

УДК 532.5  
PACS 47.27.nb

## О существовании предельного перехода к невязкой жидкости

Д. С. Голдобин<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1

<sup>b</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
e-mail: Denis.Goldobin@gmail.com

При рассмотрении уравнений движения вязкой жидкости устремление к нулю коэффициента кинематической вязкости означает стремление числа Рейнольдса к бесконечности. Таким образом, в пределе исчезающе малой вязкости течение жидкости является существенно турбулентным. Вместе с тем уравнение Эйлера, принятое для описания течения невязкой жидкости, не описывает турбулентность, что требует решения вопроса о существовании предельного перехода к идеальной жидкости для реальных жидкостей с малой вязкостью. Для ответа на этот вопрос следует обратиться к теории турбулентного пограничного слоя около недеформируемой границы (в частном случае – твердой стенки). Опираясь на эту теорию, можно понять, каким образом актуализируются решения уравнения Эйлера для задач о течении маловязких жидкостей, и получить малый параметр, характеризующий точность, с которой эти решения описывают течения реальных жидкостей.

**Ключевые слова:** уравнение Навье–Стокса; уравнение Эйлера; турбулентный пограничный слой; предел малой вязкости

*Поступила в редакцию 16.05.2016; принята к опубликованию 30.06.2016*

## On existence of passage to the limit of inviscid fluid

D. S. Goldobin<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS  
Akademika Koroleva St. 1, 614013 Perm

<sup>b</sup> Perm State University  
Bukireva St. 15, 614990 Perm  
e-mail: Denis.Goldobin@gmail.com

With the dynamics of viscous fluid, the case of vanishing kinematic viscosity is actually the case of Reynolds number tending to infinity. Hence, in the limiting case of vanishing viscosity the fluid flow is essentially turbulent. On the other hand, the Euler equation, which is conventionally adopted for description of flow of inviscid fluid, does not possess proper turbulent behaviour. The latter rises the question of existence of the passage to the limit of inviscid fluid for real weakly-viscous fluids. To address this question, one should employ the theory of turbulent boundary layer near an uninflectable boundary (e.g., rigid wall). On the basis of this theory, one can see how the solutions

to the Euler equation become relevant for the description of flow of weakly-viscous fluids, and derive the small parameter quantifying accuracy of this description for real fluids.

**Keywords:** Navier–Stokes equation; Euler equation; turbulent boundary layer; limit of vanishing viscosity

Received 16.05.2016; accepted 30.06.2016

doi: 10.17072/1994-3598-2016-2-14-20

## 1. Введение

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнением Навье–Стокса

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (1)$$

и уравнением непрерывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Здесь приняты стандартные обозначения:  $\rho$  – плотность жидкости,  $\mathbf{v}$  – поле скорости течения жидкости,  $p$  – давление,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $\mathbf{g}$  – поле массовых сил (в частном случае – ускорение свободного падения). Для замкнутого математического описания задачи требуются граничные условия соответствующего уравнениям порядка. В случае твердой стенки таковыми, как правило, выступает условие обращения поля скорости в ноль на границе; для недеформируемой свободной границе обращаются в ноль нормальная к границе компонента поля скорости и касательные напряжения и т.д.

В случае невязкой жидкости уравнение Навье–Стокса превращается в уравнение Эйлера

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (3)$$

В силу изменения порядка уравнения (3) по пространственным производным от поля скорости по сравнению с уравнением (1) понижается и порядок граничных условий, требующихся для замкнутого математического описания задачи. В частности, исчезает условие непроскальзывания течения вдоль границы.

Однако встает вопрос о наличии предельного перехода от уравнения Навье–Стокса к уравнению Эйлера. Устремление к нулю кинематической вязкости  $\nu = \eta / \rho$  означает стремление числа Рейнольдса  $Re = u_* L / \nu$  к бесконечности (в определении числа Рейнольдса  $u_*$  – характерная скорость течения, а  $L$  – характерный пространственный масштаб области течения). При стремлении числа Рейнольдса к бесконечности система переходит к развитой турбулентности. Таким образом, устремление вязкости к малым значениям

для реальных систем означает переход к существенно турбулентным течениям, в то время как возникновение турбулентности присуще уравнению Навье–Стокса, а не уравнению Эйлера, описывающему течения невязкой жидкости.

Ответ на вопрос о существовании предельного перехода требует понимания закономерностей турбулентного течения в пограничных слоях около непроницаемых границ (твердых стенок или поверхностей раздела). Приводимый ниже анализ турбулентного пограничного слоя позволяет понять, каким образом решения уравнения Эйлера могут описывать реальные течения жидкостей при малой вязкости, а также оценить, с какой точностью эти решения описывают динамику системы. Последний вопрос нетривиален, поскольку характеристический малый параметр системы определяется неочевидным образом.

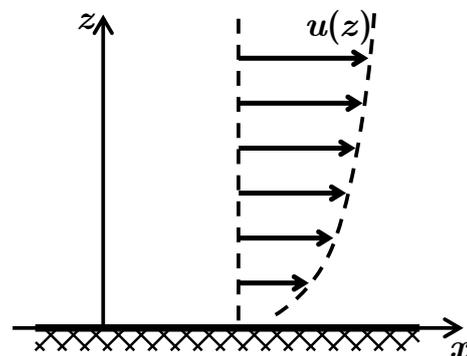


Рис. 1. Среднее течение в турбулентном пограничном слое около твердой стенки

## 2. Турбулентный пограничный слой

Поскольку последующие построения и изложение будут опираться на теорию турбулентного пограничного слоя, уместно воспроизвести не только ее результаты, но и ключевые положения. Это позволит оценивать границы применимости результатов теории в конкретных ситуациях. Подробнее с теорией можно ознакомиться, например, в [1].

Рассмотрим течение вязкой жидкости в полупространстве около твердой стенки. Плоскость координат  $(x, y)$  удобно связать со стенкой, а ось  $z$  направить перпендикулярно к ней (рис. 1). В установившемся состоянии (статистически стац-

онарном) такое течение потребует однородного в объеме среднего сдвигового напряжения  $\sigma_{xz}$ , связанного с потоком импульса к стенке, а само среднее течение  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  будет плоскопараллельным (или «сдвиговым»):  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \{u(z), 0, 0\}$ .

В случае турбулентности решающее влияние на макроскопическое среднее течение оказывает эффективная турбулентная вязкость. Турбулентная вязкость связана с нерегулярными пульсациями поля скорости, которые осуществляют перенос импульса – в рассматриваемом случае они обеспечивают сдвиговое напряжение  $\sigma_{xz}$ . Однородный поток импульса за счет пульсаций определяется интенсивностью этих пульсаций:

$$\sigma_{xz} = \rho v_*^2, \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $v_*$  – характерная величина турбулентных пульсаций. Подчеркнем, что уравнение (4) не является выражением для оценки соотношения между  $\sigma_{xz}$  и  $v_*$ , а выступает определением для вводимой величины  $v_*$ . Это определение позволяет вести рассмотрение в терминах управляющего параметра  $v_*$  вместо исходного управляющего параметра  $\sigma_{xz}$ .

Если рассматривать перенос импульса турбулентными пульсациями, то единственным выделенным пространственным масштабом в системе является расстояние  $z$  до стенки. Таким образом, турбулентная вязкость определяется тремя физическими параметрами  $z$ ,  $v_*$  и  $\rho$ . Единственной комбинацией  $z$  и  $v_*$ , имеющей размерность кинематической вязкости, является их произведение, и, поскольку в системе нет безразмерных комбинаций определяющих параметров, то

$$\nu_t = \kappa v_* z, \quad (5)$$

где  $\kappa$  – безразмерный геометрический фактор, который может быть определен эмпирически или из детального моделирования турбулентного течения. Эмпирически установлено, что  $\kappa \approx 0.4$ .

При заданном потоке импульса (4) и неоднородной вязкости (5) имеем

$$\nu_t \frac{du}{dz} = \sigma_{xz}. \quad (6)$$

Из (6) с точностью до константы интегрирования может быть найден профиль среднего макроскопического течения

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{v_* z}{\xi_0 \nu}, \quad (7)$$

где  $\xi_0$  – безразмерная константа интегрирования. Выражение (7) справедливо на пространственных

масштабах, больших по сравнению с масштабом, на котором молекулярная вязкость сопоставима с турбулентной, т.е. при  $z \gg l_0$ , где  $l_0 \equiv \nu / v_*$  – толщина так называемого вязкого подслоя. Вид профиля  $u(z)$  при  $z \sim l_0$  установлен эмпирически и он оказывается таков, что условие непротекания течения вдоль стенки требует  $\xi_0 \approx 0.13$ .

Случай течения около недеформируемой или слабodeформируемой границы раздела двух текучих сред качественно подобен случаю течения около твердой стенки, поскольку основные положения, использованные для вывода уравнения (5), остаются справедливы. Хотя значения констант  $\kappa$  и  $\xi_0$  будут иными, чем для случая течения у твердой стенки, законы (5) и (7) будут оставаться справедливыми.

Отметим характерный порядок величин в физически реалистичных ситуациях для течений воды:  $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $v_* \sim 0.01 \text{ м/с}$ ,  $z \sim 0.1 \text{ м}$ . Толщина вязкого подслоя, за пределами которого справедливо выражение для профиля течения (7), оказывается  $l_0 \sim 10^{-4} \text{ м}$ , аргумент логарифма в выражении (7)  $\sim 10^4$  ( $\ln 10^4 \sim 10$ ), а характерная скорость макроскопического среднего течения (7)  $u \sim 0.25 \text{ м/с}$ . Для русла небольшой реки при  $v_* \sim 0.05 \text{ м/с}$  и глубине  $z \sim 5 \text{ м}$  можно приблизительно оценить  $l_0 \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ , тогда аргумент логарифма  $\sim 2.5 \cdot 10^6$  ( $\ln 2.5 \cdot 10^6 \sim 15$ ) и максимальная скорость течения в русле  $u \sim 2 \text{ м/с}$ .

### 3. Решения уравнения Эйлера

Решение уравнения Эйлера (3) совместно с уравнением непрерывности (2) можно искать в потенциальном виде

$$\mathbf{v} = -\nabla\varphi, \quad (8)$$

где  $\varphi$  – потенциал поля скорости. Тогда уравнение непрерывности (2) дает

$$\Delta\varphi = 0, \quad (9)$$

а уравнение Эйлера (3) определяет поле давления в жидкости:  $p = \rho(\varphi_t - (\nabla\varphi)^2 / 2 - gz)$ . Условие непротекания через недеформируемую границу в терминах потенциала поля скорости дает граничные условия для уравнения (9):  $\partial\varphi / \partial n = 0$ .

Примечательно, что, в силу гармоничности (9), потенциальное течение (8) удовлетворяет и уравнению Навье–Стокса (1). Однако в общем случае граничные условия для вязкой жидкости не могут быть удовлетворены при потенциальном виде течения – они имеют более высокий порядок, чем тот, который совместим с уравнением (9).

## 4. Течения при малой вязкости

### 4.1. Уравнения и граничные условия для осредненного макроскопического течения

Осредненное по турбулентным пульсациям течение жидкости  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  подчиняется уравнению с эффективной турбулентной вязкостью [2, 3]:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \text{Div} \hat{\sigma}_t + \rho \mathbf{g}, \quad (10)$$

где

$$\hat{\sigma}_t(\mathbf{r}, t) = \rho \nu_t(\mathbf{r}, t) \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T. \quad (11)$$

Здесь давление  $p$  отличается от молекулярного давления и содержит турбулентный вклад. Строго говоря, турбулентная вязкость является не скалярной величиной, а тензором более высокого ранга, однако для нашего рассмотрения это не принципиально, и мы ограничимся приближением скалярности  $\nu_t$ .

Принципиально важным для нашего рассмотрения свойством турбулентной вязкости является то, что она стремится к нулю по мере приближения к недеформируемой границе. Это можно видеть и из уравнения (5). Данное положение может быть строго обосновано следующим образом. В силу того, что для реалистичных течений, например, воды толщина вязкого подслоя может быть  $l_0 \sim 10^{-6} - 10^{-4}$  м, существует достаточно большой диапазон масштабов  $l$  больших по сравнению с вязким подслоем, но малых по сравнению с масштабами системы  $L \sim 0.1 - 10$  м:  $l_0 \ll l \ll L$ . На расстояниях порядка  $l$  от границы области течения можно полагать постоянное сдвиговое напряжение, пренебрегать кривизной границы и неоднородностью осредненного течения вдоль нее, а само течение на таких масштабах считать статистически установившимся. Это соответствует отправным положениям, использованным для построения теории турбулентного пограничного слоя в разделе 2, и, следовательно, означает справедливость результатов (5) и (7) на обсуждаемых масштабах. Таким образом, при  $l_0 \ll L$  турбулентная вязкость стремится к нулю по мере приближения к недеформируемой границе.

Обращение турбулентной вязкости в ноль может иметь место и на свободной поверхности раздела фаз, обладающей поверхностным натяжением. Для этого достаточно, чтобы толщина вязкого подслоя  $l_0$  была мала по сравнению с характерным достижимым значением радиуса кривизны поверхности  $r_0$ :  $l_0 \ll r_0$ . В этом случае можно выделить масштаб  $l$  такой, что  $l_0 \ll l \ll r_0$ , и на этом масштабе поверхность раздела будет почти плоской,

т.е. будет справедлив результат (5), означающий практически исчезновение турбулентной вязкости на поверхности. Значение  $r_0$  для ряда задач может быть оценено из сопоставления силы тяжести и сил поверхностного натяжения:  $\rho r_0^3 g \sim \tau r_0$ , где  $\tau$  – коэффициент поверхностного натяжения. Откуда получим  $r_0 \sim \sqrt{\tau / (\rho g)}$ . Можно вычислить, что для воды  $r_0 \sim 3$  мм и, например, при  $l_0 \sim 10^{-5} - 10^{-4}$  м имеется достаточно большой диапазон значений  $l$  такой, что  $l_0 \ll l \ll r_0$ . Существование такого диапазона означает, что турбулентная вязкость обращается на поверхности раздела в ноль.

### 4.2. Решение уравнений с турбулентной вязкостью

При исчезающей на границах турбулентной вязкости оказывается уместным искать решение уравнения (10) в потенциальном виде, поскольку для течения отсутствует требование непроскальзывания вдоль границ. Для

$$\mathbf{u} = -\nabla \phi \quad (12)$$

дивергенция тензора напряжений (11)

$$\text{Div} \hat{\sigma}_t = -2\rho \nabla \nu_t(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \nabla \phi - 2\rho \nu_t(\mathbf{r}, t) \nabla \Delta \phi.$$

В силу гармоничности потенциала течения

$$\text{Div} \hat{\sigma}_t = -2\rho \nabla \nu_t(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \nabla \phi.$$

Результаты анализа турбулентного пограничного слоя в разделе 2 позволяют сопоставить порядок слагаемых  $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  и  $\text{Div} \hat{\sigma}_t$  в уравнении (10) для потенциального течения (12).

В самом деле, согласно выражению (5)

$$|\nabla \nu_t(\mathbf{r}, t)| \sim \kappa v_*,$$

тогда

$$\text{Div} \hat{\sigma}_t \sim -\rho \kappa v_* \nabla \nabla \phi = \rho \kappa v_* \nabla u.$$

Адвективное слагаемое

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \sim \rho u \nabla u.$$

Отношение характерных значений этих слагаемых оказывается

$$\frac{|\text{Div} \hat{\sigma}_t|}{|\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}|} \sim \frac{\kappa v_*}{u},$$

что при малых вязкостях, как будет показано ниже, является малой величиной. Таким образом, в уравнении (10) слагаемое, отличающее его от уравнения Эйлера, оказывается малым по сравнению с прочими слагаемыми.

Малость отношения  $v_* / u$  для случая малых вязкостей ожидаема, но остается вопрос о вычис-

лении его характерного значения. Для течения идеальной жидкости, которому приблизительно соответствует уравнение (10) в случае малой вязкости, характерные значения поля скорости вблизи границ сопоставимы с характерными скоростями в объеме. Вместе с тем вблизи границ справедлив логарифмический профиль (7), чем можно воспользоваться для оценки отношения:

$$\frac{|\text{Div } \hat{\sigma}_t|}{|\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}|} \sim \frac{\kappa v_*}{u} \sim \kappa^2 \ln^{-1} \frac{v_* L}{\xi_0 \nu}. \quad (13)$$

В пределе бесконечно малой вязкости аргумент логарифма стремится к бесконечности и, следовательно, отношение (13) стремится к нулю. Последнее, действительно, позволяет пренебречь слагаемым  $\text{Div } \hat{\sigma}_t$  по сравнению с  $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  при рассмотрении потенциального течения (12). Вместе с тем при турбулентном механизме вязкости потенциальное течение оказывается совместимо с физически естественными граничными условиями (в противоположность тому, что при однородной вязкости потенциальное течение удовлетворяет уравнению Навье–Стокса, но не совместимо с граничными условиями).

Таким образом, при заданной геометрии области решение уравнения Эйлера с граничными условиями для невязкой жидкости оказывается соответствующим осредненному по турбулентным пульсациям течению жидкости с бесконечно малой вязкостью. В этом смысле можно говорить о том, что существует предел невязкой жидкости, для описания которого корректно использование уравнения Эйлера.

### 4.3. Малый параметр, характеризующий точность уравнения Эйлера

Примечателен малый параметр, характеризующий точность уравнения Эйлера для слабовязких течений. Этим параметром оказывается (ср. (13))

$$\varepsilon \equiv \kappa^2 \ln^{-1} \frac{v_* L}{\xi_0 \nu}. \quad (14)$$

Параметр  $\varepsilon$  является логарифмически малым по величине вязкости или толщине вязкого подслоя. Приведем две характерные оценки для течений воды ( $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ):

- 1)  $v_* \sim 0.01 \text{ м/с}$ ,  $L \sim 0.1 \text{ м}$  (технические установки настольного размера). Тогда аргумент логарифма  $\sim 10^4$ , а параметр  $\varepsilon \approx 0.02$ ;
- 2)  $v_* \sim 0.05 \text{ м/с}$ ,  $L \sim 5 \text{ м}$  (русла небольших рек).

Тогда аргумент логарифма  $\sim 2 \cdot 10^6$ , а  $\varepsilon \approx 0.01$ . Можно видеть, что для этих ситуаций параметр  $\varepsilon$  оказывается достаточно малым. Малость параметра  $\varepsilon$  логарифмически слаба по величине отношения толщины вязкого пограничного слоя к геомет-

рическим размерам системы: для приведенных оценок при уменьшении  $l_0/L$  в 200 раз параметр  $\varepsilon$  уменьшился только в два раза.

### 4.4. Математическое описание слабовязких течений в многофазных системах

Резюмируем, какими уравнениями и граничными условиями должны описываться течения в многофазных системах со свободной поверхностью раздела при малой вязкости.

Выше было показано, что в случае поверхности раздела, обладающей поверхностным натяжением, при  $\nu/v_* \ll \sqrt{\tau/(\rho g)}$  турбулентная вязкость стремится к нулю по мере приближения к поверхности. Соответственно, на межфазных границах следует согласовывать нормальные к границе компоненты скоростей течения в контактирующих фазах, а касательные компоненты могут быть произвольными, что обуславливает возможность взаимного проскальзывания потоков.

В пределах каждой из фаз течение должно быть потенциальным и гладким. Здесь следует сделать акцент на важном моменте: уравнение Эйлера само по себе допускает существование разрывов поля скорости и, соответственно, взаимное проскальзывание потоков. Однако наличие ненулевой турбулентной вязкости в объеме каждой фазы означает, что течения с разрывами в объеме невозможны. Уравнение Эйлера справедливо для описания осредненного течения до тех пор, пока течение носит потенциальный характер и описывается гладким в пределах одной фазы потенциалом.

Помимо многофазных систем с поверхностным натяжением существуют системы, где граница раздела не обладает поверхностным натяжением. Таковым будет, например, случай контакта двух взаимно растворимых жидкостей. В этом случае взаимное растворение происходит посредством молекулярной диффузии и фазы остаются хорошо разделенными на временах, больших по сравнению с временами гидродинамических процессов. Аналогичное будет справедливо и для системы двух объемов одинаковой жидкости с разной концентрацией раствора или мелкодисперсной взвеси. В поле внешних сил (например, тяжести) такая многофазная система стремится к стратифицированному состоянию и поверхность раздела будет обладать некоторой эффективной упругостью. Эффективная упругость поверхности будет препятствовать проникновению через нее вихревых движений и уменьшению эффективности переноса импульса турбулентными вихрями. Как следствие, на такой поверхности следует ожидать понижение турбулентной вязкости. Можно оценить характерный пространственный масштаб  $l_*$  деформаций поверхности раздела за счет турбулентных пульсаций:  $\rho v_*^2/2 \sim \Delta \rho g l_*$ , где  $\rho$  – характерная плот-

ность жидкостей,  $\Delta\rho$  – разность плотностей двух жидкостей. Откуда

$$l_* \sim \frac{\rho v_*^2}{\Delta\rho g}. \quad (15)$$

На больших по сравнению с  $l_*$  масштабах справедливы рассуждения, приводящие к выражению (5) (множитель  $\kappa$  при этом определяется эмпирически, а не из общих соображений, и его значение может быть отлично от 0.4). В такой ситуации для поверхности раздела естественно ожидать эффективное обращение гидродинамической вязкости в ноль.

В таблице приведены оценки величины  $l_*$  для случаев масштаба «настоельных» установок и русел небольших рек для пары различных взаимно растворимых жидкостей ( $\Delta\rho/\rho \sim 0.2$ ) и слияния пары пресноводных рек с разным естественным уровнем жесткости воды ( $\Delta\rho/\rho \sim 5 \cdot 10^{-4}$ ). В качестве примера последних может быть упомянуто течение ниже места слияния рек Чусовой и Сылвы в Пермском крае ( $\Delta\rho/\rho \sim 3 \cdot 10^{-4}$ ) [4], где в зимний период под слоем льда устанавливается стратифицированное двухслойное течение: водные массы из р. Чусовой текут поверх водных масс р. Сылвы. На рис. 2 схематически показано, что около поверхности раздела вод происходит существенное снижение турбулентной вязкости, а характерный масштаб, вплоть до которого это снижение можно отметить, сопоставим с  $l_* \sim 0.5$  м.

Характерный масштаб (15) искривлений поверхности раздела фаз без поверхностного натяжения

$v_*$ [м/с]	0.01	0.05
$\Delta\rho/\rho$	0.01	0.05
0.2	$5 \cdot 10^{-5}$ м	$10^{-3}$ м
$5 \cdot 10^{-4}$	0.02 м	0.5 м

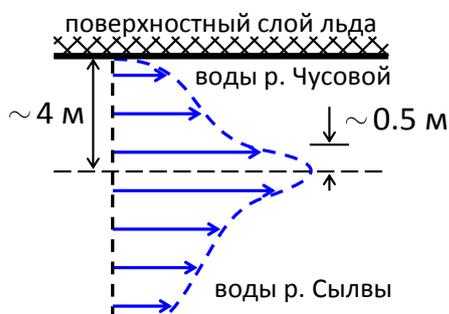


Рис. 2. Качественное изображение профиля средней скорости подледного течения воды в районе Чусовского водозабора ниже точки слияния рек Чусовой и Сылвы в зимний период

Отметим, что для поверхности слоя смешения приводимый анализ несправедлив. Такая поверхность не обладает ни поверхностным натяжением, ни эффективной упругостью, в связи с чем нет оснований для существенного снижения турбулентной вязкости и ожидания возможности существования разрыва потенциала поля скорости.

## 5. Заключение

Предельный переход для течений жидкостей с малой вязкостью от уравнения Навье–Стокса к уравнению Эйлера существует. Течение жидкости при этом оказывается турбулентным, а переход принципиально связан со свойствами турбулентного пограничного слоя: конкретно, обращением эффективной турбулентной вязкости в ноль на твердых стенках и поверхностях раздела фаз. Обращение в ноль турбулентной вязкости около границ области течения позволяет ставить для осредненного по турбулентным пульсациям макроскопического течения граничные условия, как для идеальной жидкости: без условия непротекания вдоль границы. Такие граничные условия могут быть удовлетворены для потенциального течения, что позволяет искать осредненное течение в потенциальном виде. При этом относительный вклад слагаемого, связанного с турбулентной вязкостью, в уравнение для осредненного течения оказывается логарифмически мал по величине отношения толщины вязкого подслоя  $l_0$  к геометрическим размерам системы  $L$ : этот вклад характеризуется малым параметром  $\varepsilon = \kappa^2 \ln^{-1}[L/(\xi_0 l_0)]$ , где для твердых границ  $\kappa = 0.4$  и  $\xi_0 = 0.13$  (для свободной поверхности раздела геометрические коэффициенты  $\kappa$  и  $\xi_0$  могут быть иными). Таким образом, в пределе  $l_0/L \rightarrow 0$  для потенциала осредненного течения получаются те же уравнения, что и для потенциальных решений уравнения Эйлера.

В этом смысле можно говорить о существовании перехода к уравнению Эйлера в пределе бесконечно малой вязкости: решение уравнения Эйлера описывает осредненное по турбулентным пульсациям макроскопическое течение жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант 14-21-00090.

## Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. Prandtl L. Über die ausgebildete Turbulenz / Proc. Second Int. Congress for Applied Mechanics, Zurich, September 1926 // Zurich. 1926. P. 62–74.
3. Prandtl L., Tietjens O. G. Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics. N. Y.: Dover, 1934.

4. Lyubimova T., Lepikhin A., Konovalov V., Parshakova Ya., Tiunov A. Formation of the density currents in the zone of confluence of two rivers // *Journal of Hydrology*. 2014. Vol. 508. P. 328–342.

### References

1. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Fluid Mechanics*. Moscow: Nauka, 1986.
2. Prandtl L. Über die ausgebildete Turbulenz. *Proc.*

*Second Int. Congress for Applied Mechanics*. Zurich, 1926, pp. 62–74.

3. Prandtl L., Tietjens O. G. *Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics*. New York: Dover, 1934.
4. Lyubimova T., Lepikhin A., Konovalov V., Parshakova Ya., Tiunov A. Formation of the density currents in the zone of confluence of two rivers. *Journal of Hydrology*, 2014, vol. 508, pp. 328–342.

### Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Голдобин Д. С. О существовании предельного перехода к невязкой жидкости // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2016. № 2 (33). С. 14–20. doi: 10.17072/1994-3598-2016-2-14-20

### Please cite this article in English as:

Goldobin D. S. On existence of passage to the limit of inviscid fluid. *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2016, no. 2 (33), pp. 14–20. doi: 10.17072/1994-3598-2016-2-14-20