

# Влияние вибрации на возникновение конвекции в горизонтальном пористом слое, насыщенном трёхкомпонентной жидкой смесью

И. С. Шубенков<sup>1,2†</sup>, Т. П. Любимова<sup>1,2‡</sup>

<sup>1</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

<sup>2</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

† ShubenkovIS@yandex.ru

‡ lyubimovat@mail.ru

В данной работе исследуется термовибрационная конвекция трёхкомпонентной смеси углеводородов в горизонтальном слое пористой среды с учётом эффекта Соре. Вибрации предполагаются высокочастотными и малоамплитудными, ось вибраций параллельна градиенту температуры. Анализ проводится на основе уравнений термовибрационной конвекции в пористой среде, учитывающих вязкость в уравнениях для пульсаций. В первой части работы проведён линейный анализ устойчивости состояния механического равновесия. Неустойчивость по отношению к длинноволновым возмущениям исследуется аналитически с помощью разложений в ряды по волновому числу, а к возмущениям с ненулевыми волновыми числами – численно методом построения фундаментальной системы решений. Установлено, что на длинноволновую неустойчивость равновесия вибрации не влияют. Получена карта устойчивости механического равновесия на плоскости отношение разделения – число Рэлея при различных значениях вибрационного числа Рэлея. Найдено, что воздействие вибрации на систему повышает порог конвекции, вместе с этим сужая диапазон существования ячеистых монотонных возмущений. При увеличении отношения разделения влияние вибраций на волновое число становится всё менее значительным. На порог ячеистой колебательной неустойчивости вибрации оказывают качественно аналогичное влияние. Наличие вибраций уменьшает частоту колебаний во всём диапазоне существования возмущений. Исследовано влияние вязкости на устойчивость механического равновесия. Во второй части работы численно методом конечных разностей исследованы нелинейные режимы конвекции. Численные данные хорошо согласуются с результатами линейного анализа устойчивости. Показано влияние конвективного движения жидкой смеси на распределение концентрации примесей по слою.

**Ключевые слова:** термовибрационная конвекция; трёхкомпонентная смесь; эффект Соре; пористая среда

Поступила в редакцию 30.04.2026; после рецензии 11.05.2026; принята к опубликованию 11.05.2026

## The influence of vibration on the onset of convection in a horizontal porous layer saturated with a ternary fluid

I. S. Shubenkov<sup>1,2†</sup>, T. P. Lyubimova<sup>1,2‡</sup>

<sup>1</sup> Perm State University, Perm, Russia

<sup>2</sup> Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

† ShubenkovIS@yandex.ru

‡ lyubimovat@mail.ru

This paper investigates the thermovibrational convection of a three-component hydrocarbon mixture in a horizontal layer of a porous medium with the Soret effect taken into account. The vibrations are assumed to be high-frequency and low-amplitude, with the vibration axis parallel to the temperature gradient. The analysis is based on the equations of thermovibrational convection in a porous medium, which take viscosity into account in the pulsation equations. The first part of the paper provides a linear stability analysis of the conductive state. Instability with respect to longwave perturbations is analyzed analytically using series expansion in terms of the wavenumber, while instability with respect to perturbations with nonzero wavenumbers is studied numerically using the shooting method. The study has found that vibrations do not affect the longwave instability of equilibrium. A stability map of mechanical equilibrium on the separation ratio – Rayleigh number plane was obtained for various values of the vibrational Rayleigh number. The effect of vibration on the system was found to increase the convection threshold, simultaneously narrowing the range of existence of cellular monotonic perturbations. As the separation ratio increases, the influence of vibrations on the wavenumber becomes progressively less significant. Vibrations have a qualitatively similar effect on the threshold of cellular oscillatory instability. The presence of vibrations reduces the oscillation frequency over the entire range of existence of disturbances. The influence of viscosity on the stability of mechanical equilibrium is investigated. In the second part of the paper, nonlinear convection regimes are numerically investigated using the finite difference method. The numerical data are in good agreement with the results of the linear stability analysis. The influence of convective motion of the liquid mixture on the distribution of impurity concentration over the layer is shown.

**Keywords:** thermovibrational convection; ternary mixture; Soret effect; porous media

*Received 30 April 2026; revised 11 May 2026; accepted 11 May 2026*

doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-49-64

## 1. Введение

В отличие от случая однокомпонентных жидкостей, в многокомпонентных смесях помимо сил плавучести, обусловленных гравитацией, может также проявляться диссипативный механизм, обусловленный диффузией или термодиффузией. Как было отмечено в работе [1], необходимо учитывать эффект Соре, поскольку он может изменять градиент концентрации примеси в исследуемой области. За счёт эффекта Соре градиент температуры вызывает градиент концентрации в смесях [2]. Значительное влияние на возникновение конвекции в одно- и многокомпонентных жидкостях могут оказывать вибрации. Уравнения тепловой вибрационной конвекции в однородной однокомпонентной жидкости под действием тяжести и высокочастотных малоамплитудных вибраций получены в [3], а в пористой среде, насыщенной однокомпонентной жидкостью – в [4].

Задача о конвекции бинарной смеси в горизонтальном слое под действием высокочастотных вибраций была впервые рассмотрена в [5] для горизонтальных вибраций и в [6] для вертикальных вибраций. В [7] это исследование было расширено на случай произвольного направления вибраций. Обнаружено, что вибрации изменяют диаграмму устойчивости и могут эффективно использоваться для изменения порога конвекции. Как правило, вертикальные вибрации (параллельные градиенту температуры) повышают порог устойчивости. Для той же задачи, но в случае вибраций конечной ча-

стоты, в [8] было показано, что вертикальные вибрации оказывают стабилизирующее действие на синхронную моду.

В работе [9] исследовалось влияние продольных высокочастотных вибраций малой амплитуды на конвективную устойчивость трёхкомпонентной смеси в горизонтальном слое. Было установлено, что вибрации приводят к дестабилизации в случае нагрева снизу и к стабилизации в случае нагрева сверху. Также, вибрации влияют на диапазон параметров, где длинноволновая неустойчивость наиболее опасна. Обнаружены новые колебательные моды неустойчивости, которые приводят к существованию конвекции в условиях невесомости.

В работе [10] исследовалось влияние высокочастотных поступательных вибраций на возникновение фильтрационной конвекции в плоском горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости, насыщающей пористую среду. На границах слоя поддерживались постоянные разные температуры. Было установлено, что вертикальные вибрации препятствуют возникновению конвекции и могут полностью её подавить. При любом направлении вибраций, отличном от вертикального, возможны дестабилизирующие эффекты: существование конвективных режимов при нагреве сверху, а также конвекция в условиях невесомости. Эти выводы были сделаны на основе анализа осреднённых уравнений фильтрационной конвекции, которые являются обобщением ранее полученных уравнений.

В работе [11] исследовалось возникновение конвекции в системе из двух горизонтальных слоёв (чистая жидкость и пористая среда, насыщенная той же жидкостью), нагреваемых снизу под действием вертикальной вибрации. Для описания свободной тепловой конвекции в жидком слое используется приближение Буссинеска, а в пористом слое – приближение Дарси–Буссинеска. В предельном случае тонкого жидкого слоя получены эффективные граничные условия на верхней границе пористого слоя, учитывающие конвекцию в жидком слое. Показано, что вибрации оказывают стабилизирующее воздействие, тогда как наличие жидкого слоя приводит к дестабилизации. В случае тонкого жидкого слоя существуют две (длинноволновая и ячеистая) неустойчивые моды. В случае толстых слоёв нейтральные кривые являются одномодальными. Вибрации оказывают стабилизирующее воздействие на возмущения с любым волновым числом, но на ячеистые возмущения влияют гораздо сильнее, чем на длинноволновые.

Работы [12–15] посвящены исследованию влияния вибраций на конвекцию Соре в пористых средах применительно к задачам управления затвердеванием. В [16] предложено новое применение вибраций для увеличения разделения компонент смеси. Влияние вибраций на двойную диффузионную конвекцию в пористой среде исследовано в работах [17, 18].

В работе [19] рассматривается влияние вибраций на возникновение конвекции в пористой среде, насыщенной однокомпонентной жидкостью или бинарной смесью. Исследован порог устойчивости для модели Дарси–Бринкмана и показано значительное отклонение от модели Дарси. Обнаружено, что в случае термоконцентрационной конвекции вибрации уменьшают волновое число критических возмущений. Выведено новое аналитическое соотношение для получения порога длинноволновой конвекции. Показано, как полученные результаты могут быть использованы для увеличения разделения компонентов смеси.

В серии работ исследовалось влияние вибраций на тепловую [20] и термоконцентрационную [21] конвекцию в двухслойной системе, состоящей из слоя жидкости и пористой среды, насыщенной той же жидкостью. Исследовались высокочастотные малоамплитудные вибрации. Установлено, что вертикальные вибрации стабилизируют состояние равновесия при подогреве снизу. С ростом величины вибрационного воздействия, локальная конвекция в подслое жидкости сменяется крупномасштабной, охватывающей весь слой. При горизонтальной вибрации стабилизация проявляется только при малых вибрационных ускорениях, а их дальнейший рост снижает порог устойчивости. Горизонтальные вибрации, в отличие от вертикальных, способны создавать конвекцию при нагреве двухслойной области сверху. В такой си-

туации течение имеет исключительно термоконцентрационную вибрационную природу.

В работе [22] нами была исследована конвекция трёхкомпонентной смеси в горизонтальном пористом слое с учётом эффекта Соре. Была получена полная карта устойчивости и найдена новая длинноволновая колебательная мода. В настоящей работе исследуется влияние вибраций на эту систему. Вибрации предполагаются высокочастотными и малоамплитудными, их направление параллельно градиенту температуры. Первая часть работы посвящена линейному исследованию устойчивости механического равновесия системы под воздействием вибрации. Во второй части работы проводится численное исследование нелинейных режимов конвекции с использованием метода конечных разностей.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой пористой среды, насыщенной многокомпонентной жидкостью (рис. 1). В слое существуют установившиеся градиенты температуры и концентрации примесей. Границы слоя твёрдые, идеально теплопроводные, непроницаемые для вещества, на них поддерживаются постоянные разные температуры. Вся система находится в поле силы тяжести и подвергается воздействию вертикальных вибраций. Вибрации предполагаются высокочастотными и малоамплитудными.

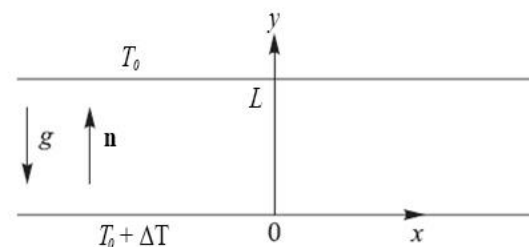


Рис. 1. Геометрия задачи

Уравнения, описывающие конвективное движение многокомпонентной смеси в пористой среде в поле тяжести и вибраций в системе отсчёта, связанной с колеблющимся слоем, имеют следующий вид [21]:

$$\frac{1}{\phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\phi^2} (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\nu}{K} \mathbf{V} + (\beta_T (T - T_0) + \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)) \times (g\gamma - a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) \mathbf{n}), \quad (1)$$

$$b \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T = \chi \Delta T, \quad (2)$$

$$\phi \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{C} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{C} + \mathbf{C}_0 (\mathbf{J} - \mathbf{C}) \mathbf{D}_T \Delta T, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{V}$  – скорость фильтрации;  $P$  – давление;  $T$  – температура;  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n-1})$  – вектор концентраций;  $\phi$  – пористость;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости;  $K$  – проницаемость пористой матрицы;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\gamma$  – единичный вектор, направленный вверх; коэффициент теплового расширения;

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_C,$$

$\mathbf{I} = (1, \dots, 1)$  – вектор-столбец;  $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(\beta_{C_1}, \dots, \beta_{C_{n-1}})$  – диагональная матрица коэффициентов концентрационного расширения:

$$\beta_C = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C_i} \right)_{T, C_j, j \neq i},$$

$i, j = 1, \dots, n-1$  – номера компонент смеси,  $n$  – число компонент;  $a$  – амплитуда вибраций;  $\omega$  – частота вибраций;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор оси вибрации;  $b = (\rho c)_p / (\rho c)_f$  – отношение объёмных теплоёмкостей;  $(\rho c)_p$  – эффективная теплоёмкость пористой среды;  $(\rho c)_f$  – теплоёмкость жидкой смеси;  $\chi = \lambda^* / (\rho c)_f$  – эффективный коэффициент температуропроводности пористой среды,  $\lambda^*$  – эффективная теплопроводность пористой среды;  $\mathbf{D}$  – матрица коэффициентов молекулярной диффузии;  $\mathbf{D}_T$  – вектор коэффициентов термодиффузии;  $\mathbf{J} = (1, \dots, 1)$  – вектор-столбец.

Уравнения записаны в предположении, что вязкость и коэффициенты переноса постоянны. Влияние бародиффузии и эффект Дюфура не учитываются, поскольку в жидких смесях эти эффекты пренебрежимо малы. Скорость движения жидкости в пористой среде очень низка, поэтому, как это обычно делается в задачах конвекции в пористых средах, производную по времени и нелинейные члены можно отбросить [23].

Диагонализировав матрицу коэффициентов молекулярной диффузии в исходных уравнениях, можно исключить эффекты перекрёстной диффузии, что позволяет сократить число определяющих параметров задачи. Данное преобразование можно записать в виде [24]:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{C}}, \\ \mathbf{D}_T = \mathbf{M} \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{D}}_T,$$

где  $\mathbf{M}$  – матрица, столбцы которой являются собственными векторами ( $m_i = (m_{i1}, \dots, m_{i,n-1})^T$ ) матрицы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(q_1, \dots, q_{n-1})$ ,  $q_i = \beta_i^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j m_{ij}$ . Данное

преобразование позволяет свести систему уравнений (1)–(4) к системе с диагональной матрицей  $\hat{\mathbf{D}}$ , вектором концентрации  $\hat{\mathbf{C}}$  и вектором коэффициентов термодиффузии  $\hat{\mathbf{D}}_T$ :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{\nu}{K} \mathbf{V} + \\ + \left( \beta_T (T - T_0) + \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} \cdot (\hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}}_0) \right) \times \\ \times (g\gamma - a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) \mathbf{n}), \quad (5)$$

$$b \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T = \chi \Delta T, \quad (6)$$

$$\phi \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{D}} \Delta \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}}_0 (\mathbf{J} - \hat{\mathbf{C}}) \hat{\mathbf{D}}_T \Delta T, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (8)$$

Далее будем работать только с диагонализированными переменными и для удобства опустим запись «крышечек» над ними.

### 3. Метод осреднения и оценка размерных параметров системы

Для решения системы уравнений (5)–(8) используется метод осреднения [25]. При этом уравнения упрощаются в предположении высокой частоты вибраций и малости их амплитуды. Для того чтобы это было справедливо, необходимо, чтобы период вибраций был мал по сравнению с характерными гидродинамическими временами задачи. Вибрационный временной масштаб можно записать, как:

$$\tau_{vib} = \frac{1}{\omega}.$$

Применение метода осреднения для уравнений, описывающих конвекцию в пористой среде, имеет свои особенности. Как показано в [11], в случае пористой среды, в отличие от случая однородной жидкости, в уравнении для пульсационной скорости необходимо сохранить вязкое слагаемое  $-\nu \mathbf{V} / K$ , что связано с малостью проницаемости реальных пористых сред, в результате чего пористый скелет сильно влияет на движение жидкости через него и вязкость играет значительную роль, приводя к необходимости учёта эффективного сопротивления среды. В случае однородной жидкости влияние вязкости может быть пренебрежимо мало по сравнению с инерционными эффектами. В случае же пористой среды отношение диссипативного члена к ускорению имеет порядок  $\phi \nu / (\omega K)$  и может стать малым только на частотах  $\phi \nu / K \ll \omega$ , то есть для реальных пористых сред и жидкостей типа воды в килогерцовом диапазоне, тогда как для однородной жидкости высокочастотный пре-

дел достигается уже на частотах в несколько герц (для характерных размеров задачи в несколько сантиметров, и чем больше размер полости, тем ниже частота).

$$\tau_{vib} \ll \tau_{viscP}, \quad \tau_{viscP} = \frac{K}{\phi \nu} \rightarrow \omega \gg \frac{\phi \nu}{K},$$

$$\tau_{vib} \ll \tau_{visc}, \quad \tau_{visc} = \frac{L^2}{\nu} \rightarrow \omega \gg \frac{\nu}{L^2}.$$

В формальной процедуре усреднения, выполняемой в виде асимптотического разложения по обратной частоте, это можно учесть, зафиксировав отношение  $\Omega = \omega K / \nu$ , то есть, позволив проницаемости стремиться к нулю при стремлении частоты к бесконечности [10]. В настоящей работе диссипативный член не будет отбрасываться, что позволит значительно расширить область применимости рассматриваемых уравнений в сторону более низких частот вибрации.

Чтобы пренебречь диффузионными членами в уравнении энергии и уравнении для концентрации, должны выполняться следующие условия [19]:

$$\tau_{vib} \ll \tau_{cond}, \quad \tau_{cond} = \frac{bL^2}{\chi} \rightarrow \omega \gg \frac{\chi}{bL^2},$$

$$\tau_{vib} \ll \tau_{conc}, \quad \tau_{conc} = \frac{L^2}{D} \rightarrow \omega \gg \frac{D}{L^2},$$

$$\tau_{vib} \ll \tau_{concT}, \quad \tau_{concT} = \frac{L^2}{D_T} \rightarrow \omega \gg \frac{D_T}{L^2}.$$

Необходимо также, чтобы член  $\rho_0 \beta_T \Delta T a \omega^2$  в уравнении импульса для пульсаций являлся доминирующей силой плавучести, это справедливо, когда

$$\tau_{vib} \ll \tau_{buoy},$$

$$\tau_{buoy} = \sqrt{\frac{\phi g \beta_T \Delta T}{bL}} \rightarrow \omega \gg \sqrt{\frac{bL}{\phi g \beta_T \Delta T}}.$$

Отметим, что требование малости амплитуды вибрации не является необходимым, поскольку нелинейные слагаемые будут отброшены.

Проведём оценку для пористого слоя, заполненного водой. Рассмотрим следующие параметры системы:  $L = 0.01$  м,  $\phi = 0.15$ ,  $K = 10^{-10}$  м<sup>2</sup>,  $\chi = 9.7 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с,  $\nu = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>,  $b = 1$ ,  $\beta_T = 9 \cdot 10^{-4}$  К<sup>-1</sup>,  $D = 1.1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $D_T = -0.93 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>/(с·К),  $\Delta T = 1$  К. Для данных параметров системы характерные времена получаются следующими:

$$\tau_{cond} \approx 10^3, \quad \tau_{conc} \approx 9,$$

$$\tau_{concT} \approx 10^8, \quad \tau_{buoy} \approx 0.4.$$

Это означает, что принятые предположения будут справедливы для частот  $\omega$  порядка 10–20 рад/с или около нескольких герц ( $\omega = 2\pi f$ ). Если ставить условие, необходимое для того, чтобы отбросить

вязкое слагаемое в уравнении для пульсационной компоненты скорости, то при значении  $K \sim 10^{-12}$  м<sup>2</sup>, характерном для геологических пористых сред, минимальные допустимые частоты вибрации будут лежать в ультразвуковом диапазоне ( $f \sim 10^4$ – $10^5$  Гц).

Амплитуду вибраций можно выразить из вибрационного числа Рэлея:

$$a = \sqrt{\frac{2Ra_v \nu \chi}{K \phi}} \frac{1}{\omega \beta_T \Delta T}.$$

Для представленных выше параметров системы и значений  $Ra_v = 1$ ,  $\omega = 1000$  величина амплитуды получается равной  $a \approx 0.13$  м.

Зная амплитуду и частоту, и предполагая, что вибрации происходят по гармоническому закону, можно рассчитать ускорение, которое будет испытывать система под воздействием такой вибрации. При данных параметрах максимальное значение ускорения составит  $1.3 \cdot 10^5$  м/с<sup>2</sup>. Отметим, что, например, в ДВС легковых автомобилей поршни могут испытывать ускорение порядка  $10^4$ – $10^5$  м/с<sup>2</sup>.

Оценить средний диаметр пор в пористой среде можно с помощью упрощённой модели, основанной на предположении, что пористая среда состоит из системы цилиндрических капилляров одинакового сечения [26]. Для такой системы имеет место соотношение:

$$K = \frac{\phi R^2}{8} \rightarrow R = \sqrt{\frac{8K}{\phi}} \rightarrow d = 2R = 4\sqrt{\frac{2K}{\phi}}$$

где  $R$  – это средний радиус поры, а  $d$  – средний диаметр поры.

Таким образом, при пористости  $\phi = 0.15$  и проницаемости  $K = 10^{-10}$  м<sup>2</sup> средний диаметр поры составляет  $d = 0.15 \cdot 10^{-3}$  м, а при проницаемости  $K = 10^{-12}$  м<sup>2</sup> –  $d = 1.5 \cdot 10^{-5}$  м.

Разделяя скорость, давление, температуру и концентрацию примесей на медленно меняющиеся средние за период вибраций части и быстро меняющиеся пульсационные части

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}', \quad T = \bar{T} + T', \quad P = \bar{P} + P', \quad C = \bar{C} + C', \quad (9)$$

и подставляя разложение (9) в систему (5)–(8), получим уравнения для пульсационных компонент в виде:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P' - \frac{\nu}{K} \mathbf{V}' + \left[ \beta_T (\bar{T} - \bar{T}_0) - \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C}' - \mathbf{C}_0') \right] a \omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{n} \quad (10)$$

$$b \frac{\partial T'}{\partial t} = -(\mathbf{V}' \nabla) T, \quad (11)$$

$$\phi \frac{\partial \hat{\mathbf{C}}}{\partial t} = -(\mathbf{V}' \nabla) \mathbf{C}', \quad (12)$$

$$\text{div } \mathbf{V}' = 0. \quad (13)$$

В полученных уравнениях нелинейные слагаемые отбрасываются по причине малости пульсационных компонент. Пульсационные поля осциллируют с высокой частотой и их среднее значение за период вибраций равно нулю. Использование для температуры средних величин  $\bar{T}$  объясняется тем, что пульсации  $T'$  исчезают при осреднении, а макроскопический теплоперенос описывается медленной компонентой  $\bar{T}$ .

Как уже отмечалось выше, в пористой среде, в отличие от случая однородной жидкости, необходимо учитывать вязкость в уравнениях для пульсаций. Принимая во внимание разложение Гельмгольца вектора средней температуры на соленоидальную и потенциальную части  $\bar{\mathbf{T}}\mathbf{n} = \mathbf{w} / \delta + \nabla \varphi$ , получаем пульсационные скорость и температуру. Здесь  $\mathbf{w}$  – соленоидальная часть вектора средней температуры,  $\delta$  – параметр, позволяющий учесть вязкость жидкости:

$$\delta = \frac{\Omega^2 / \phi}{1 + \Omega^2 / \phi^2}, \quad (14)$$

где  $\Omega = \omega K / \nu$  – безразмерная частота вибраций.

Используя их, усредняем полную систему уравнений (5)–(8) по периоду вибраций. Далее обезразмерим полученные уравнения, введя следующие единицы измерения длины, скорости, времени, давления, температуры и концентрации:

$$y = Ly_{ND}, \quad V = \frac{a}{L} V_{ND}, \quad t = \frac{L^2 (\rho c)_p}{\lambda^*} t_{ND},$$

$$P = \frac{\rho \chi \nu}{K} P_{ND},$$

$$T = (T - T_0) T_{ND} = \Delta T T_{ND},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 (\mathbf{C}_0 - \mathbf{J}) \Delta T D_T (\mathbf{D})^{-1}.$$

Уравнения для средних и пульсационных компонент, полученные путём осреднения, с использованием указанных выше предположений, в безразмерной форме, имеют вид [10, 11]:

$$0 = -\nabla P - \mathbf{V} + \text{Ra} (T + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{C}) \gamma + \frac{\text{Ra}_v}{b^2 \varepsilon} (\mathbf{w} \nabla) \left[ \left( T + \frac{\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{C}}{\varepsilon} \right) \mathbf{n} - \frac{\mathbf{w}}{\varepsilon \delta} \right], \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T = \Delta T, \quad (16)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{C} = \text{Le}^{-1} (\Delta \mathbf{C} - \mathbf{I} \cdot \Delta T), \quad (17)$$

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla (\delta (T + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{C})) \times \mathbf{n}, \quad (18)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (19)$$

$$\text{div } \mathbf{w} = 0, \quad (20)$$

где введены тепловое число Рэлея:

$$\text{Ra} = \frac{Kg \beta_T \Delta T L}{\nu \chi},$$

вибрационное число Рэлея:

$$\text{Ra}_v = \text{R}^2 \text{Ra}^2 = \frac{K \phi (a \omega \beta_T \Delta T)^2}{2 \nu \chi}, \quad \text{R}^2 = \frac{\phi \nu \chi}{2 K} \left( \frac{a \omega}{g L} \right)^2,$$

$\varepsilon = \phi (\rho c)_f / (\rho c)^*$  – нормализованная пористость;

$\boldsymbol{\psi} = -\mathbf{C}_0 (1 - \mathbf{C}_0) \beta_T^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}_T$  – вектор отношений разделения;  $\mathbf{L} \mathbf{e} = \chi (\mathbf{D})^{-1}$  – диагональная матрица чисел Льюиса, где  $\text{Le}_{11} = \chi / D_{11}$ ,  $\text{Le}_{22} = \chi / D_{22}$ .

На границах слоя ставится условие непроницаемости, заданы постоянные разные температуры и считается выполненным условие отсутствия потока примеси. Эти условия в безразмерной форме имеют вид:

$$y = 0, 1: \quad V_y = 0, \quad T = 1, 0, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial y} - \mathbf{I} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (21)$$

Полученная система уравнений (15)–(20) переходит в систему для описания термоконцентрационной конвекции (без вибраций) [22], если принять  $\text{Ra}_v = 0$ . Если принять  $\delta = 0$  (пренебречь влиянием вязкости жидкости), то данная система переходит в систему, полученную в работе [19], где вязкость в уравнениях для пульсационной скорости и температуры не учитывалась. Если принять  $\boldsymbol{\psi} = 0$ , то система (15)–(20) перейдёт в систему для описания термовибрационной конвекции однокомпонентной жидкости [3].

## 4. Линейная задача устойчивости равновесия

### 4.1. Амплитудные уравнения

В рассматриваемом нами случае вибраций, параллельных градиенту температуры, возможно состояние механического равновесия, в котором и средняя и пульсационная скорости равны нулю:

$$V_0 = 0, \quad T = 1 - y, \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{I} \cdot \left( \frac{1}{2} - y \right), \quad \mathbf{w} = 0, \quad (22)$$

$$P_0 = \text{Ra} \left( y \left( 1 + \frac{\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I}}{2} \right) - \frac{y^2}{2} (1 + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I}) + \text{const} \right).$$

Для линейного исследования устойчивости состояния механического равновесия (22) представим все поля в виде суммы основного состояния и малого возмущения:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}', \quad T = T_0 + T', \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}', \quad (23)$$

$$P = P_0 + P', \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}'.$$

Подставим поля в таком виде в (15)–(20) и линеаризуем полученные уравнения относительно ма-

лых возмущений. Затем, рассмотрим нормальные возмущения следующего вида:

$$(V_y, T', C', \mathbf{w}) = (\varphi, \theta, \xi, f) \cdot e^{-\lambda t + i k x}. \quad (24)$$

Величины  $\varphi, \theta, \xi, f$  представляют собой амплитуды возмущений скорости, температуры, концентраций примесей ( $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  – вектор-столбец) и соленоидальной части вектора температуры.

После подстановки (24) в линеаризованные уравнения, исключения давления и горизонтальной составляющей скорости, а также введения новой функции  $\boldsymbol{\eta} = \xi - \mathbf{I} \cdot \theta$ , представляющей собой комбинацию возмущений концентрации и температуры, получаем систему уравнений для амплитуд возмущений следующего вида:

$$0 = \varphi'' - k^2 \varphi + k^2 Ra \left[ (1 + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I}) \theta + \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\eta} \right] - k^2 \frac{Ra_v}{b^2 \varepsilon} \left( 1 + \frac{\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I}}{\varepsilon} \right) f, \quad (25)$$

$$\lambda \theta - \varphi = \theta'' - k^2 \theta, \quad (26)$$

$$Le \left[ \varepsilon \lambda (\boldsymbol{\eta} + \mathbf{I} \cdot \theta) - \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right] = \boldsymbol{\eta}'' - k^2 \boldsymbol{\eta}, \quad (27)$$

$$f'' - k^2 f = -k^2 \delta \left[ (1 + \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{I}) \theta + \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\eta} \right]. \quad (28)$$

Граничные условия для амплитуд возмущений имеют вид:

$$y = 0, 1: \quad \varphi = 0, \quad \theta = 0, \quad f = 0, \quad \boldsymbol{\eta}' = 0. \quad (29)$$

Решение системы уравнений (25)–(28) с граничными условиями (29) приводит к задаче на собственные значения, в которой декремент затухания зависит от параметров задачи  $\lambda = \lambda(Ra, Ra_v, \boldsymbol{\psi}, \varepsilon, k, Le)$ . В общем случае декремент  $\lambda$  является комплексным числом, то есть  $\lambda = \lambda_r + i \lambda_i$ . Для монотонных возмущений область устойчивости можно определить, полагая  $\lambda = 0$ , а для колебательных возмущений –  $\lambda_r = 0$  ( $\lambda_i$  представляет собой частоту колебательных возмущений).

Неустойчивость по отношению к длинноволновым возмущениям была исследована аналитически с помощью разложений в ряды по волновому числу. Установлено, что на длинноволновую неустойчивость равновесия вибрации не влияют.

#### 4.2. Анализ устойчивости для произвольных значений волнового числа

Линейный анализ устойчивости по отношению к возмущениям с ненулевым волновым числом проводился путём численного решения задачи (25)–(29) методом Рунге–Кутты 5-го порядка с последующим поиском нуля определителя матрицы фундаментальной системы решений. Основные

расчёты проводились при значениях параметров, соответствующих тем, что использовались в работах [18, 22]:  $Ra > 0$  (нагрев снизу),  $Le_1 = 147$ ,  $Le_2 = 91$ ,  $\varepsilon = 0.15$  и значениях отношений разделения  $\psi_2 = 0.12$ ,  $\psi_1 = [-0.15, 0]$ . Рассматривались значения  $Ra_v = 0, 1.5, 7.5$ .

Значение параметра  $\delta$  зависит от частоты вибрационного воздействия и от вязкости жидкости. Анализ показал, что  $\delta \in [0, \phi)$ . Причём, при  $\Omega = \omega K / \nu$  порядка 1 и больше,  $\delta \rightarrow \phi$ . В дальнейших расчётах примем  $\delta = 0.15$ . Значение  $b$  принималось равным единице. Далее более подробно рассмотрим вопрос влияния вязкости жидкости и частоты вибрации на характеристики устойчивости системы.

Расчёты, проведённые при отличных от нуля значениях  $Ra_v$ , показали, что вибрации приводят к увеличению по модулю значений отношения разделения, при которых от ветвей, соответствующих длинноволновым монотонной и колебательной неустойчивостям, отделяются ветви, соответствующие ячеистым монотонной и колебательной неустойчивостям: в случае монотонной неустойчивости для  $Ra_v = 0$  отделение происходит при  $\psi_1 = -0.0651$ , для  $Ra_v = 1.5$  – при  $\psi_1 = -0.0666$ , а для  $Ra_v = 7.5$  – при  $\psi_1 = -0.0688$  (рис. 1). В случае колебательной неустойчивости для  $Ra_v = 0$  отделение происходит при  $\psi_1 = -0.100$ , для  $Ra_v = 1.5$  – при  $\psi_1 = -0.103$ , а для  $Ra_v = 7.5$  – при  $\psi_1 = -0.107$  (рис. 2). На длинноволновую неустойчивость ( $k = 0$ ) вибрации не влияют.

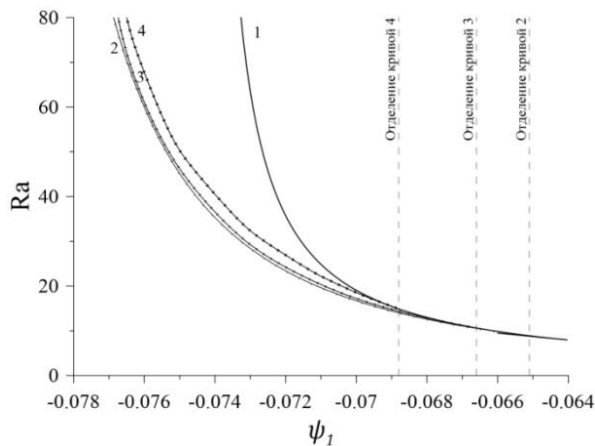
При отличных от нуля значениях  $Ra_v$  все кривые ячеистой монотонной неустойчивости лежат между двумя предельными кривыми (рис. 2):  $Ra_v = 0$  (классическая конвекция Соре под действием статической силы тяжести) и  $k = 0$  (длинноволновая неустойчивость). Таким образом, вертикальные вибрации повышают порог конвекции, вместе с этим сужая диапазон существования ячеистых монотонных возмущений.

Наличие вибраций также сильно влияет на порог ячеистой колебательной неустойчивости (рис. 3). При всех исследованных значениях  $Ra_v$  кривые ячеистой колебательной неустойчивости очень плавно отделяются от кривой длинноволновой колебательной неустойчивости, однако при дальнейшем увеличении  $\psi_1$  (по модулю) на них возникает перегиб (а в случае с ненулевыми  $Ra_v$  – скачок), в котором кривая меняет характер наклона. Это связано со сменой локального минимума на нейтральных кривых (рис. 4). Такой скачок имеет место для всех исследованных значений  $Ra_v$ , однако при более высоких значениях  $Ra_v$  он немного смещается в сторону более высоких (по модулю)  $\psi_1$ : для  $Ra_v = 0$  точка перегиба  $\psi_1 = 0.1127$ , для  $Ra_v = 1.5$  точка скачка  $\psi_1 = 0.1143$ , для  $Ra_v = 7.5$  –  $\psi_1 = 0.1153$ .

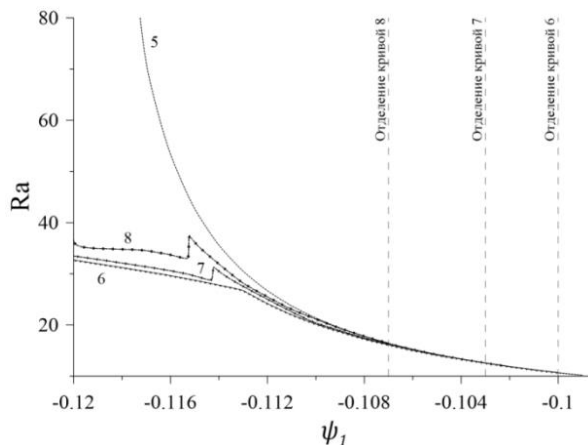
На рис. 5 представлена полная карта устойчивости на плоскости параметров  $Ra$ – $\psi_1$  для рассматриваемого набора параметров. Как можно за-

метить, в системе имеются все четыре типа неустойчивости: монотонная длинноволновая, монотонная ячеистая, колебательная длинноволновая и колебательная ячеистая. При  $\psi_1 \in (-0.046, 0)$  наиболее опасными являются длинноволновые монотонные возмущения, при  $\psi_1 \in (-0.100, -0.046)$  – длинноволновые колебательные возмущения, при  $\psi_1 \in (-0.150, -0.100)$  – ячеистые колебательные возмущения. В случае для  $Ra_v = 0$  кривые совпадают с полученными в работе [22].

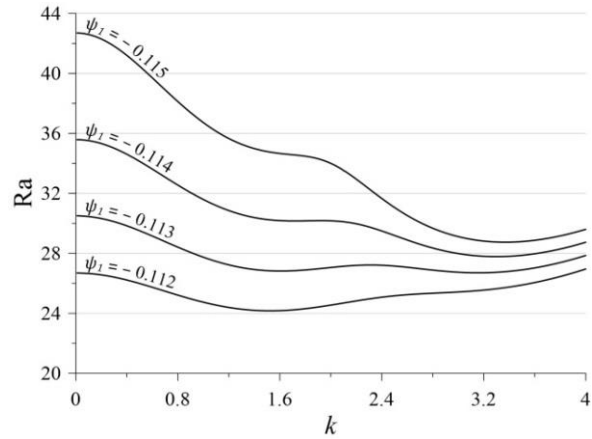
У ветви, соответствующей длинноволновой монотонной неустойчивости, наблюдается асимптотическое поведение около  $\psi_1 = -0.0743$ . У ветви длинноволновой колебательной неустойчивости – около  $\psi_1 = -0.120$ . У ветви ячеистой монотонной неустойчивости также наблюдается поведение, похожее на асимптотическое, около  $\psi_1 = -0.081$ .



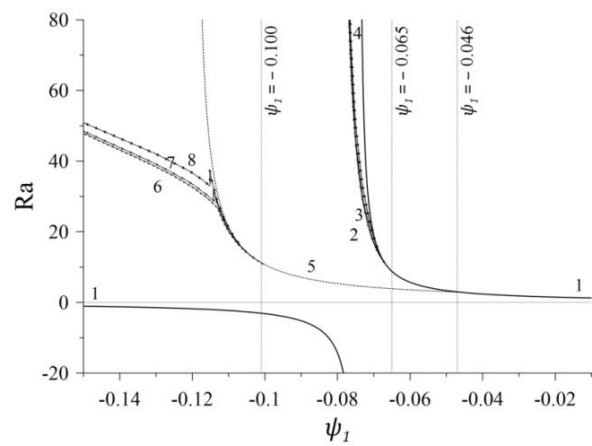
**Рис. 2.** Карта устойчивости системы для монотонных мод (кривые неустойчивости: 1 – монотонная длинноволновая; 2 – монотонная ячеистая,  $Ra_v = 0$ ; 3 – монотонная ячеистая,  $Ra_v = 1.5$ ; 4 – монотонная ячеистая,  $Ra_v = 7.5$ ; 5 – колебательная длинноволновая)



**Рис. 3.** Карта устойчивости системы для колебательных мод (кривые неустойчивости: 5 – колебательная длинноволновая; 6 – колебательная ячеистая,  $Ra_v = 0$ ; 7 – колебательная ячеистая,  $Ra_v = 1.5$ ; 8 – колебательная ячеистая,  $Ra_v = 7.5$ )



**Рис. 4.** Нейтральные кривые вблизи точки смены характера кривой колебательной неустойчивости ( $Ra_v = 0$ )



**Рис. 5.** Карта устойчивости системы (кривые неустойчивости: 1 – монотонная длинноволновая; 2 – монотонная ячеистая  $Ra_v = 0$ ; 3 – монотонная ячеистая  $Ra_v = 1.5$ ; 4 – монотонная ячеистая  $Ra_v = 7.5$ ; 5 – колебательная длинноволновая; 6 – колебательная ячеистая  $Ra_v = 0$ ; 7 – колебательная ячеистая  $Ra_v = 1.5$ ; 8 – колебательная ячеистая  $Ra_v = 7.5$ )

На рис. 6 показано влияние вибраций на критическое волновое число для ячеистой монотонной неустойчивости при разных значениях  $Ra_v$ . Как видно, вибрации сужают диапазон существования ячеистых возмущений. Однако при увеличении (по модулю)  $\psi_1$  влияние вибраций на волновое число становится всё менее значительным.

Помимо изменения наклона кривой ячеистой колебательной неустойчивости, переход через точку перегиба сопровождается скачкообразным изменением частоты колебаний и волнового числа, что также связано с переходом на другой локальный минимум на нейтральных кривых. На рис. 7 показано влияние вибраций на критическое волновое число для ячеистой колебательной неустойчивости при разных значениях  $Ra_v$ . Как видно, до точки перегиба наблюдается плавный рост волнового числа с увеличением (по модулю)  $\psi_1$ . Далее происходит скачкообразный рост, после которого

следует медленный спад и выход на некоторое постоянное значение. Наличие вибраций также сужает диапазон существования ячеистых колебательных возмущений, и так же, как и в случае монотонной неустойчивости, при увеличении (по модулю)  $\psi_1$  влияние вибраций на волновое число становится всё менее значительным.

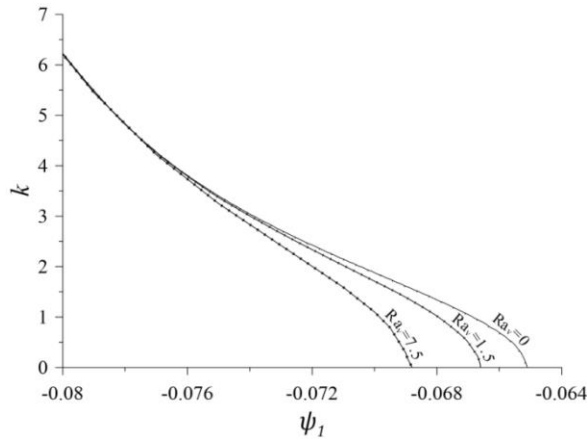


Рис. 6. Зависимость волнового числа от  $\psi_1$  для ячеистой монотонной неустойчивости

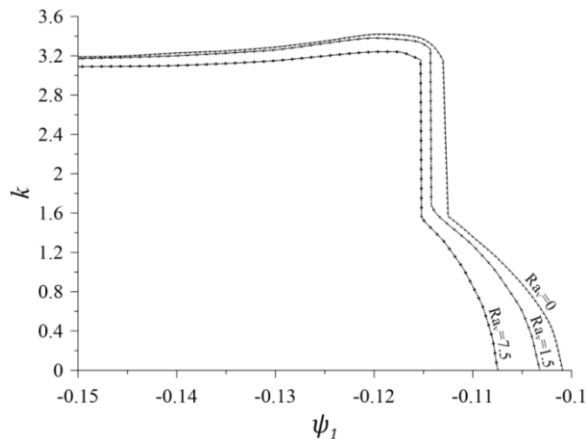


Рис. 7. Зависимость волнового числа от  $\psi_1$  для ячеистой колебательной неустойчивости

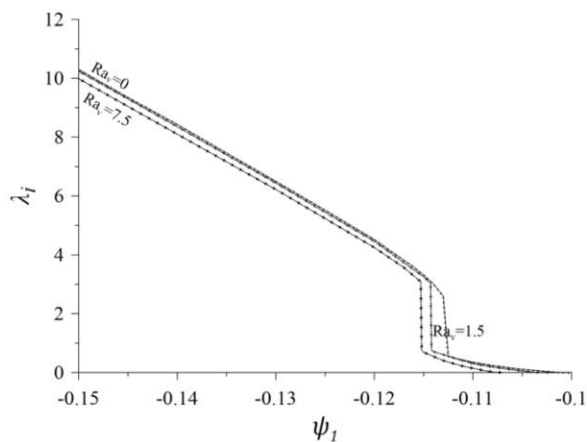


Рис. 8. Зависимость частоты колебаний от  $\psi_1$  для ячеистой колебательной неустойчивости

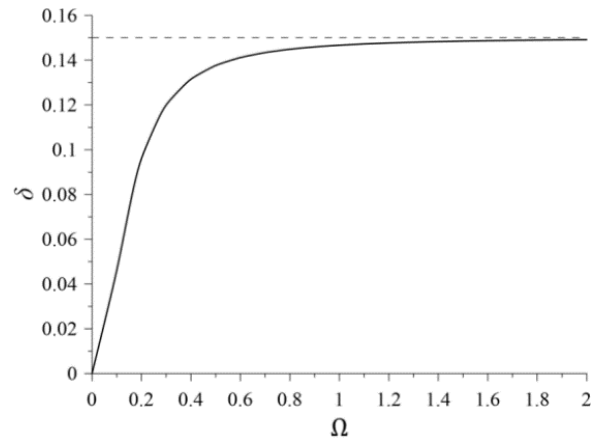


Рис. 9. Зависимость  $\delta$  от безразмерной частоты колебаний  $\Omega$  для  $\phi = 0.15$

Из рис. 8 видно, что частота колебаний на ветвях ячеистой колебательной неустойчивости при всех исследованных значениях  $Ra_v$  до и после точки перегиба (скачка) монотонно растёт с ростом (по модулю)  $\psi_1$ , причём после точки перегиба (скачка) рост линейный. Наличие вибраций уменьшает частоту колебаний во всём диапазоне существования возмущений, причём, с ростом (по модулю)  $\psi_1$  это различие для различных значений  $Ra_v$  только усиливается ( $Ra_v$  влияет на наклон линейной функции после точки перегиба).

Как отмечалось выше, на устойчивость системы оказывают влияние значение пористости  $\phi$ , вязкость жидкости  $\nu$ , а также частота вибраций  $\omega$ . Помимо того, что эти величины входят в вибрационное число Рэлея, они также входят и в другие члены, влияющие на конвективную устойчивость. Вязкость жидкости, согласно (14), влияет на значение  $\delta$ . Рассмотрим зависимость  $\delta$  от  $\Omega$  и  $\phi$  (рис. 9).

Как видно, значения  $\delta$  лежат в пределах от 0 до  $\phi$ , причём, при  $\Omega = 1$  и более высоких уже достигается значение  $\delta$ , близкое к максимальному.

## 5. Нелинейные конвективные режимы

### 5.1. Постановка задачи и граничные условия

Рассмотрим теперь данную задачу в нелинейной постановке. Постановка задачи и основные уравнения остаются такими же, как и в разделе 3.

Расчёты проводились в двумерной постановке для вытянутой по горизонтали прямоугольной полости с отношением сторон  $5 \times 1$ . На всех границах ставились условия непроницаемости и отсутствия потока примеси. На горизонтальных границах задавались постоянные разные температуры, вертикальные границы считались теплоизолированными. Эти условия в безразмерной форме имеют вид:

$$y = 0, 1: \quad V_y = 0, \quad \mathbf{w} = 0, \\ T = 1, 0, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial y} - \mathbf{I} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (30)$$

$$x = 0, 5: \quad V_x = 0, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} = 0.$$

Введём функцию тока для  $\mathbf{V}$ , определяемую соотношениями  $V_x = \partial \Psi / \partial y$ ,  $V_y = -\partial \Psi / \partial x$ , а также функцию тока для  $\mathbf{w}$ , определяемую соотношениями  $w_x = \partial \Phi / \partial y$ ,  $w_y = -\partial \Phi / \partial x$ . Система уравнений (15)–(20) в терминах функций тока принимает вид (здесь  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ ):

$$\nabla^2 \Psi = -\text{Ra} \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \psi \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} \right) - F(\text{Ra}_v, \delta, b, \varepsilon), \quad (31)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T, \quad (32)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial y} = \\ = \text{Le}^{-1} (\nabla^2 \mathbf{C} - \mathbf{I} \cdot \nabla^2 T), \quad (33)$$

$$\nabla^2 \Phi = -\delta \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \psi \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} \right), \quad (34)$$

где  $F(\text{Ra}_v, \delta, b, \varepsilon)$  – нелинейная функция, отвечающая за учёт вибраций (нижний индекс при  $\Phi$  означает дифференцирование ( $\Phi_x = \partial \Phi / \partial x$ )):

$$F = \frac{\text{Ra}_v}{b^2 \varepsilon^2 \delta} (\Phi_y \Phi_{xyy} - \Phi_x \Phi_{yyy} - \\ - \Phi_y \Phi_{xxx} + \Phi_x \Phi_{xyx}) - \\ - \frac{\text{Ra}_v}{b^2 \varepsilon} \left[ \Phi_{xy} \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \psi \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \Phi_y \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \psi \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial x^2} \right) - \Phi_{xx} \left( \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon} \psi \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - \Phi_x \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\varepsilon} \psi \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial x \partial y} \right) \right]. \quad (35)$$

Граничные условия:

$$x = 0, 5: \quad \Psi = 0, \quad \Phi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x} = 0, \quad (36)$$

$$y = 0: \quad \Psi = 0, \quad \Phi = 0, \quad T = 1, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial y} - \mathbf{I} \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad (37)$$

$$y = 1: \quad \Psi = 0, \quad \Phi = 0, \quad T = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial y} - \mathbf{I} \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (38)$$

## 5.2. Метод решения

Задача решалась методом конечных разностей. Для производных по пространству были использо-

ваны центральные разности (за исключением пристеночных узлов, в которых использовались односторонние разности), для производной по времени – односторонняя разность. Уравнения (31) и (34) решались методом последовательной верхней релаксации.

Использовалась равномерная сетка. Разрешение сетки составляло 35 ячеек по вертикали на 175 ячеек по горизонтали. Такое разрешение сетки часто используется при решении задач данного типа, так как позволяет снизить ресурсоёмкость численного метода, сохраняя качественную структуру течения. В работе [22] использовалась сетка значительно меньшего разрешения ( $25 \times 100$  узлов), при этом было получено хорошее качественное и количественное совпадение результатов линейной теории и нелинейных расчётов.

Все расчёты проводились для положительных значений числа Рэлея. Моделирование производилось до выхода на стационарный режим: режим стационарного движения либо режим стационарных колебаний.

При всех исследуемых  $\psi_1$  для нахождения порога конвекции в качестве начальных условий использовались малые возмущения состояния равновесия в виде малого (порядка  $10^{-6}$ ) ненулевого значения функции тока  $\Psi$  в одном из центральных узлов сетки. В дальнейших расчётах в качестве начальных условий использовался установившийся конвективный режим на исследуемой ветви карты режимов при близком значении  $\text{Ra}$ .

## 5.3. Рассматриваемые параметры системы

Согласно результатам линейного исследования системы, вибрации влияют только на ячеистые монотонную и колебательную моды. Ограничимся рассмотрением параметров, при которых ожидается значительное влияние вибраций. Вибрации влияют на критическое число Рэлея, критическое волновое число и частоту колебаний (для колебательной неустойчивости). Принимая во внимание эти данные (см. рис. 2, 3, 6, 7), рассмотрим такие параметры системы, при которых для исследуемой геометрии задачи влияние вибраций должно быть наиболее выраженным:  $\psi_1 = -0.070$  и  $\psi_1 = -0.108$ . При данных значениях  $\psi_1$ , согласно линейной теории, изменение  $\text{Ra}_v$  приведёт к наиболее значительному изменению критического числа Рэлея  $\text{Ra}$  и критического волнового числа  $k$ .

При  $\psi_1 = -0.070$ , согласно линейной теории, должна реализовываться ячеистая монотонная неустойчивость. Для случая без вибраций ( $\text{Ra}_v = 0$ ) критическое число Рэлея равняется  $\text{Ra} = 16.71$ , а критическое волновое число принимает значение  $k = 1.88$ , что для рассматриваемой геометрии полости ( $5 \times 1$ ) находится на границе между пятивихревым и шестивихревым режимом. При  $\text{Ra}_v = 7.5$  критическое число Рэлея равняется  $\text{Ra} = 18.53$ , а критическое волновое число принимает значение

$k = 1.10$ , что соответствует трёхвихревому режиму. Необходимо учитывать, что для данного значения  $\psi_1$  наиболее опасной модой являются длинноволновая колебательная, которая, при росте надкритичности, переходит в монотонные моды различной конфигурации. Данные переходы были подробно исследованы в работе [22], а в настоящей работе нас интересует то, как вибрации будут влиять на ветви ячеистых монотонных мод.

При  $\psi_1 = -0.108$ , согласно линейной теории должна реализовываться ячеистая колебательная неустойчивость. Для случая без вибраций ( $Ra_v = 0$ ) критическое число Рэлея равняется  $Ra = 17.26$ , а критическое волновое число принимает значение  $k = 1.19$ , что соответствует трёхвихревому режиму. При  $Ra_v = 7.5$  критическое число Рэлея равняется  $Ra = 17.79$ , а критическое волновое число принимает значение  $k = 0.31$ , что соответствует одновихревому режиму.

Остальные параметры системы используются такие же, как в разделе 4.2. Вибрационное число Рэлея  $Ra_v$  рассматривается либо нулевым (вибрации отсутствуют), либо максимальным из исследованных, чтобы влияние вибраций было наиболее выражено. Таким образом, для моделирования нелинейных режимов конвекции используются следующие параметры:

$$\begin{aligned} \psi_2 &= 0.120, \quad Le_1 = 147, \quad Le_2 = 91, \\ \varepsilon &= 0.15, \quad \delta = 0.15, \quad b = 1, \\ \psi_1 &= \{-0.070, -0.108\}, \quad Ra_v = \{0, 7.5\}. \end{aligned}$$

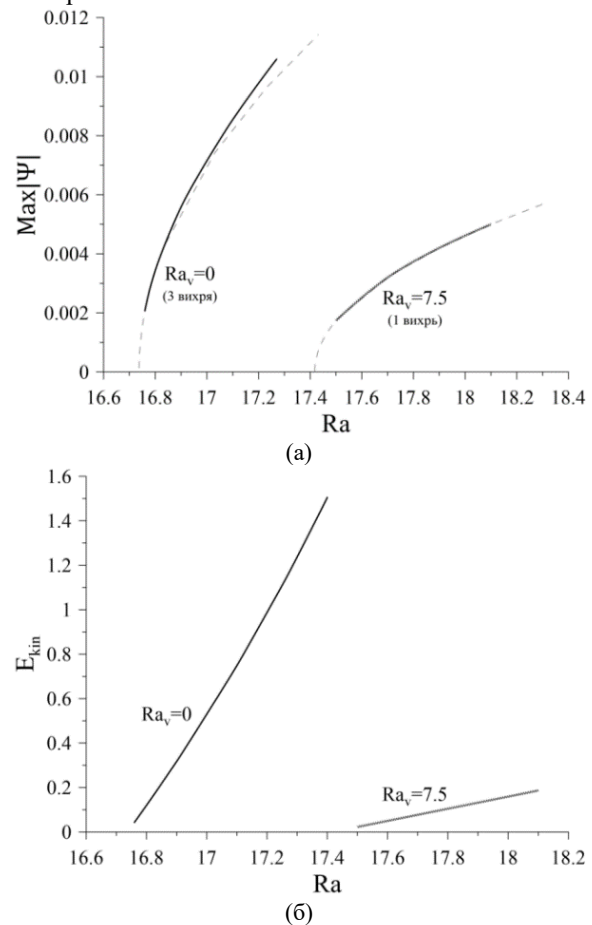
#### 5.4. Численные результаты

На рис. 10 представлены зависимости модуля максимального значения функции тока в полости  $\max|\Psi|$  и кинетической энергии течения от числа Рэлея  $Ra$  для  $\psi_1 = -0.108$  и различных значений  $Ra_v$ . Согласно линейной теории, при  $Ra_v = 0$  должен реализовываться трёхвихревой колебательный режим, а при  $Ra_v = 7.5$  – одновихревой колебательный. Как показали нелинейные расчёты, в системе действительно реализуются предсказанные линейной теорией режимы. Критическое число Рэлея также с хорошей точностью соответствует предсказаниям линейной теории: в нелинейном счёте при  $Ra_v = 0$  порог конвекции соответствует  $Ra = 16.737$  (отличие от линейной теории 3.0 %), при  $Ra_v = 7.5$  порог конвекции соответствует  $Ra = 17.418$  (отличие от линейной теории 2.1 %). Причём, как и предсказывает линейная теория, данные режимы являются наиболее опасными, а также имеет место корневой закон зависимости интегральной характеристики течения  $\max|\Psi|$  от надкритичности, что говорит о мягком возбуждении конвекции.

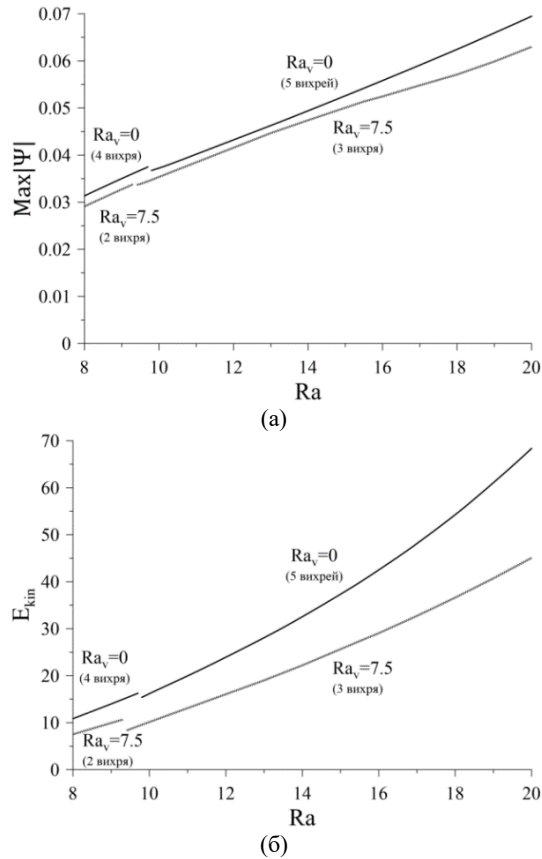
На рис. 11 представлены зависимости модуля максимального значения функции тока в полости  $\max|\Psi|$  и кинетической энергии течения от числа

Рэлея  $Ra$  для  $\psi_1 = -0.070$  и различных значений  $Ra_v$ . Согласно линейной теории, при данном значении  $\psi_1$  наиболее опасной модой является длинноволновая колебательная, однако при более высоких надкритичностях могут реализовываться ячеистые монотонные моды. В частности, при  $Ra_v = 0$  должен реализовываться пяти или шестивихревой монотонный режим, а при  $Ra_v = 7.5$  – трёхвихревой монотонный.

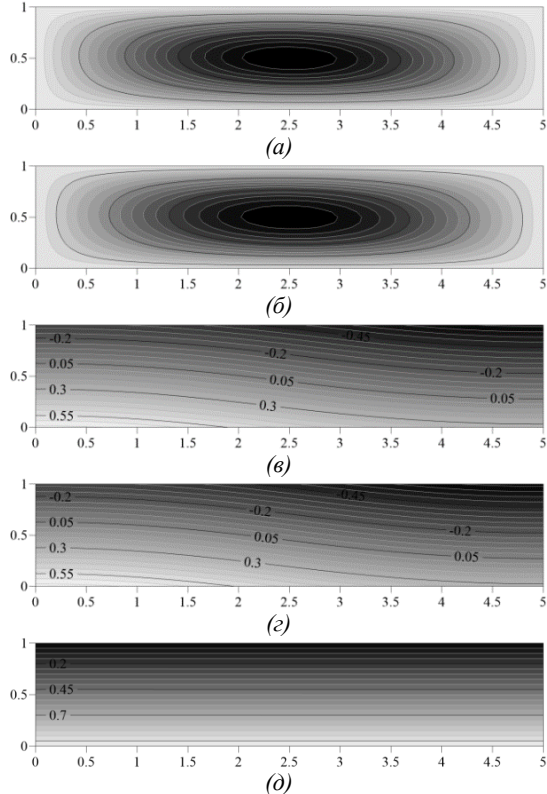
Как показали нелинейные расчёты, при повышенных надкритичностях в системе действительно реализуются предсказанные линейной теорией режимы с указанным количеством валов (волновым числом). Предсказанные режимы существуют в широком диапазоне чисел Рэлея и при приближении к порогу конвекции переходят в режимы с меньшим количеством валов, что соответствует общей тенденции увеличения числа конвективных валов при увеличении надкритичности. При  $Ra_v = 0$  переход между четырёхвихревым и пятивихревым режимом происходит в точке  $Ra = 9.75$ . При  $Ra_v = 7.5$  переход между двухвихревым и трёхвихревым режимом происходит в точке  $Ra = 9.35$ . Данные переходы не сопровождаются гистерезисом.



**Рис. 10.** Зависимость  $\max|\Psi|$  (а) и кинетической энергии течения (б) от числа Рэлея  $Ra$  при  $\psi_1 = -0.108$  (штриховая линия – корневой закон вблизи порога конвекции)



**Рис. 11.** Зависимость  $\text{max}|\Psi|$  (а) и кинетической энергии течения (б) от числа Рэлея  $Ra$  при  $\psi_1 = -0.070$

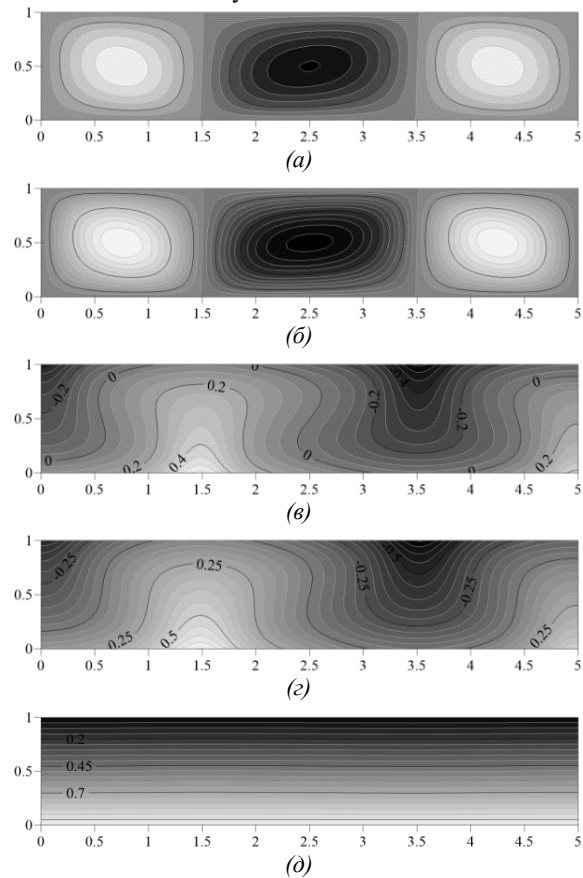


**Рис. 12.** Поля  $\Psi$  (а),  $\Phi$  (б), концентрации первой (в) и второй (г) компоненты примеси и температуры (д) при  $\psi_1 = -0.108$ ,  $Ra_v = 7.5$ ,  $Ra = 18.1$  (одновихревой режим)

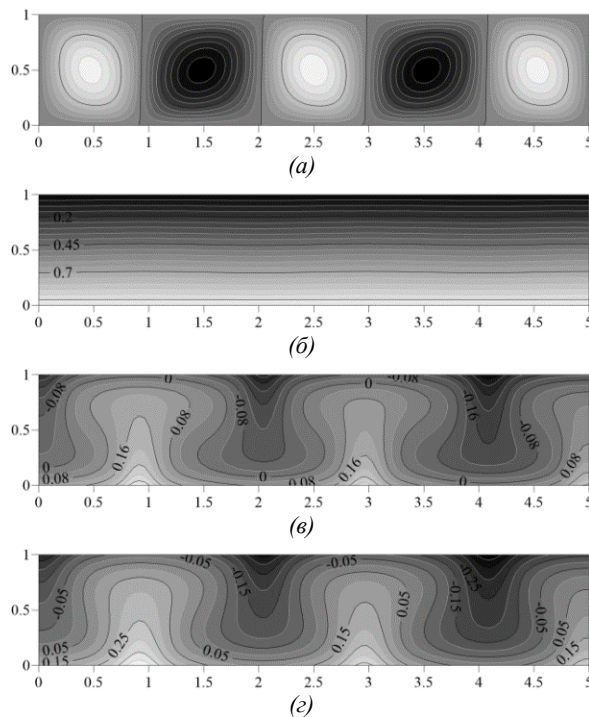
Линейная теория хорошо предсказывает порог конвекции для наиболее опасной моды, однако порог перехода между наиболее опасной модой (в данном случае – длинноволновой колебательной) и находящейся над ней модой на карте режимов линейная теория может предсказать только при близком расположении данных мод, как было показано в работе [22]. Это связано с тем, что длинноволновая колебательная мода существует лишь в очень узком диапазоне чисел Рэлея, а далее, при повышении надкритичности, переходит в монотонные моды, что является следствием нелинейного характера поведения системы и не может быть в полной мере описано в рамках линейной теории.

Тем не менее, как можно заметить, линейная теория способна правильно предсказывать волновое число наиболее опасных возмущений даже для случая повышенных надкритичностей.

На рис. 12 представлены поля  $\Psi$ ,  $\Phi$ , температуры и концентрации примесей для одновихревого режима (вертикальная ось –  $y$ , горизонтальная ось –  $x$ ). На рис. 13 и рис. 14 представлены данные поля для трёхвихревого и пятивихревого режимов. Как можно заметить, конвекция очень сильно влияет на распределение концентрации примесей по слою. С увеличением интенсивности течения её влияние усиливается.



**Рис. 13.** Поля  $\Psi$  (а),  $\Phi$  (б), концентрации первой (в) и второй (г) компоненты примеси и температуры (д) при  $\psi_1 = -0.070$ ,  $Ra_v = 7.5$ ,  $Ra = 10$  (трёхвихревой режим)



**Рис. 14.** Поля  $\Psi$  (а), температуры (б), концентрации первой (в) и второй (г) компоненты примеси при  $\psi_1 = -0.070$ ,  $Ra_v = 0$ ,  $Ra = 13.5$  (пяти-вихревой режим)

Отметим, что, в зависимости от начальных условий, в системе могут реализовываться и другие конвективные режимы (с другим волновым числом), помимо тех, что были представлены на графиках. Также, на переходы между режимами влияет шаг, с которым происходит изменение числа Рэлея в случае, когда в качестве начальных условий используется уже установившийся конвективный режим. Таким образом, как и было отмечено в работе [22], в системе имеет место множество конвективных режимов, переходы между которыми часто сопровождаются гистерезисом. Наличие вибраций не нарушает эту тенденцию.

## 6. Заключение

Исследована устойчивость механического равновесия трёхкомпонентной смеси в горизонтальном пористом слое, подогреваемом снизу и находящемся под действием высокочастотных малоамплитудных вибраций, параллельных градиенту температуры.

С помощью численного решения линейной задачи устойчивости получена карта устойчивости механического равновесия для различных значений вибрационного числа Рэлея.

Установлено, что воздействие вибраций на систему повышает порог конвекции, вместе с этим сужая диапазон существования ячеистых монотонных возмущений. Однако при увеличении (по модулю) отношения разделения  $\psi_1$  влияние вибраций на волновое число становится всё менее зна-

чительным. На порог ячеистой колебательной неустойчивости вибрации также оказывают сильное, качественно аналогичное влияние. Наличие вибраций уменьшает частоту колебаний во всём диапазоне существования возмущений, причём, с ростом (по модулю)  $\psi_1$  это различие для различных значений  $Ra_v$  только усиливается ( $Ra_v$  влияет на наклон кривой после точки перегиба). На длинноволновую неустойчивость вибрации не влияют.

Выполнено численное решение полной нелинейной задачи методом конечных разностей. Полученные численные данные хорошо согласуются с результатами линейного анализа устойчивости.

Изучен характер возбуждения неустойчивости. Найдено, что при постепенном повышении числа Рэлея до достижения критического значения, соответствующего наиболее опасной моде, реализуется прямая бифуркация. Дальнейшее повышение надкритичности приводит к переходам на другие конвективные режимы, волновое число которых падает с ростом надкритичности (растёт число валов). Переходы между режимами в большинстве случаев сопровождаются гистерезисом.

Конвекция очень сильно влияет на распределение концентрации примесей по слою. С увеличением интенсивности течения, влияние на распределение концентрации усиливается.

Работа выполнена при поддержке Министерства Науки и Высшего образования РФ (Тема № 121031700169–1).

## Список литературы

1. Van Vaerenberg S., Legros J. C. Kinetics of the Soret effect: Transient in the transport process // *Physical Review A*. 1990. Vol. 41, 6727. DOI: 10.1103/PhysRevA.41.6727
2. de Groot S. R., Mazur P. *Non-Equilibrium Thermodynamics*. New York: Dover, 1984. 528 p.
3. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal Vibrational Convection*. New York: Wiley, 1998. 358 p.
4. Zen'kovskaya S. M. Effect of high-frequency vibration on filtration convection // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1992. Vol. 33. P. 691–695. DOI: 10.1007/bf00852201
5. Gershuni G. Z., Kolesnikov A. K., Legros J.-C., Myznikova B. I. On the vibrational convective instability of a horizontal binary mixture layer with Soret effect // *Journal of Fluid Mechanics*. 1997. Vol. 330. P. 251–269. DOI: 10.1017/S002211209600376X
6. Gershuni G. Z., Kolesnikov A. K., Legros J.-C., Myznikova B. I. On the convective instability of a horizontal binary mixture layer with Soret effect under transversal high frequency vibration // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1999. Vol. 42. P. 547–553. DOI: 10.1016/S0017-9310(98)00154-9

7. Razi Y. P., Maliwan K., Charrier-Mojtabi M. C., Mojtabi A. Importance of direction of vibration on the onset of Soret-driven convection under gravity or weightlessness // *The European Physical Journal E*. 2004. Vol. 15. P. 335–341. DOI: 10.1140/epje/i2004-10072-6
8. Smorodin B. L., Myznikova B. I., Keller I. O. On the Soret-driven thermosolutal convection in a vibrational field of arbitrary frequency // Köhler W., Wiegand S. (eds.) *Thermal Nonequilibrium Phenomena in Fluid Mixtures*. Berlin: Springer, 2002. P. 372–378. DOI: 10.1007/3-540-45791-7\_18
9. Lyubimova T. High-frequency vibration effect on the stability of a horizontal layer of ternary fluid // *The European Physical Journal E*. 2015. Vol. 38, 43. DOI: 10.1140/epje/i2015-15043-2
10. Zen'kovskaya S. M., Rogovenko T. N. Filtration convection in high-frequency vibration field // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 1999. Vol. 40, № 3. P. 22–29. DOI: 10.1007/BF02468390
11. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Muratov I. D., Shishkina E. A. Vibration effect on convection onset in a system consisting of a horizontal pure liquid layer and a layer of liquid-saturated porous medium // *Fluid Dynamics*. 2008. Vol. 43, № 5. P. 789–798. DOI: 10.1134/S001546280805013X
12. Sovran O., Charrier-Mojtabi M. C., Azaiez M., Mojtabi A. Onset of Soret-driven convection in porous medium under vertical vibration // *Proc. of International Heat Transfer Conference 12 (IHTC-12)*, Grenoble. 2002. 6 p. DOI: 10.1615/IHTC12.4750
13. Maliwan K. Master's thesis. Toulouse: Université Paul Sabatier, 2001.
14. Maliwan K., Razi Y. P., Charrier-Mojtabi M. C., Mojtabi A. Influence of direction of vibration on the onset of Soret-driven convection in a porous medium // *First International Conference on Applications of Porous Media*. Jerba, Tunisia. 2002. P. 489–497.
15. Charrier-Mojtabi M. C., Razi Y. P., Maliwan K., Mojtabi A. Influence of vibrations on Soret-driven convection in porous media // *Numer. Heat Transf. Part A: Appl.* 2004. Vol. 46. P. 981–993.
16. Elhajjar B., Mojtabi A., Charrier-Mojtabi M. C. Influence of vertical vibration on the separation of a binary mixture in a horizontal porous layer heated from below // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2009. Vol. 52. P. 165–172. DOI: 10.1016/j.jheatmasstransfer.2008.05.033
17. Jounet A., Bardan G. Onset of thermohaline convection in a rectangular porous cavity in the presence of vertical vibration. *Physics of Fluids*. 2001. Vol. 13, № 11. P. 3234–3246. DOI: 10.1063/1.1403337
18. Mojtabi A., Razi Y. P., Maliwan K., Charrier-Mojtabi M. C. Effect of vibration on the onset of double diffusive convection in porous media // *Transport Phenomena in Porous Media III*. Oxford: Pergamon Press, 2005. P. 261–286. DOI: 10.1016/B978-008044490-1/50014-4
19. Razi Y. P., Mojtabi A., Charrier-Mojtabi M. C. A summary of new predictive high frequency thermo-vibrational models in porous media // *Transport in Porous Media*. 2009. Vol. 77. P. 207–228. DOI: 10.1007/s11242-008-9332-7
20. Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. The interaction of thermal vibrational and thermal gravitational mechanisms of convection onset in a fluid-porous layer // *Microgravity Science and Technology*. 2021. Vol. 33, 44. DOI: 10.1007/s12217-021-09895-3
21. Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. The effect of translational vibration with different direction on thermosolutal convection onset in a superposed fluid and porous layers under gravity // *Microgravity Science and Technology*. 2022. Vol. 34, 40. DOI: 10.1007/s12217-022-09964-1
22. Lyubimova T. P., Shubenkov I. S. Soret-induced convection of ternary fluid in a horizontal porous layer heated from below // *Physics of Fluids*. 2023. Vol. 35, 084114. DOI: 10.1063/5.0160670
23. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. New York: Springer, 2006. 640 p.
24. Lyubimova T., Zubova N. Nonlinear regimes of the Soret-induced convection of ternary fluid in a square porous cavity // *Transport in Porous Media*. 2018. Vol. 127, № 3. P. 559–572. DOI: 10.1007/s11242-018-1211-2
25. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1966. № 5. С. 51–55.
26. Коновалова Л. Н., Зиновьева Л. М., Гукасян Т. К. *Физика пласта: учеб. пособие*. Ставрополь: изд-во СКФУ, 2016. 120 с.

## References

1. Van Vaerenberg S., Legros J. C. Kinetics of the Soret effect: Transient in the transport process. *Physical Review A*, 1990, vol. 41, 6727. DOI: 10.1103/PhysRevA.41.6727
2. de Groot S. R., Mazur P. *Non-Equilibrium Thermodynamics*. New York: Dover, 1984. 528 p.
3. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal Vibrational Convection*. New York: Wiley, 1998, 358 p.
4. Zen'kovskaya S. M. Effect of high-frequency vibration on filtration convection. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1992, vol. 33, pp. 691–695. DOI: 10.1007/bf00852201

5. Gershuni G. Z., Kolesnikov A. K., Legros J.-C., Myznikova B. I. On the vibrational convective instability of a horizontal binary mixture layer with Soret effect. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997, vol. 330, pp. 251–269. DOI: 10.1017/S002211209600376X
6. Gershuni G. Z., Kolesnikov A. K., Legros J. C., Myznikova B. I. On the convective instability of a horizontal binary mixture layer with Soret effect under transversal high frequency vibration. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1999, vol. 42, pp. 547–553. DOI: 10.1016/S0017-9310(98)00154-9
7. Razi Y. P., Maliwan K., Charrier-Mojtabi M. C., Mojtabi A. Importance of direction of vibration on the onset of Soret-driven convection under gravity or weightlessness. *The European Physical Journal E*, 2004, vol. 15, pp. 335–341. DOI: 10.1140/epje/i2004-10072-6
8. Smorodin B. L., Myznikova B. I., Keller I. Thermal non-equilibrium phenomena in fluid mixtures. In: Köhler W., Wiegand S. (eds.) *Thermal Nonequilibrium Phenomena in Fluid Mixtures*. Berlin: Springer, 2002, pp. 372–378. DOI: 10.1007/3-540-45791-7\_18
9. Lyubimova T. High-frequency vibration effect on the stability of a horizontal layer of ternary fluid. *The European Physical Journal E*, 2015, vol. 38, 43. DOI: 10.1140/epje/i2015-15043-2
10. Zen'kovskaya S. M., Rogovenko T. N. Filtration convection in high-frequency vibration field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1999, vol. 40, no. 3, pp. 22–29. DOI: 10.1007/BF02468390
11. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Muratov I. D., Shishkina E. A. Vibration effect on convection onset in a system consisting of a horizontal pure liquid layer and a layer of liquid-saturated porous medium. *Fluid Dynamics*, 2008, vol. 43, no. 5, pp. 789–798. DOI: 10.1134/S001546280805013X
12. Sovran O., Charrier-Mojtabi M. C., Azaiez M., Mojtabi A. Onset of Soret-driven convection in porous medium under vertical vibration. In: *Proc. of International Heat Transfer Conference 12 (IHTC-12), Grenoble, 2002*. 6 p. DOI: 10.1615/IHTC12.4750
13. Maliwan K. *Master's thesis*. Toulouse: Université Paul Sabatier, 2001.
14. Maliwan K., Razi Y. P., Charrier-Mojtabi M. C., Mojtabi A. Influence of direction of vibration on the onset of Soret-driven convection in a porous medium In: *Proc. of the First International Conference on Applications of Porous Media*. Jerba, Tunisia, 2002, pp. 489–497.
15. Charrier-Mojtabi M. C., Razi Y. P., Maliwan K., Mojtabi A. Influence of vibrations on Soret-driven convection in porous media. *Numer. Heat Transf., Part A: Appl.*, 2004, vol. 46, pp. 981–993.
16. Elhajjar B., Mojtabi A., Charrier-Mojtabi M. C. Influence of vertical vibration on the separation of a binary mixture in a horizontal porous layer heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2009, vol. 52, pp. 165–172. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.05.033
17. Jounet A., Bardan G. Onset of thermohaline convection in a rectangular porous cavity in the presence of vertical vibration. *Physics of Fluids*, 2001, vol. 13, no. 11, pp. 3234–3246. DOI: 10.1063/1.1403337
18. Mojtabi A., Razi Y. P., Maliwan K., Charrier-Mojtabi M. C. Effect of vibration on the onset of double diffusive convection in porous media. In: *Transport Phenomena in Porous Media*, vol. III. Oxford: Pergamon Press, 2005, pp. 261–286. DOI: 10.1016/B978-008044490-1/50014-4
19. Razi Y. P., Mojtabi A., Charrier-Mojtabi M. C. A summary of new predictive high frequency thermo-vibrational models in porous media. *Transport in Porous Media*, 2009, vol. 77, pp. 207–228. DOI: 10.1007/s11242-008-9332-7
20. Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. The interaction of thermal vibrational and thermal gravitational mechanisms of convection onset in a fluid-porous layer. *Microgravity Science and Technology*, 2021, vol. 33, 44. DOI: 10.1007/s12217-021-09895-3
21. Kolchanova E. A., Kolchanov N. V. The effect of translational vibration with different direction on thermosolutal convection onset in a superposed fluid and porous layers under gravity. *Microgravity Science and Technology*, 2022, vol. 34, 40. DOI: 10.1007/s12217-022-09964-1
22. Lyubimova T. P., Shubenkov I. S. Soret-induced convection of ternary fluid in a horizontal porous layer heated from below. *Physics of Fluids*, 2023, vol. 35, 084114. DOI: 10.1063/5.0160670
23. Nield D.A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. New York: Springer, 2006, 640 p.
24. Lyubimova T., Zubova N. Nonlinear regimes of the Soret-induced convection of ternary fluid in a square porous cavity. *Transport in Porous Media*, 2018, vol. 127, no. 3, pp. 559–572. DOI: 10.1007/s11242-018-1211-2
25. Zen'kovskaya S. M., Simonenko I. B. O vliyaniy vibratsii vysokoi chastoty na vozniknovenie konveksii [On the influence of high-frequency vibration on the occurrence of convection]. *Izvestia AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 1966, no. 5, pp. 51–55. (In Russian)
26. Konovalova L. N., Zinov'eva L. M., Gukasyan T. K. *Fizika plasta* [Reservoir Physics]. Stavropol: North-Caucasus Federal University Press, 2016. 120 p. (In Russian)

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Шубенков И. С., Любимова Т. П. Влияние вибрации на возникновение конвекции в горизонтальном пористом слое, насыщенном трёхкомпонентной жидкой смесью // Вестник Пермского университета. Физика. 2026. № 2. С. 49–64. doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-49-64

**Please cite this article in English as:**

Shubenkov I. S., Lyubimova T. P. The influence of vibration on the onset of convection in a horizontal porous layer saturated with a ternary fluid. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2026, no. 2, pp. 49–64. doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-49-64

**Сведения об авторах**

1. *Шубенков Иван Сергеевич*, м.н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1, 614013
2. *Любимова Татьяна Петровна*, д-р. физ.-мат. наук, проф., зав. лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1, 614013

**Author information**

1. *Ivan S. Shubenkov*, Junior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia
2. *Tatyana P. Lyubimova*, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Laboratory Head, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia