

УДК 532.5  
PACS 47.10-ad

## О диссипативных потерях во вращающемся жидком капиллярном кольце

Гербер А.Д.<sup>a</sup>, Гербер Е.А.<sup>b</sup>

ООО «Геомера»  
620078, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 61

<sup>a</sup> email: gerber\_a@mail.ru

<sup>b</sup> email: e.a.gerber@gmail.com

В работе рассматривается задача изучения тепловых процессов во вращающемся по инерции, при отсутствии сил тяжести, кольце вязкой капиллярной жидкости со свободными границами, на которые действуют силы давления газовой среды. Рассматриваемая система, в зависимости от начальной угловой скорости, начального радиального возмущения и геометрии может находиться в различных режимах движения. В работе показано, что для случая режима периодического затухающего движения абсолютная величина диссипативных потерь является непрерывной функцией, имея при этом участки с периодическим характером изменения. В серии численных экспериментов, в которых изменениям подвергалась лишь вязкость, был обнаружен эффект обнуления диссипативных потерь при определённом значении вязкости. Этот эффект связан с тем, что при определённом, критическом значении вязкости амплитуда колебаний размеров жидкого кольца практически обнуляется и кольцо начинает вести себя как твёрдое тело. Причём, если значение вязкости не равно критическому, при том же уровне возмущения радиальной составляющей скорости и постоянстве остальных параметров системы амплитуда изменения его размеров существенно отлична от нуля. Получена формула для вычисления значения критической вязкости для случая затухающего периодического движения жидкого кольца.

**Ключевые слова:** гидродинамика; вязкое кольцо капиллярной жидкости; уравнения Навье-Стокса; периодические колебания

*Поступила в редакцию 11.07.2016; принята к опубликованию 09.08.2016*

## About dissipative losses into rotating capillary liquid ring

Gerber A.D.<sup>a</sup>, Gerber E.A.<sup>b</sup>

LLC "Geomera"  
Yekaterinburg, Russia, Komsomolskaya St. 61

<sup>a</sup> email: gerber\_a@mail.ru

<sup>b</sup> email: e.a.gerber@gmail.com

The article covers the problem of studying thermal processes in rotating by inertia in the absence of gravity capillary viscous fluid ring with free boundaries that are acted by pressure of gas medium. System under consideration depending on the initial angular velocity, initial radial perturbation and geometry is able to be in different move modes. It is shown that for case of periodic damped motion the absolute value of the dissipative losses it is a continuous function with areas with periodic changes. In a series of numerical experts, which was subjected to a viscosity change was

observed the effect of zeroing the dissipative losses at a certain viscosity value. This effect is due to the fact that amplitude of oscillations of the liquid ring sizes is practically zeroed at a certain, critical value of the viscosity and the ring begins to rotate like a solid. Moreover, change of ring size amplitude significantly different from zero in case of the viscosity is not equal to the critical with the same level of the radial component perturbation of the velocity and the constancy of the other parameters of the system. The formula for calculating the critical viscosity values for the case of a damped periodic motion of the liquid ring is obtained.

**Keywords:** hydrodynamics; viscous ring of capillary fluid; Navier-Stokes equations; periodic oscillations

Received 11.07.2016; accepted 09.08.2016

doi: 10.17072/1994-3598-2016-2-21-26

## 1. Введение

В данной работе рассматривается задача изучения тепловых процессов во вращающемся по инерции кольце вязкой капиллярной жидкости со свободными границами в отсутствие силы тяжести при наличии начального радиального возмущения.

Изучению закономерностей изменения поля скоростей подобной системы аналитическими методами были посвящены работы В. О. Бытева [1], В. В. Пухначева [2], О. М. Лаврентьевой [3–4]. Целью данной работы является анализ результатов численного моделирования решения сквозной задачи об отыскании полей распределения скорости и температуры в плоском вращающемся по инерции кольце вязкой капиллярной жидкости. Методика получения численного решения в такой постановке задачи протестирована на единственных, известных на сегодня, решениях уравнений движения и теплопроводности, полученных В. О. Бытевым [1].

## 2. Формулировка задачи

Система уравнений гидродинамики для описания поведения ограниченного объема жидкости (процессов теплопереноса), в самом общем случае, строится на основе законов сохранения (вещества, импульса, момента импульса, энергии) [5]. Поскольку задача имеет круговую симметрию, то система уравнений Навье–Стокса и теплопроводности в полярной системе координат примет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\phi^2}{r} - \\ &- \nu \left( \frac{\partial u_r}{r \partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi u_r}{r} - \\ - \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial r^2} \right) &= 0, \\ \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ + 2\mu \left( \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_r$  – радиальная составляющая скорости,  $u_\phi$  – тангенциальная составляющая скорости,  $t$  – время,  $r$  – пространственная переменная,  $p$  – гидростатическое давление,  $\rho$  – плотность,  $\mu$  – динамическая вязкость,  $\nu = \mu/\rho$  – кинематическая вязкость,  $C_p$  – удельная теплоемкость,  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $T$  – температура.

В работе рассматривается стоксова (ньютоновская) жидкость, для которой тензор напряжений задается соотношением

$$T_s = -pI + 2\mu D, \quad (2)$$

где  $D_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$  – тензор скоростей деформации,  $I$  – единичная матрица.

Для того чтобы зафиксировать область интегрирования системы (1), используем переход к следующим новым переменным:

$$\begin{aligned} \eta &= (r^2 - R_2^2(t))R_{20}^{-2}, \\ \xi(t) &= R_2^2(t)R_{20}^{-2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $R_1(t)$  – внешний радиус жидкого кольца в заданный момент времени,  $R_2(t)$  – внутренний радиус жидкого кольца в заданный момент времени,  $R_{10}$ ,  $R_{20}$  – значение этих величин в нулевой момент времени.

Из условия несжимаемости жидкости и сохранения ее массы следует, что область интегрирования по переменной  $\eta$  будет постоянной, а именно:  $0 \leq \eta \leq a$ , где  $a = (R_1^2(t) - R_2^2(t))R_{20}^{-2}$ .

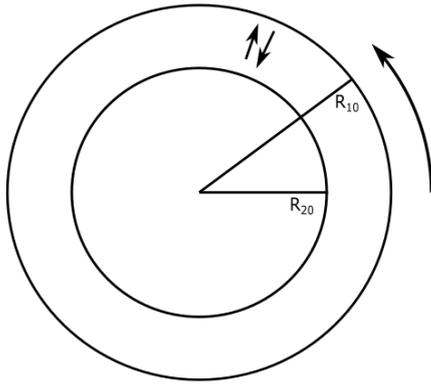


Рис. 1. Геометрия задачи

Определим следующие безразмерные функции:

- $\Psi = ru_r v^{-1}$  – аналог для радиальной составляющей скорости точек кольца,
- $\omega = u_\varphi R_{20}^2 v^{-1} r^{-1}$  – аналог угловой скорости вращения точек кольца,
- $\Theta(t, r) = T(t, r) T_{baz}^{-1}$  – аналог величины температуры точек жидкого кольца,  $T_{baz}$  – базовое значение температуры,
- $\tau = R_{20}^{-2} vt$  – аналог времени.

С учетом этих обозначений систему уравнений (1) можно переписать в виде (4)

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= 2\Psi; \quad \xi(0) = 1; \\ \frac{d\Psi}{d\tau} \ln\left(1 + \frac{a}{\xi}\right) - \frac{a(\Psi^2 - 4\Psi)}{\xi(a + \xi)} - \\ &\quad - \int_0^a \omega^2(\tau, \eta) d\eta = \delta_2 \Delta p - \delta_1 \left( \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{\xi + a}} \right); \\ \Psi(0) &= \Psi_0; \quad \delta_1 = \frac{2R_{20}\sigma}{\rho v^2}; \quad \delta_2 = \frac{2R_{20}^2}{\rho v^2}; \\ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{2\Psi \omega}{a + \xi} &= 8 \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + 4(a + \xi)^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0, a} &= 0; \quad \omega(0, \eta) = C_0; \\ A \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right) &= \\ &= B \left( (\eta + \xi) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \frac{1}{4(\eta + \xi)} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} \right) + \\ &\quad + \frac{\Psi^2}{(\eta + \xi)^2} + (\eta + \xi)^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right)^2; \\ \Theta(0, \eta, \varphi) &= f_0(\eta, \varphi); \quad \Theta(\tau, \eta, \varphi) \Big|_{\eta=0, a} = \Theta_{D_i}(\tau, \varphi); \\ \frac{\partial \Theta(\tau, \eta, \varphi)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0, a} &= \Theta_{N_i}(\tau, \varphi), \end{aligned} \tag{4}$$

где  $C_0$  – начальная безразмерная угловая скорость вращения кольца.

В работах [6, 7], посвященных анализу условий существования периодических форм движения жидкого кольца и выявлению их закономерностей, было показано, что жидкое кольцо, двигаясь по инерции, при наличии начального радиального возмущения может превратиться в круг, уйти в бесконечность или находиться в режиме периодического затухающего движения с переходом в стационарное состояние, в котором оно вращается как твердое тело (без потерь энергии за счет эффекта вязкости).

### 3. Результаты численного эксперимента

В серии численных экспериментов, проведенных с использованием программы Ring [8], в которой реализован численный алгоритм решения системы уравнений (4) для разной геометрии кольца и разных начальных условий  $\Psi_0$  (начальная величина радиального возмущения скорости), был обнаружен эффект обнуления потерь энергии вращения за счет ее диссипации, связанный с тем, что при заданном  $\Psi_0$  существует критическое значение вязкости, при которой амплитуда колебаний, например, размеров кольца, практически обнуляется и кольцо начинает вращаться как твердое тело. Причем при значениях вязкости, не равные критическому значению, при том же уровне начального возмущения радиальной составляющей скорости и неизменности остальных параметров амплитуда изменений его характеристик существенно отлична от нуля. Абсолютная величина диссипативных потерь при условии, что жидкое кольцо находится в режиме периодического движения, оказалась непрерывно растущей функцией, имея при этом участки с «периодическим характером изменения». Типичный график такой временной зависимости изображен на рис. 2.

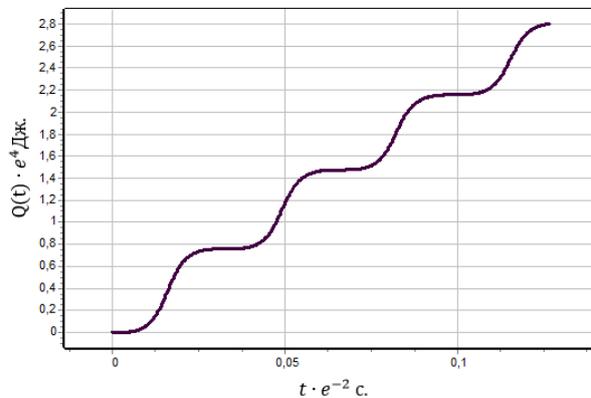


Рис.2. Количество теплоты, выделившейся в кольце, находящемся в режиме периодического движения, в зависимости от времени

Для определения количества тепла, поступившего в кольцо к заданному моменту времени, численно найдем на основе следующей формулы:

$$Q(t) = \int_{R_2(t)}^{R_1(t)} C_p \rho (T(t, r) - T(0, r)) 2\pi r dr. \quad (5)$$

Анализ величины количества тепла  $Q_T$ , выделившегося за один период колебаний, показал, что оно достигает минимальных значений при определенном значении вязкости. При этом тангенциальная скорость  $u_\phi$  остается постоянной, а амплитуда радиальной скорости принимает практически нулевое значение при некотором значении вязкости. При других размерах кольца ее поведение аналогично приведенному, только минимум потерь будет наблюдаться при ином значении вязкости.

Ниже приведены данные численного эксперимента, полученные при следующих геометрических, физических и начальных данных:

$$\begin{aligned} R_{20} &= 0.08 \text{ м}, R_{10} = 0.10 \text{ м} \Rightarrow a = 0.56, \\ \sigma &= 7.28 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ \Delta p &= p_{2g} - p_{1g} = 0 \text{ Па}, \\ C_p &= 4200 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}, \\ k &= 0.56 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}, \\ \rho &= 998 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}, \\ \Psi(0) &= \Psi_0 = v^{-1} \Phi(0) \rightarrow \Phi(0) = -10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}, \\ C_0 &= 3 \cdot 10^3, \\ T_{baz} &= 20^\circ \text{C}, \\ \Theta(0, r) &= T(0, r) T_{baz}^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Анализ результатов численного моделирования показывает, что значения радиальной скорости сильно изменяются, поэтому следует ожидать, что именно это слагаемое полностью определяет характер изменения величины выделяемого тепла  $Q_T$  в зависимости от изменения динамической вязкости (рис. 3). Более того, данные по амплитуде изменения радиальной скорости практически повторяют характер изменения потерь тепла за период (см. таблицу).

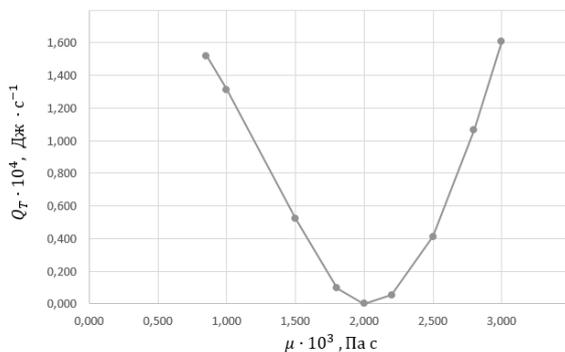


Рис. 3. Зависимость количества теплоты, выделившейся за период колебаний  $Q_T$  от величины динамической вязкости.

Результаты численного эксперимента периодического режима движения кольца жидкости при изменении ее вязкости

$\mu, \text{ Па} \cdot \text{с}$	$T_v, \text{ с}$	$Q_T, \text{ Дж/с}$	$u_\phi, \text{ м/с}$	$\Delta u_\phi, \text{ м/с}$	$u_r, \text{ м/с}$
8.50E-04	2.515	0.000152	0.075	0.03	0.03
1.00E-03	2.773	0.000131	0.075	0.035	0.04
1.50E-03	3.379	5.2E-05	0.075	0.02	0.03
1.80E-03	3.621	9.52E-06	0.078	0.006	0.012
2.00E-03	3.800	1.5E-07	0.08	0.001	0.0015
2.20E-03	3.978	5.53E-06	0.082	0.005	0.008
2.50E-03	4.168	4.11E-05	0.085	0.01	0.025
2.80E-03	4.385	0.000107	0.09	0.02	0.04
3.00E-03	4.534	0.000161	0.095	0.03	0.05

Примечание:  $T_v$  – период колебаний,  $Q_T$  – количество тепла, выделившееся за один период колебаний,  $u_\phi$  – средняя касательная скорость движения точек кольца,  $\Delta u_\phi$  – амплитуда изменений тангенциальной составляющей скорости относительно среднего значения,  $u_r$  – амплитуда изменений радиальной составляющей скорости точек кольца.

С точки зрения поведения динамической системы это означает, что анализ нелинейного уравнения колебаний, например, для переменной  $\zeta(t)$ , позволит определить условие, при котором данная система будет вращаться как твердое тело без потерь энергии.

Уравнение колебаний в нормальной форме для произвольного значения вязкости для  $\zeta(t)$  можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{d\tau} &= 2\Psi, \\ \frac{d\Psi}{d\tau} &= \ln^{-1} \left( 1 + \frac{a}{\xi} \right) \left( \frac{a(\Psi^2 - 4\Psi)}{\xi(a + \xi)} + \int_0^a \omega^2(\tau, \eta) d\eta + \delta_2 \Delta p - \right. \\ &\quad \left. - \delta_1 \left( \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{\xi + a}} \right) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Из предположения, что рассматриваемая система вращается как твердое тело, следует, что радиальное перемещение отсутствует, т.е.  $u_r = 0$ . Следовательно,  $\Psi = 0$ , а значение  $\zeta(t) = \text{const}$ , и в результате, так как  $\zeta(0) = 1$ , равно начальному значению. Тогда последнее уравнение системы (6), при условии  $\Delta p = 0$ , примет вид

$$\int_0^a \omega^2(\tau, \eta) d\eta - \delta_1 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}} \right) = 0, \quad (7)$$

откуда следует

$$aC_0^2 - \frac{2R_{20}\sigma}{\rho\nu^2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}} \right) = 0.$$

Из (7) можно найти критическое значение вязкости, при которой кольцо начинает вращаться как твердое тело без потерь энергии на трение:

$$v_{kr} = \frac{1}{|C_0|} \sqrt{\frac{2R_{20}\sigma}{\rho a} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1+a}} \right)}. \quad (8)$$

С учетом исходных данных рассмотренного выше численного эксперимента найдем критическое значение кинематической вязкости, при которой будет наблюдаться минимум тепловых потерь, а система начнет вращаться как твердое тело:

$$v_{kr} = \frac{1}{3 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{28 \cdot 10^{-2} \cdot 7.3 \cdot 10^{-2}}{10^3 \cdot 0.56} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1+0.56}} \right)} \approx 2.04 \cdot 10^{-6}.$$

Полученное значение с хорошей точностью совпадает с найденным в результате численного эксперимента (см. таблицу и рис. 3).

#### 4. Заключение

Анализ результатов численного эксперимента, по сквозному расчету температурного поля и поля скоростей вращающегося по инерции жидкого капиллярного кольца, показал наличие явления, связанного с существованием такого критического значения динамической вязкости, при котором кольцо, вне зависимости от величины начального радиального возмущения, начинает вращаться как твердое тело, т.е. без потерь энергии на трение. При значениях динамической вязкости, не равных критическому, кольцо, при тех же начальных возмущениях, находится в состоянии периодического движения, при котором оно нагревается за счет диссипации энергии между соприкасающимися слоями жидкости при их перемещении по довольно сложным траекториям в пространстве.

Рассмотрение явного вида уравнений, используемых для описания динамики кольца, позволило получить формулу для расчета критического значения кинематической вязкости. Полученное значение критической вязкости хорошо согласуется с найденным в процессе численного эксперимента, что подтверждает правильность выбранного подхода для объяснения наблюдаемого эффекта.

#### Список литературы

1. Бывев В. О. Неустановившиеся движения кольца вязкой несжимаемой жидкости со сво-

бодными границами // Прикладная механика и техническая физика. 1970. № 3. С. 88–98.

2. Пухначев В. В. Неклассические задачи теории пограничного слоя. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1980.
3. Лаврентьева О. М. Неустановившееся движение вращающегося кольца вязкой капиллярной жидкости // Динамика сплошной среды: сборник научных трудов Института гидродинамики СО АН СССР. 1978. Вып. 31. С. 52–60.
4. Лаврентьева О. М. Предельные режимы движения вращающегося вязкого кольца // Динамика сплошной среды: сборник научных трудов Института гидродинамики СО АН СССР. 1980. Вып. 44. С. 15–34
5. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. Л: Изд-во Лен. ун-та, 1978. 295 с.
6. Гербер Е. А., Кутрунов В. Н. О механизме и закономерностях периодических движений кольца капиллярной жидкости // Вестник Тюменского государственного университета. 2011. № 7. С. 136–142.
7. Гербер Е. А., Кутрунов В. Н. Движение кольца вязкой капиллярной жидкости // Нелинейные волны: теория и новые приложения: тез. докл. Новосибирск: Изд-во Института гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН, 2011. С. 23–24.
8. Гербер Е. А., Кутрунов В. Н. Ring v1.2. Свидетельство о гос. регистрации прогр. для ЭВМ №2011613120. Роспатент. 2016.

#### References

1. Bytev V. O. Unsteady motion of rotating ring of viscous incompressible liquid with free boundary. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1970, vol. 11, no. 3, pp. 432–438.
2. Pukhnachev V. V. *Neklassicheskie zadachi teorii pogrannichnogo sloia* (Nonclassical problems of boundary layer theory). Novosibirsk: Novosibirsk State University, 1980 (In Russian).
3. Lavrent'eva O. M. Neustanovivsheesia dvizhenie vrashchaisheegosa kol'tsa viazkoi kapilliarnoi zhidkosti. *Dinamika sploshnoi sredy* (Continuum Mechanics): Bulletin of the Hydrodynamics Institute of Siberian Branch of Academy of Sciences of the USSR. Novosibirsk, 1978, vol. 31, pp. 52–60 (In Russian).
4. Lavrent'eva O. M. Predel'nye rezhimy dvizheniia vrashchaisheegosa viazkogo kol'tsa *Dinamika sploshnoi sredy* (Continuum Mechanics): Bulletin of the Hydrodynamics Institute of Siberian Branch of Academy of Sciences of the USSR. Novosibirsk, 1980. vol. 44, pp. 15–34 (In Russian).
5. Vallander S. V. *Lectures in Hydroaeromechanics*. Leningrad: Leningrad State University, 1978, 295 p. (In Russian).

6. Gerber E. A., Kutrunov V. N. On the mechanism and on the laws of periodic motions of ring of capillary liquid // *Bulletin of Tyumen State University*, 2011, no. 7, pp. 136–142 (In Russian).
7. Gerber E. A., Kutrunov V. N., Dvizhenie kol'tsa viazkoj kapilliarnoi zhidkosti // *Abstr. Of All-Russian Conf. "Nonlinear waves: theory and ne applications"*. Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the RAS, 2011, pp. 23–24 (In Russian).
8. Gerber E. A., Kutrunov V. N. *Ring v1.2*. Certificate of state registration of the computer program N. 2011613120. 2016.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Гербер А. Д., Гербер Е. А. О диссипативных потерях во вращающемся жидком капиллярном кольце // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2016. № 2 (33). С. 21–26. doi: 10.17072/1994-3598-2016-2-21-26

**Please cite this article in English as:**

Gerber A. D., Gerber E. A. About dissipative losses into rotating capillary liquid ring // *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2016, no. 2 (33), pp. 21–26. doi: 10.17072/1994-3598-2016-2-21-26