

УДК 532.685  
PACS 47.56.+r

## Концентрационная конвекция в наклонном пористом слое в условиях слабой закупорки среды

Л. С. Клименко<sup>†</sup>, Б. С. Марышев

Институт Механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

<sup>†</sup>lyudmilaklimenko@gmail.com

Настоящая работа посвящена математическому моделированию процесса транспорта примеси через пористую среду с учётом взаимодействия примеси со стенками пор и их последующей закупорки. Закупорка пор предполагается слабой, так что влияние адсорбированных частиц на динамику системы учитывается только через изменение проницаемости среды. Процесс фильтрации смеси описан в приближении Дарси–Буссинеска, уравнения получены из законов сохранения массы и импульса. Осаждение частиц примеси описано в рамках линейного МИМ подхода. Изменение проницаемости среды связано с изменением пористости через соотношение Козени–Кармана. Модель применена для исследования концентрационной конвекции в наклонном слое пористой среды. Аналитически показано, что основное состояние системы соответствует режиму стационарной фильтрации вдоль слоя. Численно исследована устойчивость основного состояния по отношению к малым возмущениям двух типов: спиральные и плоские. Выявлено, что в зависимости от типа возмущений можно наблюдать как монотонную, так и колебательную моды неустойчивости. Установлено, что учёт слабой закупорки пор приводит к повышению устойчивости системы и уменьшению частоты колебательной моды. Также показано, что увеличение угла наклона слоя вызывает дополнительное повышение устойчивости основного состояния, причём этот эффект не зависит от типа приложенных возмущений.

**Ключевые слова:** концентрационная конвекция; МИМ модель; закупорка

*Поступила в редакцию 23.04.2026; после рецензии 21.05.2026; принята к опубликованию 21.05.2026*

## Concentration-driven convection in an inclined porous layer with weak pore clogging

L. S. Klimenko<sup>†</sup>, B. S. Maryshev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

<sup>†</sup>lyudmilaklimenko@gmail.com

This work is devoted to the mathematical modeling of impurity transport through a porous medium. The model takes into account the deposition of impurity particles on the pore walls and subsequent clogging of the pores. Pore clogging is assumed to be weak, such that the influence of adsorbed particles on the system's dynamics is taken into account only through changes in the permeability of the medium. The mixture filtration process is described within the Darcy–Boussinesq approximation; the equations are derived from the conservation laws for mass and momentum. The deposition of impurity particles is described within the framework of the linear MIM (mobile–immobile) approach. The change in permeability of the medium is linked to the change in porosity via the Kozeny–Carman relationship. The model is applied to study concentration-driven convection in an inclined layer of the porous medium. It is shown analytically that the

base state of the system corresponds to the regime of steady state filtration along the layer. The stability of the base state with respect to small perturbations of two types — spiral and plane — is investigated numerically. The study has found that depending on the type of perturbations, both monotonic and oscillatory instability modes can be observed. Taking into account weak pore clogging leads to an increased stability of the system and a decreased frequency of the oscillatory mode. Increasing the inclination angle of the layer causes an additional increase in the stability of the base state, and this effect does not depend on the type of applied perturbations.

**Keywords:** concentration-driven convection; MIM model; clogging

*Received 23 April 2026; revised 21 May 2026; accepted 21 May 2026*

doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-65-74

## 1. Введение

Концентрационная конвекция в пористой среде представляет исследовательский интерес в связи со своими многочисленными особенностями (неоднородность структуры, осаждение частиц на стенках, изменение проницаемости и т.д.) [1]. В связи с этим, разработка математической модели, способной учитывать различные осложняющие механизмы, но остающейся «простой» для численного счета является актуальной задачей [2].

Одним из факторов, усложняющих транспорт примеси, является осаждение (сорбция) частиц на стенках пор. Существующие подходы к моделированию процесса осаждения зачастую требуют высоких вычислительных затрат (например, стохастические модели) или знания эмпирических зависимостей параметров среды (например, кинетические модели). В настоящей работе используется подход, позволяющий избежать этих недостатков — МИМ (mobile/immobile media) модель [3]. Согласно этому подходу, примесь делится на две фазы: подвижную, которая переносится вместе с потоком, и неподвижную, адсорбированную на скелете. Перенос примеси описывается уравнением адвекции-диффузии [4], с дополнительным слагаемым, описывающим отток примеси в неподвижную фазу. Также модель содержит дополнительное уравнение, задающее переход примеси между фазами. В зависимости от типа описываемого взаимодействия примеси с твёрдым скелетом среды возможны различные формы последнего уравнения. Более подробную информацию о различных моделях можно найти в [5].

Как известно [6, 7], конвекция в слое пористой среды управляется, прежде всего, двумя безразмерными параметрами: волновым числом и числом Релея–Дарси. Добавление прокачки вдоль слоя приводит к появлению дополнительного управляющего параметра — числа Пекле. Более того, как показано в [8], при наличии фильтрации происходит смена режима неустойчивости — появляется колебательная мода с частотой, пропорциональной числу Пекле. Однако порог возникновения неустойчивости остаётся таким же, как и без добавления прокачки.

Учёт иммобилизации частиц примеси с помощью МИМ подхода приводит к возникновению зависимости критических параметров (числа Релея–Дарси, волнового числа и частоты) от параметров задачи [10, 11].

Проблема неустойчивости конвективных течений в наклонных пористых слоях без учета иммобилизации исследована во многих работах (см., например, [12–14]). В отличие от горизонтального слоя, в наклонном слое наряду с поперечными валами, при больших углах наклона можно наблюдать и продольные, вытянутые вдоль слоя валы [12]. Также в работе [12] выявлено существование порогового значения угла для появления поперечных вихрей; это значение было также подтверждено численным решением в работе [13]. В работе [14] исследована двойная диффузионная конвекция в наклонном пористом слое: при увеличении угла наклона наблюдается повышение устойчивости. При этом продольным вихрям соответствует монотонная мода неустойчивости, а поперечные вихри переходят из монотонного режима в колебательный с ростом угла наклона. Эта проблема прежде всего актуальна для геологических систем, например, при исследовании течения грунтовых вод с распространением различных примесей.

В настоящей работе проведено исследование влияния иммобилизации примеси и последующей закупорки на возникновение концентрационной конвекции. Ранее влияние иммобилизации [10] и слабой закупорки [15] было изучено для горизонтального слоя. Настоящее исследование посвящено случаю наклонного пористого слоя, фильтрация смеси осуществляется внешним потоком вдоль слоя. Исследование проведено для случая малой концентрации примеси, поэтому для описания транспорта примеси была использована линейная МИМ модель [6]. Стоит отметить, что применение линейной модели подразумевает не только малые значения концентрации примеси в подвижной фазе, но и в неподвижной тоже. Это исключает доминирование адсорбции примеси над десорбцией. Вследствие чего можно говорить о слабой закупорке среды. Влияние закупорки на динамику системы проявляется в изменении проницаемости, которое связано с пористостью среды через соотношение Козени–Кармана [16].

Настоящая статья состоит из четырёх частей. В первой части обсуждается постановка задачи и математическая модель. Во второй части исследован вид основного состояния и его устойчивость по отношению к малым возмущениям двух типов: плоские и спиральные. В третьей части представлены карты устойчивости в пространстве параметров системы. Последняя часть является заключением и посвящена обсуждению результатов работы.

## 2. Постановка задачи

Для описания концентрационной конвекции в пористой среде с учетом иммобилизации примеси мы используем линейную ММ модель [6]. Течение моделируется в рамках модели Релея-Дарси [17]. Настоящее исследование ограничено случаем слабой закупорки. Поскольку наличие адсорбированных частиц приводит к сокращению объёма пор, это в свою очередь приводит к увеличению гидравлического сопротивления среды или падению проницаемости. Для случая слабой закупорки можно считать, что пористость постоянна  $\phi \approx \phi_0$  везде, кроме проницаемости. Более того мы ограничены случаем малых концентрация, можно предположить, что оседание частиц на стенки пор происходит достаточно медленно без существенного изменения формы пористой среды. В этом случае можно использовать соотношение Козени-Кармана [16]:

Таким образом, замкнутая система уравнений, которая описывает транспорт примеси в пористой среде с учётом слабой закупорки, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi_0 \tilde{C} + \tilde{Q} &= \phi_0 D \Delta \tilde{C} - \mathbf{u} \nabla \tilde{C}, \\ \mathbf{u} &= -\frac{\kappa \phi}{\eta} \nabla p - \rho \beta_c \mathbf{g} \tilde{C}, \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} &= \alpha \tilde{C} - K_d \tilde{Q}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \kappa \phi &= \gamma \frac{\phi^3}{1-\phi^2}, \quad \phi = \phi_0 - \tilde{Q}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tilde{C}$  – объёмная концентрация подвижной части примеси,  $\tilde{Q}$  – объёмная концентрация неподвижной примеси,  $\mathbf{u}$  – скорость фильтрации,  $p$  – давление,  $D$  – коэффициент диффузии,  $\phi$  – пористость,  $\phi_0$  – пористость чистой среды (без примеси),  $\kappa \phi$  – проницаемость среды,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости,  $\rho$  – плотность несущей жидкости,  $\beta_c$  – коэффициент концентрационного расширения,  $\gamma$  – параметр Козени-

Кармана, связанный с геометрическими свойствами пористой среды,  $\mathbf{g}$  – гравитационное ускорение,  $\alpha, K_d$  – коэффициенты массопереноса и коэффициент распределения примеси соответственно [16].

Применим настоящую модель к задаче о фильтрации примеси через бесконечный наклонный горизонтальный слой пористой среды (рис. 1). Предположим, что смесь состоит из несжимаемой жидкости и мелкодисперсной примеси. Фильтрация вдоль слоя осуществляется за счёт заданного постоянного потока. Между верхней и нижней границами поддерживается постоянный градиент концентрации. Продольные границы считаются непроницаемыми для жидкости.

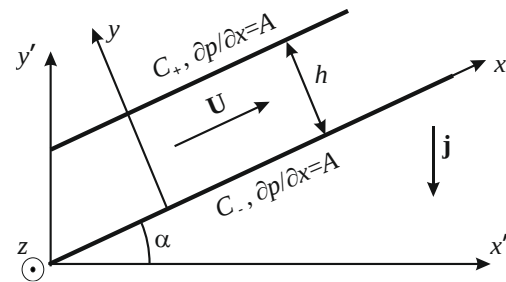


Рис. 1. Конфигурация задачи

Полная система уравнений (1) в безразмерном виде может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_t C + Q &= -\mathbf{U} \cdot \nabla C + \Delta C, \\ U_x &= \frac{\kappa}{\kappa_0} \left( -\frac{\partial}{\partial x} P + R_p C \sin \alpha \right), \\ U_x &= \frac{\kappa}{\kappa_0} \left( -\frac{\partial}{\partial x} P + R_p C \sin \alpha \right), \\ U_z &= -\frac{\kappa}{\kappa_0} \frac{\partial}{\partial z} P, \\ \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \\ \partial_t Q &= aC - bQ, \\ \kappa &= \kappa_0 + \kappa_1 Q, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $C$  – безразмерная концентрация мобильной примеси,  $Q$  – безразмерная концентрация иммобильной примеси,  $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$  – безразмерная скорость фильтрации,  $P$  – безразмерное давление,  $\kappa_0 = \phi_0^3 / (1 - \phi_0^{-2})$  – проницаемость среды без примеси,  $\kappa_1 = \kappa_0 \phi_0 - 3 / (1 - \phi_0^{-1}) C_0$  – малая добавка, связанная с адсорбцией примеси на стенках пор и описывающая слабую закупорку среды.

В качестве единиц измерения при выводе уравнений (2) были выбраны следующие величины: длины –  $h$ , времени –  $h^2 / D$ , скорости –  $D \phi_0 / h$ , давления –  $D \eta \phi_0 / \kappa_0$ , немобильной концентра-

ции –  $\phi_0 C_0$  и мобильной концентрации –  $C_0 = C_+ - C_-$ .

Система (2) содержит следующие безразмерные параметры: число Пекле  $Pe = \kappa_0 Ah / D \phi_0 \eta$ , описывающее интенсивность фильтрации вдоль слоя, число Рейля–Дарси  $Rp = \kappa_0 C_0 \rho \beta_c gh / \eta D \phi_0$ , описывающее интенсивность течения, возникающего из-за сил плавучести, а также безразмерные коэффициенты адсорбции и десорбции  $a = \alpha L^2 / \phi_0 D$ ,  $b = \alpha K_d L^2 / D$ . Как было замечено выше, применение линейной модели накладывает некоторые ограничения на интенсивность адсорбционных процессов, поскольку значительная концентрация примеси не должна накапливаться в немобильной фазе. Математически это означает, что отношение  $a/b$  не должно быть слишком велико, в случае больших  $a$  или малых  $b$ , результат решения такой задачи выходит за рамки применимости модели.

Обсудим граничные условия. Будем полагать, что на границах слоя установлен постоянный градиент концентрации, и они являются непроницаемыми для жидкости. Поток вдоль слоя генерируется постоянным перепадом давления так, что

$$C_{y=0} = 1, \quad C_{y=1} = 0, \\ \int_0^1 U_x dy = \frac{Pe}{\kappa_0} \int_0^1 \kappa dy. \quad (3)$$

### 3. Основное состояние и малые возмущения

Настоящая задача допускает решение, соответствующее замкнутому, стационарному, плоскопараллельному течению, направленному вдоль оси  $x$ . Это решение принято называть «основным» или «базовым течением». Оно обусловлено наклоном среды относительно горизонтали в поле силы тяжести. Будем искать это решение в следующем виде:  $q = Q^0 y$ ,  $c = C^0 y$ ,  $\vec{U} = U^0 y, 0, 0$ .

Тогда из уравнений (2) и (3) находим:

$$P^0 = \left( \frac{R_p}{3} \sin \alpha \frac{3\kappa_0 b + 2\kappa_1 a}{2\kappa_0 b + \kappa_1 a} - Pe \right) x \\ + R_p \left( y - \frac{y^2}{2} \right) \cos \alpha, \\ U^0 = \kappa' \left\{ Pe + R_p \sin \alpha \left( \frac{3\kappa_0 b - \kappa_1 a}{6\kappa_0 b + 3\kappa_1 a} - y \right) \right\}, \\ Q^0 = \frac{a}{b} (1 - y), \quad C^0 = 1 - y, \quad \kappa' = \frac{\kappa_0 + \kappa_1 Q^0}{\kappa_0}. \quad (4)$$

Линейное распределение мобильной примеси совпадает с «классическим» решением, получен-

ным без учёта прокачки и осаждения примеси [12]. Следует отметить, что для наклонного слоя скорость жидкости вдоль слоя больше не является постоянной и зависит от координаты поперёк слоя. Из решения (4) видно, что при отсутствии заданного перепада давления ( $Pe = 0$ ) жидкость течёт вблизи нижней границы слоя в направлении оси  $x$  и вблизи верхней границы – в противоположном направлении. Такое поведение определяется законом сохранения массы и условием постоянства расхода. Заметим, что учёт закупорки приводит к тому, что влияние иммобилизации на основное состояние проявляется во всех искомым величинах, кроме концентрации.

Перейдём к изучению устойчивости основного состояния (4), для этого введём в систему малые возмущения вида:  $Q = Q^0 + q$ ,  $C = C^0 + c$ ,  $\mathbf{U} = (U^0 + u_x, u_y, u_z)$ , при этом  $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 (Q^0 + q)$ .

В этом случае, оставляя только линейные по возмущениям слагаемые в системе (2), можно получить полную задачу для пространственных возмущений в следующем виде:

$$\partial_t (c + q) = \Delta c - U_0 \partial_x c + u_y, \\ u_x = \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_0} Q^0 \right) \{ -\partial_x p + R_p \sin \alpha c \} \\ + \frac{\kappa_1}{\kappa_0} q \{ -\partial_x P_0 + R_p \sin \alpha C_0 \}, \\ u_y = \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_0} Q^0 \right) \{ -\partial_y p + R_p \cos \alpha c \} \\ + \frac{\kappa_1}{\kappa_0} q \{ -\partial_y P_0 + R_p \cos \alpha C_0 \}, \\ u_z = - \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_0} Q^0 \right) \partial_z p, \\ \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0, \\ \partial_t q = ac - bq, \\ c|_{y=0,1} = 0, \quad \mathbf{u}|_{y=0,1} = 0, \quad (5)$$

где символами  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  обозначено дифференцирование по соответствующей координате, а  $\partial_t$  – означает дифференцирование по времени.

Для изучения влияния закупорки, как и ранее [12–14, 18] были рассмотрены малые возмущения двух типов:

1) Спиральные возмущения – продольные валы с осями, параллельными оси  $x$  и вытянутыми в направлении основного течения. Эти валы содержат все три компоненты скорости фильтрации, однако производные по  $x$  координате отсутствуют.

2) Плоские возмущения – поперечные валы с осями, параллельными оси  $z$  и расположенными перпендикулярно основному течению. Для этих

возмущений  $z$  компонента скорости и производные по  $z$  координате отсутствуют.

#### Спиральные возмущения

Перейдём к изучению спиральных возмущений, пропорциональных  $\exp(-i\omega t + ikz)$ , при этом  $k_x = 0$ , все компоненты скорости отличны от нуля. В терминах концентрации и скорости поперёк слоя –  $u_y$  задача (5) запишется в виде:

$$\begin{aligned} -i\omega(c + q) &= (\partial_y^2 - k^2)c + u_y, \\ \partial_y^2 u_y - k^2 u_y + \partial_y u_y \frac{\kappa_1}{\kappa_0 \tilde{\kappa}} \frac{a}{b} &= -k^2 R_p \tilde{\kappa} \cos \alpha c, \\ -i\omega q &= ac - bq, \\ c|_{y=0,1} = u_y|_{y=0,1} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\tilde{\kappa} = 1 + \kappa_1 \kappa_0^{-1} (1 - y) a / b$ . Следует отметить, что прокачка влияет только на скорость вдоль слоя, но не влияет на пороговые значения возникновения конвекции.

$$\begin{aligned} u_x &= R_p \sin \alpha c \left( 1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \frac{a}{b} (1 - y) \right) + \\ &+ \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \left\{ Pe + \frac{R_p}{3} \sin \alpha \left( \frac{3\kappa_0 b - \kappa_1 a}{2\kappa_0 b + \kappa_1 a} - 3y \right) \right\} q, \end{aligned}$$

Проанализируем задачу для предельных случаев.

Для случая отсутствия закупорки (постоянной проницаемости) система (6) приводится к виду

$$\begin{aligned} -i\omega(c + q) &= (\partial_y^2 - k^2)c + u_y, \\ (\partial_y^2 - k^2)u_y &= -k^2 R_p \cos \alpha c, \\ -i\omega q &= ac - bq, \\ u_x &= R_p \sin \alpha c, \end{aligned}$$

что полностью соответствует известной задаче о тепловой конвекции в наклонном слое [12] с точностью до замены поля концентрации на поле температуры.

Заметим также, что без учёта закупорки влияние иммобилизации не оказывает влияния на пороговые значения параметров возбуждения конвекции. Задача (6) допускает решение только с нулевой частотой. Это означает, что спиральным возмущениям соответствует монотонная мода возбуждения конвекции, а соответствующая задача устойчивости не содержит параметры иммобилизации. Подставляя  $\kappa_1 = 0$  в систему (6), находим, что задача для монотонной моды может быть записана в виде

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_y^2 - k^2)c + u_y, \\ (\partial_y^2 - k^2)u_y &= -k^2 R_p \cos \alpha c. \end{aligned}$$

Подставляя решение вида  $c, u_y \sim \sin \pi n y$ , легко получить, что пороговое значение числа Релея–Дарси для возникновения конвекции имеет вид

$$R_p = \frac{(n^2 \pi^2 + k^2)^2}{k^2 \cos \alpha},$$

что совпадает с известным ранее [12].

Для полной же задачи с учётом закупорки (6) можно получить, что неустойчивость тоже возбуждается монотонным образом. Действительно, выделим действительную и мнимую части уравнений (6), считая, что концентрация и скорость действительны, находим, что

$$\begin{aligned} -i\omega(b^2 + ab + \omega^2)c &= 0, \\ \frac{a\omega^2}{b^2 + \omega^2}c &= (\partial_y^2 - k^2)c + u_y, \\ \left( \partial_y^2 - k^2 + \frac{a}{b} \frac{\kappa_1}{\tilde{\kappa}\kappa_0} \partial_y \right) u_y &= -k^2 R_p \tilde{\kappa} \cos \alpha c. \end{aligned} \quad (7)$$

Как видно, первое уравнение системы (7) допускает решение только с нулевой частотой, что приводит к задаче устойчивости монотонной моды. Однако влияние иммобилизации на возбуждение конвекции присутствует, оно будет исследовано численно и описано в разделе «Результаты».

#### Плоские возмущения

Рассмотрим случай плоских возмущений, для которых будем считать, что  $z$  компонента скорости и производные по  $z$  координате отсутствуют. Удобно переписать задачу в терминах функции тока, так что  $u = \partial \psi / \partial y, -\partial \psi / \partial x, 0$ .

Задача (5) для малых нормальных возмущений пропорциональных  $\exp(-i\omega t + ikx)$  переписывается в виде:

$$\begin{aligned} -i\omega(c + q) &= (\partial_y^2 - k^2)c - ik\psi - \tilde{\kappa} u_0 ikc, \\ \partial_y^2 \psi - k^2 \psi &= \tilde{\kappa} R_p (-ik \cos \alpha + \sin \alpha \partial_y) c \\ &- \frac{\kappa_1}{\kappa_0 \tilde{\kappa}} \frac{a}{b} \partial_y \psi + \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \right) \frac{a u_0}{b \tilde{\kappa}} q \\ &+ \frac{\kappa_1}{\kappa_0} u_0 \partial_y q - \frac{\kappa_1}{\kappa_0} R_p \sin \alpha q, \\ -i\omega q &= ac - bq, \\ c|_{y=0,1} = \psi|_{y=0,1} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$u_0 = Pe - R_p y \sin \alpha + \frac{R_p}{3} \sin \alpha \frac{3\kappa_0 b - \kappa_1 a}{2\kappa_0 b + \kappa_1 a}$$

$$\tilde{\kappa} = 1 + \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \frac{a}{b} (1 - y)$$

В случае отсутствия иммобилизации ( $a = 0$ ) и наклона ( $\alpha = 0$ ), настоящая система (8) полностью

совпадает с уравнениями, полученными в работе [12].

Задача (8) не имеет аналитического решения, численное решение будет представлено в следующем разделе. Стоит заметить, что масштабом безразмерного времени в рассматриваемой задаче выбрано диффузионное время, что соответствует очень малой частоте рассматриваемых колебаний. Так, например, характерные периоды для геологических систем составляют как минимум несколько суток.

#### 4. Результаты

Задачи (6) и (8) решались численно методом дифференциальной прогонки [19]. Их решения имеют вид стандартных нейтральных кривых [18]. Для дальнейшего анализа интерес представляют наиболее опасные возмущения, соответствующие минимуму нейтральной кривой  $R_p k$ . На рисунках 2–7 представлены зависимости наиболее опасных возмущений – критических значений числа Релея–Дарси, волнового числа и частоты от параметров задачи.

##### Спиральные возмущения

Как уже было сказано ранее, при учёте иммобилизации и слабой закупорки основной модой неустойчивости по-прежнему является монотонная мода. Однако влияние параметров иммобилизации на порог возбуждения конвекции уже есть. Так, на рис. 2 представлены зависимости критического значения числа Релея–Дарси и волнового числа от параметра адсорбции ( $a$ ). Наличие закупорки приводит к заметному повышению устойчивости основного решения (см. уравнения (4)), при этом оказывает слабое влияние на изменение волнового числа, и, следовательно, вид возмущений остаётся практически неизменным с ростом параметра адсорбции.

На рисунке 3 представлены зависимости критического значения числа Релея–Дарси и волнового числа от параметра десорбции ( $b$ ). Видно, что влияние слабой закупорки заметно только при малых значениях параметра десорбции ( $b < 2$ ). С ростом параметра десорбции влиянием иммобилизации на порог возникновения конвекции, как и на структуру течения можно пренебречь.

##### Плоские возмущения

В отличие от спиральных возмущений для плоских возмущений наличие прокачки приводит к возникновению колебательной моды. Как видно из рис. 4 устойчивость основного режима повышается с ростом скорости прокачки. Учёт закупорки при этом приводит к ещё большему повышению устойчивости. Эта стабилизация особенно сильно влияет на величину пороговых значений числа

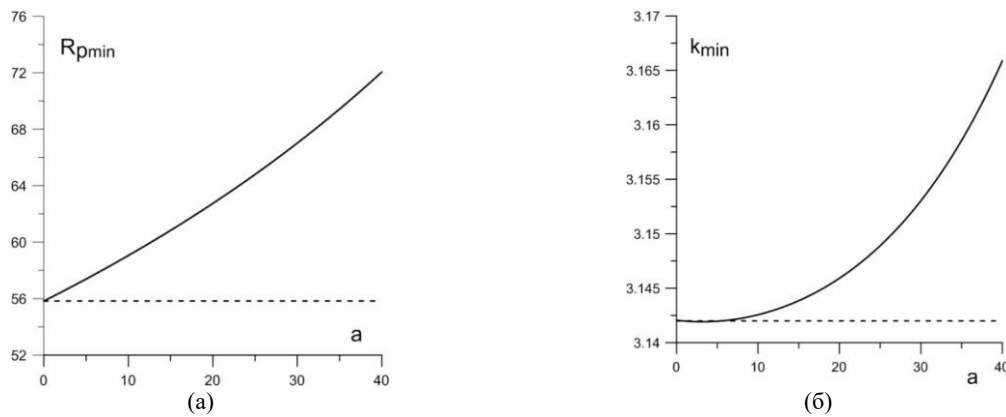
Релея–Дарси, частота и волновое число при этом изменяются слабо.

При больших значениях интенсивности прокачки критическое значение числа Релея–Дарси и соответствующее значение волнового числа стремятся к постоянным значениям. Причиной конвективной неустойчивости является генерация потока жидкости через слой под действием силы тяжести. Однако наклон снижает эффект неустойчивости и увеличивает интенсивность основного потока. Интенсивный поток всегда более стабилен. Эффект стабилизации также выражается в увеличении длины волны (растяжении структуры потока), при низких значениях  $Pe$ . Эффект «сжатия» конвективных валов (увеличение  $k_{min}$  при высоких значениях параметра  $Pe$ ) объясняется высоким градиентом давления, который «сжимает» структуру потока.

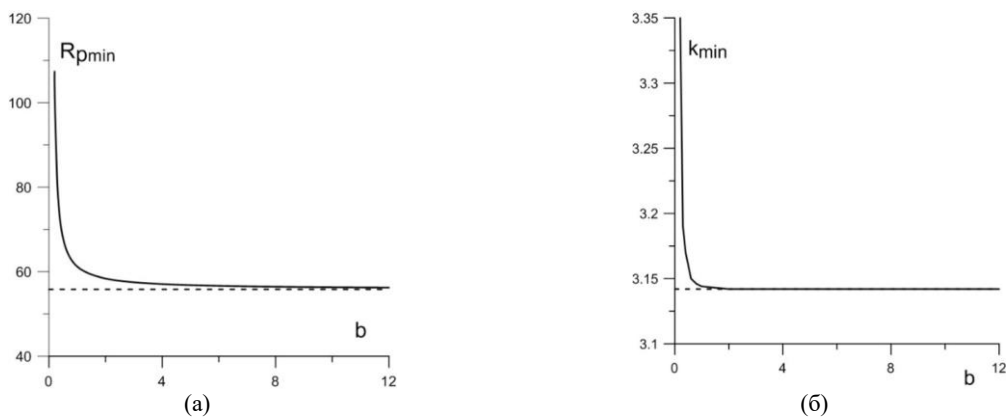
Зависимости критических параметров от параметра десорбции ( $b$ ) для различных углов наклона представлены на рис. 5. Видно, что при учёте закупорки критическое значение числа Релея–Дарси увеличивается с уменьшением параметра десорбции. Такая стабилизация может указывать на более устойчивое состояние системы с меньшей вероятностью возникновения конвективных потоков и изменением динамики жидкости. В работе [14] упоминается, что наиболее интенсивная динамика перехода примесей между фазами подвижности соответствует близким значениям сорбционных параметров. Здесь это приводит к наблюдению наиболее длинных конвективных валов (с малыми значениями  $k_{min}$ ) с наиболее медленной колебательной динамикой.

На рисунке 6 показаны зависимости критических параметров от параметра адсорбции ( $a$ ). Видно, что эффекты адсорбции и десорбции противоположны друг другу, уменьшение параметра адсорбции приводит к уменьшению стабилизации и замедлению колебательной динамики. Учёт закупорки замечен, для больших значений параметра адсорбции.

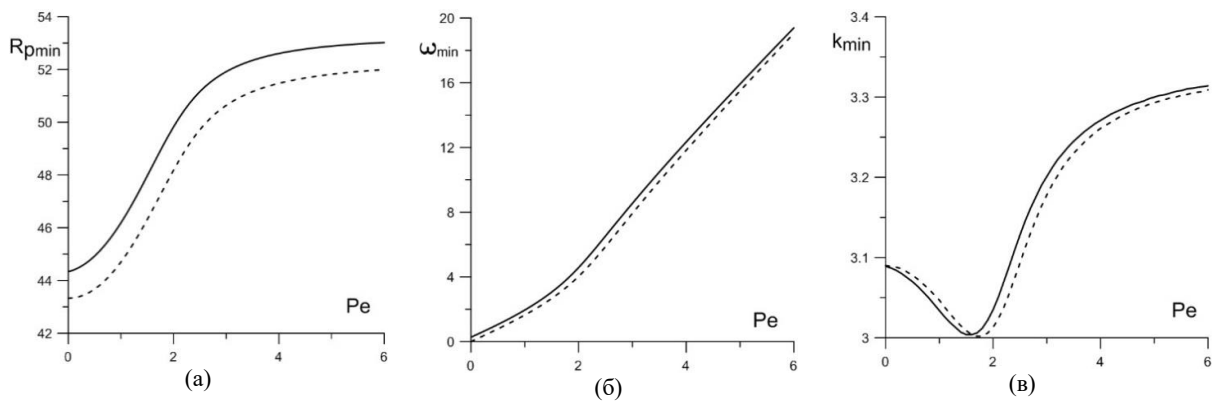
На рисунке 7 показаны зависимости критических параметров от угла наклона. Видно, что увеличение угла наклона приводит к повышению устойчивости и замедлению колебательной динамики. Учёт закупорки оказывает влияние только на частоту колебаний, так для некоторого диапазона углов наблюдается раскачка колебаний, в отличие от случая без закупорки. Дополнительной особенностью всех зависимостей критических параметров от  $\alpha$  является разрыв кривой при  $\alpha = \alpha_c \approx 30^\circ$ . Это связано с невозможностью возбудить конвекцию в виде плоских возмущений для больших углов, остаются лишь спиральные возмущения (см. например, [12]).



**Рис. 2.** Зависимости числа Релея–Дарси (а) и волнового числа (б) от параметра адсорбции для спиральных возмущений. Пунктирная линия – без учёта закупорки, сплошная линия – с учётом закупорки. Значения параметров  $\alpha = 45^\circ$ ,  $b = 4$ ,  $Pe = 2$ .



**Рис. 3.** Зависимости числа Релея–Дарси (а) и волнового числа (б) от параметра десорбции для спиральных возмущений. Пунктирная линия – без учёта закупорки, сплошная линия – с учётом закупорки. Значения параметров  $\alpha = 45^\circ$ ,  $a = 4$ ,  $Pe = 2$ .

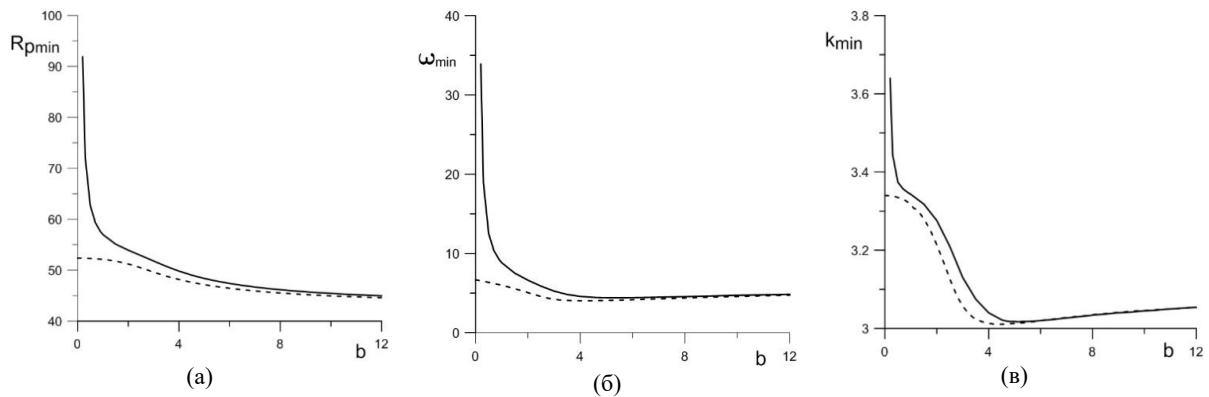


**Рис. 4.** Зависимости критического числа Релея (а), критической частоты (б) и волнового числа (в) от числа Пекле для плоских возмущений. Для случая отсутствия закупорки – пунктирная линия, с учётом закупорки – сплошная линия  $C_0 = 0.01$ ,  $\phi_0 = 0.4$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $a = b = 4$

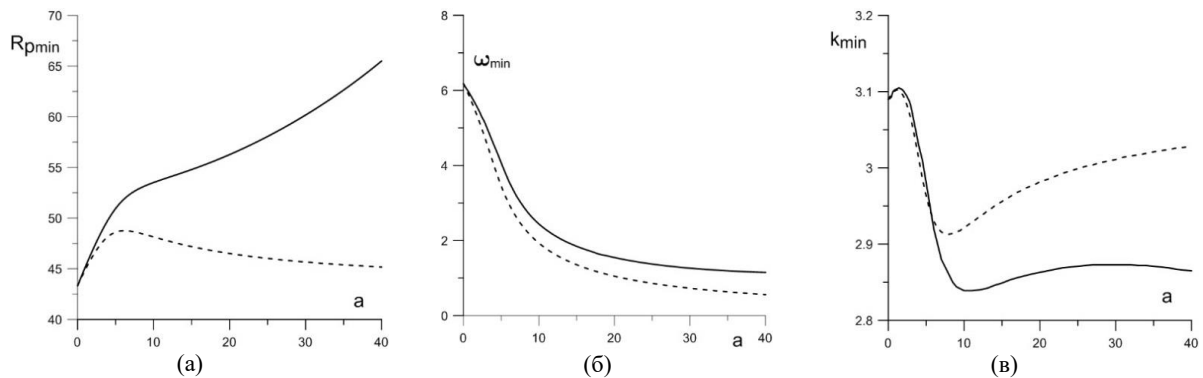
## 5. Заключение

В ходе работы была разработана математическая модель, описывающая концентрационную конвекцию в пористой среде при наличии осаждения (иммобилизации) частиц и учёте слабой закупорки. Закупорка предполагалась слабой, в том

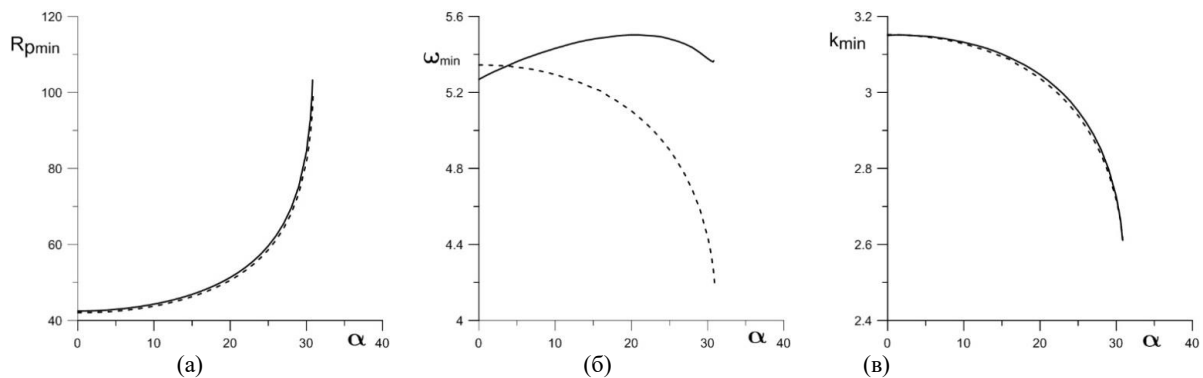
смысле, что влияние иммобилизации на пористость предполагается малым и учитывается только в уменьшении проницаемости среды, при этом сохраняются только линейные по концентрации члены. Получены уравнения, описывающие изучаемые явления. Настоящая модель была применена к задаче о транспорте тяжёлой примеси через наклонный слой пористой среды.



**Рис. 5.** Зависимости критического числа Релея (а), критической частоты (б) и волнового числа (в) от параметра адсорбции для плоских возмущений. Для случая отсутствия закупорки – пунктирная линия, с учётом закупорки – сплошная  $C_0 = 0.01$ ,  $\phi_0 = 0.4$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $a = 4$ ,  $Pe = 2$



**Рис. 6.** Зависимости критического числа Релея (а), критической частоты (б) и волнового числа (в) от параметра адсорбции для плоских возмущений. Для случая отсутствия закупорки – пунктирная линия, с учётом закупорки – сплошная  $C_0 = 0.01$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\phi_0 = 0.4$ ,  $b = 4$ ,  $Pe = 2$ .



**Рис. 7.** Зависимости критического числа Релея (а), критической частоты (б) и волнового числа (в) от угла наклона для плоских возмущений (значения представлены в градусах). Для случая отсутствия закупорки – пунктирная линия, с учётом закупорки – сплошная  $C_0 = 0.01$ ,  $\phi_0 = 0.4$ ,  $a = b = 4$ ,  $Pe = 2$ .

Показано, что задача допускает режим одномерной фильтрации вдоль слоя с линейным законом распределения примеси, однако, скорость фильтрации вдоль слоя является функцией координаты поперёк слоя. Учёт закупорки приводит к тому, что влияние иммобилизации на основное состояние проявляется во всех величинах, описывающих течение, кроме мобильной концентрации. Для последней известен ранее [12] линейный закон остаётся справедливым.

Исследована устойчивость основного режима по отношению к малым возмущениям. Рассмотрены два типа возмущений, характерных для наклонного слоя: плоские и спиральные. Получены математические формулировки задач, описывающих возникновение конвекции при наличии малых возмущений. Задачи решены численно методом дифференциальной прогонки. Исследованы зависимости критических значений параметров (числа Релея–Дарси, волнового числа и частоты) от параметров задачи. Показано, что для спиральных воз-

мушений учёт закупорки приводит к появлению зависимости пороговых значений наступления конвекции от параметров иммобилизации (параметра адсорбции и десорбции). Прокачка (число Пекле) не оказывает влияния на порог возникновения конвекции, основной модой неустойчивости является монотонная мода.

Для плоских возмущений наличие прокачки приводит к появлению колебательной моды неустойчивости. Учёт иммобилизации, как и учёт закупорки, оказывает существенное влияние на порог возникновения конвекции. Особенно ярко это влияние проявляется с ростом угла наклона.

Таким образом, показано, что в рамках уточнённой модели учёт закупорки приводит к повышению устойчивости основного решения независимо от типа рассматриваемых возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (тема №126020916825-4)

### Список литературы

1. de Boer R. Theory of Porous Media: Highlights in Historical Development and Current State. Heidelberg: Springer. 2012. 618 p.
2. Shishkina O. Rayleigh-Bénard Convection: The Container Shape Matters // *Phys. Rev. Fluids*. 2021. Vol. 6, № 9, 090502.
3. Deans H. A. A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media // *Society of Petroleum Engineers Journal*. 1963. Vol. 3, № 01. P. 49–52.
4. Einstein A. Zur Theorie der Brownschen Bewegung // *Annalen der Physik*. 1906. Vol. 324, № 2. P. 371–381.
5. Maryshev B. A non-linear model for solute transport, accounting for sub-diffusive concentration decline and sorption saturation // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2016. Vol. 11, № 3. P. 179–190.
6. Horton C. W., Rogers Jr F. T. Convection currents in a porous medium // *Journal of Applied Physics*. 1945. Vol. 16, № 6. P. 367–370.
7. Lapwood E. R. Convection of a fluid in a porous medium // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1948. Vol. 44, № 4. P. 508–521.
8. Prats M. The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums // *Journal of Geophysical Research*. 1966. Vol. 71, № 20. P. 4835–4838.
9. Любимов Д. В., Теплов В. С. Устойчивость модулированного прокачивания жидкости в подогреваемой снизу пористой среде // *Гидродинамика*. 1998. № 11. С. 176–190.
10. Maryshev B. S. The effect of sorption on linear stability for the solutal Horton–Rogers–Lapwood

problem // *Transport in Porous Media*. 2015. Vol. 109, № 3. P. 747–764.

11. Klimenko L. S., Maryshev B. S. Effect of solute immobilization on the stability problem within the fractional model in the solute analog of the Horton–Rogers–Lapwood problem // *The European Physical Journal E*. 2017. Vol. 40, 104.
12. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
13. Rees D. A. S., Bassom A. P. The onset of Darcy–Bénard convection in an inclined layer heated from below // *Acta Mechanica*. 2000. Vol. 144. P. 103–118.
14. Kumar G., Narayana P.A.L., Sahu K.C. Linear and nonlinear thermosolutal instabilities in an inclined porous layer // *Proc. R. Soc. A*. 2020. Vol. 476, № 2233, 20190705.
15. Клименко Л. С., Кольцова И. А. Уточнение модели концентрационной конвекции в пористой среде с учетом иммобилизации примеси и слабой закупорки // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2023. №. 4. С. 35–44.
16. Carman P. C. Fluid flow through granular beds // *Chemical engineering research and design*. 1997. Vol. 75. P. S32–S48.
17. Nield D., Bejan A. Convection in Porous Media. Cham, Switzerland: Springer, 2017. 988 p.
18. Maryshev B. S., Koltsova I., Klimenko L. S. Effect of impurity immobilization on solutal convection in an inclined porous layer // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 2025. Vol. 13. № 3. P. 1–18.
19. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.

### References

1. de Boer R. *Theory of Porous Media: Highlights in Historical Development and Current State*. Heidelberg: Springer, 2012. 618 p.
2. Shishkina O. Rayleigh-Bénard Convection: The Container Shape Matters. *Phys. Rev. Fluids*, 2021, vol. 6, no. 9, 090502
3. Deans H. A. A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1963, vol. 3, no. 01, pp. 49–52.
4. Einstein A. Zur Theorie der Brownschen Bewegung. *Annalen der Physik*, 1906, vol. 324, no. 2, pp. 371–381 (In German).
5. Maryshev B. A non-linear model for solute transport, accounting for sub-diffusive concentration decline and sorption saturation. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2016, vol. 11, no. 3, pp. 179–190.
6. Horton C. W., Rogers Jr F. T. Convection currents in a porous medium. *Journal of Applied Physics*, 1945, vol. 16, no. 6, pp. 367–370.

7. Lapwood E. R. Convection of a fluid in a porous medium. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1948, vol. 44, no. 4, pp. 508–521.
8. Prats M. The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums. *Journal of Geophysical Research*, 1966, vol. 71, no. 20, pp. 4835–4838.
9. Lyubimov D. V., Teplov V. S. Ustoichivost modulirovannogo prokachivaniya zhidkosti v podogrevaemom snizu poristoi srede [Stability of modulated pumping of liquid in a porous medium heated from below]. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics], 1998, no. 11, pp. 176–190. (In Russian)
10. Maryshev B. S. The effect of sorption on linear stability for the solutal Horton–Rogers–Lapwood problem. *Transport in Porous Media*, 2015, vol. 109, no. 3, pp. 747–764.
11. Klimenko L. S., Maryshev B. S. Effect of solute immobilization on the stability problem within the fractional model in the solute analog of the Horton–Rogers–Lapwood problem. *The European Physical Journal E*, 2017, vol. 40, 104.
12. Gershuni G. Z., Zhukhovitsky E. M., Nepomnyashchy A. A. *Ustoychivost' konvektivnykh techeniy* [Stability of convective flows], Moscow: Nauka, 1989. 320 p. (In Russian).
13. Rees D. A. S., Bassom A. P. The onset of Darcy–Bénard convection in an inclined layer heated from below. *Acta Mechanica*, 2000, vol. 144, pp. 103–118.
14. Kumar G., Narayana P. A. L., Sahu K. C. Linear and nonlinear thermosolutal instabilities in an inclined porous layer. *Proc. R. Soc. A*, 2020, vol. 476, no. 2233, 20190705.
15. Klimenko L. S., Koltsova I. A. Refinement of the model of concentration convection in a porous medium taking into account immobilization of impurity and weak clogging. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2023, no. 4, pp. 35–44.
16. Carman P. C. Fluid flow through a granular bed. *Trans. Inst. Chem. Eng. London*, 1937, vol. 15, pp. 150–156.
17. Nield D., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Cham, Switzerland: Springer, 2017. 988 p.
18. Maryshev B. S., Koltsova I., Klimenko L. S. Effect of impurity immobilization on solutal convection in an inclined porous layer. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2025, vol. 13, no. 3, pp. 1–13.
19. Goldshtik M. A., Shtern V. N. *Gidrodinamicheskaya ustoychivost i turbulentnost* [Hydrodynamic Stability and Turbulence]. Novosibirsk: Nauka, 1977. 366 p. (In Russian)

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Клименко Л. С., Марышев Б. С. Концентрационная конвекция в наклонном пористом слое в условиях слабой закупорки среды // Вестник Пермского университета. Физика. 2026. № 2. С. 65–74. doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-65-74

**Please cite this article in English as:**

Klimenko L. S., Maryshev B. S. Concentration-driven convection in an inclined porous layer with weak pore clogging. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2026, no. 2, pp. 65–74. doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-65-74

**Сведения об авторах**

1. Клименко Людмила Сергеевна, канд. физ-мат. наук, н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва, 1, Пермь, 614013; доцент, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068.
2. Марышев Борис Сергеевич, канд. физ-мат. наук, н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва, 1, Пермь, 614013; доцент, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068.

**Author information**

1. *Lyudmila S. Klimenko*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Associate Professor, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia.
2. *Boris S. Maryshev*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia; Associate Professor, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia.