ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2026 • ФИЗИКА • Вып. 3

УДК 532.5-1/-9
PACS 47.15.G

Исследование потоков с низким числом Рейнольдса в микроканалах в процессе травления кварца

Д. В. Наговицына [1,2†], И. Л. Никулин [2‡]

[1] ПАО Пермская научно-производственная приборостроительная компания, Пермь, Россия
[2] Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
[†] ndv@pnppk.ru
[‡] illarion-nikulin@yandex.ru

Изучение гидродинамических процессов в жидкостном травлении является неотъемлемой частью понимания физико-химических основ в формировании микроструктур. В настоящей работе проведено исследование гидродинамических режимов в кавернах в 10%-ном растворе плавиковой кислоты. С использованием программного комплекса Comsol Multiphysics построена математическая модель течения для низких чисел Рейнольдса (от 8 до 266). Основное внимание уделено изучению топологии вторичных вихрей Моффата в углах каверны и их влиянию на локальный массоперенос. В результате численного моделирования для различных глубин 50, 150 и 300 мкм выявлена существенная асимметрия вихревых структур. Впервые установлена прямая корреляция между асимметрией вторичных вихрей Моффатта в углах каверны и отклонением профиля стенок от вертикали. Показано, что в углах формируются застойные зоны, которые приводят к локальному истощению плавиковой кислоты и накоплению продуктов реакции. Полученные результаты позволяют подобрать параметры перемешивания для получения прецизионных микроструктур с минимальным наклоном стенок.

Ключевые слова: микроканал; вихри Моффата; моделирование

Поступила в редакцию 24.04.2026; после рецензии 26.05.2026; принята к опубликованию 26.05.2026

Study of low-Reynolds-number flows in microchannels during quartz etching

D. V. Nagovitsyna [1,2†], I. L. Nikulin [2‡]

[1] Perm Research and Production Instrument-Making Company PAO (PJSC), Perm, Russia
[2] Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia
[†] ndv@pnppk.ru
[‡] illarion-nikulin@yandex.ru

The study of hydrodynamic processes in liquid etching is an integral part of understanding the physical and chemical fundamentals of microstructure formation. We investigated hydrodynamic regimes in cavities in a 10 % hydrofluoric acid solution. Using Comsol Multiphysics software package, we constructed a mathematical model of the flow for low Reynolds numbers (from 8 to 266). The focus of this study was on the topology of secondary Moffatt vortices in the corners of the cavity and their impact on local mass transfer. Numerical simulations revealed significant asymmetry in the vortex structures for the depths of 50, 150, and 300 μm. This study is the first to establish a direct correlation between the asymmetry of secondary Moffatt vortices in the corners of a cavity and the deviation of the wall profile from the vertical. We demonstrate that stagnant zones form in the corners, leading to local depletion of hydrofluoric acid and accumulation of reaction products. These findings provide valuable insights into the selection of mixing parameters for obtaining precise microstructures with minimal wall inclination.

© Наговицына Д. В., Никулин И. Л., 2026

распространяется на условиях лицензии
Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).

Keywords: microchannel; Moffat vortices; modeling

Received 24 April 2026; revised 26 May 2026; accepted 26 May 2026

doi: 10.17072/1994-3598-2026-3-38-46

1. Введение

В современной микросистемной технике прецизионное жидкостное травление монокристаллического кварца является критически важным технологическим процессом [1]. Геометрия формируемых микроканавок (каверн) в том числе определяется гидродинамическим режимом течения травителя в ограниченном объёме. Традиционно расчёт таких систем опирается на ламинарные модели. Однако, как показано в фундаментальных работах *Erturk et al*. [2], даже в стационарных несжимаемых потоках при увеличении числа Рейнольдса (Re) наблюдается усложнение топологии потока с образованием каскада вихревых структур.

Одним из наиболее распространённых методов создания микроканавок является жидкостное химическое травление [3], которое по сравнению с парофазным или реактивно-ионным травлением более предпочтительно благодаря дешёвому и простому коммерческому производству, а также селективности (отношение вертикальных скоростей травления маски и кварца) и возможности групповой обработки. Сложность физико-химических процессов на границе раздела фаз «жидкость–твёрдое тело» требует глубокого понимания гидродинамических условий в зоне реакции [4].

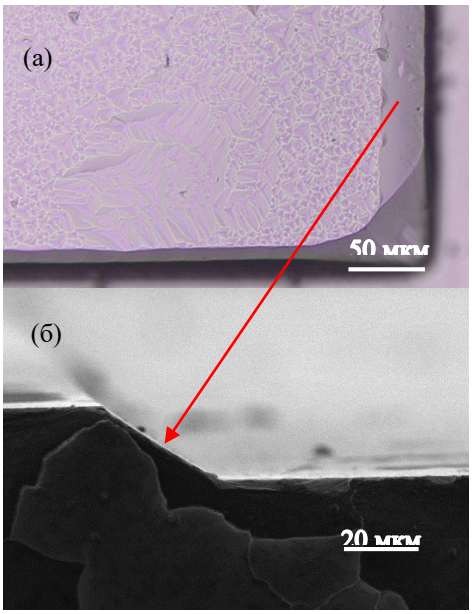


Рис. 1. *Фотография образца после травления: а – вид сверху; б – вид сбоку разрезанного образца*

Основной сложностью травления монокристаллического кварца является сильная анизотропность скорости травления, из-за чего на протравленной поверхности образовываются кристаллические структуры в виде «пирамид» [5]. Однако в макромасштабе это влияет на шероховатость поверхности, но не на её геометрию (см рис. 1). Шероховатость поверхности формируется из-за неравномерности стравливания кристаллических структур, у которых скорость травления по разным осям направления различна, а также из-за микромаскирования. Вследствие этого образовываются ямки и бугорки, которые формируют шероховатость поверхности. Движение жидкости внутри каверны играет важную роль в высвобождении продуктов реакции с её поверхности и подводу свежего травителя. Особенно важно это для видов специальных стёкол, у которых скорость травления очень высокая (порядка 2–5 мкм/мин), например, с содержанием фосфора [6]. Застой в углах каверны приводит к неравномерному стравливанию подложки, из-за чего дно каверны становится неравномерным.

Современное моделирование процессов базируется на решении сопряжённой задачи, объединяющей уравнения Навье–Стокса для описания течения травителя и уравнение конвекции–диффузии для расчёта транспорта активных компонентов к поверхности. В актуальных исследованиях *Daoming Yang et al* [7], моделирование эволюции реализуется в специальных программных продуктах с применением подвижных сеток, что позволяет учитывать динамическое изменение границы раздела фаз. Тем не менее, точность прогнозирования формы канавки напрямую зависит от корректности решения вихревых структур внутри каверны [8].

Использование модели «течение в каверне» (*lid-driven cavity*) в качестве расчётной базы обусловлено её статусом классической задачи гидродинамики [2]. В такой задаче при увеличении перемешивания в углах каверны возникают каскад вторичных, третичных и даже четвертичных вихрей Моффатта (*Moffatt eddies*) [9]. С точки зрения микротехнологии, эти застойные зоны формулируют локальные барьеры для массопереноса. В застойных зонах вихрей диффузионный механизм доставки реагентов становится доминирующим, что лимитирует общую скорость процесса травления, что приводит к неравномерному распределению удаления материала подложки.

Перед травлением пластину обрабатывают специальными аммиачными растворами для удаления органики и окисления поверхности, чтобы уменьшить угол смачиваемости. В травителе также добавляются поверхностно-активные вещества, чтобы в процессе травления угол смачиваемости не изменялся, и травитель попадал во все микрокаверны.

Целью настоящей работы является построение математической модели, описывающей массоперенос в системе «травитель–кварц», которая позволит изучить влияния скорости течения травителя на интенсивность массопереноса вблизи стеклянной поверхности. Для достижения цели решаются следующие задачи:

1. Разработать математическую модель течения в каверне с учетом варьирования аспектного отношения H/L.
2. Привести численное моделирование и верификацию структуры потоков при различных числах Рейнольдса и скорости потока.
3. Изучить топологию вторичных вихрей Моффата в углах каверны и оценить их влияние на локальную интенсивность массопереноса.

2. Постановка задачи

2.1. Описание установки

На рисунке 2 представлена схема установки для травления. *Вейфер* (стеклянная пластинка, на которую наносится маска, и после травления формируются элементы микроэлектронных устройств) 1 устанавливается на подвижное основание. Подвижное основание 2 устанавливается на неподвижное 3 и они помещаются в ёмкость с травителем 4. Диаметр неподвижного основания 100 мм, диаметр подвижной оси примерно 100 мм. На неё можно закреплять образцы до 20 мм. Материал установки – фторопласт. Частота вращения вокруг вертикальной оси f_1=0.5 с$^{-1}$, отношение частоты к маленькой шестерёнке равно 2, следовательно, частота вращения образца f_2 =1 с$^{-1}$ вокруг горизонтальной оси.

Травление образца происходит в 10%-м растворе плавиковой кислоты согласно следующей химической реакции

$$SiO_2 + 6HF = H_2SiF_6 + 2H_2O.$$

Физические параметры раствора представлены в табл. 1.

Время травления образца при T = 25°C и обозначенной концентрации составила примерно 11 ч, глубина протравленного образца 22 мкм.

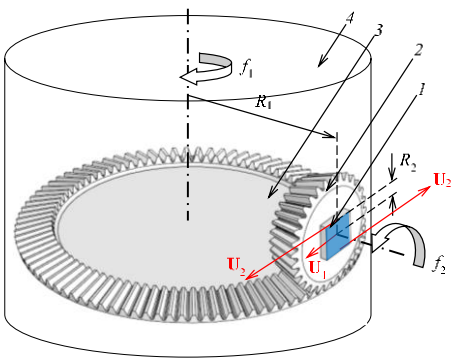


Рис. 2. *Схема закрепления вейфера на вращающуюся оснастку*

Таблица 1. *Таблица физических параметров раствора HF*

Параметр	Обозначение	Ед. изм.	HF 10%
Плотность	ρ	кг/м^3	1035
Динамическая вязкость	μ	мПа·с	0.95
Кинематическая вязкость	ν	·10^{-6} м^2/с	0.92

2.2. Число Рейнольдса

В процессах жидкостного химического травления интенсивность перемешивания является определяющим фактором, контролирующим подвод свежего реагента к реакционной поверхности. При использовании системы, где кварцевая пластина совершает вращательные движения в плоскости травителя, локальная скорость потока U над каверной зависит от радиуса вращения и угловой скорости установки.

Для условий типичного технологического процесса рассматривается пластина, совершающая вращение по траектории с радиусом R при частоте f, при этом скорость поступательного движения:

$$U = 2\pi Rf. \quad (1)$$

С учётом характерного размера каверны и кинематической вязкости раствора травителя локальное число Рейнольдса оценивается следующим образом:

$$\mathrm{Re} = \frac{UH}{\nu}, \quad (2)$$

где ν – кинематическая вязкость, м^2/с, H – глубина каверны (характерная длина), м.

В производственных условиях скорость вращения может варьироваться, а наличие планетарного движения приводит к вариации скорости. В настоящей работе число Рейнольдса Re определяется через результирующую скорость движения различных элементов вейфера на вращающемся основании следующим образом. В верхней части вейфера скорость движения вокруг вертикальной оси U_1 складывается с скоростью вращения вокруг горизонтальной оси U_2 (см. рис. 2), скорости U_1 и U_2 определяются по соотношению (1) с соответствующими радиусами и частотами. На горизонтальной оси U_2 = 0. В верхней части скорости U_1 и U_2 противонаправлены, поэтому результирующая скорость $U_2 – U_1$.

Значения чисел Рейнольдса и локальной скорости определены в табл. 2.

Таблица 2. *Числа Рейнольдса для разных режимов*

Глубина каверны H, мкм		50	150	300
Скорость		Re		
U_1	0.157	8.53	25.59	51.19
$U_2 – U_1$	0.471	25.59	76.79	153.59
$U_2 + U_1$	0.785	42.66	127.98	255.98

При анализе расчётных значений чисел Рейнольдса выяснилось, что основное влияние на интенсивность перемешивания в кавернах является именно вращение вейфера вокруг горизонтальной оси из-за пропорциональности двух частот. Отношение частот можно варьировать, изменяя радиус поверхности, к которой крепится вейфер.

2.3. Уравнения гидродинамики

В настоящей работе рассматривается стационарное двумерное течение несжимаемой вязкой жидкости в квадратной каверне со стороной *L*. Физическая область ограничена тремя неподвижными твёрдыми стенками, в то время как верхняя граница (крышка) движется с постоянной скоростью *U* в положительном направлении оси *x*, индуцируя вихревое движение травителя внутри объёма (рис. 3).

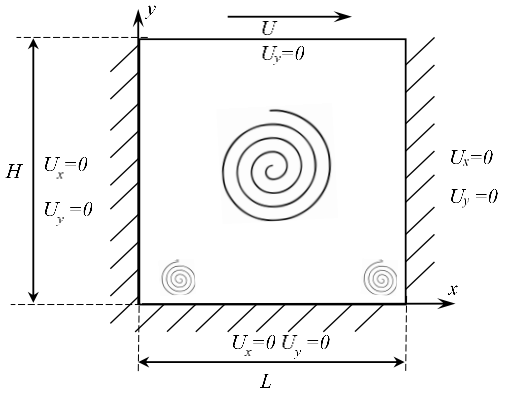


Рис. 3. *Геометрия каверны и граничные условия*

Описание гидродинамических линий тока в каверне позволит выявить направление потока плавиковой кислоты, для этого были использованы следующие уравнения:

Уравнение Навье-Стокса

$$\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \nabla\cdot[-p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T], \qquad (3)$$

где μ – динамическая вязкость, ρ – плотность, **I** – единичная матрица, $(\nabla\mathbf{u})^T$ – транспонированный градиент скорости.

Уравнение несжимаемой жидкости:

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \qquad (4)$$

2.4. Расчётная сетка

Эффективное численное моделирование часто требует изменения плотности узлов. Например, в нашем случае поток жидкости вблизи узлов или стен может иметь сложную вихреобразную структуру. Чтобы точно зафиксировать такое изменение скорости в этих областях, необходимо увеличить количество узлов сетки, по сравнению с другими подобластями. Для решения уравнения (3) использовался метод конечных элементов. В данном случае мы разделили общую расчётную область на 3 подобласти: центральную и по краям, шириной 100 мкм каждая (рис. 4). В этой области мы выделили 200×600 ячеек для расчёта. В остальной части сетка была довольная разрежена. Вблизи углов применена процедура сгущения сетки. Это необходимо для корректного разрешения градиентов скорости в пограничных слоях и идентификации мелкомасштабных вихрей Моффатта. Основной сложностью стала существенная разница в масштабах (ширина каверны 500 мкм и угловые вихри в несколько мкм). При недостаточной плотности сетки линии тока «размывались», что могло привести к ложной интерпретации застойных зон.

h_x, h_y	h_x, h_y	h_x, h_y
$h_x/6$, h_y	h_x, h_y	$h_x/6$, h_y

Рис. 4. *Схема сетки в расчётной области. В областях с серой заливкой сетка сгущается*

2.5. Верификация

Для двумерных и осесимметричных потоков удобно использовать формулировки функции тока и завихренности уравнений Навье-Стокса. В безразмерной форме они представлены в виде уравнений (5), (6). Данные уравнения использовались для вычисления ψ и ω (см. табл. 3).

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\omega \qquad (5)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} \qquad (6)$$

где Re – число Рейнольдса, *x*, *y* – координаты в декартовой системе координат, ψ – функция тока, ω – функция завихренности.

Компоненты скорости реализованы через функцию потока ψ.

$$U_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \text{и } U_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad (7)$$

Граничные условия:

1. На неподвижных стенках $U_x = 0$, $U_y = 0$;
2. На подвижной стенке $U_x = U$, $\psi = 0$;

В настоящей работе в качестве первого этапа валидации численного алгоритма проведено моделирование течения в квадратной каверне стороной 1×1 мм. Сравнение осуществлялось по следующим, принятых в классических работах [2, 10–12], параметрам: координаты *x* и *y* центра первичного вихря, значению функции тока в этой точке и интенсивности завихренности. Скорость течения 1 мм/с.

Результаты моделирования получены в пакете COMSOL Multiphysics для числа Рейнольдса Re = 1000 и демонстрируют высокую степень корреляции с предыдущими решениями. В таблице 2 приведены сравнительные данные для параметров первичного вихря.

На рисунке 5 приведены результаты моделирования течений в каверне для числа Рейнольдса Re = 1000. Расхождение с известными результатами составляет не более 0.31 %.

Таблица 3. *Сравнение результатов первичного вихря с предыдущими решениями*

Статья	x	y	ψ	ω
[2]	0.5300	0.5650	0.118585	2.062761
[10]	0.5308	0.5652	0.1189366	2.067750
[11]	0.5333	0.5647	0.1178	2.0760
[12]	0.5313	0.5625	0.119004	2.068546
Расчет	0.5307	0.5649	0.118966	2.069161

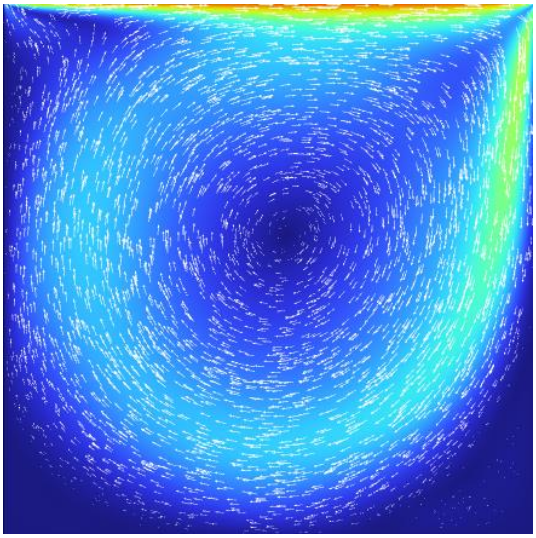


Рис. 5. *Расчётное течение в каверне*

3. Результаты

Расчёт реальных геометрических параметров МЭМС-структур позволяет выявить зависимости между глубиной травления и топологией вихревых течений. Для этого было рассмотрено три глубины 50 мкм, 150 мкм и 300 мкм. Ширина каверны примерно 500 мкм. Результаты моделирования представлены на рис. 6–8.

Анализ распределения скоростей, представленных на рис. 6–8, показывает, что при числах Рейнольдса (Re < 50) структура течения остаётся практически симметричной относительно вертикальной плоскости симметрии каверны. Светлые участки соответствуют высокой скорости потока. Однако с увеличением глубины H до 300 мкм наблюдается формирование выраженных застойных зон в нижних углах – тёмные участки. Увеличение линейной скорости до 0.785 м/с приводит к смещению центра основного вихря вправо, и в нижней части каверны формируется обширная область с низкими скоростями течения.

Визуализация общей топологии течения с помощью функций тока позволяет определить положение первичного вихря. Но для детального анализа массопереноса у реакционных поверхностей (дна и стенок) решающее значение имеют пристенные зоны. В данных областях, согласно теории Моффатта, при определённых числах Рейнольдса и достаточной плотности сетки возникают каскады вложенных микровихрей. Для их идентификации и изучения локальных барьеров массопереноса в работе используется построение линий тока (streamlines) сгущённой плотности, что позволяет визуализировать структуру течения в масштабах, сопоставимых с характерным размером шероховатости поверхности (5–10 мкм).

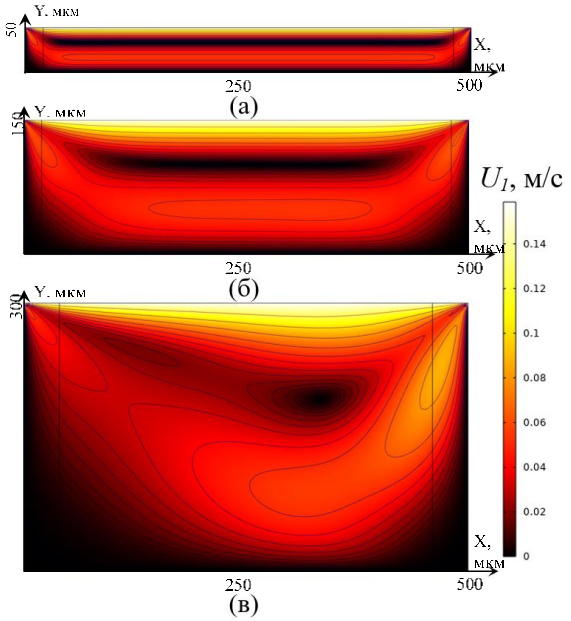


Рис. 6. *Распределение модуля скорости при $U=U_1=0.157$ м/с глубиной а)50 мкм (Re = 8.53); б) 150 мкм (Re = 25.59); в)300 мкм (Re = 51.19)*

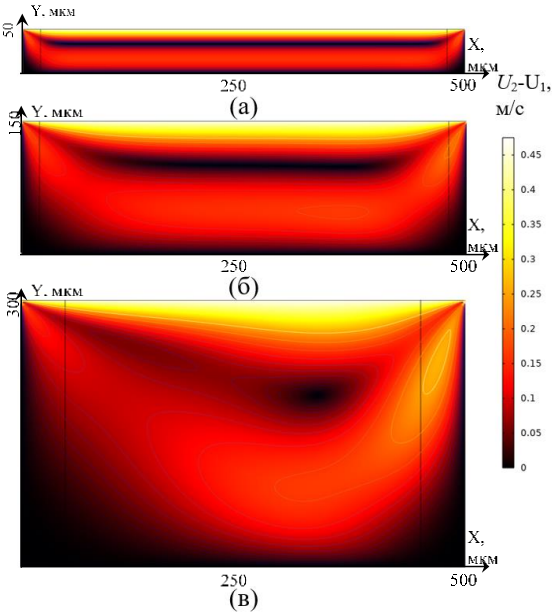


Рис. 7. *Распределение модуля скорости при $U=U_2-U_1=0.471$ м/с глубиной а)50 мкм (Re = 25.59); б) 150 мкм (Re = 76.80); в)300 мкм (Re = 153.59)*

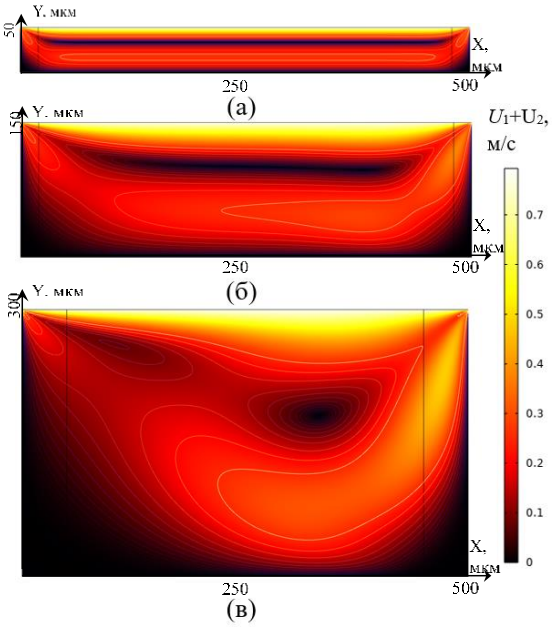


Рис. 8. *Распределение модуля скорости при U= U_2+U_1= 0.785 м/с глубиной а)50 мкм (Re = 42.66); б)150 мкм (Re = 127.98); в)300 мкм (Re = 255.98)*

В результате получена картина всех видов вихрей. Установлено, что при малых Re доминирует первичный вихрь, обеспечивающий равномерный массоперенос. С ростом скорости *U* и глубины *H* линии тока демонстрируют выраженную асимметрию. Центры первичных вихрей (см. рис. 6, *в* – 8, *в*) смещаются, а в правом углу формируется зона, где травитель практически не обновляется. На детальных изображениях углов (рис. 9–14) видны вторичные вихри BL и BR. Их наличие объясняет замедление скорости травления в углах, формирование наклонных стенок, так как в этих замкнутых структурах транспорт реагента возможен только за счёт медленной диффузии.

4. Обсуждение

При анализе структуры потока в углах каверны с помощью линий тока обнаруживается наличие застойных зон. В то время как основная масса травителя вовлечена в общее движение, в углах формируются вторичные вихри Моффатта BL и BR. Третичных и четвертичных вихрей не наблюдалось. Результаты вторичных вихрей представлены на рис. 9–14.

Выявлена сильная асимметрия между левым (BL) и правым вихрем (BR). У левого вихря форма гораздо более чёткая и угловая. Основной поток формирует угловые вихри за счёт чего диффузионный слой сокращается и угол формируется с острой геометрией. С ростом скорости *U* (числа Re) левый вихрь увеличивается, образуя «равнобедренный треугольник», после Re>50 увеличивается горизонтальная часть вихря, и симметрия исчезает. Правый вихрь при Re<128 совпадает по размерам с левым. При Re>150 правый вихрь становится меньше левого, что объясняется деформирующим действием набегающего со свободной поверхности потока травителя.

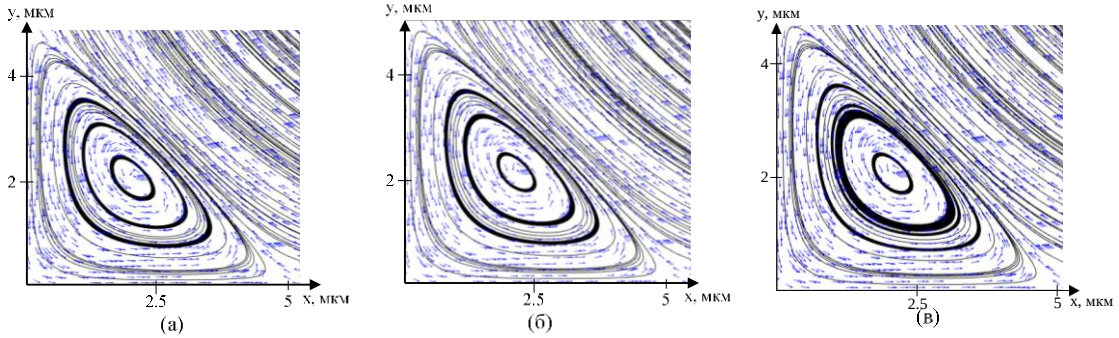


Рис. 9. *Поле линий тока для левого каверна глубиной 50 мкм с разной скоростью движения «крышки» а) 0.157 м/с, Re = 8.53; б)0.471 м/с, Re = 25.59; в)0.785 м/с, Re = 42.66*

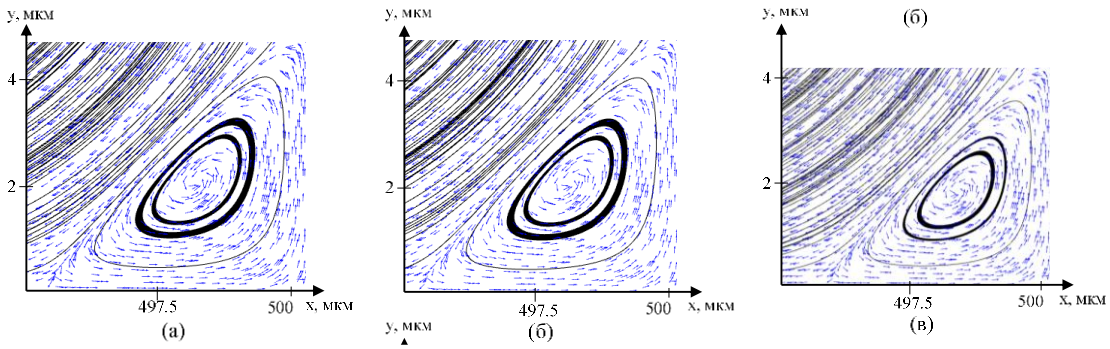


Рис. 10. *Поле линий тока для правого каверна глубиной 50 мкм с разной скоростью движения «крышки» а) 0.157 м/с, Re = 8.53; б)0.471 м/с, Re = 25.59; в)0.785 м/с, Re = 42.66*

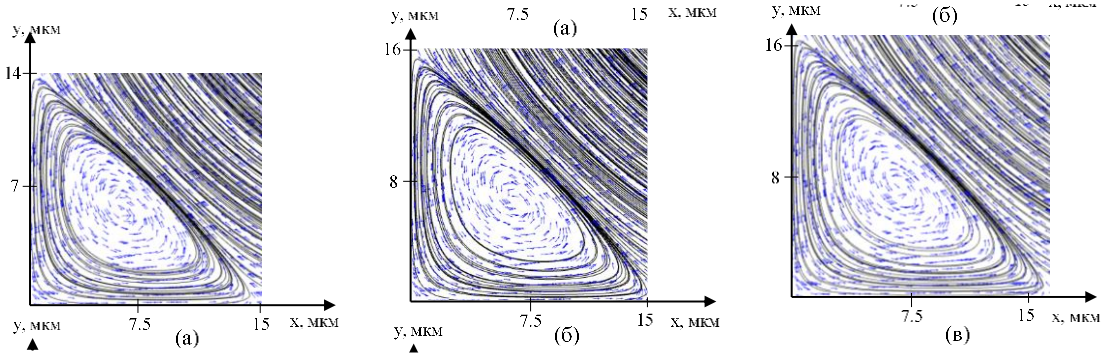


Рис. 11. *Поле линий тока для левого каверна глубиной 150 мкм с разной скоростью движения «крышки» а) 0.157 м/с, Re = 25.60; б)0.471 м/с, Re = 76.80; в)0.785 м/с, Re = 127.98*

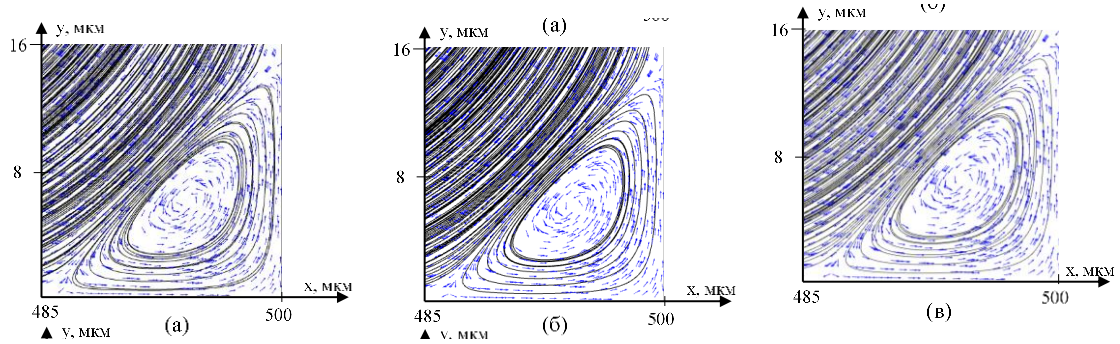


Рис. 12. *Поле линий тока для правого каверна глубиной 150 мкм с разной скоростью движения «крышки» а) 0.157 м/с, Re = 25.60; б)0.471 м/с, Re = 76.80; в)0.785 м/с, Re = 127.98*

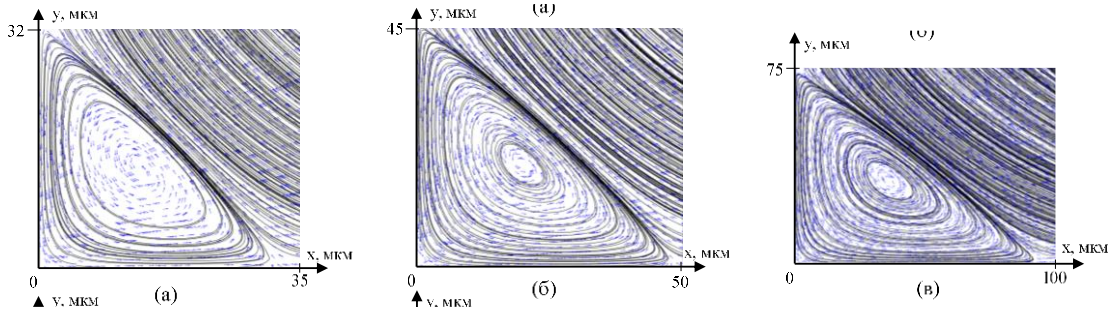


Рис. 13. *Поле линий тока для левого каверна глубиной 300 мкм с разной скоростью движения «крышки» а)0.157 м/с, Re = 51.19; б)0.471 м/с, Re = 153.59; в)0.785 м/с, Re = 255.98*

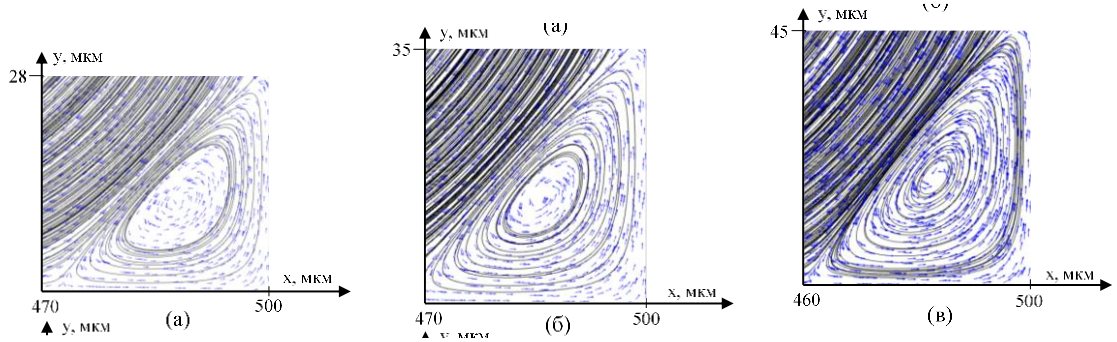


Рис. 14. *Поле линий тока для правого каверна глубиной 300 мкм с разной скоростью движения «крышки» а) 0.157 м/с, Re = 51.19; б)0.471 м/с, Re = 153.59; в)0.785 м/с, Re = 255.98*

С увеличением глубины H каверны размер вихрей увеличивается. Левый вихрь увеличивается от 5 до 100 мкм, правый вихрь от 5 до 40 мкм. Причём пока глубина недостаточно большая, размеры вихрей одинаковые, а с увеличением глубины до 300 мкм асимметрия становится примерно в 2.5 раза. На

глубине 300 мкм также сильно влияет скорость «крышки» на размер вихрей. Изменение происходит пропорционально.

Графики модуля скорости на расстоянии 2 мкм от дна для трёх скоростей 0.157, 0.471, 0.785 м/с и трёх глубин канавок 50 мкм, 150 мкм, 300 мкм. Скорость на расстоянии 2 мкм от дна убывает с ростом глубины H в 3 раза. Кроме того, на этих графиках можно отследить, что размер застойных зон с подавленным течением растёт.

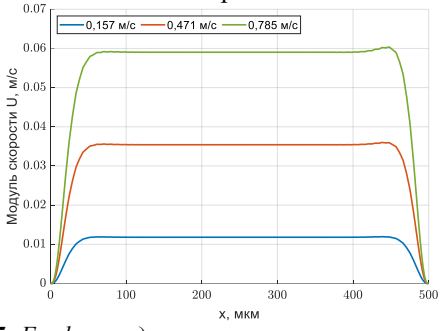


Рис. 15. *График модуля скорости на расстоянии 2 мкм от дна канавки; глубина канавки 50 мкм*

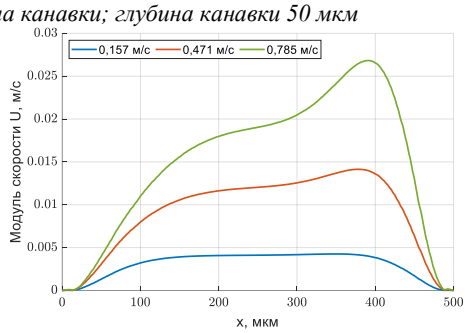


Рис. 16. *График модуля скорости на расстоянии 2 мкм от дна канавки; глубина канавки 150 мкм*

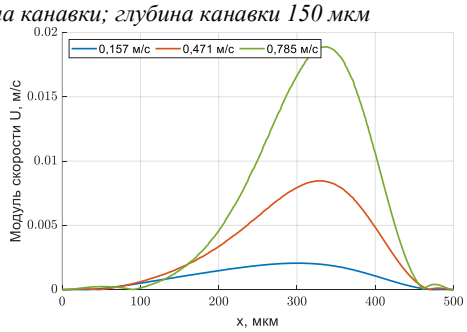


Рис. 17. *График модуля скорости на расстоянии 2 мкм от дна канавки; глубина канавки 300 мкм*

5. Заключение

Построена математическая модель протравленных каверн на глубине 50, 150 и 300 мкм, имитирующих глубокое жидкостное травление. Модель построена на численном решении уравнения Навье–Стокса. Верификация модели показала, что расхождение с известными результатами составляет не более 0.31 % Смоделировано течение травителя при различных H и U, показано, что с увеличением глубины каверны сформированные вихри Моффатта увеличиваются в размере и изменяется их форма. Левый вихрь имеет более пологую топологию, а правый вихрь – более острую. Кроме того, с увеличением этих параметров появляется сильная асимметрия вихрей (различие – примерно в 2.5 раза). Показаны графики скорости на дне каверн. Скорость на глубине с увеличением высоты H уменьшается в 3 раза.

В отличие от существующих работ, объясняющих искривление стенок микроструктур в кварце исключительно кристаллографической анизотропией, в настоящей статье теоретически обоснована важная роль гидродинамической асимметрии. Впервые показано, что топология линий тока в микромасштабных кавернах формирует застойные зоны в углах, которые лимитируют подвод травителя к поверхности. Установлено влияние направления внешнего потока на различие в размерах набегающего (BL) и уходящего (BR) угловых вихрей, что объясняет асимметрию реального профиля травления.

В перспективе – расчёт концентрационной задачи и подбор режима травления, обеспечивающий правильную геометрию стенок.

Список литературы

1. *Guérard J., Duquesnoy M., Le Traon O., Lavenus P., Ledier A., Levy R., Bonhomme J.* The GYTRIX quartz crystal axisymmetric mems GYRO: preliminary measurements // Proc. of 2024 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL), Hiroshima, Japan, 2024. P. 1–3.
2. *Erturk E. et al.* Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. Vol. 48. P. 747–774.
3. *Xue H. et al.* Deep wet etching of a Z-cut α-quartz wafer by fluorine-based solutions: experiment, mechanism, and application // Journal of Microelectromechanical Systems, 2025. Vol. 34, № 3. P. 332–346.
4. *Zhao X., Zhao M., Ji J., Lv Ch., Song Sh.* 2D Analysis and simulation of quartz crystal etch penetration by revisiting a previous geometric method // Sensors and Actuators A. 2024. Vol. 372, 114901.
5. *Xue H., Zhang Z., Ai J., Li C., Li B., Zhao Y., Wang A.,* Dynamic process of wet etching using BOE solutions to control the etch rate, roughness, and surface morphology of a Z-cut α-quartz wafer // Ceramics International. 2024. Vol. 50, № 14. P. 25978–25987.
6. *Monk D., Soane D., Howe R.* Determination of the etching kinetics for the hydrofluoric acid/silicon dioxide system // Journal of The Electrochemical Society. 1993. Vol. 140. P. 2339–2346.
7. *Yang D., Zhou L., Hao Sh., Ye G., Zhou X.,* Modelling and simulation of selective Si_3N_4 etching in 3D NAND structures // Chemical Engineering Science. 2026. Vol. 325, 123473.

8. *Li L., Klausner J. F., Mei R.* Flow structures in two-dimensional lid-driven cavity flow: Benchmark numerical results for steady flows // European Journal of Mechanics – B/Fluids. 2025. Vol. 114, 204313.
9. *Westermann A., Davydov O., Sokolov A. Turek S.* Stability and accuracy of a meshless finite difference method for the Stokes equations // Int. J. Numer. Methods Eng. 2025. Vol. 126, e70000.
10. *Botella O, Peyret R.* Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // Computers and Fluids. 1998. Vol. 27. P.421–433.
11. *Hou S, Zou Q, Chen S, Doolen G, Cogley AC.* Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method // Journal of Computational Physics. 1995. Vol. 118. P.329 –347.
12. *Nishida H, Satofuka N.* Higher-order solutions of square driven cavity flow using a variable-order multi-grid method // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1992. Vol. 34. P. 637–653.

References

1. Guérard J., Duquesnoy M., Le Traon O., Lavenus P., Ledier A., Levy R., Bonhomme J. The GYTRIX quartz crystal axisymmetric mems GYRO: preliminary measurements. *Proc. of IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL)*, 2024, pp. 1–3.
2. Erturk E. et al. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2005, vol. 48, pp. 747–774.
3. Xue H. et al. Deep wet etching of a Z-cut α-quartz wafer by fluorine-based solutions: experiment, mechanism, and application. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2025, vol. 34, no. 3, pp. 332–346.
4. Zhao X., Zhao M., Ji J., Lv Ch., Song Sh. 2D Analysis and simulation of quartz crystal etch penetration by revisiting a previous geometric method. *Sensors and Actuators A*, 2024, vol. 372, 114901.
5. Xue H., Zhang Z., Ai J., Li C., Li B., Zhao Y., Wang A., Dynamic process of wet etching using BOE solutions to control the etch rate, roughness, and surface morphology of a Z-cut α-quartz wafer. *Ceramics International*, 2024, vol. 50, no. 14, pp. 25978–25987.
6. Monk D., Soane D., Howe R. Determination of the etching kinetics for the hydrofluoric acid/silicon dioxide system. *Journal of The Electrochemical Society*, 1993, vol. 140, pp. 2339–2346.
7. Yang D., Zhou L., Hao Sh., Ye G., Zhou X., Modelling and simulation of selective Si_3N_4 etching in 3D NAND structures. *Chemical Engineering Science*, 2026, vol. 325, 123473.
8. Li L., Klausner J. F., Mei R. Flow structures in two-dimensional lid-driven cavity flow: Benchmark numerical results for steady flows. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 2025, vol. 114, 204313.
9. Westermann A., Davydov O., Sokolov A., Turek S. Stability and accuracy of a meshless finite difference method for the Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Eng*., 2025, vol. 126, e70000.
10. Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers and Fluids*, 1998, vol. 27, pp. 421–433.
11. Hou S., Zou Q., Chen S., Doolen G., Cogley A. C. Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, 1995, vol. 118, pp. 329 –347.
12. Nishida H., Satofuka N. Higher-order solutions of square driven cavity flow using a variable-order multi-grid method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1992, vol. 34, pp. 637–653.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:
Наговицына Д. В., Никулин И. Л. Исследование потоков с низким числом Рейнольдса в микроканалах в процессе травления кварца // Вестник Пермского университета. Физика. 2026. № 3. С. 38–46. doi: 10.17072/1994-3598-2026-3-38-46

Please cite this article in English as:
Nagovitsyna D. V., Nikulin I. L. Study of low-Reynolds-number flows in microchannels during quartz etching. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2026, no. 3, pp. 38–46. doi: 10.17072/1994-3598-2026-3-38-46

Сведения об авторах
1. *Наговицына Дарья Владимировна*, аспирант кафедры «Общая физика» ПНИПУ, Комсомольский проспект 29, 614990, Пермь, Россия
2. *Никулин Илларион Леонидович*, доктор техн. наук, профессор кафедры «Общая физика» ПНИПУ, Комсомольский проспект 29, 614990, Пермь, Россия

Author information
1. *Daria V. Nagovitsyna*, Postgraduate Student, Department of General Physics, Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia
2. *Illarion L. Nikulin*, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Department of General Physics, Perm National Research Polytechnic University; 29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia