

УДК 532.5  
PACS 44.25.+f, 47.56.+r

## Конвекция бинарной жидкости в двухслойной системе с переменной пористостью в поле вибраций конечной частоты

Е. А. Колчанова<sup>a,b,c</sup>, Н. В. Колчанов<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН  
614013, Пермь, ул. Академика Королёва, 1

<sup>b</sup> Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Пермь, ул. Комсомольский пр., 29  
email: kolchanovaea@gmail.com

<sup>c</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: kolchanovn@gmail.ru

Рассматривается линейная задача устойчивости механического равновесия в системе двух горизонтальных слоев, один из которых заполнен бинарной жидкостью, а другой – пористой средой, насыщенной этой жидкостью в поле силы тяжести. Слои колеблются вертикально, с конечной частотой и амплитудой. Пористая среда неоднородна в направлении, поперечном слоям. Задаются линейные равновесные распределения температуры и концентрации в слоях. С помощью теории Флоке находятся области параметрической неустойчивости равновесия относительно синхронных и субгармонических возмущений при изменении частоты и амплитуды вибраций. Численное решение задачи получается на основе методов стрельбы и Галеркина. Показано, что при подогреве системы снизу в пределе высокочастотных вибраций возникают синхронные конвективные колебания. Вибрации при этом стабилизируют равновесие жидкости. При уменьшении частоты и росте амплитуды вибраций конвекция возбуждается резонансным образом, и порог устойчивости равновесия монотонно понижается. Смена вида неустойчивости с коротковолновой на длинноволновую, характерная для слоистых систем, наблюдается при изменении градиента пористости и коэффициента плавучести. Последний определяет относительный вклад перепада концентрации в градиент плотности жидкости. Коротковолновые конвективные валы локализуются в слое бинарной жидкости с малым коэффициентом плавучести и характерны для среды, пористость которой убывает с глубиной. Длинноволновые валы проникают в поры среды, насыщенной бинарной жидкостью с большим коэффициентом плавучести и имеющей пористость, которая возрастает с глубиной. Определено, что коротковолновая параметрическая неустойчивость реализуется при меньших амплитудах вибраций, чем длинноволновая неустойчивость. Субгармонические колебания жидкости в порах возможны при амплитудах вибраций, на порядок больших амплитуд, необходимых для появления таких колебаний в слое жидкости над пористой средой.

**Ключевые слова:** бинарная жидкость; неоднородная пористая среда; двухслойная система; модуляция поля тяжести; вибрации; синхронные и субгармонические колебания жидкости

*Поступила в редакцию 23.04.2018; принята к опубликованию 16.05.2018*

# Convection of binary fluid in a two-layer system with variable porosity under finite-frequency vibrations

E. A. Kolchanova<sup>a,b,c</sup>, N. V. Kolchanov<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 614013, Ac. Koroleva St. 1, Perm

<sup>b</sup> Perm National Research Polytechnic University, 614990, Komsomolsky prospect St. 29, Perm  
email: kolchanovaea@gmail.com

<sup>c</sup> Perm State University, 614990, Bukireva St. 15, Perm  
email: kolchanovn@gmail.com

We consider a linear stability problem for the mechanical equilibrium in a system of two horizontal layers, one of which is filled with a binary fluid and the other contains a porous medium saturated with the fluid under gravity field. The layers oscillate vertically, with finite frequency and amplitude. The porous medium is inhomogeneous in the direction transverse to the layers. Linear equilibrium distributions of temperature and concentration in the layers are given. Taking into account the Floquet theory, we find the regions of parametric instability of equilibrium with respect to synchronous and subharmonic perturbations for various frequencies and amplitudes of vibrations. The numerical solution of the problem is obtained on the basis of shooting method and Galerkin method. It is shown that synchronous convective oscillations arise in the system heated from below in the limiting case of high-frequency vibrations. These vibrations stabilize the fluid equilibrium state. Convection occurs in a resonant manner and the stability threshold lowers monotonically as the frequency of vibration decreases and its amplitude increases. The change in the type of instability from the short-wave to long-wave ones, which are typical for layered systems, is observed with the variation of porosity gradient and buoyancy ratio. The latter defines a relative contribution of the concentration difference to the fluid density gradient. Short-wave convective rolls locate in the binary fluid layer with a low buoyancy ratio and are features of the medium with the porosity decreasing with depth. Long-wave rolls penetrate pores of the medium, which is saturated with the binary fluid of a high buoyancy ratio and has the porosity increasing with depth. It is determined that the short-wave parametric instability develops at the lower vibration amplitudes than their values in the case of the long-wave instability. The subharmonic fluid oscillations in the pores are possible at the vibration amplitudes, which are an order of magnitude larger than the amplitudes for the appearance of such oscillations in the fluid layer overlying the porous medium.

**Keywords:** binary fluid; inhomogeneous porous medium; superposed fluid and porous layers; gravity modulation; vibrations; synchronous and subharmonic fluid oscillations

Received 23.04.2018; accepted 16.05.2018

doi: 10.17072/1994-3598-2018-2-58-67

## 1. Введение

Термоконцентрационная конвекция в горизонтальном слое бинарной жидкости или насыщенной пористой среды появляется при наличии градиентов температуры и концентрации в поле силы тяжести [1, 2]. Перепады температуры и концентрации вызывают изменение плотности жидкости, и ее механическое равновесие теряет устойчивость. В [2] получены аналитические выражения для числа Релея-Дарси и концентрационного числа Релея-Дарси, соответствующих порогу возникновения конвективного движения в пористом слое.

В слоистой системе, состоящей из горизонтального слоя бинарной жидкости и расположенного под ним слоя пористой среды, насыщенной

жидкостью, возможны два вида неустойчивости равновесия: коротковолновая и длинноволновая [3–6]. Коротковолновые конвективные валы формируются в слое жидкости над пористой средой. Длинноволновые валы проникают в пористый слой. В неоднородной по вертикали пористой среде порог длинноволновой конвекции сильно зависит от изменения фильтрационных свойств пор (пористости и проницаемости). Для бинарной жидкости характерна как монотонная, так и колебательная неустойчивость равновесия в зависимости от соотношения параметров системы. В случае, когда градиенты температуры и концентрации вносят противоположные по знаку вклады в подъемную силу, конвекция бинарной жидкости возникает колебательным образом. В противоположном

случае наиболее опасными будут монотонные возмущения равновесия.

Конвективная задача, в которой двухслойная система ограничена твердыми горизонтальными плоскостями с разной температурой и концентрацией, имеет необычную постановку. Однако интерес к этой задаче связан с ее возможным применением к процессу направленной кристаллизации бинарного раствора или расплава в поле силы тяжести. При охлаждении раствора снизу на его границе с кристаллом образуется двухфазная пористая зона. Концентрация тяжелого компонента раствора в этой зоне убывает по направлению к кристаллу. Создаются условия для возбуждения термоконцентрационной конвекции в слое с раствором и в пористой зоне [7–9]. В [9] показано, что два вида неустойчивости (коротковолновая и длинноволновая) могут приводить к разным дефектам кристалла. Формируются пальцевидные ответвления вблизи границы раздела «раствор – пористая зона» или вертикальные каналы внутри пористой зоны [7].

Влияние вертикальных высокочастотных вибраций на конвекцию бинарной жидкости в пористой среде изучалось в [8], с учетом эффекта Соре – в [9]. В пределе высокочастотных вибраций рассмотрены синхронные колебания жидкости и определены границы возникновения осредненного конвективного движения. Показано, что вибрации могут как стабилизировать, так и дестабилизировать равновесие жидкости в зависимости от знака и величины коэффициента плавучести, который характеризует относительный вклад перепада концентраций в подъемную силу [8]. Генерация синхронных, субгармонических и квазипериодических конвективных колебаний в слое бинарной жидкости с эффектом Соре в поле вибраций произвольной частоты и амплитуды исследовалась в работах [12, 13].

Возбуждение осредненной термоконцентрационной конвекции в двухслойной системе, содержащей бинарный раствор хлорида аммония и упакованные стеклянные сферы в поле вибраций высокой частоты и малой амплитуды, проанализировано в [14–16]. В работе [16] пористость и проницаемость слоя сфер менялась с глубиной. При подогреве системы снизу выделены два вида неустойчивости: коротковолновая и длинноволновая. Определены критические параметры (отношение толщин слоев, концентрационное число Релея-Дарси, градиент пористости и др.), при которых один вид неустойчивости сменяет другой. Показано, что при подогреве снизу вибрации стабилизируют равновесие жидкости, при этом наибольший эффект достигается в случае коротковолновой конвекции. При подогреве сверху вибрации производят слабый дестабилизирующий эффект.

В настоящей работе мы продолжаем изучать влияние вертикальных вибраций на конвективную

устойчивость равновесия бинарной жидкости в двухслойной системе с неоднородной пористостью и проницаемостью в поле силы тяжести. Мы рассматриваем вибрации произвольной частоты и амплитуды и определяем границы устойчивости относительно возмущений синхронного и субгармонического отклика системы на внешнее периодическое воздействие.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим горизонтальный слой бинарной жидкости, частично заполненный пористой средой (рис. 1). Среда делит слой на две части, образуя двухслойную систему. Система совершает вертикальные колебания с произвольной частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$  в поле силы тяжести. На ее внешних границах задаются постоянные, разные значения температуры и концентрации.

Пористая среда моделируется системой сфер с проницаемостью, определяемой формулой Кармана-Козени:  $K = D^2 m^3 / 180(1 - m)^2$ , где  $D$  – диаметр сфер,  $m$  – пористость [2, 17]. Пористость среды линейно изменяется с координатой  $z$ :  $m(z) = m_i + m_z z / h_m$ , где  $m_i$  – пористость вблизи границы раздела слоев,  $m_z$  – безразмерный градиент пористости. Сферы закреплены и совершают твердотельные колебания вместе с полостью, в которой находится двухслойная система.

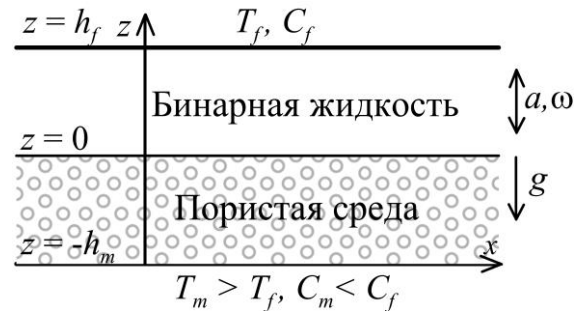


Рис. 1. Подогреваемая снизу система горизонтальных слоев бинарной жидкости и насыщенной пористой среды в модулированном поле тяжести

Бинарная жидкость в рассматриваемой системе может находиться в состоянии механического равновесия при вертикальных градиентах температуры и концентрации, заданных выражениями в жидком и пористом слоях, соответственно:

$$\nabla T = -A_f \gamma, \quad \nabla C = B_f \gamma, \quad (1)$$

$$\nabla \mathcal{G} = -A_m F_T(z) \gamma, \quad \nabla S = B_m F_C(z) \gamma, \quad (2)$$

где  $T$ ,  $\mathcal{G}$  – отклонения температуры в слоях от среднего значения,  $C$ ,  $S$  – отклонения концентрации тяжелой компоненты бинарной жидкости в слоях от среднего значения,  $\gamma$  – орт вертикальной оси  $z$ ,  $A_f$ ,  $B_f$  – постоянные части градиентов темпе-

ратуры и концентрации в жидком слое,  $A_m, B_m$  – постоянные части градиентов температуры и концентрации в пористом слое. Функции

$$F_T(z) = -\frac{m_z \delta_2}{(1+m_z \delta_2 z/h_m) \ln(1-m_z \delta_2)},$$

$$F_C(z) = -\frac{m_z/m_i}{(1+m_z/m_i \cdot z/h_m) \ln(1-m_z/m_i)}$$

связаны с изменением свойств пористой среды в вертикальном направлении.

Функции  $F_T(z)$  и  $F_C(z)$  находятся при решении уравнений теплопроводности и диффузии в пористом слое, насыщенном бинарной жидкостью в состоянии равновесия [2]. При этом мы учитываем, что твердая и жидкая фазы в пористой среде распределены равномерно, нет никаких больших пустот и включений, соизмеримых с толщиной слоя. Тогда тепловые и гидродинамические свойства среды (теплоемкость, теплопроводность и коэффициент диффузии) можно задать функциями:

$$(\rho C)_m = m(\rho C)_f + (1-m)(\rho C)_s,$$

$$\kappa_m = m\kappa_f + (1-m)\kappa_s, \quad D_m = mD_f,$$

где индексы  $f$  и  $s$  относятся к жидкой и твердой фазам, соответственно, а пористость среды  $m(z)$  является функцией вертикальной координаты  $z$ .

Изучим устойчивость механического равновесия жидкости в слоях при заданных градиентах (1) и (2) относительно малых возмущений. Запишем уравнения термоконцентрационной конвекции в системе отсчета, связанной с колеблющейся полостью. Тогда к ускорению силы тяжести  $\mathbf{g}$  в уравнениях добавим вибрационное ускорение [1, 18]:  $\mathbf{g}(1+\eta \sin \omega t)$ , где  $\eta = a\omega^2/g$  – относительная амплитуда модуляции ускорения силы тяжести, зависящая от амплитуды  $a$  и частоты  $\omega$  вибраций.

Движение жидкости описываем в приближении Буссинеска [1, 2]. Отклонение плотности жидкости  $\rho$  от среднего значения  $\rho_0$  мало и учитывается только в слагаемом с подъемной силой. Оно вызвано неоднородностью температуры и концентрации:  $\rho = \rho_0(1 - \beta_T T + \beta_C C)$ , где  $\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$  – коэффициент теплового расширения жидкости,  $\beta_C = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right)$  – коэффициент, определяющий зависимость плотности жидкости от концентрации. Течение жидкости в порах подчиняется закону Дарси [2].

Уравнения конвекции для малых возмущений равновесия жидкости в неинерциальной системе отсчета в жидком слое имеют вид:

$$\frac{\varepsilon}{\text{Pr}_m} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p_f + \varepsilon \Delta \mathbf{v} + (R_m T - R_{mc} C)(1 + \eta \sin \tilde{\omega} t) \boldsymbol{\gamma}, \quad (3)$$

$$\frac{\kappa}{b} \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \tilde{\kappa} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \Delta T, \quad (4)$$

$$(m_i \text{Le}_m) \frac{\partial C}{\partial t} + m_i \tilde{m} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \Delta C, \quad (5)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (6)$$

в пористом слое:

$$\frac{\varepsilon}{m(z) \text{Pr}_m} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p_m - \frac{\mathbf{u}}{\Pi(z)} + (R_m \mathcal{G} - R_{mc} S)(1 + \eta \sin \tilde{\omega} t) \boldsymbol{\gamma}, \quad (7)$$

$$B(z) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - F_T(z) (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \text{div} (H(z) \nabla \mathcal{G}), \quad (8)$$

$$m(z) \cdot \text{Le}_m \frac{\partial S}{\partial t} + F_C(z) (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = \text{div} (m(z) \nabla S), \quad (9)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (10)$$

где  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  – скорость в жидком слое и скорость фильтрации жидкости в пористом слое,  $p_f$ ,  $p_m$  – давления в жидком и пористом слоях без учета гидростатической добавки,  $\kappa = \kappa_m / \kappa_f$  – отношение теплопроводностей слоев при  $m(z) = m_i$ ,  $\tilde{\kappa} = -\kappa m_z \delta_2 / \ln(1 - m_z \delta_2)$  и  $\tilde{m} = -m_z / \ln(1 - m_z / m_i)$ .

На твердых границах двухслойной системы выполняются условия прилипания и непроницаемости, исчезают возмущения температуры и концентрации [16]:

$$z = d: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = 0, \quad C = 0, \quad (11)$$

$$z = -1: \quad \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad T = 0, \quad S = 0.$$

На границе раздела слоев ставим условия равенства температур, тепловых потоков, концентраций, потоков вещества, давлений, вертикальных скоростей и нулевой горизонтальной скорости жидкости [16]:

$$z = 0: \quad T = \mathcal{G}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}, \quad C = S, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = m_i \frac{\partial S}{\partial z},$$

$$p_f = p_m, \quad \mathbf{v}_z = \mathbf{u}_z, \quad \mathbf{v}_x = 0. \quad (12)$$

Уравнения (3)–(10) с граничными условиями (11)–(12) записаны в безразмерной форме с учетом масштабов длины  $h_m$ , времени  $bh_m^2/\chi_{\text{eff}}$ , скорости  $\chi_{\text{eff}}/h_m$ , давления  $\rho_f \nu_f \chi_{\text{eff}}/K_i$ , температуры  $A_m h_m$  и концентрации  $B_m h_m \chi_{\text{eff}}/D_{m_i}$ . Здесь  $b = (\rho C)_{m_i} / (\rho C)_f$  – отношение теплоемкостей пористой среды и жидкости при  $m(z) = m_i$ ,

$\chi_{eff} = \kappa_{m_i} / (\rho C)_f$  – эффективная температуропроводность пористой среды при  $m(z) = m_i$ ,  $\rho_f$ ,  $\nu_f$  – плотность и кинематическая вязкость бинарной жидкости,  $K_i$  – проницаемость пор вблизи границы раздела слоев,  $D_{m_i}$  – коэффициент диффузии в пористом слое при  $m(z) = m_i$ .

В безразмерных уравнениях выделены следующие параметры: число Релея-Дарси  $R_m = g \beta_T K_i h_m^2 A_m / (\nu_f \chi_{eff})$ , концентрационное число Релея-Дарси  $R_{mc} = g \beta_C K_i h_m^2 B_m / (\nu_f D_{m_i})$ , число Прандтля  $Pr_m = b \nu_f / \chi_{eff}$ , число Льюиса  $Le_m = \chi_{eff} / b D_{m_i}$ , число Дарси  $\varepsilon = K_i / h_m^2$ , отношение толщин слоев  $d = h_f / h_m$ , безразмерная частота вибраций  $\tilde{\omega} = \omega b h_m^2 / \chi_{eff}$ .

Пористая среда неоднородна в вертикальном направлении. Считая, что твердая и жидкая фазы в ней распределены равномерно, представим свойства среды в виде функций, зависящих от безразмерной координаты  $z$ :

$$\begin{aligned} m(z) &= m_i + m_z z, & K(z) &= K_i \Pi(z), \\ b(z) &= b B(z), & \chi_{eff}(z) &= \chi_{eff} H(z), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= (m_i + m_z z)^3 / K_i (1 - m_i - m_z z)^2, \\ B(z) &= 1 + \delta_1 m_z z / b, & H(z) &= 1 + \delta_2 m_z z. \end{aligned}$$

Относительные разности теплоемкостей жидкой и твердой фаз и их теплопроводностей определяются соотношениями:  $\delta_1 / b = \{(\rho C)_f - (\rho C)_s\} / (\rho C)_{m_i}$  и  $\delta_2 = (\kappa_f - \kappa_s) / \kappa_{m_i}$ .

### 3. Метод решения

Как и в случае задач, подобных задаче Релея-Бенара [1,2], будем рассматривать возмущения с волновым числом  $k$ , периодические по горизонтальной оси  $x$ , и представлять переменные величины в виде произведений их амплитуд  $\hat{F}(z, t)$  на экспоненту  $e^{ikx}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, T, C, p_f, \mathbf{u}, \vartheta, S, p_m) &= \\ &= (\hat{\mathbf{v}}, \hat{T}, \hat{C}, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\vartheta}, \hat{S}, \hat{p}_m) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Подставив эти произведения в систему (3)–(12), получим уравнения для амплитуд возмущений с волновым числом  $k$ . Применим метод Галеркина и выделим пространственные и временные части амплитуд переменных величин:

$$\hat{F}(z, t) = \tilde{F}(z) \cdot F(t).$$

В качестве базисных функций  $\tilde{F}(z)$  выберем собственные функции конвективной задачи без модуляции при  $\eta = 0$ , которые находятся с помощью метода стрельбы [19]. Из условий ортогональности невязки к каждой из базисных функций приходим к системе уравнений для амплитуд возмущений, зависящих только от времени в жидком слое:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = a_1 v + (a_2 R T - a_3 N C)(1 + \eta \sin \Omega \tau), \quad (14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_4 T + a_5 v, \quad (15)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = a_6 C - a_7 v, \quad (16)$$

в пористом слое

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = b_1 u + (b_2 R \vartheta - b_3 N S)(1 + \eta \sin \Omega \tau), \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = b_4 \vartheta + b_5 u, \quad (18)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = b_6 S - b_7 u. \quad (19)$$

Здесь  $R = R_m / R_{m0}$  – приведенное число Релея-Дарси, равное отношению числа Релея-Дарси, полученного при наличии модуляции к пороговому числу Релея-Дарси без модуляции,  $N = R_{mc} / b Le_m R_{m0} = \beta_C B_m / \beta_T A_m$  – коэффициент плавучести, определяющий относительный вклад перепада концентраций в градиент плотности жидкости. Коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  содержат интегралы по координате  $z$ , взятые в соответствующих слоях. Переменные  $v$  и  $u$  являются проекциями скоростей в слоях бинарной жидкости и насыщенной пористой среды на ось  $z$ .

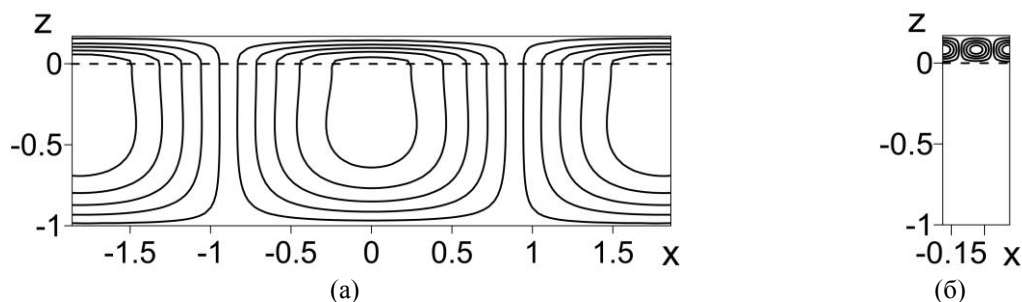
Для упрощения численных расчетов в уравнениях (14)–(19), имеющих малый параметр  $\varepsilon$  (число Дарси) при производной по времени, выполнена замена  $t = \tau \varepsilon / Pr_m$  и выделена безразмерная частота вибраций  $\Omega = \tilde{\omega} \varepsilon / Pr_m = \omega K_i / \nu_f$ .

Согласно теории Флоке представим каждую из функций  $F(t)$  в виде ряда:

$$F(t) = e^{\sigma t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{in \Omega t}, \quad (20)$$

где  $\sigma = \sigma_r + i \sigma_i$  – комплексный показатель Флоке.

Подставив (20) в уравнения (14)–(19) и выразив температуру и концентрацию через скорость, приходим к системе алгебраических уравнений для амплитуд скоростей в каждом из слоев. Из условия разрешимости системы находим безразмерные параметры задачи. В численных расчетах  $n$  менялось от  $-L$  до  $L$ , где  $L = 11$ .



**Рис. 2.** Изолинии вертикальной скорости для наиболее опасных возмущений равновесия в отсутствие вибраций при  $N = 0.04$  и различных градиентах пористости: а –  $m_z = -0.2$  (длинноволновые возмущения с  $k = 1.73$ ); б –  $m_z = 0.2$  (коротковолновые возмущения с  $k = 15.99$ ). Штриховой линией показана граница раздела жидкого и пористого слоев

В работе мы ограничиваемся изучением устойчивости равновесия бинарной жидкости относительно синхронных и субгармонических возмущений. Синхронные возмущения имеют период, равный периоду вибраций ( $\sigma_i = 0$ ). Период субгармонических возмущений вдвое больше периода вибраций ( $\sigma_i = \Omega/2$ ). Определяем нейтральное периодическое решение, при котором возмущения не возрастают и не затухают ( $\sigma_r = 0$ ). В бинарной жидкости, находящейся в модулированном поле силы тяжести, возможны также квазипериодические колебания [12, 13]. Они характеризуются двумя частотами: частотой вибраций и частотой собственных нейтральных колебаний. Этот вид колебаний остается предметом наших дальнейших исследований.

В качестве модельной среды выбрана двухслойная система, состоящая из слоя водного раствора хлорида аммония, частично заполненного стеклнными сферами, с параметрами [16]:  $m_i = 0.5$ ,  $\varepsilon = 1.1 \cdot 10^{-5}$ ,  $\kappa_i = 1.52$ ,  $b = 0.76$ ,  $Pr_m = 4.1$ ,  $Le_m = 345$ ,  $\delta_1 = 0.48$ ,  $\delta_2 = -0.68$ ,  $d = 0.17$ . Отношение толщины пористого слоя к диаметру сфер  $h_m/D$  равно 16. Рассматриваемая двухслойная система представляет интерес с фундаментальной и практической точек зрения. Теплопроводности раствора и стеклянных сфер близки, поэтому в такой системе конвекция может возникать в виде двух различных видов валов: коротковолновых и длинноволновых. Таким образом, можно выявить основную особенность конвективной устойчивости в слоистых системах – бимодальность нейтральных кривых. Несмотря на то, что выбранная система является модельной, с практической точки зрения результаты расчетов могут быть применены при анализе термоконвекции водного раствора хлорида аммония, возникающей в процессе его направленной кристаллизации. Эксперименты по кристаллизации раствора проводились в работе [7].

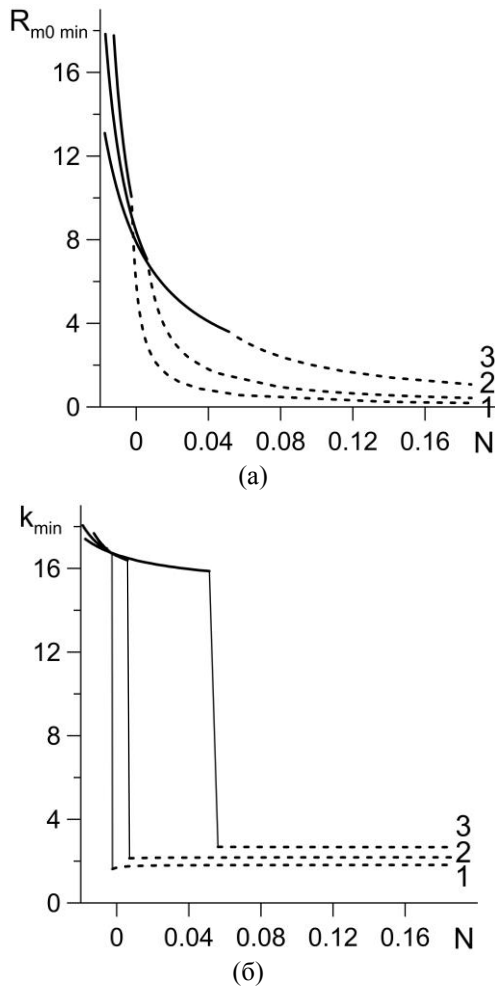
## 4. Численные результаты

### 4.1. Устойчивость в статическом поле тяжести

Для двухслойной системы, содержащей пористую среду в статическом поле тяжести ( $\eta = 0$ ) при наличии градиентов температуры и концентрации, характерны два вида конвективной неустойчивости равновесия: длинноволновая и коротковолновая (рис. 2). Длинноволновые конвективные валы охватывают два слоя (рис. 2, а). Коротковолновые валы локализируются в слое бинарной жидкости и практически не проникают в поры среды (рис. 2, б). Изменение какого-либо параметра подогреваемой снизу системы, например, градиента пористости  $m_z$  или коэффициента плавучести  $N$ , приводит к смене вида неустойчивости.

На рис. 3 приведены карты устойчивости равновесия в зависимости от коэффициента плавучести при различных фиксированных значениях градиента пористости. Коротковолновая неустойчивость реализуется при малых значениях коэффициента плавучести, который задает относительный вклад перепада концентраций в градиент плотности жидкости (сплошные линии, рис. 3). С ростом его значения порог устойчивости равновесия понижается, а длина волны наиболее опасных возмущений возрастает. Так что длинноволновая конвекция, проникающая в поры среды, наблюдается при больших коэффициентах плавучести (штриховые линии, рис. 3).

Резкая смена вида неустойчивости проявляется также при изменении градиента пористости. При положительных его значениях проницаемость пор возрастает с глубиной, и движение жидкости локализуется в слое над пористой средой в виде валов малой длины волны (сплошные кривые 3 при  $N < 0.05$ , рис. 3). В случае отрицательных градиентов пористости проницаемость пор возрастает с глубиной, и преобладает длинноволновая неустойчивость (штриховые кривые 1 при  $N > -0.002$ , рис. 3)



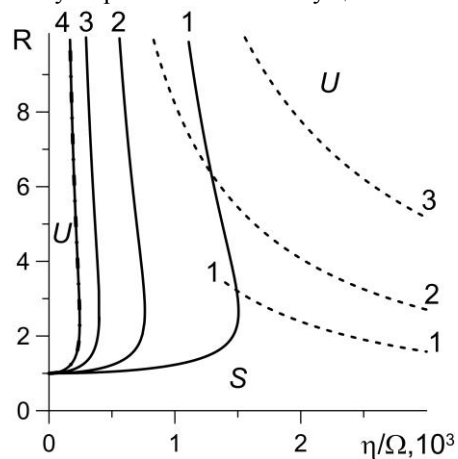
**Рис. 3.** Карты устойчивости равновесия в отсутствие вибраций при изменении коэффициента плавучести  $N$  для разных значений градиента пористости  $m_z$ :  $-0.2$  (кривая 1),  $0$  (кривая 2),  $0.2$  (кривая 3): а – минимальное критическое число Рейля-Дарси; б – волновое число наиболее опасных возмущений равновесия. Сплошные линии – границы коротковолновой неустойчивости, штриховые линии – границы длинноволновой неустойчивости.  $S$  – область устойчивости,  $U$  – область неустойчивости

#### 4.2. Устойчивость в вибрационном поле

При наличии вертикальных вибраций в двухслойной системе возникают синхронные или субгармонические конвективные колебания жидкости в зависимости от значений амплитуды и частоты. Синхронные колебания происходят с частотой, равной частоте вибраций. Частота субгармонических колебаний вдвое меньше частоты вибраций. Возможны также квазипериодические колебания бинарной жидкости. Их анализ является предметом наших дальнейших исследований.

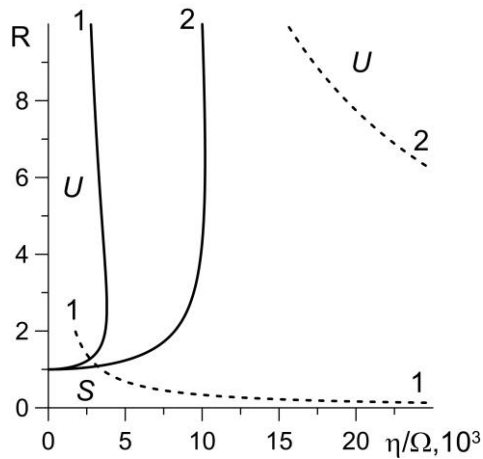
**Эффект изменения частоты вибраций.** При высокочастотных вибрациях, когда их период мал

по сравнению с характерными временами распространения гидродинамических, тепловых и концентрационных возмущений, имеется основная полоса неустойчивости. В пределах этой полосы возбуждаются синхронные колебания. С уменьшением частоты вибраций появляются резонансные области параметрической неустойчивости равновесия относительно субгармонических или синхронных возмущений. На рис. 4 изображены зависимости приведенного числа Рейля-Дарси от отношения  $\eta/\Omega$  при разных фиксированных частотах вибраций для наиболее опасных коротковолновых возмущений. Видно, что в пределах основной полосы неустойчивости, прилегающей к вертикальной оси  $\eta/\Omega=0$ , критическое число Рейля-Дарси  $R$  возрастает с ростом амплитуды вибраций (сплошные кривые, рис. 4). Дестабилизация равновесия имеет место при уменьшении частоты вибраций (штриховые кривые, рис. 4). На рисунке в этом случае показана нижняя граница первой резонансной области неустойчивости относительно субгармонических возмущений.



**Рис. 4.** Приведенное число Рейля-Дарси в зависимости от отношения амплитуды и частоты вибраций для коротковолновых возмущений ( $k = 15.99$ ) при  $N = 0.04$ ,  $m_z = 0.2$  и различных частотах вибраций  $\Omega$ :  $0.05$  (кривая 1),  $0.1$  (кривая 2),  $0.2$  (кривая 3),  $1.0$  (кривая 4). Сплошные линии – границы устойчивости для синхронных колебаний, штриховые линии – границы устойчивости для субгармонических колебаний. Штрихпунктирная линия – граница устойчивости для синхронных колебаний при  $\Omega = 10$ .  $U$  – область неустойчивости,  $S$  – область устойчивости

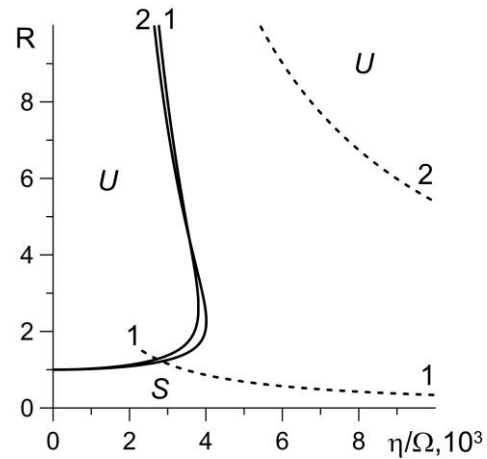
**Эффект изменения коэффициента плавучести.** На рис. 5 представлены зависимости приведенного числа Рейля-Дарси от параметра  $\eta/\Omega$  при фиксированной частоте вибраций  $\Omega = 0.02$  и различных значениях коэффициента плавучести. Коэффициент плавучести определяет относительный вклад перепада концентраций в градиент плотности жидкости.



**Рис. 5.** Приведенное число Рейля–Дарси в зависимости от отношения амплитуды и частоты вибраций при  $\Omega = 0.02$ ,  $m_z = 0.2$  и различных коэффициентах плавучести  $N$ : 0.04 (кривая 1 для коротковолновых возмущений с  $k = 15.99$ ), 0.14 (кривая 2 для длинноволновых возмущений с  $k = 2.67$ ). Сплошные линии – границы устойчивости для синхронных колебаний, штриховые линии – границы устойчивости для субгармонических колебаний.  $U$  – область неустойчивости,  $S$  – область устойчивости

Как было показано в случае статического поля тяжести, при малых его значениях конвекция возникает в виде коротковолновых валов над пористой средой. При больших значениях реализуются длинноволновые валы, проникающие в поры среды. При включении вибраций определены границы устойчивости равновесия относительно синхронных и субгармонических возмущений с двумя разными длинами волн, соответствующих этим валам. Из рисунка видно, что основная полоса неустойчивости расширяется с ростом коэффициента плавучести и, соответственно, длины волны (сплошные кривые 1 и 2, рис. 5). Для резонансного возбуждения конвекции в виде коротковолновых валов требуются на порядок меньшие амплитуды вибраций, чем при генерации длинноволновых конвективных валов (штриховые кривые 1 и 2, рис. 5).

**Эффект изменения градиента пористости.** На рис. 6 изображены зависимости приведенного числа Рейля–Дарси от параметра  $\eta/\Omega$  при заданной частоте вибраций  $\Omega = 0.02$  и различных значениях градиента пористости  $m_z$ . Проницаемость пор убывает с глубиной при положительных градиентах пористости. В этом случае, как правило, наблюдается коротковолновая конвекция. При отрицательных значениях  $m_z$  проницаемость среды возрастает с глубиной, и возникает проникающая длинноволновая конвекция. Основная полоса неустойчивости, соответствующая синхронным колебаниям жидкости, практически не меняет своего положения на плоскости параметров с уменьшени-



**Рис. 6.** Приведенное число Рейля–Дарси в зависимости от отношения амплитуды и частоты вибраций при  $\Omega = 0.02$ ,  $N = 0.04$  и различных градиентах пористости: 0.2 (кривая 1 для коротковолновых возмущений с  $k = 15.99$ ),  $-0.2$  (кривая 2 для длинноволновых возмущений с  $k = 1.73$ ). Сплошные линии – границы устойчивости для синхронных колебаний, штриховые линии – границы устойчивости для субгармонических колебаний.  $U$  – область неустойчивости,  $S$  – область устойчивости

ем градиента пористости и повышением длины волны критических возмущений равновесия (сплошные кривые 1 и 2, рис. 6). Субгармонические колебания жидкости возбуждаются резонансным образом в среде с возрастающей проницаемостью при больших амплитудах вибраций, чем в среде, проницаемость которой убывает с глубиной (штриховые кривые 1 и 2, рис. 6).

### 5. Заключение

Изучена линейная задача устойчивости механического равновесия в подогреваемой снизу системе слоев бинарной жидкости и насыщенной пористой среды, находящейся в поле силы тяжести. Система вибрирует с произвольной частотой и амплитудой в направлении, поперечном слоям. Пористый слой не деформируется. Он представляет собой совокупность упакованных, закрепленных сфер. Проницаемость и пористость слоя меняются с глубиной.

Уравнения вибрационной конвекции получены в приближении Буссинеска и записаны в системе отсчета, связанной с колеблющейся двухслойной системой. Для описания движения жидкости в порах использовалась модель Дарси. Численное моделирование задачи проводилось на основе методов стрельбы и Галеркина. Для определения нейтрального периодического решения применялась теория Флоке.

Найдены границы устойчивости равновесия жидкости относительно возмущений синхронного



и субгармонического отклика на вибрационное воздействие. Выделены основная полоса неустойчивости, соответствующая синхронным колебаниям жидкости, и первые резонансные области, характерные для субгармонических колебаний. Показано, что вибрации стабилизируют равновесие в пределах основной полосы неустойчивости. При уменьшении частоты вибраций конвекция возбуждается резонансным образом. Вибрации в этом случае дестабилизируют равновесие жидкости.

Проанализировано влияние изменения частоты и амплитуды вибраций, коэффициента плавучести и градиента пористости на критическое число Релея-Дарси для двух видов конвективных валов: коротковолновых валов, локализованных в слое жидкости над пористой средой, и длинноволновых валов, проникающих в поры среды. Для бинарной жидкости с малым коэффициентом плавучести, движущейся в среде, пористость которой убывает с глубиной, характерна коротковолновая конвекция. Длинноволновая конвекция жидкости с большим коэффициентом плавучести возникает в среде, пористость которой растет с глубиной. В работе показано, что резонансное возбуждение коротковолновой конвекции происходит при амплитудах вибраций, на порядок меньших, чем в случае длинноволновой конвекции. Основная полоса неустойчивости, построенная на плоскости параметров (приведенного числа Релея-Дарси и отношения амплитуды к частоте вибраций), расширяется с ростом коэффициента плавучести и, соответственно, длины волны критических возмущений равновесия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в проекта № 16-31-60004 мол\_а\_дк.

### Список литературы

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Nield D., Bejan A. Convection in Porous Media. 5th edition. Cham, Switzerland: Springer, 2017. 988 p.
3. Chen F., Chen C. F. Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer. // ASME Journal of Heat Transfer. 1988. Vol. 110. N. 2. P. 403–409. DOI: 10.1115/1.3250499
4. Zhao P., Chen C. F. Stability analysis of double-diffusive convection in superposed fluid and porous layers using a one-equation model // International Journal of Heat Mass Transfer. 2001. Vol. 44. P. 4625–4633. DOI: 10.1016/S0017-9310(01)00102-8
5. Hirata S. C., Goyeau B., Gobin D. Stability of thermosolutal natural convection in superposed fluid and porous layers // Transport in Porous Media. 2009. Vol. 78. P. 525–536. DOI: 10.1007/s11242-008-9322-9
6. Chen F. Salt-finger instability in an anisotropic and inhomogeneous porous substrate underlying a fluid layer // Journal of Applied Physics. 1992. Vol. 71. P. 5222–5236. DOI: 10.1063/1.350579
7. Chen C. F., Chen F. Experimental study of directional solidification of aqueous ammonium chloride solution // Journal of Fluid Mechanics. 1991. Vol. 227. P. 567–586. DOI: 10.1017/S0022112091000253
8. Chen F., Lu J. W., Yang T. L. Convective instability in ammonium chloride solution directionally solidified from below // Journal of Fluid Mechanics. 1994. Vol. 216. P. 163–187. DOI: 10.1017/S002211209400251X
9. Worster G. Instabilities of the liquid and mushy regions during solidification of alloys // Journal of Fluid Mechanics. 1992. Vol. 237. P. 649–669. DOI: 10.1017/S0022112092003562
10. Jounet A., Bardan G. Onset of thermohaline convection in a rectangular porous cavity in the presence of vertical vibration // Physics of Fluids. 2001. Vol. 13. P. 3234–3246. DOI: 10.1063/1.1403337
11. Charrier-Mojtabi M. C., Razi Y. P., Maliwan K., Mojtabi A. Effect of vibration on the onset of double-diffusive convection in porous media / In: Ingham D. B., Pop I. (Eds.) Transport Phenomena in Porous Media III. Oxford: Elsevier, 2005. P. 261–286. DOI: 10.1016/B978-008044490-1/50014-4
12. Myznikova B. I., Smorodin B. L. Convective stability of a horizontal binary-mixture layer in a modulated external force field // Fluid Dynamics. 2001. Vol. 36. P. 1–10. DOI: 10.1023/A:101881302
13. Smorodin B. L., Myznikova B. I., Legros J. C. Evolution of convective patterns in a binary-mixture layer subjected to a periodical change of the gravity field // Physics of Fluids. 2008. Vol. 20. P. 0941024. DOI: 10.1063/1.2978065
14. Lyubimova T. P., Kolchanova E. A. The onset of double-diffusive convection in a superposed fluid and porous layer under high-frequency and small-amplitude vibrations // Transport in Porous Media. 2018. Vol. 122. P. 97–124. DOI: 10.1007/s11242-017-0991-0
15. Колчанова Е. А., Колчанов Н. В. Возбуждение конвекции в системе слоев бинарного раствора и неоднородной пористой среды в поле высокочастотных вибраций // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10, № 1. С. 53–69. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.1.5
16. Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. Vibration effect on double-diffusive instability in an inhomogeneous porous layer underlying a binary fluid layer // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2018. Vol. 117. P. 627–644. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.034
17. Carman P. C. Fluid flow through granular beds // Transactions of the Institution of Chemical Engineers. 1937. Vol. 15. P. S32–S48.

18. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal Vibrational Convection*. N.Y.: Wiley, 1998. 358 p.
19. Лобов Н. И., Любимов Д. В., Любимова Т. П. Численные методы решения задач теории гидродинамической устойчивости: учеб. пособие. Пермь: Изд-во ПГУ, 2004. 101 с.
- ### References
- Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids*. Jerusalem: Keter Publishing House, 1976, 330 p.
  - Nield D., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Cham, Switzerland: Springer, 2017. 988 p.
  - Chen F., Chen C. F. Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer. *ASME Journal of Heat Transfer*, 1988, vol. 110, no. 2, pp. 403–409. DOI: 10.1115/1.3250499
  - Zhao P., Chen C. F. Stability analysis of double-diffusive convection in superposed fluid and porous layers using a one-equation model. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 2001, vol. 44, pp. 4625–4633. DOI: 10.1016/S0017-9310(01)00102-8
  - Hirata S. C., Goyeau B., Gobin D. Stability of thermosolutal natural convection in superposed fluid and porous layers. *Transport in Porous Media*, 2009, vol. 78, pp. 525–536. DOI: 10.1007/s11242-008-9322-9
  - Chen F. Salt-finger instability in an anisotropic and inhomogeneous porous substrate underlying a fluid layer. *Journal of Applied Physics*, 1992, vol. 71, pp. 5222–5236. DOI: 10.1063/1.350579
  - Chen C. F., Chen F. Experimental study of directional solidification of aqueous ammonium chloride solution. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, vol. 227, pp. 567–586. DOI: 10.1017/S0022112091000253
  - Chen F., Lu J. W., Yang T. L. Convective instability in ammonium chloride solution directionally solidified from below. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994, vol. 216, pp. 163–187. DOI: 10.1017/S002211209400251X
  - Worster G. Instabilities of the liquid and mushy regions during solidification of alloys. *Journal of Fluid Mechanics*, 1992, vol. 237, pp. 649–669. DOI: 10.1017/S0022112092003562
  - Jounet A., Bardan G. Onset of thermohaline convection in a rectangular porous cavity in the presence of vertical vibration. *Physics of Fluids*, 2001, vol. 13, pp. 3234–3246. DOI: 10.1063/1.1403337
  - Charrier-Mojtabi M. C., Razi Y. P., Maliwan K., Mojtabi A. Effect of vibration on the onset of double-diffusive convection in porous media. In: Ingham D. B., Pop I. (eds.) *Transport Phenomena in Porous Media III*. Oxford: Elsevier, 2005, pp. 261–286. DOI: 10.1016/B978-008044490-1/50014-4
  - Myznikova B. I., Smorodin B. L. Convective stability of a horizontal binary-mixture layer in a modulated external force field. *Fluid Dynamics*, 2001, vol. 36, pp. 1–10. DOI: 10.1023/A:101881302
  - Smorodin B. L., Myznikova B. I., Legros J. C. Evolution of convective patterns in a binary-mixture layer subjected to a periodical change of the gravity field. *Physics of Fluids*, 2008, vol. 20, pp. 0941024. DOI: 10.1063/1.2978065
  - Lyubimova T. P., Kolchanova E. A. The onset of double-diffusive convection in a superposed fluid and porous layer under high-frequency and small-amplitude vibrations. *Transport in Porous Media*, 2018, vol. 122, pp. 97–124. DOI: 10.1007/s11242-017-0991-0
  - Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. Convection excitation in a system of a binary solution layer and an inhomogeneous porous medium layer in the field of high-frequency vibrations. *Computational continuum mechanics*, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 53–69. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.1.5
  - Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. Vibration effect on double-diffusive instability in an inhomogeneous porous layer underlying a binary fluid layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, vol. 117, pp. 627–644. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.034
  - Carman P. C. Fluid flow through granular beds. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 1937, vol. 15, pp. S32–S48.
  - Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal Vibrational Convection*. New York: Wiley, 1998. 358 p.
  - Lobov N. I., Lyubimov D. V., Lyubimova T. P. *Chislennye metody resheniya zadach teorii gidrodinamicheskoi ustoychivosti* (Numerical methods of solving the problems of the hydrodynamical stability theory): tutorial. Perm: Perm University Press, 2004. 101 p (In Russian).

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Колчанова Е. А., Колчанов Н. В. Конвекция бинарной жидкости в двухслойной системе с переменной пористостью в поле вибраций конечной частоты // Вестник Пермского университета. Физика. 2018. № 2 (40). С. 58–67. doi: 10.17072/1994-3598-2018-2-58-67

**Please cite this article in English as:**

Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. Convection of binary fluid in a two-layer system with variable porosity under finite-frequency vibrations. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2018, no. 2 (40), pp. 58–67. doi: 10.17072/1994-3598-2018-2-58-67