемановское слагаемое к виду

$$\mathcal{H}_z = -\gamma H_0 \sum_{j=1}^N (S - \beta_j^\dagger \beta_j).$$

Дипольные компоненты гамильтониана принимают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{dd}^S &= \frac{\gamma^2}{2} \sum_{j \neq k} a_{jk} \left(S^2 - 2S \beta_j^\dagger \beta_j - \right. \\ &\quad \left. - \frac{S}{2} (\beta_j^\dagger \beta_k + \beta_j \beta_k^\dagger) \right) + O(\beta^4), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{dd}^n &= \frac{\gamma^2}{2} \sum_{j \neq k} (2S (b_{jk} \beta_j \beta_k + h.c.) + \\ &\quad + 2\sqrt{2S} (c_{jk} (S \beta_j - \beta_j \beta_k^\dagger \beta_k) + h.c.) + O(\beta^4)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь $O(\beta^4)$ условно обозначает слагаемые, содержащие 4 бозевских оператора и более. Вклад ведущего слагаемого $\beta^\dagger \beta^\dagger \beta \beta$ может быть учтён с помощью преобразования Дайсона–Малеева [24, 25], а все слагаемые четвёртого порядка можно получить, используя следующий порядок разложения операторов Холстейна–Примакова [23]. Слагаемые нечётных порядков ($\sim \beta$, $\sim \beta \beta \beta$ и т.д.) могут быть исключены из рассмотрения выбором направления внешнего поля, тогда как в общем случае требуется их дополнительный анализ [9]. Они точно равны нулю, если поле ориентировано строго параллельно или перпендикулярно плоскости двумерной решётки.

Таким образом, линеаризованное преобразование Холстейна–Примакова позволяет представить гамильтониан в виде

$$\mathcal{H} = E_0 + \mathcal{H}^{(2)} + \dots \quad (2.14)$$

Постоянная E_0 определяет базовый уровень энергии полностью упорядоченной системы, но её значение несколько отличается от чисто зеемановской энергии – дипольное взаимодействие приводит к поправкам, которые определяются в ходе нормализации произведений бозевских операторов.

Слагаемое $\mathcal{H}^{(2)}$ содержит члены, билинейные по операторам β , и в общем случае при переходе к Фурье-компонентам имеет вид

$$\mathcal{H}^{(2)} = \sum_k (A_k \beta_k^\dagger \beta_k + B_k \beta_k \beta_{-k} + B_k^* \beta_k^\dagger \beta_{-k}^\dagger), \quad (2.15)$$

где A_k и B_k описывают взаимодействие магнитных моментов с внешним полем и между собой. Оператор (2.15) допускает полную диагонализацию посредством унитарного преобразования Боголюбова [9, 24, 30–33]:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \omega_0 \sum_k \lambda_k \tilde{\beta}_k^\dagger \tilde{\beta}_k, \quad \lambda_k = \sqrt{A_k^2 - 4|B_k|^2}, \quad (2.16)$$

где ω_0 – ларморовская частота, $\tilde{\beta}_k^\dagger$ и $\tilde{\beta}_k$ – операторы нормальных колебаний, также удовлетворяющие бозевским коммутационным соотношениям, а множитель λ_k определяет дисперсионное соотношение для возникающих спиновых волн. При отсутствии дипольных взаимодействий $\lambda_k = 1$, и система обладает только зеемановскими уровнями энергии с высокой кратностью вырождения.

3. Энергия спиновых волн

3.1. Перпендикулярное магнитное поле

Последовательное вычисление коэффициентов A_k и B_k с точностью до ближайших соседей первого порядка даёт

$$\mathcal{H}^{(2)} = \omega_0 \sum_k \left[\left(1 - SZp_d \left(1 + \frac{1}{2} \text{Re} \gamma_k \right) \right) \beta_k^\dagger \beta_k + \right. \\ \left. + SZp_d \left(\gamma_k^{-2\varphi} \beta_k \beta_{-k} + \gamma_{-k}^{2\varphi} \beta_k^\dagger \beta_{-k}^\dagger \right) \right], \quad (3.1)$$

где Z – первое координационное число ($Z = 4$ для квадратной решётки и $Z = 3$ для гексагональной). Здесь введены коэффициенты, описывающие геометрию решётки [4, 9]:

$$\gamma_k = \frac{1}{Z} \sum_{\delta} e^{ik \cdot \delta}, \\ \gamma_k^{n\varphi} = \frac{1}{Z} \sum_{\delta} e^{in\varphi_s \delta} e^{ik \cdot \delta}, \quad \gamma_{-k}^{-n\varphi} = (\gamma_k^{n\varphi})^*; \quad (3.2)$$

суммирование в (3.2) ведётся по ближайшим соседям, определяемым векторами δ . Вычисление коэффициентов γ_k является полностью геометрической задачей и не привязано к физическим особенностям конкретных систем. Учёт следующих координационных сфер позволяет уточнить значение энергии спиновых волн, однако качественно её зависимость от волнового вектора при этом не изменяется.

Дисперсионное соотношение (2.14) в терминах γ_k для перпендикулярного поля записывается следующим образом:

$$\lambda_k^2 = \left[1 - SZp_d \left(1 + \frac{1}{2} \text{Re} \gamma_k \right) \right]^2 - \\ - 4(SZp_d)^2 |\gamma_k^{-2\varphi}|^2. \quad (3.3)$$

В квадратной решётке ввиду её симметрии они полностью вещественны и равны

$$\gamma_k = \frac{1}{2} (\cos k_x a_0 + \cos k_y a_0), \\ \gamma_k^{-2\varphi} = \frac{1}{2} (\cos k_x a_0 - \cos k_y a_0). \quad (3.4)$$

В гексагональной решётке γ_k являются комплексными:

$$\gamma_k = \frac{1}{3} \left[\left(\cos k_x a_0 + A \cos \frac{k_x a_0}{2} \right) + \right. \\ \left. + i \left(\sin k_x a_0 - A \sin \frac{k_x a_0}{2} \right) \right], \\ \gamma_k^{-2\varphi} = \frac{1}{3} \left[\left(\cos k_x a_0 - B \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_y a_0 \right) + \right. \\ \left. + i \left(\sin k_x a_0 - B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_y a_0 \right) \right], \quad (3.5)$$

где для краткости обозначено

$$A = 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_y a_0, \quad B = \left(\cos \frac{k_x a_0}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{k_x a_0}{2} \right).$$

Структура выражений (3.5) соответствует работе [37], где впервые был произведён расчёт энергетического спектра электронов в слое графита, который не взаимодействует с остальными слоями (т.е. фактически – в монослое графена).

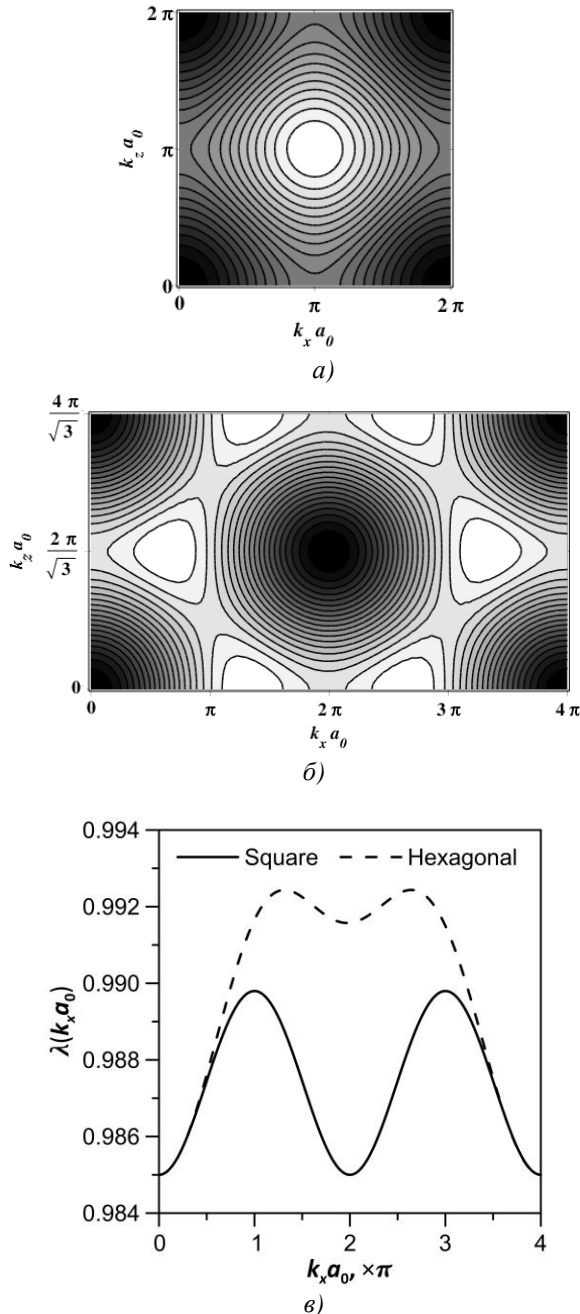


Рис. 2. Рассчитанная энергия спиновых волн на двумерной решётке в постоянном магнитном поле, перпендикулярном её плоскости: а – изолинии на квадратной решётке; б – изолинии на гексагональной решётке; в – энергия волн, распространяющихся вдоль оси x при $k_y = 0$ на квадратной (сплошная линия) и гексагональной (штриховая линия) решётках

На рис. 2, а, б представлена рассчитанная поверхность энергии дипольных спиновых волн в перпендикулярном магнитном поле для квадратной и гексагональной решёток. Белый цвет обозначает максимумы, а чёрный – минимумы энергии. На рис. 2, в представлено дисперсионное соотношение для спиновых волн, распространяющихся вдоль оси x , на обеих рассмотренных решётках. Направления осей координат соответствуют изображённым на рис. 1, б, в.

Таким образом, в перпендикулярном поле магнитные моменты благодаря дипольному взаимодействию ведут себя согласованно на пространственных масштабах, значительно превосходящих постоянную решётки.

Видно, что если поле ортогонально плоскости решётки, то энергетически выгодными являются длинноволновые коллективные возбуждения. Таким образом, при слабых возмущениях (в сильном магнитном поле и/или при низкой температуре, $\beta\omega_0 \rightarrow \infty$) реализуются длинноволновые возмущения, соответствующие отклонению сравнительно малого числа спинов от равновесной ориентации. Дисперсионное соотношение в пределе длинных волн становится изотропным, а их энергия зависит от волнового числа по квадратичному закону, как это реализуется и для спиновых волн в ферромагнетиках [4, 9, 23, 33–36].

Используя стандартные подходы для вычисления термодинамических величин [32], в этом случае можно найти величину продольной намагниченности, восприимчивости и теплоёмкости в пределе длинных волн ($k \rightarrow 0$) и низких температур или сверхсильных магнитных полей ($\beta\omega_0 \rightarrow \infty$) с точностью до первого порядка по параметру взаимодействия p_d [28]. При $k = 0$ вклад $\mathcal{H}^{(2)}$ в энергию решётки не равен нулю, и зависимость статистических характеристик системы от температуры приобретает множитель $e^{\beta\omega_0}$, дополняющий известные степенные законы [4, 9, 35].

3.2. Параллельное магнитное поле

Пусть теперь внешнее поле и ось z лежат в плоскости материала. В основном состоянии намагниченность решётки также лежит в её плоскости. Полярные углы θ_{jk} различны для разных узлов решётки. Полагая, что ось x лежит в плоскости кристаллической решётки, всегда можно положить $\varphi_{jk} = 0$. Тем не менее в этом случае становится важной ориентация поля относительно кристаллографических осей решётки, и в общем случае существует бесконечное число возможных направлений. В настоящей работе для обоих типов решётки рассмотрены случаи, когда поле ориентировано вдоль кристаллографических направлений [10] и [11] (показаны штриховыми линиями на рис. 1, б, в).

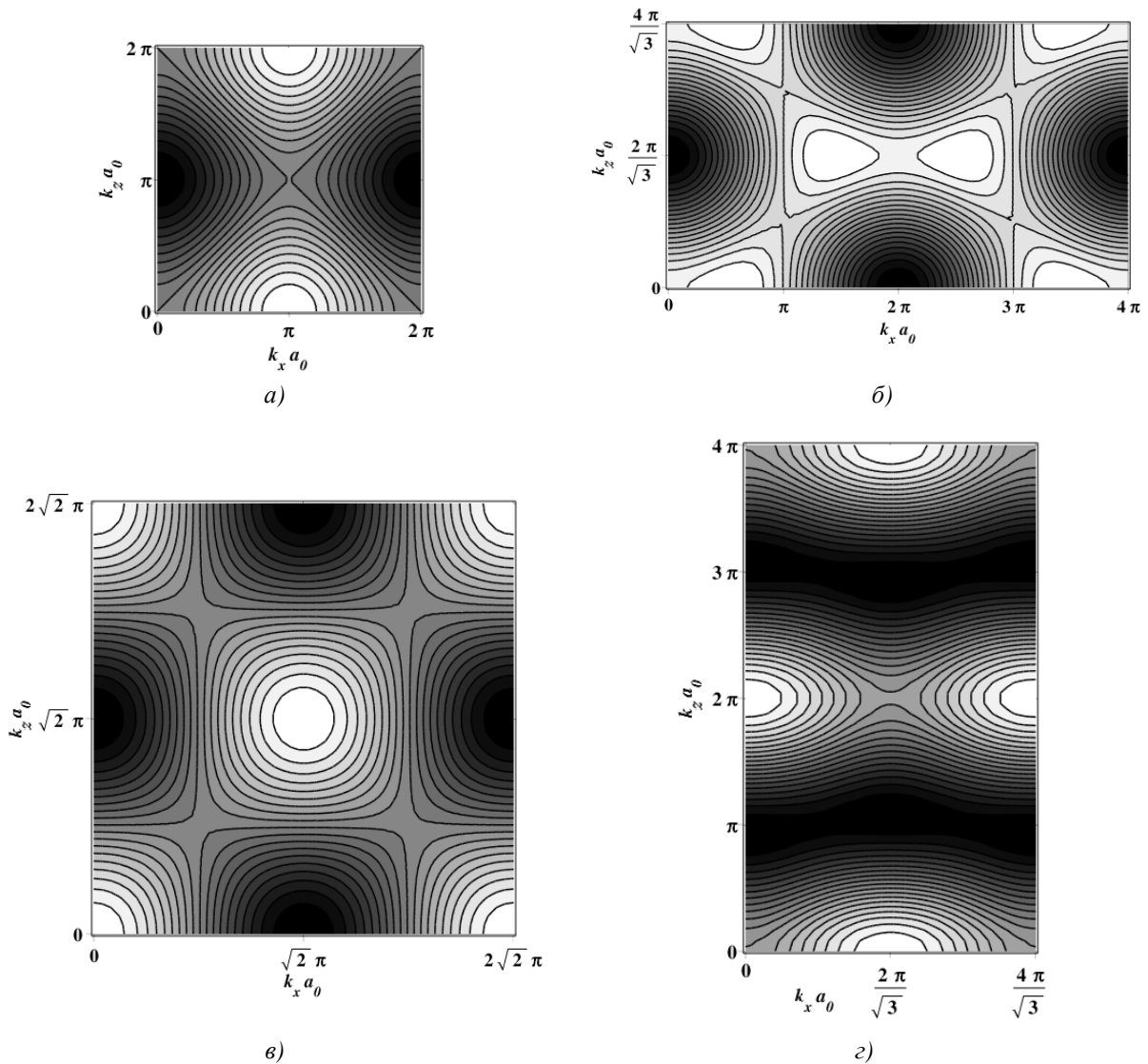


Рис. 3. Изолинии энергии спиновых волн при ориентации внешнего поля в плоскости решётки вдоль направления [10]: а – на квадратной решётке, б – на гексагональной решётке; вдоль направления [11]: в – на квадратной решётке, г – на гексагональной решётке

Коэффициенты A_k и B_k в билинейной части гамильтониана по своей структуре принципиально не отличаются от рассмотренных выше в п. 3.1. Опуская промежуточные преобразования и вычисление указанных коэффициентов, производимое на основе (2.7) в пределах первой координационной сферы с учётом различия полярных углов θ_{jk} , перейдём сразу к дисперсионному соотношению λ_k , определяемому в соответствии с (2.16).

При ориентировании внешнего магнитного поля по кристаллографической оси [10] получаются следующие дисперсионные соотношения:

для квадратной решётки:

$$\lambda_k^2 = (1 + Sp_d (2 - \cos k_x a_0 + 2 \cos k_z a_0))^2 - 16 (Sp_d)^2 \cos^2 k_x a_0, \quad (3.6)$$

для гексагональной решётки:

$$\lambda_k^2 = \left[1 + Sp_d \left(3 - \cos k_x a_0 + \frac{5}{2} \cos \frac{k_x a_0}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_z a_0 \right) \right]^2 - 4 (Sp_d)^2 \times \left[\left(\cos k_x a_0 + \frac{1}{2} \cos \frac{k_x a_0}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_z a_0 \right)^2 + \left(\sin k_x a_0 - \frac{1}{2} \sin \frac{k_x a_0}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_z a_0 \right)^2 \right]. \quad (3.7)$$

Когда поле направлено вдоль оси [11], дисперсионные соотношения видоизменяются:

для квадратной решётки:

$$\lambda_k^2 = \left(1 + Sp_d \left(2 + \cos \frac{k_x a_0}{\sqrt{2}} \cos \frac{k_z a_0}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 - 16(Sp_d)^2 \cos^2 \frac{k_x a_0}{\sqrt{2}} \cos^2 \frac{k_z a_0}{\sqrt{2}}. \quad (3.8)$$

для гексагональной решётки:

$$\lambda_k^2 = \left[1 + \frac{1}{2} Sp_d \left(3 + 2 \cos k_z a_0 - \cos \frac{k_z a_0}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_x a_0 \right) \right]^2 - 9(Sp_d)^2 \cos^2 \frac{\sqrt{3}}{2} k_x a_0. \quad (3.9)$$

Рассчитанные изолинии энергии для квадратной и гексагональной решёток представлены на рис. 3.

Основной и наиболее характерной особенностью свойств системы в случае параллельного поля становится тот факт, что энергия спиновых волн является минимальной не в длинноволновом пределе – с наибольшей вероятностью в системе должны возникать коллективные отклонения магнитных моментов с конечной длиной волны. В результате может возникать микроскопическая структура распределения намагниченности с конечной длиной волны, соизмеримой с постоянной решётки. Детальное описание этой структуры, однако, доступно только при рассмотрении нестационарной динамики локальных магнитных моментов в термодинамически неравновесном состоянии и на данный момент оно является предметом дальнейшего исследования.

4. Численное моделирование

С целью верификации спин-волнового описания проведено численное моделирование динамики ансамбля классических магнитных моментов в постоянном магнитном поле. Для моделирования был использован программный пакет MagnetoDynamics [38].

Расчёт осуществлён для двумерной квадратной решётки размером 10×10 узлов. Постоянное магнитное поле ориентировано перпендикулярно её плоскости или параллельно вдоль кристаллографического направления [10]. В начальном состоянии задаётся случайная ориентация магнитных моментов так, чтобы относительная намагниченность решётки вдоль поля составила 0.98. Для идеального парамагнетика, состоящего из частиц со спином $S = 1$, это отвечает значению $\beta\omega_0 \approx 3.93$, определяемому из функции Бриллюэна:

$$\frac{M}{M_0} = B_S(\beta\omega_0) = 0.98,$$

$$B_S(x) = \frac{2S+1}{2S} \operatorname{cth} \left(\frac{2S+1}{2S} x \right) - \frac{1}{2S} \operatorname{cth} \left(\frac{x}{2S} \right).$$

Для системы ядер ^{13}C в поле с индукцией 10^4 Гс (1 Тл) соответствующая найденному $\beta\omega_0$ температура равна $6.5 \cdot 10^{-5}$ К. При учёте дипольного взаимодействия и использования низкотемпературной асимптотики намагниченности, найденной в [28]:

$$\frac{M}{M_0} \approx 1 - \frac{2}{\pi p_d S} \frac{\exp(-\beta\omega_0)}{\beta\omega_0} = 0.98,$$

температура составляет $4.12 \cdot 10^{-5}$ К для $p_d = 0.01$. При температурах порядка 0.1 мК относительная равновесная намагниченность равна 0.8.

Динамика магнитных моментов описывается классическими уравнениями прецессии в магнитном поле без релаксационных членов, но с полным учётом дипольных взаимодействий. В безразмерной форме уравнения имеют вид [39]:

$$\begin{aligned} \dot{e}_j^x &= \frac{1}{p_d} e_j^y + (e_j^y \tilde{H}_j^z - e_j^z \tilde{H}_j^y), \\ \dot{e}_j^y &= -\frac{1}{p_d} e_j^x + (e_j^z \tilde{H}_j^x - e_j^x \tilde{H}_j^z), \\ \dot{e}_j^z &= e_j^x \tilde{H}_j^y - e_j^y \tilde{H}_j^x, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\mathbf{e}_j = \boldsymbol{\mu}_j / \mu$, μ – магнитный момент частиц; эффективное дипольное магнитное поле $\tilde{\mathbf{H}}$ безразмерено на величину внешнего магнитного поля H_0 ; производная в левой части берётся по времени, измеренному в единицах ω_d^{-1} . В уравнениях (4.1) также учтено, что внешнее магнитное поле не имеет поперечных составляющих и в безразмерных единицах равно $\mathbf{H}_0 = \{0, 0, 1\}$.

Эффективное дипольное поле, действующее на магнитный момент в узле j , определяется влиянием на него всех остальных магнитных моментов:

$$\mathbf{H}_j^\alpha = -\sum_k \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r_{jk}^3} - \frac{3r_{jk}^\alpha r_{jk}^\beta}{r_{jk}^5} \right) \boldsymbol{\mu}_k^\beta. \quad (4.2)$$

Данный подход не использует эффективного среднего поля. $\tilde{\mathbf{H}}$ для каждого узла вычисляется на основе состояния всей решётки через компоненты других магнитных моментов, и фактически решается полная нелинейная система дифференциальных уравнений (4.1).

На рис. 4 и 5 представлены результаты моделирования эволюции системы, предоставленной самой себе, при различном направлении внешнего поля.

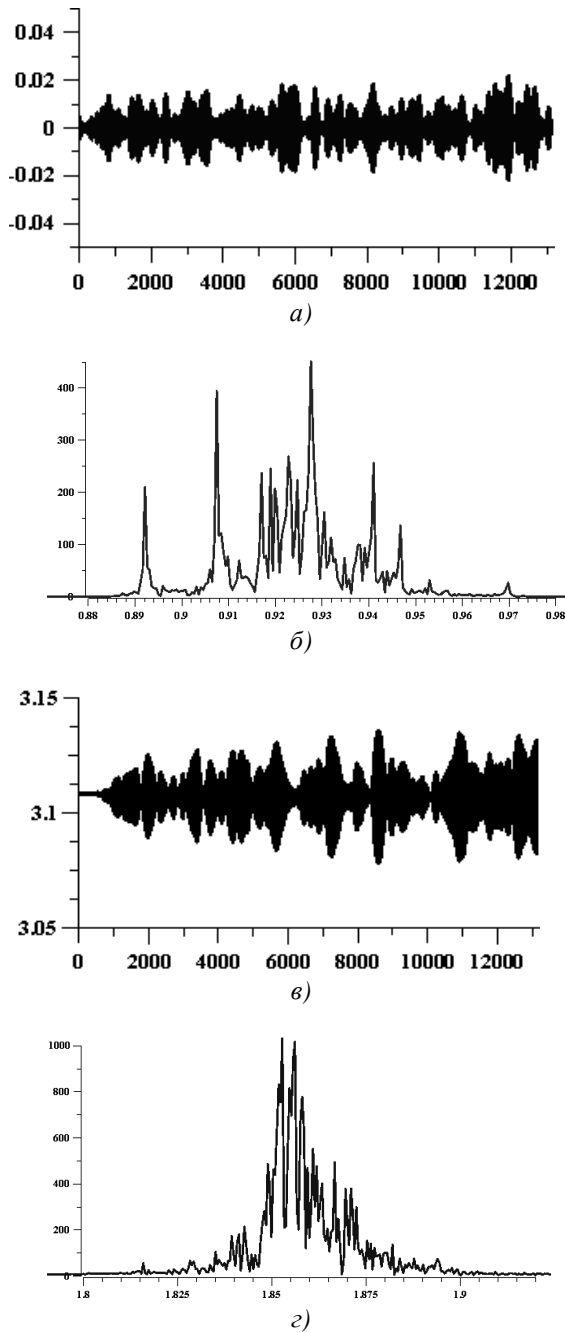


Рис. 4. Моделирование квадратной решётки 10×10 узлов в магнитном поле, перпендикулярном плоскости решётки, и значении $p_d = 0.01$: а – эволюция поперечной компоненты среднего спина $e_x(t)$; б – Фурье-спектр $e_x(t)$; в – эволюция дипольной энергии; г – Фурье-спектр дипольной энергии

На рис. 4 показаны эволюция поперечной компоненты магнитного спинового момента, принадлежащего на один узел решётки, определяемой как

$$\bar{e}^x(t) = (1/N) \sum_k e_k^x(t),$$

эволюция дипольной энергии и её Фурье-спектр в поле, перпендикулярном плоскости решётки, при

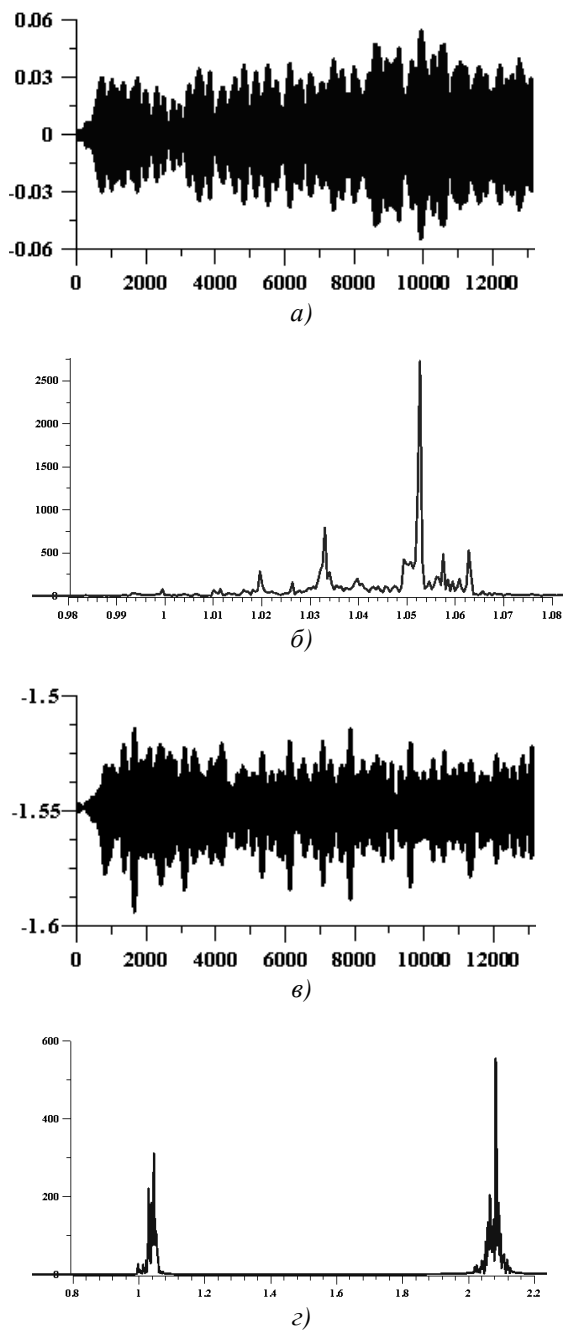


Рис. 5. Моделирование квадратной решётки 10×10 узлов в магнитном поле, параллельном плоскости решётки и значении $p_d = 0.01$: а – эволюция поперечной компоненты среднего спина $e_x(t)$; б – Фурье-спектр $e_x(t)$; в – эволюция дипольной энергии; г – Фурье-спектр дипольной энергии

$p_d = 0.01$, а на рис. 5 – то же, но в параллельном поле. Также моделирование проведено при $p_d = 0.0025$; качественно динамика системы остаётся той же, а ширина линий и величина дипольной энергии изменяются пропорционально p_d .

Частота колебаний поперечной компоненты спина системы близка к ларморовской ω_0 , а колебания дипольной энергии сосредоточены вблизи

частоты $2\omega_0$. На Фурье-спектрах выражено уширение линий, соответствующее интенсивности дипольного взаимодействия в решётке: характерная ширина составляет величину порядка p_d . Также хорошо видно смещение спектральных пиков от целочисленных относительных значений частот: в перпендикулярном поле они ниже на величину порядка p_d , а в параллельном – выше на аналогичную величину. Это соответствует общим свойствам системы магнитных диполей, находящихся в магнитном поле различной ориентации. Не объяснённой на текущий момент особенностью динамики системы в параллельном магнитном поле является выраженный пик вблизи ω_0 в спектре дипольной энергии, полностью отсутствующий в случае перпендикулярного поля.

5. Обсуждение

В обоих исследованных вариантах ориентации магнитного поля (перпендикулярно или параллельно плоскости решётки) исходный зеемановский уровень энергии, отвечающий намагниченности насыщения, размывается в сплошную энергетическую зону шириной порядка p_d благодаря дипольному взаимодействию. Экспериментально обнаружимое проявление этого эффекта заключается в уширении линий резонанса. Аналогичный результат получается при рассмотрении уширения линий ЯМР в результате спин-решёточного взаимодействия [1, 8, 9].

Рассчитанные дисперсионные соотношения определяют интервал возможных частот спиновых волн в кристалле, который может варьироваться в широких пределах. В результатах численного моделирования им соответствуют Фурье-спектры поперечной компоненты спина (рис. 4, б, 5, б). Для квадратной решётки в перпендикулярном поле все частоты колебаний лежат ниже ларморовской, в интервале от $\omega_0(1 - 3Sp_d/2)$ до $\omega_0(1 - Sp_d/2)$. Наоборот, в поле, лежащем в плоскости решётки, полоса занимаемых частот смещается в область выше ω_0 . Когда поле ориентировано вдоль кристаллографической оси [10], частоты спиновых волн охватывают диапазон от $\omega_0(1 - Sp_d)$ до $\omega_0(1 + 5Sp_d)$.

Спин-волновой подход даёт также описание временной зависимости дипольной энергии. При этом для оценок достаточно рассмотреть только секулярную часть гамильтониана дипольного взаимодействия (2.12). Подстановка значения параметра a_{jk} , соответствующего конкретному направлению поля, и вычисление решёточных сумм позволяют найти среднее значение и характерную амплитуду колебаний дипольной энергии. Оценки E_d и амплитуды колебаний, полученные в приближении ближайших соседей и обезразмеренные по зеемановской энергии, в перпендикулярном поле равны:

$$E_{d\perp} \approx 2NS^2 p_d, \quad \Delta E_{d\perp} \approx 4Sp_d \langle n \rangle$$

и в параллельном поле

$$E_{d\parallel} \approx -NS^2 p_d, \quad \Delta E_{d\parallel} \approx 2Sp_d \langle n \rangle,$$

где $\langle n \rangle$ – среднее значение числа спиновых волн во всей решётке. С учётом координационных сфер до 4-го порядка включительно энергии уточняются; в перпендикулярном поле:

$$E_{d\perp} \approx 3.2NS^2 p_d, \quad \Delta E_{d\perp} \approx 6.4Sp_d \langle n \rangle,$$

в параллельном поле:

$$E_{d\parallel} \approx -1.6NS^2 p_d, \quad \Delta E_{d\parallel} \approx 3.2Sp_d \langle n \rangle.$$

Эти средние значения дипольной энергии согласуются с результатами численного моделирования с абсолютной точностью не хуже 10% (см. рис. 4, в, 5, в). Приведённые оценки соотносятся между собой так же, как и найденные численно значения. Среднее значение и амплитуда колебаний пропорциональны p_d , а отношение амплитуды к среднему значению энергии в обоих случаях совпадает и не зависит от p_d . Из результатов моделирования определяется отношение $\langle n \rangle / S \approx 0.5$, одинаковое для обеих ориентаций внешнего поля.

Таким образом, при низких температурах описание динамики намагниченности двумерной решётки на основе спин-волнового приближения может успешно применяться как альтернативный подход, что подтверждается также работами [24, 25]. Сопоставление расчётов, выполненных в рамках различных подходов, и данных экспериментов в области сверхнизких температур позволит более надёжно верифицировать спин-волновое описание парамагнетика.

6. Заключение

В работе проанализированы дисперсионные соотношения для спиновых волн в двумерном парамагнетике с дипольным взаимодействием, помещённом в однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости решётки или параллельно ей с заданной ориентацией относительно кристаллографических осей. Найдено, что в первом случае в системе реализуются коллективные возбуждения с большой длиной волны, тогда как во втором выгодным становится возбуждение относительно коротких волн с длинами порядка постоянной решётки.

Рассчитанные аналитически диапазон частот, занимаемый спиновыми волнами, а также свойства дипольной составляющей энергии решётки согласуются с результатами численного моделирования динамики двумерной системы магнитных моментов во внешнем поле, что подтверждает возмож-

ность применения спин-волнового подхода к системам с чисто дипольным взаимодействием.

Изменение ориентации магнитного поля относительно плоскости решётки позволяет управлять энергией коллективных возбуждений, реализующихся в системе, и, соответственно, статистическими характеристиками решётки наряду с изменением напряжённости приложенного поля. Также относительная ориентация поля оказывает существенное влияние на уширение спектра частот.

Авторы выражают благодарность Э.Б. Фельдману (ИПХФ РАН, г. Черноголовка) за ценные комментарии и М.А. Марценюку (ПГНИУ, г. Пермь) за содержательную дискуссию.

Список литературы

1. *Абрагам А.* Ядерный магнетизм. М.: Изд-во ин. л-ры, 1963. 551 с.
2. *Goldman M.* Formal theory of spin-lattice relaxation // *Journal of Magnetic Resonance*. 2001. V. 149. P. 160–187.
3. *Henner V., Desvaux H., Belozerova T., Marion D., Kharebov P., Klots A.* Collective effects due to dipolar fields as the origin of the extremely random behavior in hyperpolarized NMR maser: A theoretical and numerical study // *Journal of Chemical Physics*. 2013. V. 139, 144111.
4. *Вонсовский С. В.* Магнетизм. М.: Наука, 1971. 1032 с.
5. *Gopal E. S. R.* Specific heat at low temperatures // New-York: Springer, 1966. 240 p.
6. *Nallamuthu S., Rashid T. P., Krishnakumar V., Besnard C., Hagemann H., Reiffers M., Nagalakshmi R.* Anisotropic magnetic, transport and thermodynamic properties of novel tetragonal Ce₂RhGa₁₂ compound // *Journal of Alloys and Compounds*. 2014. V. 604. P. 379–383.
7. *Liang T., Koohpayeh S. M., Krizan J. W., McQueen T. M., Cava R. J., Ong N. P.* Heat capacity peak at the quantum critical point of the transverse Ising magnet CoNb₂O₆ // *Nature Communications*. 2015. V. 6, 7611.
8. *Abragam A., Goldman M.* Nuclear magnetism: order and disorder. Oxford: Clarendon Press, 1982, 626 p.
9. *White R. M.* Quantum theory of magnetism: Magnetic properties of materials (3rd ed.). Berlin: Springer-Verlag, 2007. 362 p.
10. *Сликтер Ч.* Основы теории магнитного резонанса (2-е изд). М.: Мир, 1981. 448 с.
11. *Дубовик В. М., Лунегов И. В., Марценюк М. А.* Тороидный отклик в ядерном магнитном резонансе // *Физика элементарных частиц и атомного ядра*. 1995. Т. 26. Вып. 1. С. 72–145.
12. *Sullivan N. S., Pound R. B.* Splitting of NMR spectrum of solid hydrogen // *Physics Letters A*. 1972. V. 39 (1). P. 23–24.
13. *Piette L. H., Rempel R. C., Weaver H. E., Flournoy J. M.* EPR studies of electron irradiated ice and solid hydrogen // *Journal of Chemical Physics*. 1959. V. 30, 1623.
14. *Feldman V. I., Sukhov F. F., Orlov A. Y.* Hydrogen atoms in solid xenon: trapping site structure, distribution, and stability as revealed by EPR studies in monoisotopic and isotopically enriched xenon matrices // *Journal of Chemical Physics*. 2008. V. 128 (21), 214511.
15. *Kumanagi J.* Hydrogen molecular ions in solid parahydrogen: EPR studies at cryogenic temperatures / In: Lund A., Shiotani M. (Eds.) Applications of EPR in radiation research // Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2014. P. 117–147.
16. *Lide D. R.* (Ed). CRC handbook of chemistry and physics (90th ed.). Boca Raton, UK: CRC Press, 2009. 2804 p.
17. *Аронов А. Г.* Спиновые волны в среде с неравновесно ориентированными спинами // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1977. Т. 73. Вып. 2 (8). С. 577–582.
18. *Žutić I., Fabian Ja., Das Sarma S.* Spintronics: Fundamentals and applications // *Reviews of Modern Physics*. 2004. V. 76 (2). P. 323–410.
19. *Zyuzin A. A., Zyuzin A. Yu.* Non-equilibrium spin waves in paramagnetic metals // *Europhysics Letters*. 2010. V. 90, 67007.
20. *Stone N. J.* Table of nuclear magnetic dipole and electric quadrupole moments // *Atomic Data and Nuclear Data Tables*. 2005. V. 90. P. 75–176.
21. *Bleaney B.* Cryomagnetism and magnetic resonance in Oxford physics / In: Eaton G. R., Eaton S. S., Salikhov K. M. (Eds.) Foundations of modern EPR. // Singapore: World Scientific Pub Co Inc., 1998. 818 p.
22. *Henner V. K., Henner E. K.* About the velocity of establishment of quasi-equilibrium in magnetically diluted spin-systems // *Physics Letter A*. 1988. V. 127. N. 6-7. P. 322–324.
23. *Holstein T., Primakoff H.* Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet // *Physical Review*. 1940. V. 58. P. 1098–1113.
24. *Фельдман Э. Б., Хитрин А. К.* Спин-волновая теория ЯМР в твердых телах при низких температурах // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1990. Т. 98. Вып. 3. С. 967–977.
25. *Feldman E. B., Khitrin A. K.* NMR at high spin polarization: a spin-wave approach // *Physics Letters A*. 1991. V. 153. N. 1. P. 60–62.
26. *Провоторов Б. Н.* О магнитном резонансном насыщении в кристаллах // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1961. Т. 41. Вып. 5. С. 1582–1591.
27. *Tsiberkin K.* Collective spin excitations in 2D paramagnet with dipole interaction // *European Physical Journal B*. 2016. V. 89 (2), 54.

28. Фельдман Э. Б. Частное сообщение, 2016.
29. Goldstein L. Thermal properties of paramagnetic solid Helium-3 // *Journal of Low Temperature Physics*. 1983. V. 50 (3). P. 267–299.
30. Андреева Т. Л., Рубин П. Л. Коллективные моды в холодных парамагнитных газах // *Квантовая электроника*. 2014. Т. 44. Вып. 2. С. 182–183.
31. Janssen L. M. C., van der Avoird A., Groenenboom G. C. On the role of the magnetic dipolar interaction in cold and ultracold collisions: numerical and analytical results for $\text{NH}(3\Sigma^-)+\text{NH}(3\Sigma^-)$ // *European Physical Journal D*. 2011. V. 65. P. 177–187.
32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика, ч. 1 (5-е изд.). М.: Физматлит, 2001. 616 с.
33. Dyson F. J. General theory of spin-wave interactions // *Physical Review*. 1956. V. 102. N. 5. P. 1217–1230.
34. Dyson F. J. Thermodynamic behavior of an ideal ferromagnet // *Physical Review*. 1956. V. 102. N. 5. P. 1230–1244.
35. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
36. Prabhakar A., Stancil D. D. Spin waves: Theory and applications. New York: Springer, 2009. 348 p.
37. Wallace P. R. The band theory of graphite // *Physical Review*. 1947. V. 71 (9). P. 622–634.
38. Белозерова Т. С., Хеннер В. К. MagnetoDynamics. Свидетельство о гос. регистрации прогр. для ЭВМ №2014617685. Роспатент, 2014.
39. Henner V., Klots A., Belozerova T. The quantum mechanics correspondence principle for spin systems and its application for some magnetic resonance problems [Электронный ресурс] // eprint arXiv:1507.03043. 2015.
URL: <http://arxiv.org/abs/1507.03043> (дата обращения: 15.07.2015).
6. Nallamuthu S., Rashid T. P., Krishnakumar V., Besnard C., Hagemann H., Reiffers M., Nagalakshmi R. Anisotropic magnetic, transport and thermodynamic properties of novel tetragonal $\text{Ce}_2\text{RhGa}_{12}$ compound. *Journal of Alloys and Compounds*, 2014, vol. 604, pp. 379–383.
7. Liang T., Koohpayeh S. M., Krizan J. W., McQueen T. M., Cava R. J., Ong N. P. Heat capacity peak at the quantum critical point of the transverse Ising magnet CoNb_2O_6 . *Nature Communications*, 2015, vol. 6, 7611.
8. Abragam A., Goldman M. *Nuclear magnetism: order and disorder*. Oxford: Clarendon Press, 1982, 626 p.
9. White R. M. *Quantum theory of magnetism: Magnetic properties of materials* (3rd ed.), Berlin: Springer-Verlag, 2007, 362 p.
10. Slichter P. D. *Principles of Magnetic Resonance*. Springer Series in Solid-State Sciences, Book 1 (3rd ed). New York: Springer. 1990. 658 p.
11. Dubovik V. M., Lunegov I. V., Martsenyuk M. A. Theory of toroid response observation in nuclear magnetic resonance. *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei*, 1995, vol. 26, no. 1, pp. 72–145 (In Russian).
12. Sullivan N. S., Pound R. B. Splitting of NMR spectrum of solid hydrogen. *Physics Letters A*, 1972, vol. 39 (1), pp. 23–24.
13. Piette L. H., Rempel R. C., Weaver H. E., Flournoy J. M. EPR studies of electron irradiated ice and solid hydrogen. *Journal of Chemical Physics*, 1959, vol. 30, 1623.
14. Feldman V. I., Sukhov F. F., Orlov A. Y. Hydrogen atoms in solid xenon: trapping site structure, distribution, and stability as revealed by EPR studies in monoisotopic and isotopically enriched xenon matrices. *Journal of Chemical Physics*, 2008, vol. 128 (21), 214511.
15. Kumanagi J. Hydrogen molecular ions in solid parahydrogen: EPR studies at cryogenic temperatures. In: Lund A., Shiotani M. (Eds.) *Applications of EPR in radiation research*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2014, pp. 117–147.
16. Lide D. R. (Ed.). *CRC handbook of chemistry and physics* (90th ed.). Boca Raton: CRC Press, 2009, 2804 p.
17. Aronov A. G. Spin waves in a medium with nonequilibrium spin orientation. *Soviet Physics JETP*, 1977, vol. 46, no. 2, pp. 301–304.
18. Žutić I., Fabian Ja., Das Sarma S. Spintronics: Fundamentals and applications. *Reviews of Modern Physics*, 2004, vol. 76 (2), pp. 323–410.
19. Zyuzin A. A., Zyuzin A. Yu. Non-equilibrium spin waves in paramagnetic metals. *Europhysics Letters*, 2010, vol. 90, 67007.
20. Stone N. J. Table of nuclear magnetic dipole and electric quadrupole moments. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 2005, vol. 90, pp. 75–176.

References

21. Bleaney B. Cryomagnetism and magnetic resonance in Oxford physics. In: Eaton G. R., Eaton S. S., Salikhov K. M. (Eds.) *Foundations of modern EPR*. Singapore: World Scientific Pub Co Inc., 1998. 818 p.
22. Henner V. K., Henner E. K. About the velocity of establishment of quasi-equilibrium in magnetically diluted spin-systems. *Physics Letter A*, 1988, vol. 127, no. 6-7, pp. 322–324.
23. Holstein T., Primakoff H. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet. *Physical Review*, 1940, vol. 58, pp. 1098–1113.
24. Fel'dman E. B., Khitrin A. K. Spin-wave theory of NMR in solids at low temperatures. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1990, vol. 71, no. 3, pp. 538–543.
25. Fel'dman E. B., Khitrin A. K. NMR at high spin polarization: a spin-wave approach. *Physics Letters A*, 1991, vol. 153, no. 1, pp. 60–62.
26. Provotorov B. N. Magnetic Resonance Saturation in Crystals. *Soviet Physics JETP*, 1961, vol. 14 (5), pp. 1126–1131.
27. Tsiberkin K. Collective spin excitations in 2D paramagnet with dipole interaction. *European Physical Journal B*, 2016, vol. 89 (2), 54.
28. Fel'dman E. B. Private communication.
29. Goldstein L. Thermal properties of paramagnetic solid Helium-3. *Journal of Low Temperature Physics*, 1983, vol. 50 (3), pp. 267–299.
30. Andreeva T. L., Rubin P. L. Collective modes in cold paramagnetic gases. *Quantum Electronics*, 2014, vol. 44 (2), pp. 182–183.
31. Janssen L. M. C., van der Avoird A., Groenenboom G. C. On the role of the magnetic dipolar interaction in cold and ultracold collisions: numerical and analytical results for $\text{NH}(3\Sigma^-)+\text{NH}(3\Sigma^-)$. *European Physical Journal D*, 2011, vol. 65, pp. 177–187.
32. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of Theoretical Physics*, vol. 5: *Statistical Physics*, p. 1 (3rd ed.), Oxford: Butterworth-Heinemann, 1980, 544 p.
33. Dyson F. J. General theory of spin-wave interactions. *Physical Review*, 1956, vol. 102, no. 5, pp. 1217–1230.
34. Dyson F. J. Thermodynamic behavior of an ideal ferromagnet. *Physical Review*, 1956, vol. 102, no. 5, pp. 1230–1244.
35. Akhiezer A. I., Bar'yakhtar V. G., Peletminskii S. V. *Spin waves*. Amsterdam: North-Holland, 1968, 369 p.
36. Prabhakar A., Stancil D. D. *Spin waves: Theory and applications*, New York: Springer, 2009, 348 p.
37. Wallace P. R. The band theory of graphite. *Physical Review*, 1947, vol. 71 (9), pp. 622–634.
38. Belozerova T. S., Henner V. K. *MagnetoDynamics* Certificate of state registration of the computer program N. 2014617685. 2014.
39. Henner V., Klots A., Belozerova T. The quantum mechanics correspondence principle for spin systems and its application for some magnetic resonance problems. eprint arXiv:1507.03043.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Цибберкин К. Б., Белозерова Т. С., Хеннер В. К. Спин-волновое описание двумерного парамагнетика в магнитном поле // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2016. № 2 (33). С. 35–48. doi: 10.17072/1994-3598-2016-2-35-48

Please cite this article in English as:

Tsiberkin K. B., Belozerova T. S., Henner V. K. Spin-wave approach to the 2D paramagnetic under the magnetic field. Bulletin of Perm University. Series: Physics, 2016, no. 2 (33), pp. 35–48. doi: 10.17072/1994-3598-2016-2-35-48