

## К описанию коллективной динамики в ансамблях реальных осцилляторов

Д. С. Голдобин<sup>a,b</sup>, И. В. Тюлькина<sup>b</sup>, Л. С. Клименко<sup>a,b</sup>, А. Пиковский<sup>c,d</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15

<sup>c</sup> Университет Потсдама, 14476, Потсдам–Гольм, Карл–Либкнехт штрассе, 24/25, Германия

<sup>d</sup> Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

e-mail: Denis.Goldobin@gmail.com

Ранее авторами был разработан подход, позволяющий регулярным образом распространить теорию Отта–Антонсена на случай неидеальных ансамблей осцилляторов. В данной статье объясняется, почему в теории коллективных явлений и самоорганизации первостепенный интерес представляют именно системы типа Отта–Антонсена, а обобщение теории Отта–Антонсена на неидеальные ситуации (для реальных систем условия применимости теории Отта–Антонсена выполняются не точно) является нетривиальным, но важным.

**Ключевые слова:** теория Ватанабэ–Строгаца; теория Отта–Антонсена; ансамбли реальных осцилляторов

*Поступила в редакцию 31.07.2018; принята к опубликованию 09.08.2018*

## Towards the description of collective dynamics in ensembles of real oscillators

D. S. Goldobin<sup>a,b</sup>, I. V. Tyulkina<sup>b</sup>, L. S. Klimenko<sup>a,b</sup>, A. Pikovsky<sup>c,d</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS, Akademika Koroleva St. 1, 614013 Perm, Russia

<sup>b</sup> Perm State University, Bukireva St. 15, 614990 Perm, Russia

<sup>c</sup> University of Potsdam, 24/25 Karl-Liebkecht Str., 14476 Potsdam-Golm, Germany

<sup>d</sup> Nizhny Novgorod State University, 23 Gagarina St., 603950 Nizhny Novgorod, Russia

e-mail: Denis.Goldobin@gmail.com

Recently the authors of this brief communication developed the approach which allowed to extend the Ott–Antonsen theory to the case of non-ideal oscillator ensembles in a regular way. In this communication we explain why in the theory of collective phenomena and self-organization the systems of Ott–Antonsen type are of the primary significance, and why the extension of the Ott–Antonsen theory to the case of non-ideal systems—for real systems the applicability conditions of the Ott–Antonsen theory are fulfilled only approximately—was so much non-trivial but important.

**Keywords:** Watanabe–Strogatz theory; Ott–Antonsen theory; ensembles of real oscillators

*Received 31.07.2018; accepted 09.08.2018*

doi:10.17072/1994-3598-2018-3-05-07

При исследованиях общих закономерностей сложного поведения нелинейных систем особое внимание привлекают коллективные явления в ансамблях связанных элементов. Здесь интересны системы, в которых собственная динамика элементов ансамбля проста, а сложность возникает как следствие их сетевого взаимодействия. С точки зрения вопросов управления и самоорганизации важны ситуации, когда коллективные явления возникают именно при слабой связи между элементами или несильном воздействии на них [1].

По этим причинам в центре внимания оказываются ансамбли осцилляторов, которые в отсутствие связи находились бы в устойчивом режиме периодических колебаний. В самом деле, если элементы находятся в устойчивом стационарном состоянии, то слабое воздействие лишь несущественно сдвинет положение равновесия каждого элемента, но не вызовет нетривиальных коллективных явлений. Если, напротив, собственная динамика элементов хаотична, сложность в поведении системы будет присутствовать изначально, без связи, — это предмет отдельного направления исследований. В системах с периодическими же колебаниями собственная динамика проста, но есть одна нейтрально устойчивая степень свободы — фаза колебания, тогда слабое воздействие на систему позволит управлять динамикой этой фазы, добиваясь совпадения ритмов колебаний элементов. Оказываются возможны коллективные явления при слабых связи или воздействии. С практической точки зрения, именно примерами связанных периодических осцилляторов являются электродвигатели и роторные двигатели, смонтированные на общей платформе, массивы одинаковых электроприборов, подключенных к общей сети переменного тока, пешеходы на мосту, колонии бактерий и т.д.

В основе математической теории коллективных явлений в таких системах лежит фазовое описание, при котором главное внимание уделяется динамике фазы колебания элемента. Математически, на уровне уравнений, исследуется динамика ансамблей фаз. В течение последних 20 лет было обнаружено, что при наличии некоторого свойства фазового ансамбля его коллективная динамика приобретает очень специфический вид. В ансамбле  $N$  элементов независимыми являются три переменных, две из которых связаны с параметром порядка (мерой синхронности элементов ансамбля), и имеется  $N-3$  интеграла движения. Причем это справедливо при любом значении  $N$ , для сколь угодно больших ансамблей. Систематически данные результаты оформились в виде теорий Ватанабэ–Строгаца [2] и Отта–Антонсена [3]. Наиболее существенно здесь то, что большая часть парадигматических моделей фазовых ансамблей, на исследовании которых исторически происходило становление теории коллективных явлений в ансамблях осцилляторов, оказываются обладающими этим свойством (например, см. [4, 5]; крат-

кое изложение теорий и физические примеры на русском языке приведены в приложении к работе [6]). Таким образом, появился инструмент, позволяющий далеко продвинуться в описании и понимании динамики парадигматических моделей. Но одновременно оказалось, что эти модели являются специфическими и требуется анализ того, насколько полученные для них результаты справедливы применительно к реальным системам, для которых условия теории Отта–Антонсена будут выполняться приблизительно.

С точки зрения математической физики ответ на последний вопрос требует построения теории возмущений для подхода Отта–Антонсена. Такая теория возмущений позволит получить информацию о том, как нарушение свойств Отта–Антонсена сказывается на коллективной динамике в ансамблях. Попытки построения такой теории многие годы сталкивались с трудностями в силу объективных причин — существенной вырожденности математических свойств базовой теории. (В теоретической физике можно привести пример подобной ситуации: в кинетической теории газов вычисление транспортных коэффициентов — теплопроводности, диффузии и т.д. — на основе кинетического уравнения Больцмана не является техническим упражнением на использование метода многих масштабов или иного регулярного метода теории возмущений, а потребовало построения специального математического аппарата, что было сделано Чепменом и Энскогом [7]).

В недавней статье в журнале *Physical Review Letters* [8] предложена смена парадигмы — вводятся нетрадиционные параметры порядка, “круговые кумулянты”, в терминах которых описывается коллективная динамика ансамблей. В рамках “кумулянтного подхода” удаётся изучить влияние внутреннего шума на динамику ансамблей. Есть основания полагать, что новый подход позволит построить общую теорию возмущений для подхода Отта–Антонсена.

В частности, интерес представляет описание кластеризации. Из того факта, что динамика ансамблей Отта–Антонсена описывается тремя нетривиальными переменными и  $N-3$  константами, явно следует невозможность кластеризации. В самом деле, для описания каждого кластера элементов требуется, как минимум, две переменных: его характерная ширина и положение центра. При трех нетривиальных переменных оказывается невозможной независимая динамика даже двух кластеров. Таким образом, в системах Отта–Антонсена разбиение на кластеры не меняется со временем. Из строгого математического анализа вытекает, что ширина при этом может меняться лишь единообразно для всех кластеров, причем таким же образом, как и расстояние между ними. В таких системах динамика кластеризации, возникающая как слабое нарушение свойств Отта–Антонсена, должна быть медленной и ее следует описывать посредством теории возмущений.

Здесь можно провести аналогии с теорией эволюции Чарльза Дарвина, для которой критически важными являются и наследственность как неизменность свойств со временем, и ее слабое нарушение в виде мутаций. Постоянность кластерного распределения в рамках теории Отта–Антонсена делает кластеры важными долгоживущими структурами, а слабое нарушение свойств теории создает возможность эволюции кластерного разбиения и управления таким разбиением. Таким образом, с точки зрения динамики кластеризации в сетевых системах, примерно отт-антонсеновские системы оказываются важным объектом исследования.

В рамках кумулятного подхода возможны регулярное математическое описание и исследование динамики кластеризации.

После публикации на сайте Phys. Rev. Lett. работа была отмечена Стивеном Строгацем [9] (Steven Strogatz, американский математик и физик, один из классиков теории хаоса и самоорганизации, писатель, популяризатор науки, соавтор теории [2]).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-1447.2017.5.

### Список литературы

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
2. Watanabe S., Strogatz S. H. Constants of Motion for Superconducting Josephson Arrays // *Physica D*. 1994. Vol. 74. P. 197–253.
3. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // *Chaos*. 2008. Vol. 18. 037113.
4. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Berlin: Springer, 1984.
5. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Vicente C. J. P., Ritort F., Spigleri R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77. № 1. P. 137–185.
6. Голдобин Д. С., Долматова А. В., Розенблюм М., Пиковский А. Синхронизация в ансамблях Курамото–Сакагучи при конкурирующем влиянии общего шума и глобальной связи // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*.

2017. Т. 25, № 6. С. 5–37. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37

7. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 510 с.
8. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of Noisy Oscillator Populations beyond the Ott–Antonsen Ansatz // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 120. № 26. 264101.
9. URL: <https://twitter.com/stevenstrogatz/status/1011356164595027971> (дата обращения: 01.09.2018)

### References

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization—A Unified Approach to Nonlinear Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
2. Watanabe S., Strogatz S. H. Constants of motion for superconducting Josephson arrays. *Physica D*, 1994, vol. 74, pp. 197–253.
3. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. *Chaos*, 2008, vol. 18, 037113.
4. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Berlin: Springer, 1984.
5. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Vicente C. J. P., Ritort F., Spigleri R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 2005, vol. 77, no. 1, pp. 137–185.
6. Goldobin D. S., Dolmatova A. V., Rosenblum M., Pikovsky A. Synchronization in Kuramoto–Sakaguchi ensembles with competing influence of common noise and global coupling. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2017, vol. 25, iss. 6, pp. 5–37. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37
7. Chapman S., Cowling T. G. *The mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
8. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of Noisy Oscillator Populations beyond the Ott–Antonsen Ansatz. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 120, no. 26, 264101.
9. URL: <https://twitter.com/stevenstrogatz/status/1011356164595027971>

### Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Голдобин Д. С., Тюлькина И. В., Клименко Л. С., Пиковский А. К описанию коллективной динамики в ансамблях реальных осцилляторов // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2018. № 3 (41). С. 5–7. doi: 10.17072/1994-3598-2018-3-05-07

### Please cite this article in English as:

Goldobin D. S., Tyulkina I. V., Klimenko L. S., Pikovskii A. Towards the description of collective dynamics in ensembles of real oscillators. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2018, no. 3 (41), pp. 5–7. doi: 10.17072/1994-3598-2018-3-05-07