

УДК 532.526; 532.59
PACS 47.32.Ef

Осреднённые течения, возбуждаемые инерционными модами в либрирующем цилиндре

С. В. Субботин^a, А. С. Кропачева^a

^a Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет
614990, Пермь, ул. Сибирская, 24
email: subbotin_sv@pspu.ru

Работа посвящена экспериментальному исследованию осредненных потоков, возбуждаемых осциллирующим движением жидкости в неравномерно вращающейся (либрирующей) цилиндрической полости. Либрации приводят к распространению инерционных волн, которые рождаются вблизи мест соединения боковой и торцевой стенок полости. В результате многократного отражения от стенок полости инерционные волны испытывают пространственный резонанс, возбуждая так называемые инерционные моды. Последние представляют собой систему вихрей, направление вращения жидкости в которых меняется в течение периода либраций. Обнаружено, что при осциллирующем движении в объеме полости возникает интенсивное осредненное течение в пограничном слое Стокса на боковой поверхности цилиндра. Структура течения имеет вид системы осредненных тороидальных вихрей, расположенных вдоль всей боковой границы полости. Количество вихрей определяется осевым волновым числом возбуждаемой моды и не зависит от радиального волнового числа. Показано, что интенсивность осредненного движения жидкости в вихрях пропорциональна квадрату амплитуды либраций и сильно зависит от номера моды.

Ключевые слова: инерционные волны; инерционные моды; осредненные течения; вращение; либрации

Поступила в редакцию 08.10.2018; принята к опубликованию 03.12.2018

Steady flows excited by inertial modes in a librating cylinder

S. V. Subbotin^a, A. S. Kropacheva^a

^a Perm State Humanitarian Pedagogical University, Sibirskaya St. 24, 614990, Perm
email: subbotin_sv@pspu.ru

Steady flow excited by oscillatory motion of the fluid in a non-uniformly rotating (librating) cylinder is experimentally investigated. Librations lead to the propagation of inertial waves, which are born near the junction of the side and end walls of the cavity. As a result of multiple reflections from the cavity walls, the inertial waves experience a spatial resonance, exciting so-called inertial modes. The latter are a system of vortices in which the direction of rotation of the fluid bulk leads to the appearance of intense steady flow in the Stokes boundary layer on the side wall of the cylinder. The flow structure has the form of a system of averaged toroidal vortices located along the entire side cavity wall. The number of vortices is determined by the axial wave number of the excited mode and does not depend on the radial wave number. It is shown that the intensity of the steady flow is

proportional to the square of the libration amplitude and strongly depends on the number of the mode.

Keywords: inertial waves; inertial modes; steady flow; rotation; librations

Received 08.10.2018; accepted 03.12.2018

doi: 10.17072/1994-3598-2018-4-67-73

1. Введение

Известно, что осциллирующее движение во вращающейся жидкости является источником для поддержания инерционных волн [1]. Этот особый класс волн существует благодаря действию силы Кориолиса на частицы жидкости как квазиупругой силы. Если частота колебаний меньше удвоенной частоты вращения системы, волны распространяются от источника колебаний вдоль характеристических поверхностей, образованных свободными сдвиговыми слоями. При этом направление распространения волны относительно оси вращения определяется частотой колебаний [2]. Многократное отражение волн от стенок полости при некоторых частотах либраций способствует возникновению пространственного резонанса, в результате чего в жидкости возникают крупномасштабные осциллирующие вихревые структуры, которые получили название *инерционных мод* [3].

Одним из наиболее распространенных способов возбуждения инерционных волн и мод является неравномерное вращение, при котором скорость вращения полости периодически меняется с частотой σ (*либрации*). Число работ в этом направлении велико. Это связано с тем, что либрационное движение характерно для многих планетарных тел [4]. Ранее инерционные волны и моды численно исследовались в либрирующем цилиндре [5], экспериментально и численно в либрирующем цилиндрическом слое [6], а также в либрирующем кубе [3].

Как показывают исследования [7–10], инерционные волны и моды способны генерировать осредненные течения. Так, в [8–10] было показано, что резонансное возбуждение инерционной моды интенсифицирует азимутальное движение жидкости в полости в несколько раз. При этом механизм генерации дифференциального вращения связывался с нелинейными эффектами в объеме жидкости, а влияние пограничных слоев исключалось [9]. С другой стороны, как было недавно обнаружено в экспериментах [7], отражение инерционной волны от стенок полости приводит к возникновению осредненных течений в пограничных слоях. На этот факт также указывали качественные эксперименты по визуализации течения с помощью мелких тяжелых частиц [7, 11], которые образовывали на внутренней стенке полости кольцевые структуры. Каждое кольцо располагалось между

двумя вихрями, образующими встречные потоки вдоль стенки. Целью настоящей работы является PIV-исследование (*Particle Image Velocimetry*) потоков, которые возникают в пограничных слоях при резонансном возбуждении в полости инерционной моды.

2. Экспериментальная установка и методика

Эксперименты проводятся на установке, схематично представленной на рис. 1. Кювета представляет собой полый плексигласовый параллелепипед, внутри которого располагается плексигласовый цилиндр кругового сечения. Данная конструкция герметизируется с обеих сторон прозрачными фланцами и закрепляется в шарикоподшипниках опор установки. Таким образом, кювета состоит из двух отсеков. В «рубашку», образованную пространством между стенками параллелепипеда и цилиндра, заливается та же жидкость, что и в цилиндр. За счет этого оптические искажения на цилиндрической поверхности полости компенсируются. Длина полости составляет $L = 102.0$ мм, а её внутренний радиус равен $R = 26.0$ мм. В качестве жидкости используется водный раствор глицерина кинематической вязкости $\nu = 7.0$ мм²/с.

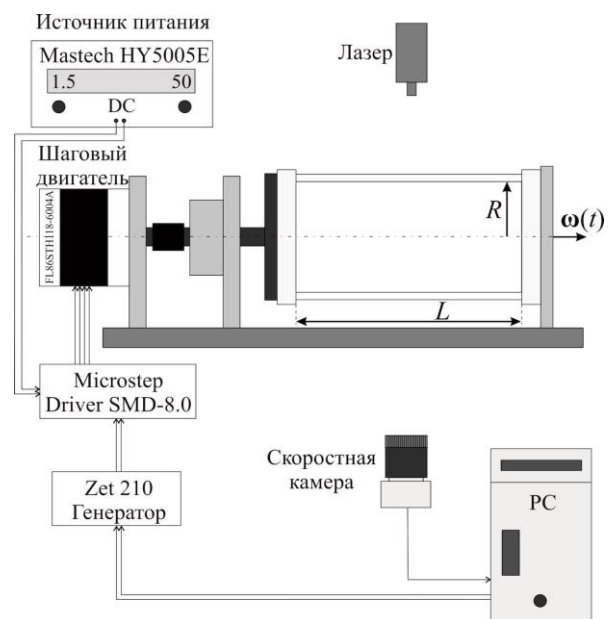


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Вращение полости задается шаговым двигателем FL86STH118-6004A, управляемым драйвером SMD-8.0 и питающимся от источника постоянного тока Mastech HY5005E. Основной шаг двигателя составляет 1.8° и делится драйвером до 0.45° . Регулировка скорости вращения вала двигателя осуществляется с помощью генератора модуля Zet 210, управляемого компьютером. Для соединения вала двигателя с полостью используется муфта SJCA-30C, обеспечивающая точную передачу вращения.

Скорость вращения полости в инерциальной системе отсчета периодически изменяется со временем по закону:

$$\omega(t) = \Omega_{rot} (1 + \varepsilon \sin(\Omega_{lib} t)),$$

где Ω_{rot} – средняя угловая скорость вращения полости, Ω_{lib} – угловая частота либраций, а $\varepsilon \equiv \Delta\phi\Omega_{lib} / \Omega_{rot}$ – амплитуда модуляции скорости вращения. В проведенных экспериментах средняя частота вращения составляет $f_{rot} = \Omega_{rot} / 2\pi = 10.000$ об/с и устанавливается с точностью 0.001 об/с. Безразмерная частота $\sigma \equiv \Omega_{lib} / \Omega_{rot}$ и амплитуда либраций ε изменяются в пределах $\sigma = 0 - 2.00$ и $\varepsilon = 0 - 0.300$ соответственно.

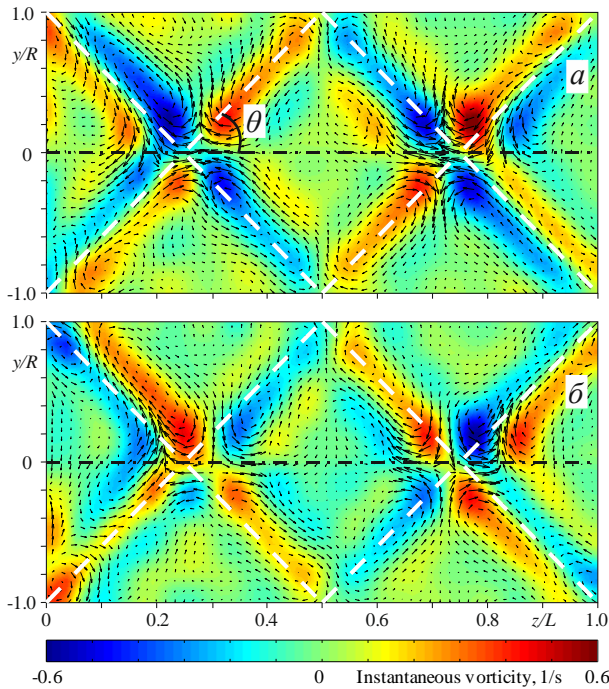


Рис. 2. Мгновенное поле скоростей при $\sigma \equiv 1.44$ и $\varepsilon \equiv 0.1$ в фазе либраций $\Omega_{lib} t = 0$ (а) и $\Omega_{lib} t = \pi$ (б). Белыми штриховыми линиями показано направление распространения инерционных волн, рассчитанное по формуле (3.1). Здесь и далее на рис. 3 и 4а цветом показана x компонента поля завихренности $\text{rot}_x \mathbf{v}$ (ось x направлена от нас)

Методика проведения экспериментов следующая. Кювета приводится в быстрое равномерное вращение со скоростью Ω_{rot} . По прошествии характерного времени спинапа (переход к установившемуся режиму вращения) и установлении твердотельного вращения жидкости при заданной частоте Ω_{lib} , соответствующей резонансному возбуждению инерционной моды, плавно увеличивается амплитуда ε . После выхода системы на установившийся режим вращения исследуется поле скорости жидкости PIV-методом. Для этого в рабочую жидкость добавляются пластиковые частицы размером $d \sim 100$ мкм, плотность которых близка к плотности жидкости. Полость в осевом сечении освещается световым ножом, создаваемым непрерывным лазером Z-Laser Z500Q. Видеорегистрация положения светорассеивающих частиц осуществляется с помощью неподвижной в лабораторной системе отсчета скоростной видеокамеры CamRecord CL600x2 с частотой кратной средней скорости вращения Ω_{rot} . Далее последовательность фотографий обрабатывается с помощью программы PIVlab [12], после чего исследуются мгновенный и осредненный по периоду либраций профили скорости. Отметим, что осредненный профиль скорости рассчитывается не менее чем по десяти периодам либраций.

Все эксперименты проводятся ниже порога возникновения центробежной неустойчивости на боковой стенке цилиндра, максимальное значение числа Рейнольдса $\text{Re} = \varepsilon E^{-3/4} < 250$ [13], где $E = \nu / (\Omega_{rot} R^2)$ – число Экмана, значение которого во всех экспериментах составляет $E = 1.65 \cdot 10^{-4}$.

3. Результаты экспериментов

3.1. Инерционные волны

В области частот $0 < \sigma \leq 2$ либрации полости являются источником инерционных волн, которые рождаются в местах соединения боковой и торцевых стенок кюветы. Инерционные волны распространяются вдоль конусообразных поверхностей, образованных свободными сдвиговыми слоями. Согласно [1] направление распространения волны определяется отношением частоты либраций к удвоенной скорости вращения системы:

$$\theta = \arcsin(\sigma / 2). \quad (3.1)$$

На рис. 2 представлены мгновенное поле скоростей и соответствующее поле завихренности в двух противоположных фазах либраций. В течение периода либраций жидкость выталкивается и всасывается вдоль направления распространения волн. Достигая границ полости, инерционная волна отражается. Например, при частоте $\sigma = 1.44$ от-

ражение от боковой стенки полости происходит один раз. В целом результаты визуализации мгновенного профиля скорости PIV-методом хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями [1].

3.2. Инерционные моды

При определенных частотах либраций в результате многократного отражения инерционные волны испытывают пространственный резонанс, возбуждая так называемые инерционные моды. Эти моды являются собственными частотами колебаний вращающейся жидкости и сильно зависят от геометрии полости.

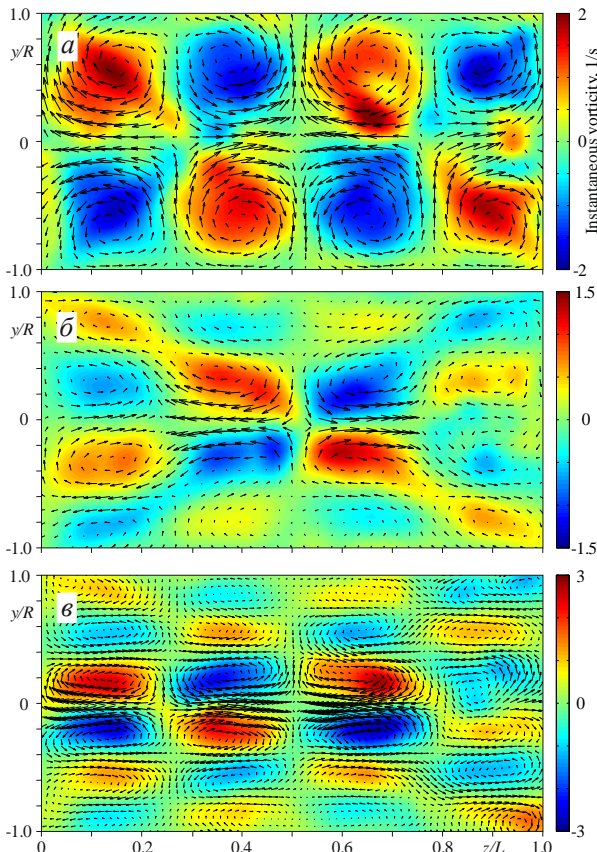


Рис. 3. Мгновенное поле скорости в осевом сечении полости: *а* – при $\sigma = 1.281$ {4; 1}; *б* – $\sigma = 0.831$ {4; 2}; *в* – $\sigma = 0.600$ {4; 3} при амплитуде $\varepsilon = 0.12$ в фазе либраций $\Omega_{lib} t = \pi$

Значения собственных частот невязких инерционных мод в цилиндрической геометрии определяются следующим выражением:

$$\sigma^2 = \frac{4n^2\pi^2}{n^2\pi^2 + \xi_{nmk}^2 L^2 / R^2}, \quad (3.2)$$

где n , m , k – осевое, радиальное и азимутальное волновое число соответственно [1]. Параметр ξ_{nmk}^2 является m -м положительным решением трансцендентного уравнения

$$\xi \frac{d}{d\xi} J_{|k|}(\xi) + k \left(1 + \frac{\xi^2}{n^2\pi^2 L^2 / R^2} \right)^{1/2} J_{|k|}(\xi) = 0, \quad (3.3)$$

где $J_{|k|}(\xi)$ – функция Бесселя первого рода $|k|$ -го порядка. Рассматривается осесимметричное течение, поэтому $k = 0$ и для пространственной характеристики инерционной моды используются только осевое и радиальное волновые числа $\{n; m\}$. Поскольку торцы полости колеблются симметрично, возникают только симметричные моды с четными значениями n .

При частоте $\sigma = 1.281$ в полости возбуждается мода {4; 1} (рис. 3, *а*), при этом мгновенная структура течения представляет собой четыре тороидальных вихря, направление вращения жидкости в которых меняется в течение периода либраций. Так, в противофазе ($\Omega_{lib} t = 0$) направление закрутки жидкости в вихрях будет противоположной. Структура осциллирующего течения также зависит от радиального волнового числа m . При возбуждении моды {4; 2} (рис. 3, *б*) наблюдается увеличение количества вихрей в два раза, при этом наиболее интенсивные колебания жидкости происходят в вихрях, расположенных вблизи оси вращения полости. Увеличение m еще на единицу (мода {4; 3}, рис. 3, *в*) приводит к увеличению количества тороидальных вихрей до двенадцати.

3.3. Осредненные течения

Пульсационное движение жидкости в объеме полости, возбуждаемое инерционной модой, приводит к возникновению осредненного течения в вязких пограничных слоях. Структура осредненного течения проявляется при осреднении поля скорости по периоду либраций.

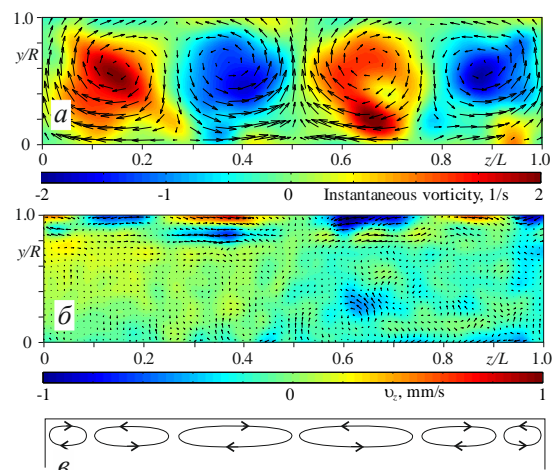


Рис. 4. Поля скорости: *а* – мгновенное; *б* – осредненное при $\sigma = 1.281$ (мода {4; 1}). На фрагменте (*в*) приведена схема осредненного течения. В силу азимутальной симметрии течения на фрагментах (*а*) и (*б*) приведена только половина полости

На рис. 4 представлено мгновенное и осредненное течения при частоте σ , соответствующей моде $\{4; 1\}$. Структура осредненного течения имеет вид системы тороидальных вихрей, размер которых согласуется с размером осциллирующих вихрей. Исключение составляет область вблизи мест соединения боковой и торцевых стенок, где возникает осредненное течение, связанное не с инерционными модами, а только с угловыми колебаниями полости [7]. Как было показано в [7], эти потоки характерны для всего диапазона частот либраций, в том числе для области $\sigma > 2$, где инерционные волны и моды отсутствуют. Отметим, что размер потоков, возбуждаемых угловыми колебаниями, зависит от частоты либраций. В области вне резонанса эти потоки могут проникать вдоль боковой стенки вплоть до $z/L \approx 0.5$. При резонансном возбуждении инерционной моды пульсационное движение жидкости возникает вдоль всей боковой стенки полости, при этом периферийные угловые потоки прижимаются к торцам.

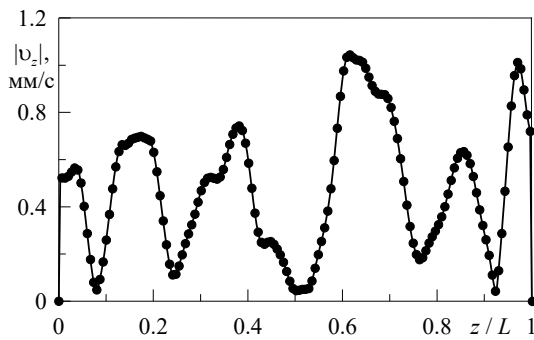


Рис. 5. Распределение модуля скорости осредненного течения $|v_z|$ вдоль боковой стенки полости при $\sigma = 1.281$

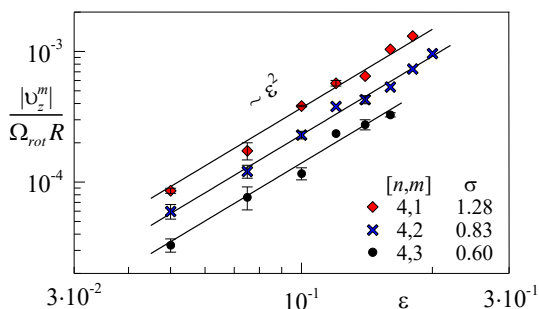


Рис. 6. Зависимость максимальной скорости жидкости в осредненных потоках от амплитуды либраций ϵ , при фиксированном значении осевого волнового числа $n = 4$ и различных значениях радиального числа t

Количество осредненных вихрей определяется осевым волновым числом n и не зависит от радиального числа t . С увеличением t наблюдается только изменение интенсивности осредненного движения жидкости.

В качестве характеристики скорости течения принимается абсолютное значение осредненной максимальной скорости движения жидкости вдоль боковой стенки полости. Так, например, при частоте $\sigma = 1.281$ (мода $\{4; 1\}$) вычисляется средняя скорость в четырех максимумах, располагающихся в диапазоне $z/L = 0.1 - 0.9$ (рис. 5). Потоки, возбуждаемые угловыми колебаниями, при осреднении не учитываются.

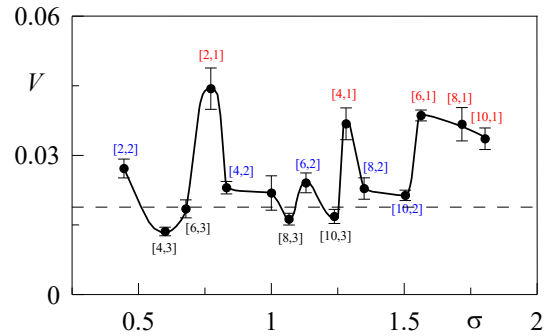


Рис. 7. Распределение безразмерной скорости осредненного течения $|v_z^m| / \Omega_{rot} R \epsilon^2$ по частоте либраций σ . Штриховой линией обозначена осредненная скорость, возбуждаемая инерционными волнами вне области резонанса [7]

На рис. 6 представлен график зависимости модуля максимальной скорости $|v_z^m| / (\Omega_{rot} R)$ от амплитуды либраций ϵ . При фиксированной частоте σ интенсивность осредненного движения в пограничных слоях возрастает по закону ϵ^2 . Квадратичная зависимость определяется механизмом генерации осредненных течений, связанного с нелинейными эффектами в пограничных слоях, и справедлива для любого типа гармонического воздействия на вращающиеся системы [14, 15]. Можно отметить, что помимо осредненного течения в пограничном слое на боковой стенке либрации генерируют осредненное азимутальное течение, интенсивность которого $\Delta\Omega / \Omega_{rot} \sim \epsilon^2$ [7, 16]. Таким образом, при фиксированном значении числа Экмана E и частоте σ скорость осредненного течения полностью определяется комплексом $V = |v_z^m| / (\Omega_{rot} R \epsilon^2)$.

При изменении частоты либраций σ скорость осредненного течения V немонотонно меняется, испытывая серию экстремумов, соответствующих резонансному возбуждению инерционной моды с волновым числом $\{n; 1\}$ (рис. 7). При этом наиболее интенсивное движение наблюдается для основной моды $\{2; 1\}$. В этом случае вся энергия аккумулирована в двух осциллирующих тороидальных вихрях [7]. С увеличением радиального волнового числа t интенсивность осредненного течения быстро ослабевает. Вне области резонанса, где инерционные волны возбуждают

осредненное течение только в местах, локализованных в непосредственной близости от точек отражения (штриховая линия на рис. 7), значение безразмерной скорости V примерно в два раза меньше, чем для мод с радиальным волновым числом $m = 1$.

Похожая зависимость от частоты внешнего воздействия была получена в экспериментах с периодически деформируемой вращающейся сферической полостью [8]. Однако основное внимание было уделено зональному течению. Аналогичным образом при частоте, соответствующей возбуждению одной из инерционных мод, осредненная скорость азимутального течения в объеме полости резонансным образом возрастала.

4. Заключение

До сих пор основное внимание исследователей уделялось изучению осредненного азимутального течения жидкости в неравномерно вращающихся (либрирующих) полостях. Так, теоретические работы [16, 17], а также эксперименты [13] и численные расчеты [5] предсказывали появление осредненного азимутального течения. При этом в отсутствие инерционных волн и мод механизм генерации течения обусловлен неоднородностью пульсационного движения в пограничных слоях Экмана на торцевых стенках цилиндра. Настоящие эксперименты показали, что резонансное возбуждение инерционных мод качественно меняет двумерный характер осредненного течения вблизи боковой стенки полости, приводя к формированию системы осредненных тороидальных вихрей. Согласование размеров осредненных и осциллирующих вихрей указывает, что механизм генерации этих течений связан с нелинейными эффектами в осциллирующем слое Стокса.

Независимо от режима пульсационного течения (инерционные волны или резонансное возбуждение инерционной моды) интенсивность осредненных потоков пропорциональна квадрату амплитуды либраций ε^2 . Показано, что при совпадении частоты либраций с одной из частот инерционной моды наблюдается интенсификация осредненного течения. Исключение составляют моды с радиальным волновым числом $m = 3$, при возбуждении которых скорость осредненного течения практически не меняется.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-1994.2018.1).

Список литературы

1. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.

2. Messio L., Morize C., Rabaud M., Moisy F. Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid // *Experiments in Fluids*. 2008. Vol. 44. P. 519–528. DOI: 10.1007/s00348-007-0410-3.
3. Boisson J., Lamriben C., Maas L. R. M., Cortet P., Moisy F. Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube // *Physics of Fluids*. 2012. Vol. 24, 076602. DOI: 10.1063/1.4731802.
4. Margot J. L., Peale S. J., Jurgens R. F., Slade M. A., Holin I. V. Large longitude libration of Mercury reveals a molten core // *Science*. 2007. Vol. 316. P. 710–714. DOI: 10.1126/science.1140514.
5. Sauret A., Cébron D., Le Bars M., Le Dizès S. Fluid flows in a librating cylinder // *Physics of Fluids*. 2012. Vol. 24, 026603. DOI: 10.1063/1.3680874.
6. Borcia I. D., Abouzar G. V., Harlander U. Inertial wave mode excitation in a rotating annulus with partially librating boundaries // *Fluid Dynamics Research*. 2014. Vol. 46, 041423. DOI: 10.1088/0169-5983/46/4/041423.
7. Subbotin S., Dyakova V. Inertial waves and steady flows in a liquid filled librating cylinder // *Microgravity Science and Technology*. 2018. Vol. 30. Iss. 4. P. 383–392. DOI: 10.1007/s12217-018-9621-x.
8. Morize C., Le Bars M., Le Gal P., Tilgner A. Experimental determination of zonal winds driven by tides // *Physical Review Letters*. 2010. Vol. 104, 214501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.214501.
9. Tilgner A. Zonal wind driven by inertial modes // *Physical Review Letters*. 2007. Vol. 99, 194501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.194501.
10. Favier B., Barker A., Baruteau C., Ogilvie G. Nonlinear evolution of tidally forced inertial waves in rotating fluid bodies // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2014. Vol. 439. P. 845–860. DOI: 10.1093/mnras/stu003.
11. Kozlov V., Polezhaev D. Flow patterns in a rotating horizontal cylinder partially filled with liquid // *Physical Review E*. 2015. Vol. 92, 013016. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.013016.
12. Thielicke W., Stamhuis E. J. PIVlab – Time-resolved digital particle image velocimetry tool for MATLAB (version: 1.43) // *Journal of Open Research Software*. 2014. Vol. 2 (1). e30. DOI: 10.5334/jors.bl.
13. Noir J., Calkins M. A., Lasbleis M., Cantwell J., Aurnou J. M. Experimental study of libration-driven zonal flows in a straight cylinder // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2010. Vol. 182. P. 98–106. DOI: 10.1016/j.pepi.2010.06.012.
14. Le Bars M., Cébron D., Le Gal P. Flows driven by libration, precession, and tides // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2015. Vol. 47. P. 163–193. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010814-014556.

15. Riley N. Steady streaming // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2001. Vol. 33. P. 43–65. DOI: 10.1146/annurev.fluid.33.1.43.
16. Busse F. H. Zonal flow induced by longitudinal librations of a rotating cylindrical cavity // *Physica D*. 2011. Vol. 240. P. 208–211. DOI: 10.1016/j.physd.2010.09.010.
17. Wang C. Y. Cylindrical tank of fluid oscillating about a steady rotation // *Journal of Fluid Mechanics*. 1970. Vol. 41. P. 581–592. DOI: 10.1017/S0022112070000769.
8. Morize C., Le Bars M., Le Gal P., Tilgner A. Experimental determination of zonal winds driven by tides. *Physical Review Letters*, 2010, vol. 104, 214501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.214501.
9. Tilgner A. Zonal wind driven by inertial modes. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 99, 194501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.194501.
10. Favier B., Barker A., Baruteau C., Ogilvie G. Non-linear evolution of tidally forced inertial waves in rotating fluid bodies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2014, vol. 439, pp. 845–860. DOI: 10.1093/mnras/stu003.

References

1. Greenspan H. P. *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge: University Press, 1968, 328 p.
2. Messio L., Morize C., Rabaud M., Moisy F. Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid. *Experiments in Fluids*, 2008, vol. 44, pp. 519–528. DOI: 10.1007/s00348-007-0410-3.
3. Boisson J., Lamriben C., Maas L. R. M., Cortet P., Moisy F. Inertial waves and modes excited by the libration of a rotating cube. *Physics of Fluids*, 2012, vol. 24, 076602. DOI: 10.1063/1.4731802.
4. Margot J. L., Peale S. J., Jurgens R. F., Slade M. A., Holin I. V. Large longitude libration of Mercury reveals a molten core. *Science*, 2007, vol. 316, pp. 710–714. DOI: 10.1126/science.1140514.
5. Sauret A., Cébron D., Le Bars M., Le Dizès S. Fluid flows in a librating cylinder. *Physics of Fluids*, 2012, vol. 24, 026603. DOI: 10.1063/1.3680874.
6. Borgia I. D., Abouzar G. V., Harlander U. Inertial wave mode excitation in a rotating annulus with partially librating boundaries. *Fluid Dynamics Research*, 2014, vol. 46, 041423. DOI: 10.1088/0169-5983/46/4/041423.
7. Subbotin S., Dyakova V. Inertial waves and steady flows in a liquid filled librating cylinder. *Microgravity Science and Technology*, 2018, vol. 30, iss. 4, pp. 383–392. DOI: 10.1007/s12217-018-9621-x.
11. Kozlov V., Polezhaev D. Flow patterns in a rotating horizontal cylinder partially filled with liquid. *Physical Review E*, 2015, vol. 92, 013016. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.013016.
12. Thielicke W., Stamhuis E. J. PIVlab – Time-resolved digital particle image velocimetry tool for MATLAB (version: 1.43). *Journal of Open Research Software*. 2014, vol. 2 (1), e30. DOI: 10.5334/jors.bl.
13. Noir J., Calkins M. A., Lasbleis M., Cantwell J., Aurnou J. M. Experimental study of libration-driven zonal flows in a straight cylinder. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2010, vol. 182, pp. 98–106. DOI: 10.1016/j.pepi.2010.06.012.
14. Le Bars M., Cébron D., Le Gal P. Flows driven by libration, precession, and tides. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2015, vol. 47, pp. 163–193. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010814-014556.
15. Riley N. Steady streaming. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2001, vol. 33, pp. 43–65. DOI: 10.1146/annurev.fluid.33.1.43.
16. Busse F. H. Zonal flow induced by longitudinal librations of a rotating cylindrical cavity. *Physica D*. 2011, vol. 240, pp. 208–211. DOI: 10.1016/j.physd.2010.09.010.
17. Wang C. Y. Cylindrical tank of fluid oscillating about a steady rotation. *Journal of Fluid Mechanics*. 1970, vol. 41, pp. 581–592. DOI: 10.1017/S0022112070000769.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Subbotin S. V., Kropacheva A. S. Осреднённые течения, возбуждаемые инерционными модами в либрирующем цилиндре // Вестник Пермского университета. Физика. 2018. № 4 (42). С. 67–73. doi: 10.17072/1994-3598-2018-4-67-73

Please cite this article in English as:

Subbotin S. V., Kropacheva A. S. Steady flows excited by inertial modes in a librating cylinder // Bulletin of Perm University. Physics, 2018, no. 4 (42), pp. 67–73. doi: 10.17072/1994-3598-2018-4-67-73