

УДК 532.5
PACS 47.15.Cb, 47.20.Bp

Нестационарное неоднородное конвективное течение Куэтта

К. В. Губарева^{1†}, Е. Ю. Просвирыков^{2,3‡}

¹ Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

² Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

³ Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

В статье найдено точное решение нестационарной системы уравнений Обербека–Буссинеска, описывающее развитие пространственно неоднородного конвективного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском горизонтальном слое. В отличие от известного стационарного класса решений Линя–Сидорова–Аристова, здесь поля скорости и температуры зависят от времени. Рассматриваемое решение соответствует слоистым течениям, типичным для крупномасштабных геофизических процессов: вертикальная скорость пренебрежимо мала, а горизонтальные компоненты линейно меняются с координатами. Для этого класса полей выведена замкнутая система уравнений, учитывающая нелинейное взаимодействие вихревой компоненты с поперечной скоростью. С помощью интеграла Дюамеля задача сводится к интегральным уравнениям, что позволяет получить явные выражения для нестационарных коэффициентов разложения в ряды Фурье и обеспечить высокую точность вычислений. При граничных условиях (постоянные скорость и температура на верхней границе, нулевые начальные условия) построено точное решение в виде бесконечных рядов. Численный анализ выявил немонотонное изменение зоны противотечения: на начальном этапе противотечение существует за счёт инерционных эффектов, затем пропадает при вязкой релаксации и появляется вновь под действием нелинейного члена. Определены времена выхода полей скорости и температуры на стационар, прослежено поведение касательных напряжений, смещение точки экстремума продольной скорости. Показана возможность динамической разгрузки – обращение касательного напряжения в ноль в отдельные моменты. Найденные закономерности важны для понимания динамики вихревых структур в океане и атмосфере. Полученные данные могут служить эталоном при отладке численных моделей конвекции и турбулентности, а также при интерпретации крупномасштабных геофизических течений.

Ключевые слова: нестационарная конвекция; точные решения; течение Куэтта; завихренность; противотечения; релаксация; динамическая разгрузка; слоистые течения; интеграл Дюамеля

Поступила в редакцию 10.04.2026; после рецензии 27.04.2026; принята к опубликованию 28.04.2026

Unsteady inhomogeneous convective Couette flow

K. V. Gubareva^{1†}, E. Yu. Prosviryakov^{2,3‡}

¹ Samara State Technical University, Samara, Russia

² Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia

³ Institute of Engineering Science UB RAS, Yekaterinburg, Russia

The paper is devoted to constructing an exact solution of the unsteady Oberbeck–Boussinesq system that describes the development of a spatially inhomogeneous convective flow of a viscous incompressible fluid in a plane horizontal layer. The solution extends the well-known stationary class of Lin–Sidorov–Aristov solutions to the case of time-dependent velocity and temperature fields. The

class under study corresponds to layered flows characteristic of large-scale geophysical processes, where the vertical velocity is negligible and the horizontal components depend linearly on the coordinates. For this class, a closed system of evolution equations is derived that takes into account the nonlinear interaction of the vorticity component with the transverse velocity. Applying the Duhamel integral reduces the problem to integral equations and yields explicit expressions for the unsteady expansion coefficients in Fourier series, ensuring high accuracy of computations. With specific boundary conditions (constant velocity and temperature at the upper boundary, zero initial conditions), an exact solution in the form of infinite series is constructed. Detailed numerical analysis reveals a non-monotonic change in the counterflow region: at the initial stage, the counterflow exists due to inertial effects, then vanishes during viscous relaxation, and reappears under the action of the nonlinear term. The relaxation times of the velocity and temperature fields, the dynamics of shear stresses, and the displacement of the extremum of the longitudinal velocity are examined. It is shown that in the unsteady regime, dynamic unloading – the shear stress vanishing at certain instants – is possible. The regularities observed are important for understanding the dynamics of vortex structures in the ocean and atmosphere. The results obtained can serve as a benchmark for verifying numerical methods for simulating convection and turbulence, as well as for interpreting large-scale geophysical flow.

Keywords: unsteady convection; exact solutions; Couette flow; layered flow; vorticity; counterflow; relaxation; dynamic unloading; Duhamel integral

Received 10 April 2026; revised 27 April 2026; accepted 28 April 2026

doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-30-39

1. Введение

Изучение того, как нестационарные движения вязкой жидкости возникают и развиваются, – одна из фундаментальных задач гидродинамики, имеющая прямые выходы в геофизику, океанологию, метеорологию и технику [1, 2]. Численные методы сегодня очень сильны, но аналитические решения остаются востребованными как эталонные примеры: они позволяют верифицировать коды, улавливать качественные закономерности и интерпретировать экспериментальные данные [3, 4]. Среди небольшого числа точных решений уравнений Навье–Стокса и его конвективного варианта – системы Обербека–Буссинеска – выделяются классы, построенные на предположении о линейной зависимости скорости от горизонтальных координат [5–7]. Такой подход, основанный на работах Линя [6], Сидорова [7] и Аристова [8], позволяет описать крупномасштабные течения, в которых вертикальная скорость пренебрежимо мала, а горизонтальные компоненты линейны по координатам. В дальнейшем это направление привело к точным решениям для самых разных физических ситуаций, в том числе магнитогидродинамических течений [9], стратифицированных жидкостей [10] и конвективных потоков [11, 12].

Один из классических примеров ламинарных течений – течение Куэтта [13] – широко применяется при исследовании устойчивости сдвиговых потоков [2, 14], а также в задачах теплообмена и конвекции [15, 16]. Конвективные обобщения течения Куэтта, учитывающие температурные факторы,

рассматривались в работах Остроумова [17], Бириха [18] и их последователей [19–21]. В этих исследованиях было показано, что наличие температурных градиентов способно существенно перестраивать поле скорости и приводить к возвратным течениям. Особенно интересны течения с завихренностью, когда компоненты скорости линейно зависят от горизонтальных координат, – такой подход позволяет учесть инерционные эффекты даже в рамках точных решений [22–24].

В последние годы появились работы, исследующие неоднородные течения с линейной зависимостью скорости от горизонтальных координат, где учитываются не только вязкие, но и инерционные силы [25–27]. В частности, в статье [28] было предложено стационарное решение для неоднородного течения Куэтта с завихренностью, которое продемонстрировало, как за счёт нелинейных эффектов могут возникать противотечения и застойные точки. Нестационарные аналоги таких течений рассматривались в [29]. Трёхмерные нестационарные слоистые и неоднородные сдвиговые течения изучались в [30, 31]. Параллельно развивался подход, основанный на групповом анализе и инвариантных подмоделях уравнений Навье–Стокса [32, 33]. В [32] предложено новое семейство точных решений, имеющее специальную структуру с линейной зависимостью от поперечной координаты, а в [33] построены нестационарные аналоги решения Бириха с горизонтальным градиентом температуры, порождающим нелинейное слагаемое Δw в уравнении для температуры. Эти работы, как и настоящее исследование, используют редукцию исходной си-

стемы, однако в [32, 33] акцент сделан на групповом анализе и частично инвариантных подмоделях, тогда как в данной статье применяется анзац Линя–Сидорова–Аристов с явным выделением линейной зависимости от горизонтальных координат. Для задач с вращением и крупномасштабной турбулентностью важны также результаты [34, 35], однако в настоящей работе вращение не учитывается, а акцент сделан на нестационарной нелинейной динамике. Общие вопросы теории уравнений Навье–Стокса и методы их решения изложены в [36–39].

Однако реальные процессы в природе и технике, как правило, нестационарны. Изменение внешних условий, включение или выключение движущих сил, переход от покоя к установившемуся движению – все эти ситуации требуют анализа того, как гидродинамические поля меняются во времени [30, 31]. Несмотря на важность проблемы, точные нестационарные решения для конвективных течений с завихренностью до сих пор отсутствовали. Имеющиеся работы по нестационарным течениям Куэтта [5, 36] обычно ограничены случаем незавихренной жидкости либо пренебрегают конвективными членами. Фундаментальные проблемы гидродинамики, включая парадоксы и нерешённые вопросы, обсуждаются в [38]. Настоящая работа призвана восполнить этот пробел.

Цель исследования – построить точное решение нестационарных уравнений Обербека–Буссинеска для класса полей, линейных по горизонтальным координатам, обобщающее известные стационарные результаты на случай зависимости от времени. Основное внимание уделено анализу переходных процессов: как формируются и меняются противотечения, как ведут себя касательные напряжения на твёрдой границе, каковы времена выхода полей скорости и температуры на установившийся режим.

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости толщины h . Ось z направлена вертикально вверх, нижняя граница $z = 0$ твёрдая (неподвижная), верхняя граница $z = h$ является твёрдой и движется с постоянной скоростью, ориентированной под углом φ к оси x . Движение жидкости описывается нестационарной системой уравнений Обербека–Буссинеска в приближении малых отклонений температуры [37]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + g \beta T \mathbf{k}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = -\chi \Delta T, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости, P – отклонение давления от гидростатического (отнесённое

к постоянной средней плотности), T – отклонение температуры, ν, β, χ – кинематическая вязкость, коэффициент теплового расширения и температуропроводность, $\mathbf{k}$ – орт вертикали.

Ищем решения, соответствующие крупномасштабным течениям, у которых вертикальная скорость пренебрежимо мала ($V_z = 0$), а горизонтальные компоненты линейно зависят от горизонтальных координат. Следуя подходу, развитому в [6–8, 28], представим поля в виде:

$$\begin{aligned} V_x(x, y, z, t) &= U(z, t) + y u(z, t), \\ V_y(x, y, z, t) &= V(z, t), \\ T(x, y, z, t) &= T_0(z, t) + x T_1(z, t) + y T_2(z, t), \\ P(x, y, z, t) &= P_0(z, t) + x P_1(z, t) + y P_2(z, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Все введённые функции зависят только от вертикальной координаты z и времени t . При $V_z = 0$ уравнение неразрывности (3) принимает вид $\partial V_x / \partial x + \partial V_y / \partial y = 0$. Для анзаца (4) это даёт $\partial(U + yu) / \partial x + \partial V / \partial y = 0$, что выполняется тождественно, так как V не зависит от y .

Подставляя (4) в уравнения (1)–(2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x и y (в силу их независимости), получаем систему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + u T_1 = \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = g \beta T_1, \quad \frac{\partial P_2}{\partial z} = g \beta T_2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - P_2, \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + u V = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - P_1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} + U T_1 + V T_2 = \chi \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = g \beta T_0. \quad (12)$$

Система (5)–(12) представляет собой нестационарное обобщение уравнений, используемых в стационарных моделях. Обратим внимание, что в (7) и (11) учтены конвективные члены, которые в стационарном случае могут обращаться в нуль при определённых условиях, но необходимы для корректного описания временного развития.

Граничные и начальные условия задаются в соответствии с физической постановкой. Для конкретной краевой задачи, рассматриваемой ниже, будем использовать постоянные во времени условия на границах и нулевые начальные условия.

3. Точное решение для типичных граничных условий

Рассмотрим случай, когда на границах слоя поддерживаются постоянные во времени значения. На нижней границе ($z = 0$):

$$\begin{aligned} U &= 0, \quad V = 0, \quad u = 0, \\ T_0 &= 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

на верхней границе ($z = h$):

$$\begin{aligned} U &= W \cos \varphi, \quad u = \Omega, \quad V = W \sin \varphi, \\ T_0 &= \Theta, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0; \end{aligned} \quad (14)$$

давление на верхней границе считаем заданным:

$$P_1(h, t) = 0, \quad P_2(h, t) = 0, \quad P_0(h, t) = S.$$

Начальные условия примем нулевыми:

$$\begin{aligned} U(z, 0) &= V(z, 0) = u(z, 0) = T_0(z, 0) = \\ &= T_1(z, 0) = T_2(z, 0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Такая постановка соответствует тому, что в начальный момент жидкость покоится и имеет нулевую температуру, а затем верхняя граница внезапно начинает двигаться с постоянной скоростью, ориентированной под углом φ к оси x , и одновременно приобретает постоянную завихренность Ω ; температура верхней границы мгновенно становится равной Θ . Горизонтальные градиенты температуры отсутствуют ($T_1 = T_2 = 0$ на обеих границах).

В силу линейности уравнений (5), (6), (9) и (11) при указанных условиях, решение можно найти методом разделения переменных и разложения в ряды Фурье по собственным функциям оператора $\partial^2 / \partial z^2$.

Уравнение (5) с граничными условиями $u(0, t) = 0$, $u(h, t) = \Omega$ и начальным условием $u(z, 0) = 0$ представляет собой нестационарную задачу теплопроводности. Её решение:

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \Omega \frac{z}{h} + \\ &+ \frac{2\Omega}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{\pi n z}{h} \exp \left(-\nu \frac{\pi^2 n^2}{h^2} t \right). \end{aligned} \quad (16)$$

При нулевых граничных и начальных условиях из (6) следует тождественный нуль: $T_1(z, t) \equiv 0$.

Уравнение (7) с учётом $T_1 = 0$ становится однородным, а граничные условия $T_2(0, t) = T_2(h, t) = 0$ и начальное $T_2(z, 0) = 0$ дают $T_2(z, t) \equiv 0$.

Из (8) получаем $P_1 \equiv 0$, $P_2 \equiv 0$ (с учётом условий на верхней границе).

Уравнение (9) при $P_2 = 0$ становится однородным, и с граничными условиями $V(0, t) = 0$, $V(h, t) = W \sin \varphi$ и начальным $V(z, 0) = 0$ его решение аналогично (16):

$$\begin{aligned} V(z, t) &= W \sin \varphi \frac{z}{h} + \frac{2W \sin \varphi}{\pi} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{\pi n z}{h} \exp \left(-\nu \frac{\pi^2 n^2}{h^2} t \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (10) с $P_1 = 0$ принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -u(z, t)V(z, t). \quad (18)$$

Это неоднородное уравнение теплопроводности. Для его решения удобно перейти к отклонению от линейного профиля, соответствующего стационарному режиму при $t \rightarrow \infty$: $\tilde{U}(z, t) = U(z, t) - W \cos \varphi \frac{z}{h}$. Для $\tilde{U}$ получаем однородные граничные условия $\tilde{U}(0, t) = \tilde{U}(h, t) = 0$ и начальное условие $\tilde{U}(z, 0) = -W \cos \varphi \frac{z}{h}$. Разлагая $\tilde{U}$ в ряд Фурье по синусам: $\tilde{U}(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin \frac{\pi n z}{h}$, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов:

$$\frac{dU_n}{dt} + \nu \lambda_n^2 U_n = f_n(t), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{h},$$

где

$$f_n(t) = -\frac{2}{h} \int_0^h u(z, t)V(z, t) \sin \lambda_n z dz$$

а начальные значения

$$U_n(0) = -\frac{2}{h} \int_0^h W \cos \varphi \frac{z}{h} \sin \lambda_n z = \frac{2W \cos \varphi (-1)^n}{\pi n}.$$

Решение этого уравнения представляется в виде интеграла Дюамеля:

$$U_n(t) = U_n(0)e^{-\nu \lambda_n^2 t} + \int_0^t f_n(\tau)e^{-\nu \lambda_n^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (19)$$

Методы разделения переменных и интегральные представления подробно изложены в [35]. Таким образом, $U(z, t)$ восстанавливается как

$$U(z, t) = W \cos \varphi \frac{z}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin \lambda_n z. \quad (20)$$

Уравнение (11) с $T_2 = 0$ становится однородным, и с граничными условиями $T_0(0, t) = 0$, $T_0(h, t) = \Theta$ и нулевым начальным условием имеем:

$$\begin{aligned} T_0(z, t) &= \Theta \frac{z}{h} + \\ &+ \frac{2\Theta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{\pi n z}{h} \exp \left(-\chi \frac{\pi^2 n^2}{h^2} t \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Интегрируя (12) с учётом (21) и условия $P_0(h, t) = S$, получаем:

$$\begin{aligned} P_0(z, t) &= S + \frac{g\beta\Theta h}{2} \left(\left(\frac{z}{h} \right)^2 - 1 \right) + \\ &+ \frac{2g\beta\Theta h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left[\cos \frac{\pi n z}{h} - (-1)^n \right] \times \\ &\times \exp \left(-\chi \frac{\pi^2 n^2}{h^2} t \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Формулы (16)–(22) дают полное аналитическое решение задачи (13)–(15). В стационарном пределе $t \rightarrow \infty$ они переходят в выражения, совпадающие с результатами работы [28], а также с нестационарными обобщениями, рассмотренными в [29], что подтверждает корректность построенного решения.

4. Численный анализ и обсуждение

Численные расчёты выполнены в среде MATLAB. Ряды Фурье (16), (17), (21) аппроксимировались частичными суммами с числом мод N . В основном расчёте использовалось $N = 150$. Временная сетка t выбиралась логарифмической ($t \in [0.1; 300]$ с, 500 точек), что позволяло разрешить как быстрые начальные переходные процессы, так и медленную релаксацию к стационару. Интеграл Дюамеля (19) вычислялся методом трапеций. Для каждого момента времени сначала восстанавливались поля $u(z, t)$ и $V(z, t)$ по формулам (16), (17), затем численно интегрировалось произведение uV для получения правой части $f_n(t)$, после чего коэффициенты $U_n(t)$ находились по интегральному представлению (19). Сходимость по числу мод контролировалась (см. таблицу); для выбранного $N = 150$ дальнейшее увеличение числа гармоник не приводит к значимому изменению результатов: абсолютное изменение τ_{xz} при переходе от $N = 100$ к $N = 150$ составляет около 0.0001 Па, что находится в пределах точности численного интегрирования.

Для иллюстрации полученных результатов проведены численные расчёты с параметрами, соответствующими воде при комнатной температуре: толщина слоя – $h = 1$ см, кинематическая вязкость – $\nu = 10^{-6}$ м²/с, температуропроводность – $\chi = 1.4 \cdot 10^{-7}$ м²/с. Завихренность на верхней границе принята $\Omega = 0.3$ с⁻¹, скорость верхней границы $W = 0.07$ м/с, угол $\phi = 30^\circ$ (такой выбор обеспечивает частичное противотечение в стационарном режиме). Характерные времена релаксации составляют $\tau_v = h^2/(\nu\pi^2) = 10.13$ с для поля скорости и $\tau_\chi = h^2/(\chi\pi^2) = 72.37$ с для температурного поля; число Прандтля $Pr = \nu/\chi = 7.1$ типично для воды. Для перехода к безразмерным переменным введём число Рейнольдса $Re = Wh/\nu$ и безразмерную завихренность $\Omega^* = \Omega h/W$. При выбранных параметрах $Re \approx 700$ и $\Omega^* \approx 0.043$. Отметим, что выявленный эффект немонотонной эволюции противотечения определяется соотношением инерционных и вязких сил и не зависит от конкретного значения W . Численный пример при $W = 0.07$ м/с приведён для иллюстрации; при других скоростях качественная картина сохраняется, а количественные изменения следуют из аналитических формул (16)–(22).

На рис. 1 показано, как меняется профиль продольной скорости $U(z, t)$ в различные моменты времени. При малых $t = 0.1$ – 2 с профиль близок к линейному, но у дна сразу же возникает зона

отрицательных значений (противотечение), занимающая от 31 % до 3 % толщины слоя. К моменту $t = 5$ с противотечение полностью исчезает – профиль становится монотонно возрастающим. Однако после $t = 20$ с начинает формироваться стационарный прогиб, и к $t = 50$ с область отрицательных скоростей восстанавливается, достигая в стационаре 67 % толщины слоя. Такое немонотонное поведение объясняется конкуренцией трёх факторов: сначала ($t < 5$ с) доминирует инерция ускорения $\partial U / \partial t$, создающая прогиб; затем ($t = 5$ – 20 с) вязкая диффузия сглаживает профиль; и только после того, как нелинейный источник ($-uV$) набирает силу ($t > 20$ с), формируется стационарное противотечение. Этот эффект не наблюдается в стационарной постановке и является новым результатом нестационарного анализа.

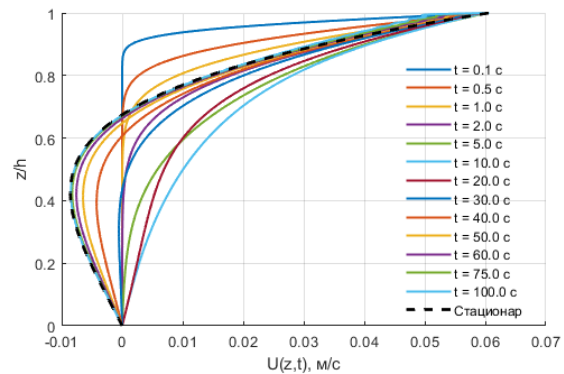


Рис. 1. Изменение профиля продольной скорости $U(z, t)$ для различных моментов времени. Параметры: $\Omega = 0.3$ с⁻¹, $W = 0.07$ м/с, $\phi = 30^\circ$

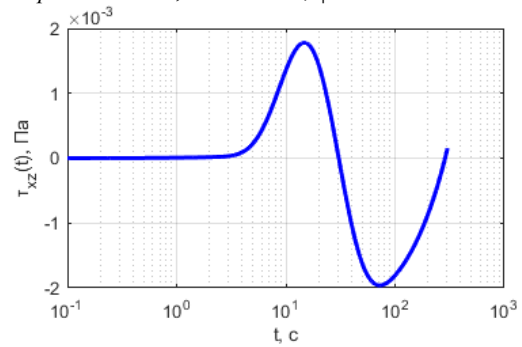


Рис. 2. Зависимость касательного напряжения $\tau_{xz}(t)$ на нижней границе от времени

На рис. 2 представлена зависимость касательного напряжения $\tau_{xz}(t) = \rho\nu(\partial U / \partial z)_{z=0}$ от времени (плотность воды принята $\rho = 1000$ кг/м³). Напряжение быстро релаксирует от начального положительного значения (обусловленного линейным профилем) и при $t \approx 0.1$ с проходит через ноль, однако этот ноль достигается слишком рано ($t < 0.2 \tau_v$) и не может рассматриваться как физический эффект динамической разгрузки; оно связано с начальной адаптацией ряда. В дальнейшем напряжение выходит на положительное стационарное значение 0.000154 Па. Таким образом, для выбранных параметров динамическая разгрузка не наблюдается.

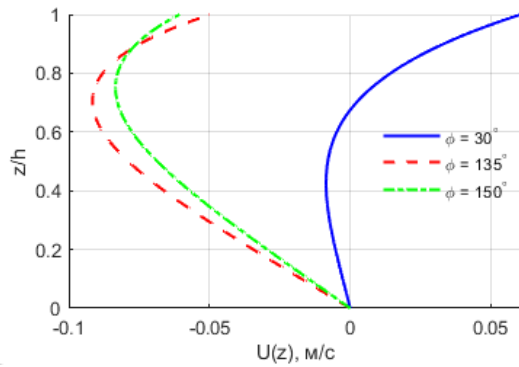


Рис. 3. Стационарные профили $U(z)$ при различных углах φ

На рис. 3 приведены стационарные профили $U(z)$ для трёх значений угла φ . При $\varphi = 30^\circ$ ($\cos \varphi > 0$) профиль имеет частичную отрицательную область (67 % слоя). При $\varphi = 135^\circ$ и 150° ($\cos \varphi < 0$) линейная часть отрицательна, и нелинейный член усиливает отрицательность, так что практически весь слой охвачен противотечением (99.8 %). Эти результаты качественно согласуются с выводами работы [28].

На рис. 4 изображено изменение координаты экстремума (минимума) $z_{extr}(t)$ продольной скорости $U(z, t)$ (компоненты скорости вдоль оси x). Противотечение появляется практически сразу ($t \approx 0.1$ с), затем экстремум смещается к нижней границе и после $t \approx 20$ с начинает плавно приближаться к стационарному значению. Для стационарной координаты экстремума справедлива формула

$$\frac{z_{extr}}{h} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3\nu \operatorname{ctg} \varphi}{\Omega h^2} \right)^{1/3}.$$

Для выбранных параметров она даёт $z_{extr}/h = 0.425$. При $t = 302$ с расчётное значение составляет 0.421, что соответствует относительной погрешности менее 1 % и подтверждает сходимость к стационарному режиму.

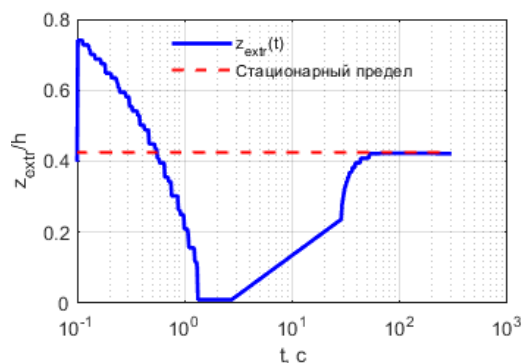


Рис. 4. Зависимость координаты экстремума $z_{extr}(t)$ от времени

Дополнительно проведён тест сходимости по числу мод N (см. таблицу). Значения стационарного касательного напряжения, вычисленные с использованием коэффициентов $U_n(t)$ (см. формулу (19)) при $t = 302$ с, для $N = 50, 100, 150$ демонстрируют

быструю сходимость: различие между $N = 100$ и $N = 150$ не превышает 0.1%. Это подтверждает достаточность выбранного числа мод для получения надёжных результатов.

Зависимость стационарного касательного напряжения от числа мод N

N	τ_{xz} , Па
50	0.000311
100	0.000258
150	0.000154

Выявленные закономерности поведения противотечений и касательных напряжений важны для понимания динамики вихревых структур в океане и атмосфере. Теория экваториальных противотечений подробно изложена в [40]. Подробный анализ крупномасштабных океанических течений дан в [41–43]. Недавно обнаруженные эффекты в вязких течениях, включая осцилляции момента импульса, описаны в [44].

Более детальное сравнение с работами [32, 33] показывает, что предложенное в [32] семейство решений имеет специальную структуру (линейную по поперечной координате), но содержит тригонометрические и гиперболические функции от продольной координаты; представление (4) в настоящей работе отличается наличием независимой поперечной компоненты скорости $V(z, t)$, отсутствующей в [32], и нелинейного слагаемого uV в уравнении (10), которое играет ключевую роль в немонотонной эволюции противотечения (см. рис. 1). В [33] рассматриваются нестационарные аналоги решения Бириха с горизонтальным градиентом температуры, что приводит к появлению нелинейного члена Aw в уравнении для температуры (3) [33]; в настоящей работе градиенты T_1, T_2 обнулены, но присутствует вихревая компонента $u(z, t)$, порождаемая движением верхней границы, что даёт сходный эффект возвратных течений, но с иной физической причиной. Что касается вращательных течений [34, 35], в них основную роль играет сила Кориолиса (члены, содержащие число Тейлора), тогда как в настоящей работе аналогичное противотечение формируется за счёт инерционно-вязкой динамики.

5. Заключение

В работе получено точное нестационарное решение системы уравнений Обербека–Буссинеска, описывающее развитие неоднородного конвективного течения Куэтта в плоском слое вязкой несжимаемой жидкости. Для класса решений, линейных по горизонтальным координатам, выведена полная система уравнений, обобщающая стационарную постановку и учитывающая все нелинейные взаимодействия. При типичных граничных условиях (постоянные скорость и температура на верхней границе, нулевые начальные условия) построено

точное решение в виде рядов Фурье с использованием интеграла Дюамеля.

Численный анализ показал немонотонное изменение зоны противотечения: на начальном этапе противотечение существует за счёт инерционных эффектов, затем пропадает при вязкой релаксации и появляется вновь под действием нелинейного члена. Этот результат является новым и не может быть описан в рамках стационарного подхода. Определены времена выхода полей скорости и температуры на стационар, прослежена динамика касательных напряжений, смещение экстремума продольной скорости. Показано, что координата экстремума скорости приближается к стационарному значению с погрешностью менее 1 % при $t \approx 300$ с. Проанализировано поведение касательного напряжения; для выбранных параметров стационарное напряжение положительно и составляет 0.000154 Па. Тест сходимости по числу мод подтвердил надёжность численной реализации.

На практике полученные выкладки могут пригодиться для верификации численных методов моделирования нестационарных конвективных течений, а также для интерпретации крупномасштабных геофизических процессов – например, экваториальных противотечений в океане.

Список литературы

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.
2. Drazin P. G., Reid W. H. Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 626 p.
3. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.
4. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. Vol. 23. P. 159–177.
5. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Appl. Mech. Rev. 1989. Vol. 42, № 11S. P. 269–282.
6. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. 1958. Vol. 1, № 1. P. 391–395.
7. Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ. 1989. № 2. С. 34–40.
8. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207 с.
9. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
10. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
11. Joseph D. D. Stability of Fluid Motions. Berlin: Springer, 1976. 568 p.
12. Полянин А. Д., Аристов С. Н. Новый метод построения точных решений трехмерных уравнений Навье–Стокса и Эйлера // Теоретические основы химической технологии. 2011. Т. 45, № 6. С. 696–701.
13. Couette M. Études sur le frottement des liquides // Ann. Chim. Phys. Ser. 6. 1890. Vol. 21. P. 433–510.
14. Schlichting H., Gersten K. Boundary-Layer Theory. Berlin: Springer, 2000. 801 p.
15. Kays W. M., Crawford M. E., Weigand B. Convective Heat and Mass Transfer. New York: McGraw-Hill, 2005. 560 p.
16. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: ГИТТЛ, 1952. 256 с.
17. Бирх Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
18. Napolitano L. G. Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immiscible fluids // Acta Astronaut. 1980. Vol. 7. P. 461–478.
19. Goncharova O., Kabov O. Gas flow and thermocapillary effects of fluid flow dynamics in a horizontal layer // Microgravity Sci. Technol. 2009. Vol. 21, Suppl. 1. P. 129–137.
20. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 4. С. 651–657.
21. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid // Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures. 2021. Vol. 2. P. 30–51.
22. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // Dynamics. 2022. Vol. 2. P. 175–186.
23. Ershkov S. V., Prosviryakov E. Yu., Burmasheva N. V., Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations // Fluid Dynamics Research. 2021. Vol. 53, № 4. 044501.
24. Ershkov S., Burmasheva N., Leshchenko D. D., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows // Symmetry. 2023. Vol. 15, № 9. 1730.
25. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate // Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures. 2022. Vol. 3. P. 47–60.
26. Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю., Еремин А. В. Точное квадратичное полиномиальное решение для описания неоднородного течения Куэтта–Пуазейля в бесконечном горизонтальном слое с проницаемыми границами // Вестник ЮУрГУ. Математика. Механика. Физика. 2026. Т. 18, № 1. С. 47–62.

27. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries // *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 2025. Vol. 5. P. 6–28.
28. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Неоднородное конвективное течение Куэтта // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2016. № 5. С. 3–9. DOI: 10.7868/S0568528116050030.
29. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2016. № 2. С. 25–31.
30. Зубарев Н.М., Просвиряков Е.Ю. О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. 2019. Т. 60, № 6 (358). С. 65–71. DOI: 10.15372/PMTF20190607.
31. Горюлева Л. С., Просвиряков Е. Ю. Неоднородное сдвиговое течение Куэтта–Пуазейля при движении нижней границы горизонтального слоя // *Химическая физика и мезоскопия*. 2021. Т. 23, № 4. С. 403–411.
32. Кузнецов В. В., Пухначев В. В. Новое семейство точных решений уравнений Навье–Стокса // *Доклады академии наук*. 2009. Т. 425, № 1. С. 40–44.
33. Пухначев В. В. Нестационарные аналоги решения Бириха // *Известия Алтайского государственного университета*. 2011. № 2-2. С. 62–69.
34. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Крупномасштабная турбулентность в тонком слое неизотермической вращающейся жидкости // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1988. № 4. С. 48–55.
35. Shvarts K. G. Exact solution of the Navier–Stokes equation describing nonisothermal large-scale flows in a rotating layer of liquid with free upper surface // *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. Vol. 230, № 5. P. 813–817.
36. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
37. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
38. Бетяев С. К. Гидродинамика: проблемы и парадоксы // *УФН*. 1995. Т. 165, № 3. С. 299–330.
39. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: ИПМех РАН, 2020. 384 с.
40. Коротаев Г. К., Михайлова Э. Н., Шапиро Н. Б. Теория экваториальных противотечений в Мировом океане. Киев: Наук. думка, 1986. 208 с.
41. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Эволюция ветровой циркуляции в неизотермическом океане // *Океанология*. 1990. Т. 30, № 4. С. 562–566.
42. Vallis G. K. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 946 p.
43. Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. New York: Springer, 1987. 710 p.
44. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid // *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34, 083108.

References

1. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of Theoretical Physics*, vol. 6. Fluid Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987. 554 p.
2. Drazin P. G., Reid W. H. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge, Cambridge University Press, 2004. 626 p.
3. Pukhnachev V. V. Simmetrii v uravneniyakh Nav'e–Stoksa [Symmetries in the Navier–Stokes equations]. *Advances in Mechanics*, 2006, no. 1, pp. 6–76. (In Russian)
4. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, vol. 23, pp. 159–177.
5. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1989, vol. 42, no. 11S, pp. 269–282.
6. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, no. 1, pp. 391–395.
7. Sidorov A. F. O dvukh klassakh resheniy uravneniy mekhaniki zhidkosti i gaza i ikh svyazi s teoriyei begushchikh voln [On two classes of solutions of fluid and gas mechanics equations and their connection with the theory of traveling waves]. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, no. 2, pp. 34–40. (In Russian)
8. Aristov S. N., Shvarts K. G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortex Flows in Thin Fluid Layers]. Kirov: Vyatka State University, 2011. 207 p. (In Russian)
9. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
10. Gershuni G. Z., Zhukhovitskiy E. M. *Konvektivnaya ustoychivost' neszhimaemoy zhidkosti* [Convective Stability of an Incompressible Fluid]. Moscow: Nauka, 1972. 392 p. (In Russian)
11. Joseph D. D. *Stability of Fluid Motions*. Berlin: Springer, 1976. 568 p.
12. Polyanin A. D., Aristov S. N. Novyy metod postroeniya tochnykh resheniy trekhmernykh uravneniy Nav'e–Stoksa i Eylera [A new method for constructing exact solutions to three-dimensional Navier–Stokes and Euler equations]. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2011, vol. 45, no. 6, pp. 696–701. (In Russian)
13. Couette M. Études sur le frottement des liquides. *Ann. Chim. Phys. Ser.6*, 1890, vol. 21, pp. 433–510. (In French)

14. Schlichting H., Gersten K. *Boundary-Layer Theory*. Berlin: Springer, 2000. 801 p.
15. Kays W. M., Crawford M. E., Weigand B. *Convective Heat and Mass Transfer*. New York: McGraw-Hill, 2005. 560 p.
16. Ostroumov G. A. *Svobodnaya konvektsiya v usloviyakh vnutrenney zadachi* [Free Convection in the Internal Problem]. Moscow: GITTL, 1952. 256 p. (In Russian)
17. Birikh R. V. O termokapillyarnoy konveksii v gorizonta'lnom sloe zhidkosti [On thermocapillary convection in a horizontal fluid layer]. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, no. 3, pp. 69–72 (In Russian)
18. Napolitano L. G. Plane Marangoni-Poiseuille flow of two immiscible fluids. *Acta Astronaut.*, 1980, vol. 7, pp. 461–478.
19. Goncharova O., Kabov O. Gas flow and thermocapillary effects of fluid flow dynamics in a horizontal layer. *Microgravity Sci. Technol.*, 2009, vol. 21, suppl. 1, pp. 129–137.
20. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. O sloistyykh techeniyakh ploskoy svobodnoy konveksii [On laminar flows of planar free convection]. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651–657. (In Russian)
21. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2021, vol. 2, pp. 30–51.
22. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow. *Dynamics*, 2022, vol. 2, pp. 175–186.
23. Ershkov S. V., Prosviryakov E. Yu., Burmasheva N. V., Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, vol. 53, no. 4, 044501.
24. Ershkov S., Burmasheva N., Leshchenko D. D., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 9, 1730.
25. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2022, vol. 3, pp. 47–60.
26. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. Tochnoe kvadrachnoe polinomial'noe reshenie dlya opisaniya neodnorodnogo techeniya Kuetta–Puazeylya v beskonechnom gorizonta'lnom sloe s pronitsaemymi granitsami [Exact quadratic polynomial solution for describing inhomogeneous Couette–Poiseuille flow in an infinite horizontal layer with permeable boundaries]. *Bulletin of SUSU. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2026, vol. 18, no. 1, pp. 47–62. (In Russian)
27. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, no. 5, pp. 6–28.
28. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Neodnorodnoe konvektivnoe techenie Kuetta [Inhomogeneous convective Couette flow]. *Fluid Dynamics*. 2016, no. 5, pp. 3–9. (In Russian)
29. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*. 2016, vol. 51, no. 2, pp. 148–154.
30. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Y. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 6, pp. 1031–1037.
31. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Neodnorodnoe sdvigovoe techenie Kuetta–Puazeylya pri dvizhenii nizhney granitsy gorizonta'nogo sloya [The Couette–Poiseuille inhomogeneous shear flow at the motion of the lower boundary of the horizontal layer]. *Chemical Physics and Mesoscopy*. 2021, vol. 23, no. 4, pp. 403–411. (In Russian)
32. Kuznetsov V. V., Pukhnachev V. V. Novoe semeystvo tochnykh resheniy uravneniy Nav'e–Stoksa [A new family of exact solutions of the Navier–Stokes equations]. *Doklady Akademii Nauk*. 2009, vol. 425, no. 1, pp. 40–44. (In Russian)
33. Pukhnachev V. V. Nestatsionarnye analogi resheniya Birikha [Non-stationary analogues of the Birikh solution]. *Izvestiya Altaiskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2011, no. 1-2, pp. 62–69. (In Russian)
34. Aristov S. N., Frick P. G. Krupnomasshtabnaya turbulentnost' v tonkom sloe neizotermicheskoy vrashchayushcheyasya zhidkosti [Large-scale turbulence in a thin layer of non-isothermal rotating liquid]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*. 1988, no. 4, pp. 48–55. (In Russian)
35. Shvarts K. G. Exact solution of the Navier–Stokes equation describing nonisothermal large-scale flows in a rotating layer of liquid with free upper surface. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 813–817.
36. Temam R. *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 2001. 500 p.
37. Loytsyanskiy L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid and Gas Mechanics]. Moscow: Drofa, 2003. 840 p. (In Russian)
38. Betyaev S. K. Gidrodinamika: problemy i paradoksy [Hydrodynamics: problems and paradoxes]. *Physics-Uspexi*, 1995, vol. 165, no. 3, pp. 299–330. (In Russian)
39. Polyanin A. D., Zhurov A. I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Methods of Sep-

- aration of Variables and Exact Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, 2020. 384 p. (In Russian)
40. Korotaev G. K., Mikhaylova E. N., Shapiro N. B. *Teoriya ekvatorial'nykh protivotecheniy v Mirovom okeane* [Theory of Equatorial Countercurrents in the World Ocean]. Kiev: Nauk. dumka, 1986. 208 p. (In Russian)
41. Aristov S. N., Shvarts K. G. Evolyutsiya vetrovoy tsirkulyatsii v neizotermicheskom okeane [Evolution of wind circulation in a non-isothermal ocean]. *Oceanology*, 1990, vol. 30, no. 4, pp. 562–566. (In Russian)
42. Vallis G. K. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 946 p.
43. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. New York: Springer, 1987. 710 p.
44. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, vol. 34, 083108.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Губарева К. В., Просвиряков Е. Ю. Нестационарное неоднородное конвективное течение Куэтта // Вестник Пермского университета. Физика. 2026. № 2. С. 30–39. doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-30-39

Please cite this article in English as:

Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu. Unsteady inhomogeneous convective Couette flow. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2026, no. 2, pp. 30–39. doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-30-39

Сведения об авторах

1. Губарева Кристина Владимировна, к.т.н., доцент кафедры «Промышленная теплоэнергетика», Самарский государственный технический университет, ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100
2. Просвиряков Евгений Юрьевич, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры «Информационные технологии и системы управления», Уральский федеральный университет, ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620062; заведующий сектором нелинейной вихревой гидродинамики, Институт машиноведения УрО РАН, ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049

Author information

1. Kristina V. Gubareva, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor, Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara State Technical University; 244, Molodogvardeyskaya st., 443100, Samara, Russia
2. Evgenii Yu. Prosviryakov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Information Technology and Automation, Ural Federal University; 19, Mira st., Yekaterinburg, 620002, Russia; Head of the Department of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, Institute of Engineering Science UB RAS; 34, Komsomolskaya st., Yekaterinburg, 620049, Russia