ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2018 • ФИЗИКА • Вып. 2 (40)

УДК 536.75
PACS 05.30.-d, 05.40.-a, 03.65.-w

Уравнение Линдблада для квантового диссипативного гармонического осциллятора

В. С. Кирчанов
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29а
email: kirchanv@rambler.ru

Получено уравнение Линдблада для квантового гармонического осциллятора с линейной диссипацией в удобной для применений форме. Оператор уравнения содержит обычный линейный супероператор Лиувилля, включающий гамильтониан и оператор энергии диссипации, и квадратичный супероператор Линдблада. Супероператор Линдблада состоит из суммы операторов «диффузии импульса» и «диффузии координаты», действующих в фазовом пространстве, и разности операторов «скорости диссипации» импульса и координаты в фазовом пространстве. Найдено решение системы уравнений для вторых моментов координаты, импульса и их произведения, полученной из уравнения Линдблада. Выведено уравнение для плотности энтропии и показано, что плотность энтропии согласно уравнению Линдблада возрастает.

Ключевые слова: открытая квантовая система; квантовый гармонический осциллятор с диссипацией; уравнение для плотности квантовой энтропии.

Поступила в редакцию 27.02.2018; принята к опубликованию 16.03.2018

The Lindblad equation for a quantum dissipative harmonic oscillator

V. S. Kirchanov
Perm National Research Polytechnic University
Russia, 6140990, Perm, Komsomolsky prospect, 29a
email: kirchanv@rambler.ru

Lindblad's equation is obtained for a quantum harmonic oscillator with linear dissipation in a form convenient for applications. The operator of the equation contains the usual linear Liouville superoperator, which includes the Hamiltonian and the dissipation energy operator, and the Lindblad quadratic superoperator. Lindblad's superoperator consists of the sum of the operators "pulse diffusion" and "coordinate diffusion" acting in the phase space, and the difference between the "dissipation rate" operator of the pulse and the coordinate in the phase space. A solution of the system of equations is found for the second moments of the coordinate, the momentum, and their product obtained from the Lindblad equation. The equation for the entropy density is derived and it is shown that the entropy density according to the Lindblad equation increases.

Keywords: open quantum system; quantum harmonic oscillator with dissipation; equation for the density of quantum entropy.

Received 27.02.2018; accepted 16.03.2018

doi: 10.17072/1994-3598-2018-2-05-12

Введение

Изучение открытых систем является одной из важнейших задач современной физики. Открытыми системами в широком смысле называются системы, которые обмениваются с окружающей средой веществом, энергией, импульсом и информацией [1]. В исследовании классических открытых систем достигнуты определенные успехи в рамках неравновесной статистической термодинамики [2]. Мы будем рассматривать открытые квантовые системы, которые обмениваются со средой только энергией и информацией. Такие системы являются диссипативными.

Важность информационного аспекта при изучении физических явлений была отмечена еще Бриллюэном [3]. Связь динамики и информации обсуждается в книге Кадомцева [4]. Связи квантовых измерений с открытыми квантовыми системами посвящены книга [5] и обзор [6] Менского. Это направление можно назвать «информационной физикой».

Обзор различных подходов к описанию квантовых диссипативных систем содержится в статьях Тарасова [7, 8]. Открытые квантовые системы с математической точки зрения описываются квантовым случайным процессом и квантовой регрессионной теоремой (см. работу [9], книгу Холево [10] и важную работу Стратоновича [11]). В теории магнитной релаксации уже давно используется метод случайных траекторий, позволяющий получить точное уравнение Неймана–Фоккера–Планка для условных квантовых средних (см. монографию Александрова [12]).

Проблема связана с получением единого уравнения, описывающего динамику, диссипацию и измерения открытых квантовых систем. Наиболее существенными являются результаты Линдблада [13], а также Горини, Коссаковски и Сударшана [14], которые получили управляющее уравнение для эволюции наблюдаемых, используя квантовые динамические полугруппы (марковские полугруппы в сепарабельном гильбертовом пространстве). Это уравнение является некоммутативным аналогом прямого уравнения Неймана–Колмогорова для квантовой решетки и открывает собой иерархию управляющих операторных уравнений [15]. В случае классической решетки уравнение Линдблада превращается в уравнение Неймана–Фоккера–Планка, которое используется для описания диффузионных процессов в спиновых системах [12, 15].

Теория открытых квантовых систем подробно рассмотрена в книге Бройера и Петруччионе [17]. Так, в главе 3 и п. 3.4 введено квантовое оптическое основное уравнение, подробно описано применение уравнений Линдблада к различным моделям и резервуарам. В п. 10.2 затухающий гармонический осциллятор рассмотрен в случае немарковской динамики в физических процессах и упомянута работа [18], в которой даны описания Шредингера, Гейзенберга и Вейля–Вигнера–Мояла уравнения Линдблада с деформированной диссипацией. В [19] для открытых квантовых систем получено уравнение Линдблада с деформированными квантовыми осцилляторами (см. также статью Стратоновича [11]).

Для описания квантовых диссипативных систем в квантовой статистической механике существуют вариант уравнений Линдблада с квадратичными операторами, но без двойных коммутаторов, и обобщение мастер-уравнения Цванцига [20].

Отметим, что уравнение Линдблада для открытых квантовых систем играет ту же роль, что и уравнение Неймана для замкнутых квантовых систем. Его принципиальное отличие от уравнения Неймана, которое оно включает в себя, состоит в наличии двойных коммутаторов, т.е. уравнение Линдблада содержит квадратичные супероператоры, а уравнение Неймана – только линейный супероператор Лиувилля.

Уравнение Линдблада для открытых квантовых систем за счет дополнительных диссипативных операторов к уравнению Неймана для статистического оператора дает диффузионное приближение, в отличие от релаксационного, которое ранее часто вводилось в уравнения Неймана для замкнутых квантовых систем по теории возмущений [21].

Автор не ставил задачу даже упомянуть все работы по открытым квантовым системам, поскольку это сделали еще в 2002 г. в своей фундаментальной книге Бройер и Петруччионе [17].

Целью нашей работы являются приведение уравнения Линдблада в удобную для применений форму, точное решение системы уравнений для вторых моментов импульса и координаты и получение уравнения для плотности квантовой энтропии из уравнения Линдблада.

1. Уравнение Линдблада для статистического оператора

Известно, что для классической системы с линейной диссипацией можно ввести диссипативную функцию F

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k,$$

определяющую интенсивность диссипации энергии в системе. Тогда справедливо уравнение [22]:

$$\frac{dH}{dt} = -2F, \tag{1.1}$$

где H – функция Гамильтона, c_{jk} – постоянные. В случае классического одномерного осциллятора с диссипацией имеем

$$dH + c\dot{q}^2 dt = dH + c\dot{q}dq = 0.$$

Используя равенства $d(pq) = pdq + qdp$ и $p = m\dot{q}$, получаем

$$d\left(H+cpq\right)=cqdp.$$

Классической переменной cpq соответствует оператор [23]:

$$W=\frac{1}{2}c\left(pq+qp\right)=\frac{1}{2}c\left\{p,q\right\}. \qquad (1.2)$$

где $\{A,B\}=AB+BA$ – антикоммутатор.

Таким образом, можно ввести эффективный гамильтониан, описывающий квантовый гармонический осциллятор с линейной диссипацией в виде

$$H_{eff}=H+W=T+U+W, \qquad (1.3)$$

где T – оператор кинетической энергии, U – оператор потенциальной энергии, W – оператор энергии диссипации.

Помимо квантования диссипативной функции введение оператора энергии диссипации может быть обосновано применением вариационного принципа Седова [24], который является обобщением принципа наименьшего действия на голономные и неголономные функционалы и последующего канонического квантования [7].

Для описания поведения открытых квантовых систем в условиях малого времени взаимодействия с окружением в рамках квантового марковского процесса применяется марковское основное квантовое уравнение называемое уравнением Линдблада [13, 14, 17].

Пусть уравнение Линдблада [13] для статистического оператора, которое описывает квантовую диссипативную систему, имеет вид [7, 17]

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt}&=-\frac{i}{\hbar}\left[H_{eff},\rho\right]-\\&-\frac{1}{2\hbar^2}\sum_j\left(L_j^+L_j\rho-2L_j\rho L_j^++\rho L_j^+L_j\right),\end{aligned} \qquad (1.4)$$

где $i=\sqrt{-1}$, $\left[A,B\right]=AB-BA$ – коммутатор.

Положим $j=1$ в уравнении (1.4). Введем эрмитовые операторы A и B [5] такие, что $A=A^+$, $B=B^+$ и представим диссипативные операторы L и L^+ в виде

$$L=A-iB, \qquad L^+=A+iB. \qquad (1.5)$$

Тогда уравнение Линдблада (1.4) для статистического оператора принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt}&=-\frac{i}{\hbar}\left[H+W,\rho\right]-\\&-\frac{1}{2\hbar^2}\left(\left[A,\left[A,\rho\right]\right]+\left[B,\left[B,\rho\right]\right]+\right.\\&\left.+i\left[B,\left\{A,\rho\right\}\right]-i\left[A,\left\{B,\rho\right\}\right]\right).\end{aligned} \qquad (1.6)$$

Если ввести эрмитовые супероператоры $\hat{A}$, $\hat{B}$, тогда коммутаторы, антикоммутаторы и двойные коммутаторы примут следующий вид:

$$\begin{aligned}&\hat{A}\rho=\frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left[A,\rho\right], \quad \hat{B}\rho=\frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left[B,\rho\right],\\&\hat{A}_+\rho=\frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left\{A,\rho\right\}, \quad \hat{B}_+\rho=\frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left\{B,\rho\right\},\\&\hat{A}^2\rho=\frac{1}{2\hbar^2}\left[A,\left[A,\rho\right]\right],\\&\hat{B}^2\rho=\frac{1}{\sqrt{2}\hbar}\left[B,\left[B,\rho\right]\right].\end{aligned} \qquad (1.7)$$

Уравнение Линдблада(1.6) примет форму

$$\frac{d\rho}{dt}=-\hat{L}_{eff}\rho-\hat{\Omega}\rho=-\hat{L}_{eff}\rho-\hat{K}\rho-i\hat{M}\rho, \qquad (1.8)$$

где линейный супероператор Лиувилля

$$\hat{L}_{eff}\ldots=\hbar^{-1}\left[\hat{H}_{eff},\ldots\right]. \qquad (1.9)$$

Оператор Линдблада $\hat{\Omega}$ (квадратичный комплексный супероператор) запишется в виде:

$$\hat{\Omega}\equiv\hat{A}^2+\hat{B}^2+i\hat{B}\hat{A}_+-i\hat{A}\hat{B}_+=\hat{K}+i\hat{M}. \qquad (1.10)$$

Пример 1. Если операторы $A=\alpha p$, $B=\beta q$ [5], где α, β – действительные числа, p и q операторы импульса и координаты соответственно, то уравнение (1.6) становится следующим:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt}&=-\frac{i}{\hbar}\left[H+W,\rho\right]-\\&-\frac{1}{2\hbar^2}\left(\alpha^2\left[p,\left[p,\rho\right]\right]+\beta^2\left[q,\left[q,\rho\right]\right]-\right.\\&\left.-i\alpha\beta\left[p,\left\{q,\rho\right\}\right]+i\alpha\beta\left[q,\left\{p,\rho\right\}\right]\right).\end{aligned} \qquad (1.11)$$

Полагая гамильтониан в (1.11)

$$\begin{aligned}H+W&=T+U+W=\\&=ap^2+bq^2+\frac{1}{2}c\left(pq+qp\right),\end{aligned} \qquad (1.12)$$

получаем уравнение Линдблада для гармонического осциллятора, совершающего движение с диссипацией в фазовом пространстве координат и импульсов.

В уравнении(1.11) оператор Гамильтона:

$$H=ap^2+bq^2, \qquad (1.13)$$

оператор энергии диссипации:

$$W=\frac{1}{2}c\left\{p,q\right\}, \qquad (1.14)$$

оператор диффузии импульса и координаты в фазовом пространстве:

$$\hat{K}\ldots=\frac{\alpha^2}{2\hbar^2}\left[p,\left[p,\ldots\right]\right]+\frac{\beta^2}{2\hbar^2}\left[q,\left[q,\ldots\right]\right], \qquad (1.15)$$

оператор «скорости диссипации» импульса и координаты в фазовом пространстве:

$$i\hat{M}\ldots = i\frac{\alpha\beta}{2\hbar^2}\left[p,\{q,\ldots\}\right] - i\frac{\alpha\beta}{2\hbar^2}\left[q,\{p,\ldots\}\right]. \quad (1.16)$$

Таким образом, уравнение Линдблада (1.11) описывает движение квантовой частицы в фазовом пространстве, при котором происходят рассеяние энергии частицы, диффузия импульса и диффузия координаты, непрерывная передача среде импульса и координаты с определенной «скоростью», сопровождаемое их частичным перекрестным восстановлением.

Уравнение (1.11) включает в себя как частные случаи – уравнение Калдейры–Легеттта [25] и уравнение Менского [6], полученное из теории квантовых измерений с точностью до коэффициентов, в котором отсутствует последнее слагаемое уравнения (1.11).

Пример 2. Для рассмотрения осциллятора в представлении Фока (в абстрактном гильбертовом пространстве) вводятся неэрмитовые операторы рождения a^+ и уничтожения a и собственные состояния оператора $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ [23]:

$$\begin{aligned} a^+ &= \frac{i}{\sqrt{2m\omega}}\left(p - im\omega\right), \\ a &= \frac{i}{\sqrt{2m\omega}}\left(p + im\omega\right), \quad \left[a, a^+\right] = 1. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Принимая $L = a$, $L^+ = a^+$ и выражая через них эффективный гамильтониан в (1.4), получаем уравнение Линдблада с комплексным гамильтонианом через операторы рождения и уничтожения:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \\ &= -\frac{i}{\hbar}\left[\hbar\omega\left(aa^+ + \frac{1}{2}\right) - \frac{i\hbar c}{4}\left(a^{+2} - a^2\right), \rho\right] + \\ &+ \frac{1}{2\hbar^2}\left(\left[a\rho, a^+\right] + \left[a, \rho a^+\right]\right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Это уравнение описывает поведение квантового осциллятора, взаимодействующего с осцилляторами термостата.

2. Уравнение Линдблада для операторов наблюдаемых величин

Уравнение Линдблада для операторов наблюдаемых величин D имеет вид [11, 13]:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \frac{i}{\hbar}\left[H + W, D\right] + \\ &+ \frac{1}{2\hbar^2}\sum_j\left(2L_j^+ D L_j - L_j^+ L_j D - D L_j^+ L_j\right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Полагая $j = 1$ и заменяя операторы L и L^+ на эрмитовые операторы A и B по формуле (1.5), получаем уравнение(2.1) в виде:

$$\frac{dD}{dt} = i\hat{L}D - \left(\hat{A}^2 D + \hat{B}^2 D + i\hat{B}_+\hat{A}D - i\hat{A}_+\hat{B}D\right). \quad (2.2)$$

Если произвести усреднение (2.2) по формуле $\langle D\rangle = \mathrm{Sp}(\rho D)$, то уравнение для средних примет вид

$$\begin{aligned} \left\langle\frac{dD}{dt}\right\rangle &= \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[H + W, D\right]\right\rangle - \\ &- \frac{1}{2\hbar^2}\left(\left\langle\left[A,\left[A,D\right]\right]\right\rangle + \left\langle\left[B,\left[B,D\right]\right]\right\rangle + \right. \\ &\left. + i\left\langle\left\{B,\left[A,D\right]\right\}\right\rangle - i\left\langle\left\{A,\left[B,D\right]\right\}\right\rangle\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Представляя, как и ранее, $A = \alpha p$, $B = \beta q$ и выбирая оператор $D = p$ и $D = q$, получаем для средних значений оператора импульса и оператора координаты следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \left\langle\frac{\partial p}{\partial t}\right\rangle &= -a\langle q\rangle - 2\frac{\alpha\beta}{\hbar}\langle p\rangle, \\ \left\langle\frac{\partial q}{\partial t}\right\rangle &= b\langle p\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Эти уравнения необходимо сравнить с уравнениями для средних, которые получаются из квантового динамичного диссипативного процесса, котрый описывается марковской совокупностью [11, 21]

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{m} + \xi(t), \\ \dot{p} &= -\frac{m\omega^2}{2}q - \gamma p + \eta(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\xi(t)$, $\eta(t)$ – дельта-коррелированные случайные процессы. Для них справедливы сооотношения:

$$\begin{aligned} \left\langle\{\xi(t_1)\xi(t_2)\}\right\rangle &= 2U^2\delta(t_1 - t_2), \\ \left\langle\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}\right\rangle &= 2V^2\delta(t_1 - t_2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $|U| = \beta$, $|V| = \alpha$.

После усреднения (2.6), принимая во внимание, что $\langle\xi(t)\rangle = \langle\eta(t)\rangle = 0$, получаем для средних значений координаты и импульса уравнения:

$$\begin{aligned} \langle\dot{q}\rangle &= \frac{p}{m}, \\ \langle\dot{p}\rangle &= -\frac{m\omega^2}{2}\langle q\rangle - \gamma\langle p\rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Сравнивая уравнения (2.7) и (2.5) получаем

$$a = \frac{m\omega^2}{2}, \quad b = \frac{1}{m}, \quad c = 2\frac{\alpha\beta}{\hbar} = 2\delta. \quad (2.8)$$

Решения системы (2.7) имеют вид

$$\langle q\rangle(t)=\langle q\rangle_0 e^{-\delta t}\cos\omega t+ +\left(b\langle p\rangle_0-3\delta\langle q\rangle_0\right)\frac{\sin\omega t}{\omega}, \tag{2.9}$$

$$\langle p\rangle(t)=\langle p\rangle_0 e^{-\delta t}\cos\omega t- -\left(\delta\langle p\rangle_0+a\langle q\rangle_0\right)e^{-\delta t}\frac{\sin\omega t}{\omega}. \tag{2.10}$$

Считая оператор D последовательно равным p^2, q^2, $\{p,q\}/2$, получаем систему для вторых моментов:

$$\begin{gathered}\left\langle\frac{\partial p^2}{\partial t}\right\rangle=-4\delta\left\langle p^2\right\rangle-a\left\langle\{p,q\}\right\rangle+\beta^2,\\ \left\langle\frac{\partial q^2}{\partial t}\right\rangle=b\left\langle\{p,q\}\right\rangle+\alpha^2,\\ \frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial\{p,q\}}{\partial t}\right\rangle=-a\left\langle q^2\right\rangle+b\left\langle p^2\right\rangle-\delta\left\langle\{p,q\}\right\rangle.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Эти уравнения совпадают с точностью до коэффициентов с уравнениями, полученными Стратоновичем [11], а также приведенные Менским [6]. Мы решим эту систему методом Лапласа. Обозначив

$$\begin{gathered}\left\langle p^2\right\rangle=x,\quad\left\langle q^2\right\rangle=y,\quad\{p,q\}=z,\\ \dot{x}(t)\circ\!-\!\bullet\, sX(s)-x_0,\\ \dot{y}(t)\circ\!-\!\bullet\, sY(s)-y_0,\\ \dot{z}(t)\circ\!-\!\bullet\, sZ(s)-z_0,\end{gathered} \tag{2.12}$$

получим алгебраическую систему для изображений X, Y, Z:

$$\begin{gathered}X(s+4\delta)+aZ=x_0+\beta^2,\\ Ys-bZ=y_0+\alpha^2,\\ -Xb+Ya+\left(\delta+\frac{1}{2}s\right)Z=\frac{1}{2}z_0.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Решая систему методом определителей Крамера, получаем три уравнения:

$$\begin{aligned}&X\cdot\Delta=\\ &=\left(x_0+\beta^2\right)s^2+\\ &\quad+s\left[2\delta\left(x_0+\beta^2\right)-az_0\right]+\\ &\quad+2\left(y_0+\alpha^2\right)a^2+\left(x_0+\beta^2\right)ab,\\ &Y\cdot\Delta=\left(y_0+\alpha^2\right)s^2+\\ &\quad+s\left[6\delta\left(y_0+\alpha^2\right)+2bz_0\right]+\\ &\quad+2b^2\left(x_0+\beta^2\right)+\left(y_0+\alpha^2\right)\left[2ab+8\delta^2\right]+\\ &\quad+4b\delta z_0,\\ &Z\cdot\Delta=z_0s^2+\\ &\quad+s\left[4\delta z_0+2\delta\left(x_0+\beta^2\right)-2a\left(y_0+\alpha^2\right)\right]-\\ &\quad-8a\delta\left(y_0+\alpha^2\right),\end{aligned} \tag{2.14}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered}\Delta=\left(s+2\delta\right)\left|\left(s+2\delta\right)^2+4\omega^2\right|,\\ \omega^2=ab-\delta^2.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Используя формулу [26]

$$\frac{s^2+g_ks+w_k}{\Delta}\circ\!-\!\bullet\, e^{-\delta t}\left(F_k\sin 2\omega t+G_k\right), \tag{2.16}$$

где

$$\begin{aligned}&F_k=\frac{1}{4\omega^2}\Big[\left(4\delta^2-4\omega^2+ag_k+w_k\right)+\\ &+4\omega^2\left(2a+g_k\right)^2\Big]^2,\\ &G_k=\frac{4\delta^2-4\delta g_k+w_k}{4\omega^2},\qquad k=1,2,3,\end{aligned} \tag{2.17}$$

получаем следующие решения системы (2.11):

$$\begin{gathered}\left\langle p^2\right\rangle(t)=e^{-\delta t}\left(F_1\sin 2\omega t+G_1\right),\\ \left\langle q^2\right\rangle(t)=e^{-\delta t}\left(F_2\sin 2\omega t+G_2\right),\\ \left\langle\{p,q\}\right\rangle(t)=e^{-\delta t}\left(F_3\sin 2\omega t+G_3\right).\end{gathered} \tag{2.18}$$

Вторые моменты (2.18) пропорциональны средним значениям кинетической, потенциальной и диссипативной энергиям гармонического осциллятора с затуханием. В обзоре [6] приведены только стационарные решения системы (2.11). Релаксация квантового осциллятора к термодинамическому равновесию рассматривалась в книге [27].

3. Уравнение для плотности энтропии

Получим уравнение для плотности энтропии s, используя уравнение Линдблада. Введем оператор плотности энтропии $\eta=-\ln\rho$. Тогда

$$s=\langle\eta\rangle=-\mathrm{Sp}\left(\rho\ln\rho\right). \tag{3.1}$$

Возьмем производную по времени от плотности энтропии, считая, что она коммутирует с операцией шпура, получим

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}&=-\mathrm{Sp}\frac{d}{dt}\left(\rho\ln\rho\right)=\\ &=-\mathrm{Sp}\left(\frac{d\rho}{dt}\ln\rho\right)-\mathrm{Sp}\left(\rho\rho^{-1}\frac{d\rho}{dt}\right).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Так как шпур коммутатора равен нулю, то, используя уравнение (3.1), получаем $\mathrm{Sp}(d\rho/dt)=0$, и уравнение принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}=&-\mathrm{Sp}\left(\left[H+W,\rho\right]\ln\rho\right)+\\ &+\frac{1}{2\hbar^2}\Big(\mathrm{Sp}\left(\left[A,\left[A,\rho\right]\right]\ln\rho\right)+\\ &+\mathrm{Sp}\left(\left[B,\left[B,\rho\right]\right]\ln\rho\right)+\\ &+i\,\mathrm{Sp}\left(\left[B,\left[A,\rho\right]\right]\ln\rho\right)-\\ &-i\,\mathrm{Sp}\left(\left[A,\left[B,\rho\right]\right]\ln\rho\right)\Big).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Используя свойства шпура [9] (см. приложение (п.5)), три первых члена (3.3) обращаем в нуль. Остается:

$$\frac{d\langle\eta\rangle}{dt}=-\frac{i}{2\hbar^2}\left(2\langle[B,A]\eta\rangle+\langle B\eta A\rangle-\langle A\eta B\rangle\right).\quad(3.4)$$

Уравнение для плотности энтропии при замене операторов A и B на операторы p и q становится следующим:

$$\frac{d\langle\eta\rangle}{dt}=\delta\langle\eta\rangle+i\frac{\delta}{\hbar}\left(\langle q\eta p\rangle-\langle p\eta q\rangle\right).\qquad(3.5)$$

Оценим второе слагаемое. Разложим $\ln\rho$ в ряд, удержим линейный член

$$\eta=-\ln\rho=-(\rho-1)-\frac{(\rho-1)^2}{2}\ldots,\quad 0\le\rho\le 2.\qquad(3.6)$$

Уравнение (3.5) примет вид

$$\frac{d\langle\eta\rangle}{dt}-\delta\langle\eta\rangle=-\delta.\qquad(3.6)$$

Применяя преобразование Лапласа к (3.6), получаем, что плотность энтропии, вычисленная с помощью уравнения Линдблада, возрастает, в отличие от плотности энтропии в уравнении Неймана [28]:

$$\langle\eta\rangle=e^{\delta t}\left(\langle\eta\rangle_0-\delta\right).\qquad(3.7)$$

4. Заключение

Затухающий гармонический осциллятор является фундаментальной моделью в классической и квантовой механике. С другой стороны, уравнение Линдблада является основным уравнением для квантовых динамических диссипативных систем. Нами получено уравнение Линдблада для статистического оператора в форме (8), в которой все операторы являются эрмитовыми. Оператор уравнения Линдблада для квантового гармонического осциллятора с линейной диссипацией включает в себя супероператор Лиувилля, состоящий из гамильтониана и оператора энергии диссипации, и квадратичный супероператор Линдблада, состоящий из суммы операторов диффузии импульса и диффузии координаты и разности операторов скорости рассеяния импульса и координаты, действующих в фазовом пространстве.

Уравнение Линдблада для операторов наблюдаемых величин после усреднения приводится к системе уравнений для средних значений и к системе для вторых моментов. Эта система была решена. Вторые моменты, которые пропорциональны средним значениям кинетической, потенциальной и энергии диссипации, затухают по экспоненте и содержат осциллирующие члены с удвоенной частотой.

Уравнение для плотности энтропии, полученное из уравнения Линдблада, приводит к возрастанию плотности энтропии со временем.

В заключение отметим, что уравнение Линдблада имеет безупречное математическое и физическое обоснование, в том числе через квантовые динамические полугруппы, теорию квантовых случайных процессов, квантовую регрессионную теорему, и включает в себя уравнения, получаемые из теории квантовых измерений и различных модельных представлений.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания и указание на статьи, которые ему ранее не были известны.

Приложение

Пусть $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ – матрица некоммутирующих друг с другом операторов a, b, c, d.

Определитель этих операторов

$$\det=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-cb,\qquad(\text{п. }1)$$

тогда коммутатор двух операторов a и b можно представить в виде определителя

$$\begin{vmatrix}a & a\\ b & b\end{vmatrix}=ab-ba=[a,b],\qquad(\text{п. }2)$$

а антикоммутатор этих операторов принимает вид

$$\begin{vmatrix}a & -a\\ b & b\end{vmatrix}=ab+ba=\{a,b\}.\qquad(\text{п. }3)$$

Порядок умножения операторов в определителях слева направо.

Преимущество такого обозначения состоит в том, что с помощью единой конструкции описываются коммутаторы, антикоммутаторы и четверки операторов.

Пример: уравнение Линдблада (1.11) можно представить в виде

$$\frac{d\rho}{dt}=\begin{vmatrix}\hat A & -\hat B\\ \hat B & \hat A\end{vmatrix}\rho+i\begin{vmatrix}\hat B & \hat B_+\\ \hat A & \hat A_+\end{vmatrix}\rho= \\ =\hat A^2\rho+\hat B^2\rho+i\hat B\hat A_+\rho-i\hat A\hat B_+\rho.\qquad(\text{п. }4)$$

Полезны также следующие соотношения:

$$\begin{gathered}[A,BC]=[A,B]C+B[A,C],\\ [AB,C]=A[B,C]+[A,C]B,\\ [q_j,p_j]=i\hbar,\quad [\{p_j,q_j\},p_j]=2i\hbar p_j,\\ [\{p_j,q_j\},q_j]=-2i\hbar q_j,\\ \mathrm{Sp}[A,B]=0,\quad \mathrm{Sp}\,A[B,\rho]=\mathrm{Sp}[A,B]\rho,\\ \mathrm{Sp}\,A[[B,\rho],C]=\mathrm{Sp}[B,[A,C]]\rho,\\ \mathrm{Sp}\,A[B,\{C,\rho\}]=\mathrm{Sp}\{[A,B],C\}\rho.\end{gathered}\qquad(\text{п. }5)$$

Список литературы

1. *Зубарев Д. Н.* Открытая система // Физическая энциклопедия. Т. 3. М.: Большая Российская энциклопедия, 1992. 678 с.
2. *Пригожин И. Р.* От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках. М.: Наука, 1985, 372 с.
3. *Бриллюэн Л.* Научная неопределенность и информация. М.: Мир, 1966. 271 с.
4. *Кадомцев Б. Б.* Динамика и информация. М.: Успехи физических наук, 1999. 394 с.
5. *Менский М. Б.* Квантовые измерения и декогеренция. М.: Физматлит, 2001. 232 с.
6. *Менский М. Б.* Диссипация и декогеренция квантовых систем // Успехи физических наук. 2003. Т. 173. № 11. С.1199–1219.
7. *Тарасов В. Е.* Квантовые диссипативные системы. I. Каноническое квантование и квантовое уравнение Лиувилля // Теоретическая и математическая физика. 1994. Т. 100. № 3. С. 402–417.
8. *Тарасов В. Е.* Квантовые диссипативные системы. III. Определение и алгебраическая структура // Теоретическая и математическая физика. 1997. Т. 110. № 1. С. 73–85.
9. *Холево А. С.* Квантовые случайные процессы и открытые системы. М.: Мир, 1988. 223 с.
10. *Холево А. С.* Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980. 320 с.
11. *Stratonovich R. L.* The quantum langevin forces for dynamical systems with linear dissipation and the Lindblad equation // Physica A. 1997. Vol. 236. N. 3–4. P. 335–352.
12. *Александров И. В.* Теория магнитной релаксации. М.: Наука, 1975. 400 с.
13. *Lindblad G.* On the generator of quantum dynamical semigroups // Communications in Mathematical Physics. 1976, Vol. 48, N. 2. P. 119–130.
14. *Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E. C. G.* Completely positive dynamical semigroups of *N*-level systems // Journal of Mathematical Physics, 1976, Vol. 17, N. 5. P. 821–825.
15. Купершмидт Б.А. КП или МКП: Некоммутативная математика лагранжевых, гамильтоновых и интегрируемых систем. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002, 624 с.
16. *Кирчанов В. С.* Влияние вращательных качаний и скачков на ядерный квадрупольный резонанс // Известия высших учебных заведений. Физика. 2000. № 9. С. 89–95.
17. *Бройер Х.-П., Петруччионе Ф.* Теория открытых квантовых систем. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 824 с.
18. *Săndulescu A., Scutaru H.* Open quantum systems and the damping of collective modes in deep inelastic collisions // Annals of Physics. 1987. Vol. 173. N. 2. P. 277–317.
19. *Isar A., Sandulescu A., Scheid W.* Lindblad master equation for the damped harmonic oscillator with deformed dissipation // Physica A. 2003. Vol. 322. P. 233–246.
20. *Кирчанов В. С.* Применение энтропии Реньи для описания квантовых диссипативных систем в статистической механике // Теоретическая и математическая физика. 2008. Т. 156. № 3. С. 444–453.
21. *Кляцкин В. И.* Статистические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 426 с.
22. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
23. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974. С. 84.
24. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи математических наук. 1965. Т. 20. № 5. С. 121–180.
25. *Caldeira A.O., Legett A. J.* Path integral approach to quantum Brownian motion // Physica A. 1987. Vol. 121. N. 3. P. 587–616.
26. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1974. 836 с.
27. *Переломов А. М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Мир, 1987. 272 с.
28. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука. 1971. 350 с.

References

1. Zubarev D. N Open system. In: *Physical encyclopedia*, vol. 3, Moscow: The Great Russian Encyclopedia, 1992. 678 p. (In Russian).
2. Prigogine I. R. *From being to becoming: Time and complexity in the physical sciences*. London: Freeman & Co, 1981, 272 p.
3. Brillouin L. *Scientific uncertainty and information*. Cambridge: Academic Press, 1964. 178 p.
4. Kadomtsev B. B. *Dynamics and Information*. Moscow: Physics–Uspekhi, 1999. 400 p. (In Russian)
5. Menskii M. B. *Quantum measurements and decoherence*. M.: Fizmatlit, 2001. 232 p. (In Russian)
6. Menskii M. B. Dissipation and decoherence in quantum systems. *Physics–Uspekhi*, 2003, vol. 46, pp. 1163–1182.
7. Tarasov V. E. Quantum dissipative systems. I. Canonical quantization and quantum Liouville equation. *Theoretical and mathematical physics*, 1994, vol. 100, no. 3, pp. 1100–1112.
8. Tarasov V. E. Quantum dissipative systems. III. Definition and algebraic structure. *Theoretical and mathematical physics*, 1997, vol. 110, no. 1, pp. 57–67.
9. Kholevo A. S. *Quantum random processes and open systems*. Moscow: Mir, 1988, 223 p. (In Russian).

10. Kholevo A. S. *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*. Pisa: Edizioni della Normale, 2011. 334 p.
11. Stratonovich R. L. The quantum langevin forces for dynamical systems with linear dissipation and the Lindblad equation. *Physica A*, 1997, vol. 236, no. 3–4, pp. 335–352.
12. Aleksandrov I. V. *The theory of magnetic relaxation*. Moscow: Nauka, 1975, 400 p. (In Russian)
13. Lindblad G. On the generator of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 1975, vol. 48, no. 2, p. 119–130.
14. Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of *N*-level systems. *Journal of Mathematical Physics*, 1976, vol. 17, no. 5, pp. 821–825.
15. Kupershmidt B.A. KP or MKP: Non-commutative mathematics of Lagrangian, Hamiltonian, and integrable systems. - Moscow-Izhevsk: SRC "Regular and chaotic dynamics", - 2002, 624 p.
16. Kirchanov V. S. Influence of rotational vibrations and jumps on nuclear quadrupole resonance. *Russian Physics Journal*, 2000, vol. 43, no. 9, pp. 797–803.
17. Breuer H.-P., Petruccione F. *The theory of open quantum systems*. Oxford: Oxford University Press, 2010. 824 p.
18. Săndulescu A., Scutaru H. Open quantum systems and the damping of collective modes in deep inelastic collisions. *Annals of Physics*, 1987, vol. 173, no. 2, pp. 277–317.
19. Isar A., Sandulescu A., Scheid W. Lindblad master equation for the damped harmonic oscillator with deformed dissipation. *Physica A*, 2003, vol. 322, pp. 233–246.
20. Kirchanov V. S. Using the Renyi entropy to describe quantum dissipative systems in statistical mechanics. *Theoretical and mathematical physics*, 2008, vol. 156, no. 3, pp. 1347–1355.
21. Klyatskin V. I. *Statistical equations and waves in randomly inhomogeneous media*. Moscow: Nauka, 1980. 426 p. (In Russian).
22. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1976. 224 p.
23. Flugge S. Practical quantum mechanics. Berlin: Springer, 1999. 620 pp.
24. Sedov L. I. Mathematical methods for constructing new models of continuous media. *Russian Mathematical Surveys*, 1965, vol. 20, no. 5, pp. 123–182.
25. Caldeira A. O., Legett A. J. Path integral approach to quantum Brownian motion. *Physica A*, 1987, vol. 121, no. 3, pp. 587–616.
26. Korn G., Korn T. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. Mineola: Dover, 2000, 1152 p.
27. Perelomov A. M. *Generalized coherent states and their applications*. Moscow: Mir, 1987, 272 p. (In Russian)
28. Zubarev D. N. *Nonequilibrium statistical thermodynamics*. Berlin: Springer, 1974. 489 p.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:
Кирчанов В. С. Уравнения Линдблада для квантового диссипативного гармонического осциллятора // Вестник Пермского университета. Физика.2018. № 2 (40). С. 5–12. doi: 10.17072/1994-3598-2018-2-05-12

Please cite this article in English as:
Kirchanov V. S. The Lindblad equation for a quantum dissipative harmonic oscillator. Bulletin of Perm University. Physics, 2018, no. 2 (40), pp. 5–12. doi: 10.17072/1994-3598-2018-2-05-12