

УДК 532.546; 531.19
PACS 44.25.+f, 05.40.-a

Стохастическое параметрическое возбуждение тепловой конвекции в слое пористой среды

Э. В. Пермякова, Д. С. Голдобин[†], И. В. Тюлькина[‡]

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

[†]denis.goldobin@gmail.com

[‡]irinatiulkina95@gmail.com

В работе рассматривается проблема стохастического параметрического возбуждения свободной тепловой конвекции жидкости, насыщающей бесконечный горизонтальный слой или прямоугольную ячейку пористой среды, при случайной модуляции силы тяжести. Используемая математическая формулировка позволяет исследовать случаи подогрева как снизу, так и сверху, а также случай условий микрогравитации. Для системы получены уравнения стохастической динамики амплитуды малых возмущений полей температуры и функции тока. Для этих уравнений выводятся условия роста среднеквадратичных значений; эти условия используются в качестве критерия возбуждения конвективных движений в системе. Проверено, что найденные моды самого быстрого роста среднеквадратичных значений при всех значениях параметров лежат в области фазового пространства, имеющей физический смысл. Выведено, что тепловой поток, характеризуемый числом Нуссельта, связан со среднеквадратичным значением возмущений температуры. Из этого следует, что порог стохастического возбуждения среднеквадратичных моментов определяет порог возбуждения конвективного теплопереноса.

Ключевые слова: тепловая конвекция; стохастическое параметрическое возбуждение; пористая среда

Поступила в редакцию 19.02.2026; после рецензии 26.03.2026; принята к опубликованию 26.03.2026

Stochastic parametric excitation of thermal convection in a porous medium layer

E. V. Permyakova, D. S. Goldobin[†], I. V. Tyulkina[‡]

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

[†]denis.goldobin@gmail.com

[‡]irinatiulkina95@gmail.com

We study stochastic parametric excitation of free thermal convection of a fluid saturating an infinite horizontal layer or a rectangular cell of a porous medium under random modulation of gravity. The mathematical formulation we use makes it possible to explore the cases of heating both from below and above, as well as the case of low gravity conditions. Equations for the stochastic dynamics of the amplitude of small perturbations of the temperature and streamfunction fields have been obtained for the system. Conditions for the growth of the second moments have been derived for these equations; these conditions are used as a criterion for the excitation of convective motions in the system. We have verified that the obtained modes of the fastest growth of the second moments for all values of the parameters lie in a region of phase space that is physically meaningful. The

heat flux, characterized by the Nusselt number, has been derived to be related to the second moment of the temperature perturbations. It follows from this that the threshold of stochastic excitation of second moments determines the threshold of excitation of convective heat transfer.

Keywords: thermal convection; stochastic parametric excitation; porous medium

Received 19 February 2026; revised 26 March 2026; accepted 26 March 2026

doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-13-23

1. Введение

Проблема случайного параметрического возбуждения (или стохастической устойчивости) в механике жидкости не так широко рассматривается, как её детерминированный аналог – случай периодической модуляции (например, см. [1]). Эта проблема представляет интерес в связи с процессами, протекающими в системах с низкой гравитацией: для них критически важно учитывать влияние флуктуаций остаточной силы тяжести.

Ранее было исследовано влияния случайных вибраций на конвективную неустойчивость неизолированного слоя жидкости [2, 3]. В настоящей статье рассматривается возбуждение тепловой конвекции жидкости, насыщающей слой пористой среды. Данная работа дополняет и расширяет существующие теоретические представления в данной области, предлагая новый подход к анализу конвективной неустойчивости в условиях стохастической модуляции.

2. Возбуждение тепловой конвекции в слое пористой среды при случайной модуляции силы тяжести

В данном разделе приводится математическая формулировка задачи о возбуждении тепловой конвекции жидкости, насыщающей бесконечный слой пористой среды [4], при случайной модуляции силы тяжести. Рассмотрим горизонтальный слой толщиной H . Линейная устойчивость данной системы может быть исследована в рамках (x, z) -геометрии: ось z направлена вертикально вверх, течение предполагается однородным вдоль координаты y . В приближении Буссинеска плотность жидкости ρ полагается линейной функцией температуры T :

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta T),$$

где β – коэффициент объемного расширения, для слагаемых, описывающих плавучесть, а во всех остальных отношениях сжимаемостью пренебрегаем.

Фильтрационное течение описывается с помощью модели Дарси, где необходимо учитывать не-большой инерционный член. Таким образом, закон

сохранения импульса, массы и уравнение переноса тепла выглядят следующим образом:

$$\rho_0 \frac{G_t}{\phi} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \frac{\rho_0 \nu}{K} \mathbf{u} - \rho_0 \beta T \mathbf{g}(t), \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{b} (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{u} = \{u^{(x)}, 0, u^{(z)}\}$ – скорость фильтрационного течения, оператор Лапласа – $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$, ϕ – коэффициент пористости, $G_t > 1$ – безразмерный геометрический фактор, который описывает пористую структуру (в [4] называется «коэффициентом ускорения»), p – давление, ν – кинематическая вязкость, K – проницаемость пористой среды, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, которое модулируется со временем, χ – температуропроводность пористой среды, насыщенной жидкостью, b – отношение теплоёмкости насыщенной жидкостью пористой среды к теплоёмкости самой жидкости. Следует отметить, что в уравнении (2.1) пренебрегаем квадратичным по u инерционным членом, а также поправкой Форхгеймера, которая представляет собой наиболее точное описание квадратичного по u инерционного члена, усредненного по пористому пространству для реальных зернистых пористых сред [4]. Для рассматриваемой физической постановки квадратичным членом можно пренебречь. Однако слагаемыми с $\partial / \partial t$ в уравнении (2.1) пренебречь нельзя для случая белого шума в ускорении свободного падения g .

Для изучения линейной устойчивости состояния равновесия рассмотрим малые u и возмущение температуры θ : $T = -sAz + \theta$, где A – абсолютное значение градиента температуры, $s = -1$ для подогрева сверху и $s = +1$ для подогрева снизу. После перемасштабирования

$$(x, z) \rightarrow (Hx, Hz), \quad t \rightarrow (H^2 / \chi) t,$$

$$u \rightarrow (b\chi / H)u, \quad \theta \rightarrow AH\theta, \quad p \rightarrow (b\rho_0\nu\chi / K)p$$

и линеаризации уравнений (2.1) и (2.3) их можно переписать в безразмерной форме:

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \mathbf{u} + Rp(t) \theta \mathbf{e}_z, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + s u^{(z)}, \quad (2.5)$$

где $Rp = g\beta AH^2 K / (bv\chi)$ – число Рэлея–Дарси, $\varepsilon = G_t K \chi / (\phi H^2 \nu)$ – безразмерный инерционный параметр, $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор, направленный по z . Для несжимаемого двумерного течения (2.2) можно ввести функцию тока ψ :

$$v^{(x)} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v^{(z)} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Следовательно, разность между частной производной по x z -компоненты уравнения (2.4)

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v^{(z)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} p - \frac{\partial}{\partial x} v^{(z)} + Rp(t) \frac{\partial}{\partial x} \theta,$$

и частной производной по z x -компоненты того же уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v^{(x)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} p - \frac{\partial}{\partial z} v^{(x)},$$

даст:

$$\varepsilon \Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi + Rp(t) \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.6)$$

а уравнение (2.5) принимает вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \Delta \theta + s \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим случай фиксированной температуры на границах:

$$\theta|_{z=0} = \theta|_{z=1} = 0, \\ \psi|_{z=0} = \psi|_{z=1} = 0.$$

С данными граничными условиями уравнения (2.6)–(2.7) имеют решения в следующей форме:

$$\psi = \Psi(t) \sin kx \sin \pi z, \\ \theta = \Theta(t) \cos kx \sin \pi z. \quad (2.8)$$

Временная эволюция «амплитуд» $\Psi(t)$ и $\Theta(t)$ определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которые действуют и в случае зависимости гравитационного ускорения от времени $Rp(t) = Rp_0 + \sigma \xi(t)$ [5–7]:

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \Psi = -\Psi + \frac{kRp_0}{D_{11}} \Theta + \frac{k\sigma}{D_{11}} \xi(t) \Theta, \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} \Theta = sk\Psi - D_{11}\Theta, \quad (2.10)$$

где $D_{11} \equiv (nk)^2 + (m\pi)^2$, σ – амплитуда шума. Будем рассматривать быстро осциллирующий шум с коротким временем автокорреляции. В естественной математической идеализации для дельта-коррелированного шума можно записать:

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2\delta(t - t'),$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по реализациям шума. Согласно центральной предельной теореме, дельта-коррелированный шум должен быть гауссовым (для других альфа-устойчивых шумов интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle$ расходится). Для стохастической системы уравнений (2.9)–(2.10) будем полагать интерпретацию Стратоновича.

Шумовой сигнал $\sigma \xi(t)$ включает в себя нормированный дельта-коррелированный шум в безразмерном времени. Проблема вычисления σ должна быть деликатно решена для дельта-коррелированных шумов [8]. Учитывая определение Rp , можно обнаружить, что модельный сигнал $\sigma \xi(t)$ в безразмерном времени t заменяет исходный $\tilde{g}(t_{\text{dim}}) \beta AH^2 K / (bv\chi)$, где $\tilde{g}(t_{\text{dim}})$ – флуктуирующая часть ускорения свободного падения в исходном размерном времени t_{dim} дельта-коррелированный шум $\sigma \xi(t)$ определяется его диффузией, которая должна быть идентична диффузии, генерируемой исходным вещественным случайным процессом с $\tilde{g}(t_{\text{dim}})$:

$$2\sigma^2 t = \left(\frac{\beta AH^2 K}{bv\chi} \right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tilde{g}(t_{\text{dim}}) \tilde{g}(t_{\text{dim}} + t'_{\text{dim}}) \rangle dt'_{\text{dim}} \right) t_{\text{dim}},$$

с $t_{\text{dim}} = (H^2 / \chi) t$. В этом случае

$$\sigma = \frac{\beta AH^3 K}{bv\chi^{3/2}} \sqrt{\int_0^{+\infty} \langle \tilde{g}(t_{\text{dim}}) \tilde{g}(t_{\text{dim}} + t'_{\text{dim}}) \rangle dt'_{\text{dim}}}. \quad (2.11)$$

Если, например, представить $\tilde{g}(t_{\text{dim}}) = \sigma_g \zeta(t_{\text{dim}})$ с помощью модельного дельта-коррелированного шума $\zeta(t_{\text{dim}})$ в исходном размерном времени t_{dim} , иными словами $\langle \zeta(t_{\text{dim}}) \zeta(t'_{\text{dim}}) \rangle = 2\delta(t_{\text{dim}} - t'_{\text{dim}})$, то последнее уравнение даст

$$\sigma = \frac{\sigma_g \beta AH^3 K}{bv\chi^{3/2}}. \quad (2.12)$$

Материальный параметр системы ε пропорционален квадрату отношения размера поры к толщине слоя ($\propto K / H^2$ и проницаемость пористой среды K пропорциональна квадрату размера поры) и является малой величиной. Для песка χ может быть на порядок выше, чем у жидкости, и

на два порядка выше, чем у воздуха, что приводит к соотношениям $\chi/\nu \sim 1$ и $\sim 10^2$ соответственно. Даже последнее соотношение ($\sim 10^2$) не может компенсировать малость величины K/H^2 и сделать параметр ε немалым. Тем не менее, быстрые колебания случайной величины $\xi(t)$ не позволяют отбросить член с временной производной в уравнении (2.9). Это тем более недопустимо для идеализации дельта-коррелированного шума, для которой в подобных случаях разработана специальная техника адиабатического исключения быстрой переменной [8]. В настоящей работе сначала будет получен результат при $\varepsilon \neq 0$, а затем рассмотрен предельный случай $\varepsilon \rightarrow 0$, где это математически допустимо.

Также будет полезным вспомнить свойства устойчивости системы без шума ($\sigma = 0$) для уравнений (2.9)–(2.10) [4, 9–10]: при подогреве сверху ($s = -1$) все возмущения монотонно затухают, а при подогреве снизу ($s = +1$) возмущения с волновым числом k монотонно нарастают при превышении порогового значения $Rp_*(k) = D^2/k^2$. Для бесконечного слоя критическое значение:

$$Rp_{cr} = 4\pi^2,$$

где возмущения с волновым числом $k_{cr}(\sigma = 0) = \pi$ находятся на границе устойчивости.

3. Стохастическое параметрическое возбуждение

В данном разделе приводится базовый математический аппарат для описания явления стохастического параметрического возбуждения в линейных системах [3, 11–13]. Для системы линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}x_j = \sum_{n=1}^N L_{jn}x_n + \sigma\xi(t)\sum_{n=1}^N G_{jn}x_n, \quad j=1, \dots, N, \quad (3.1)$$

записанной в интерпретации Стратоновича, динамика средних подчиняется следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{dt}\langle x_j \rangle = \sum_{n=1}^N L_{jn}\langle x_n \rangle + \sigma^2 \sum_n (\mathbf{G}^2)_{jn}\langle x_n \rangle. \quad (3.2)$$

Матрица $\mathbf{G}^2$ может существенно изменить собственные значения задачи и создать экспоненциальный рост средних полей систем там, где в отсутствии шума колебания постоянны или затухают. Данный эффект может быть интерпретирован как дрейф Стратоновича для энергоподобных функционалов, однако он не связан с явлением резонанса: ни с детерминированным (параметрическим) [14–15], ни со стохастическим [16–19].

4. Стохастическое параметрическое возбуждение тепловой конвекции

Приводя систему уравнений (2.9)–(2.10) к виду (3.1), получаем следующие матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{kRp_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}} \\ \varepsilon & \varepsilon\mathcal{D}_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Из данного вида матрицы $\mathbf{G}$ можно вычислить, что $\mathbf{G}^2 = 0$. Следовательно, на динамику средних значений, заданную уравнением (3.2), параметрический шум не влияет:

$$\frac{d}{dt}\langle \Psi \rangle = -\frac{1}{\varepsilon}\langle \Psi \rangle + \frac{kRp_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}}\langle \Theta \rangle, \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt}\langle \Theta \rangle = sk\langle \Psi \rangle - \mathcal{D}_{11}\langle \Theta \rangle. \quad (4.3)$$

Однако это не означает отсутствие влияния шума на конвективную устойчивость. К примеру, если шум вызывает колебания со случайными сдвигами фазы колебаний и эти сдвиги стремятся к равномерному распределению, то сумма всех решений для множества реализаций шума может быть мала из-за симметрии. Такая сумма даёт среднее по реализациям шума значение, которое может быть мало для достаточно интенсивных складываемых течений [2, 13].

Далее будем использовать более репрезентативные переменные для описания конвективного движения. Обоснованными являются такие переменные, как $\langle \Psi^2 \rangle$ и $\langle \Theta^2 \rangle$, которые не будут стремиться к нулю из-за симметричного распределения незатухающих конвективных движений. Ранее такой подход был продемонстрирован для описания стохастического параметрического возбуждения гармонического осциллятора [13], оценки свободной энергии в одномерной модели Изинга [20] и показателя локализации конвективных структур, возбуждаемых при стационарном пространственном параметрическом беспорядке [21, 22]. Из уравнений (2.9)–(2.10) можно вывести замкнутую систему уравнений для Ψ^2 , $\Psi\Theta$ и Θ^2 вида (3.1):

$$\frac{d}{dt}\Psi^2 = -\frac{2}{\varepsilon}\Psi^2 + \frac{2kRp_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}}\Psi\Theta + \frac{2k\sigma}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}}\xi\Psi\Theta, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Psi\Theta) &= sk\Psi^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{D}_{11}\right)\Psi\Theta + \\ &+ \frac{kRp_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}}\Theta^2 + \frac{k\sigma}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}}\xi\Theta^2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dt}\Theta^2 = 2sk\Psi\Theta - 2\mathcal{D}_{11}\Theta^2. \quad (4.6)$$

Данная система соответствует виду (3.1) с $\mathbf{x} = \{\Psi^2, \Psi\Theta, \Theta^2\}$ и матрицами:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\varepsilon} & \frac{2kRp_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}} & 0 \\ sk & -\frac{1}{\varepsilon} - \mathcal{D}_{11} & \frac{kRp_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}} \\ 0 & 2sk & -2\mathcal{D}_{11} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2k}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{G}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2k^2}{\varepsilon^2\mathcal{D}_{11}^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, используя уравнение (3.2), получаем:

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi^2\rangle = -\frac{2}{\varepsilon}\langle\Psi^2\rangle + \frac{2kRp_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}}\langle\Psi\Theta\rangle + \frac{2\sigma^2k^2}{\varepsilon^2\mathcal{D}_{11}^2}\langle\Theta^2\rangle, \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi\Theta\rangle = sk\langle\Psi^2\rangle - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{D}_{11}\right)\langle\Psi\Theta\rangle + \frac{kRa_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}}\langle\Theta^2\rangle, \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\Theta^2\rangle = 2sk\langle\Psi\Theta\rangle - 2\mathcal{D}_{11}\langle\Theta^2\rangle. \quad (4.11)$$

Спектр инкрементов экспоненциального роста $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ собственных векторов

$$\{\langle\Psi^2\rangle, \langle\Psi\Theta\rangle, \langle\Theta^2\rangle\} \propto e^{\lambda t}$$

системы уравнений (4.9)–(4.11) вычисляется из следующей задачи на собственные значения:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\varepsilon} - \lambda & \frac{2kRp_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}} & \frac{2\sigma^2k^2}{\varepsilon^2\mathcal{D}_{11}^2} \\ sk & -\frac{1}{\varepsilon} - \mathcal{D}_{11} - \lambda & \frac{kRp_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}} \\ 0 & 2sk & -2\mathcal{D}_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \langle\Psi^2\rangle \\ \langle\Psi\Theta\rangle \\ \langle\Theta^2\rangle \end{Bmatrix} = 0. \quad (4.12)$$

Характеристическое уравнение для задачи (4.12) имеет вид:

$$\lambda^3 + 3\left(\frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{D}_{11}\right)\lambda^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{8\mathcal{D}_{11}}{\varepsilon} + 2\mathcal{D}_{11}^2 - \frac{4sk^2Rp_0}{\varepsilon\mathcal{D}_{11}}\right)\lambda + \frac{4(1 + \varepsilon\mathcal{D}_{11})}{\varepsilon^2\mathcal{D}_{11}}(\mathcal{D}_{11}^2 - sk^2Rp_0) - \frac{4\sigma^2k^4}{\varepsilon^2\mathcal{D}_{11}^2} = 0. \quad (4.13)$$

Стоит отметить, что система уравнений (4.4)–(4.6) определена в фазовом пространстве $\{X, S, Y\}$ (где $X = \Psi^2$, $S = \Psi\Theta$, $Y = \Theta^2$), которое является расширением исходного физического пространства переменных Ψ и Θ . Таким образом, не все формальные решения системы (4.9)–(4.11) имеют физический смысл. В частности, если иметь дело с задачей с начальными условиями, то начальным состоянием, усредненным по реализациям шума, является просто начальное состояние системы. То есть начальные условия должны удовлетворять соотношению:

$$\left(\langle\Psi\Theta\rangle\right)_{t=0}^2 = \langle\Psi^2\rangle_{t=0} \langle\Theta^2\rangle_{t=0}.$$

В процессе эволюции средние значения могут отклоняться от данного соотношения, но решение все равно должно удовлетворять некоторым условиям. А именно:

$$\langle\Psi^2\rangle \geq 0, \quad \langle\Theta^2\rangle \geq 0. \quad (4.14)$$

Кроме того, имеем ограничение на $\langle\Psi\Theta\rangle$. Так как $(\alpha\Psi + \Theta)^2 \geq 0$ для всех действительных α , то, усредняя это выражение, получаем:

$$\alpha^2\langle\Psi^2\rangle + 2\alpha\langle\Psi\Theta\rangle + \langle\Theta^2\rangle \geq 0.$$

Последнее неравенство справедливо для всех действительных значений α , если соответствующее квадратное уравнение для α не имеет вещественных корней или пару совпадающих, то есть:

$$\langle\Psi\Theta\rangle^2 \leq \langle\Psi^2\rangle\langle\Theta^2\rangle, \quad (4.15)$$

что также известно как неравенство Коши–Буняковского (неравенство Коши–Шварца). В частности, условие (4.14) означает, что физически осмысленное решение системы (4.9)–(4.11) с наибольшей скоростью роста не может быть колебательным. Наблюдаемая физическая неустойчивость квадратов полей должна быть строго монотонной.

Кубическое уравнение (4.13) может быть записано в форме $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$; следовательно, слагаемое при нулевой степени λ полинома (4.13) равно $-\lambda_1\lambda_2\lambda_3$:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{4\sigma^2 k^4}{\varepsilon^2 \mathcal{D}_{11}^2} - \frac{4(1 + \varepsilon \mathcal{D}_{11})}{\varepsilon^2 \mathcal{D}_{11}} \left(\mathcal{D}_{11}^2 - s k^2 R p_0 \right).$$

Там, где ведущее значение λ_1 является действительным и переходит из отрицательных значений в положительные, значения λ_2 и λ_3 оба отрицательны или $\lambda_2 = \lambda_3^*$ – в любом случае, $\lambda_2 \lambda_3 > 0$. Следовательно, условие существования монотонно растущей моды:

$$\sigma^2 > \sigma_*^2(k) = \frac{(1 + \varepsilon \mathcal{D}_{11}) \mathcal{D}_{11}}{k^2} \left(\frac{\mathcal{D}_{11}^2}{k^2} - s R p_0 \right). \quad (4.16)$$

Физически осмысленная мода должна подчиняться условиям (4.14) и (4.15). Из (4.12) для $\lambda = 0$ можем получить соотношение:

$$\langle \Psi^2 \rangle = \left(\frac{\mathcal{D}_{11}^2}{k^2} + \frac{\sigma_*^2 k^2}{\varepsilon \mathcal{D}_{11}^2 (1 + \varepsilon \mathcal{D}_{11})} \right) \langle \Theta^2 \rangle,$$

которое никогда не нарушает (4.14), и соотношение:

$$s k \langle \Psi \Theta \rangle = -\mathcal{D}_{11} \langle \Theta^2 \rangle,$$

которое даёт:

$$\langle \Psi \Theta \rangle^2 = \frac{\langle \Psi^2 \rangle \langle \Theta^2 \rangle}{1 + \frac{\sigma_*^2 k^4}{\varepsilon \mathcal{D}_{11}^4 (1 + \varepsilon \mathcal{D}_{11})}}.$$

Последнее всегда удовлетворяет условию (4.15). Таким образом, растущее решение, возникающее при критическом значении σ_* , всегда имеет физический смысл.

4.1. Задача с начальными условиями и ведущее собственное решение

Проверим, может ли траектория системы, осреднённая по реализациям шума и имеющая начальное состояние $\{\Psi_0, \Theta_0\}$, содержать ведущее формальное собственное решение задачи (4.12), хотя бы на пороге неустойчивости. Для $\lambda = 0$ решением эрмитово-сопряжённой задачи (4.12) является:

$$\{X^+, S^+, Y^+\} = \left\{ \varepsilon k, 2s, \frac{1}{\varepsilon k} + \frac{\sigma_*^2 k^2}{(1 + \varepsilon \mathcal{D}_{11}) \mathcal{D}_{11}^2} \right\}.$$

Для начального состояния системы $\{\Psi_0, \Theta_0\}$, начальным состоянием задачи (4.4)–(4.6) является $\{\Psi_0^2, \Psi_0 \Theta_0, \Theta_0^2\}$. Разложение данного начального состояния по базису собственных векторов задачи (4.12) не содержит в себе ведущий собственный вектор, если

$$\{X^+, S^+, Y^+\} \cdot \{\Psi_0^2, \Psi_0 \Theta_0, \Theta_0^2\} = 0.$$

Последнее уравнение может быть переписано следующим образом:

$$\left(\sqrt{\varepsilon k} \Psi_0 + \frac{s}{\sqrt{\varepsilon k}} \Theta_0 \right)^2 + \frac{\sigma_*^2 k^2}{(1 + \varepsilon \mathcal{D}_{11}) \mathcal{D}_{11}^2} \Theta_0^2 = 0.$$

Оно допускает только тривиальное решение $\Psi_0 = \Theta_0 = 0$. Таким образом, все начальные состояния системы содержат ненулевую компоненту ведущей формальной моды, и рост этой моды определяет рост траекторий физической системы с шумом.

4.2. Порог стохастического возбуждения

Минимизируя σ_* по k для $\varepsilon \rightarrow 0$, можно найти критическое значение k_{cr} , соответствующее самым опасным конвективным структурам, и пороговую амплитуду шума σ_{cr} как функцию $R p_0$. Ниже порога конвективной неустойчивости системы без модуляции,

$$s R p_0 < R p_{cr} \equiv 4\pi^2,$$

зависимость $\sigma_*(k)$ имеет единственный локальный экстремум. Зависимость предельной амплитуды шума от $s R p_0$ может быть представлена в параметрической форме:

$$\sigma_{cr}^2 = \frac{(k_{cr}^2 + \pi^2)^3 (k_{cr}^2 - \pi^2)}{\pi^2 k_{cr}^4}, \quad (4.17)$$

$$s R p_0 = \frac{(k_{cr}^2 + \pi^2)^2 (2\pi^2 - k_{cr}^2)}{\pi^2 k_{cr}^2}, \quad (4.18)$$

где $k_{cr} \geq \pi$. С помощью этих уравнений можно найти асимптотические выражения, справедливые при $s R p_0 \rightarrow -\infty$ (или $k_{cr} \approx (-\pi^2 s R p_0)^{1/4} \gg 1$):

$$\sigma_{cr} \approx \sqrt{R p_{cr} - s R p_0} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5 - 4 s R p_0 / R p_{cr}}} \right), \quad (4.19)$$

$$k_{cr}^2 \approx \pi^2 \sqrt{5 - 4 \frac{s R p_0}{R p_{cr}}}.$$

Критические значения (4.17)–(4.18) и асимптотическая зависимость (4.19) проиллюстрированы на рис.1. Стоит отметить, что асимптотический закон оказывается достаточно точным не только при $s R p_0 \rightarrow -\infty$, но и во всём диапазоне параметров, где система без шума конвективно устойчива.

Можно видеть, что конвективная неустойчивость возможна как при подогреве снизу ($s = +1$), так и при подогреве сверху ($s = -1$). Напомним, что нагрев сверху в детерминированных системах ока-

зывает исключительно стабилизирующее влияние. В нашем же случае, увеличение абсолютного значения числа Рэлея–Дарси (увеличение интенсивности подогрева) приводит к медленному росту порога стохастического возбуждения, $\sigma_{cr} \propto \sqrt{-sRp_0}$ (см. уравнение (4.19)). В условиях пониженной гравитации стохастическое возбуждение также эффективно, согласно (4.18):

$$k_{cr}|_{Rp_0=0} = \sqrt{2}\pi,$$

и согласно (4.17):

$$\sigma_{cr}|_{Rp_0=0} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi. \quad (4.20)$$

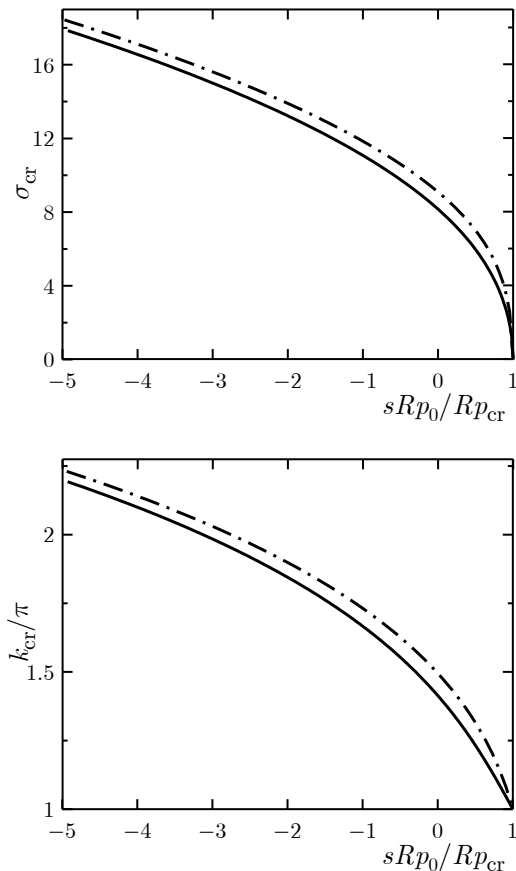


Рис. 1. Сплошные кривые – порог стохастического параметрического возбуждения σ_{cr} (верхняя панель) и критическое волновое число k_{cr} (нижняя панель) для тепловой конвекции жидкости, насыщающей бесконечный слой пористой среды; штрихпунктирные кривые – асимптотическое решение (4.19) для $sRp_0 \rightarrow -\infty$

4.3. Предельные случаи сильного нагрева сверху и условия низкой гравитации

Для выяснения предельных случаев (I) сильного нагрева сверху и (II) низкой гравитации необходимо провести анализ в размерных величинах.

Подставляя (4.19) в (2.12), получаем для случая сильного нагрева сверху:

$$\sigma_{gcr}|_{sRp_0 \rightarrow -\infty} \approx \sqrt{\frac{g_0 b \nu \chi^2}{\beta \Delta T H^3 K}}, \quad (4.21)$$

где $A = H \Delta T$ и ΔT – разница температур по толщине слоя. Подставляя (4.20) в (2.12), получаем для условий низкой гравитации:

$$\sigma_{gcr}|_{Rp_0 \rightarrow 0} \approx \frac{3\sqrt{3} b \nu \chi^{3/2}}{2 \beta \Delta T H^2 K}. \quad (4.22)$$

Согласно (4.21), при сильном нагреве сверху критическая интенсивность шума ниже при большей неоднородности плотности по слою $\beta \Delta T$ и большей толщине слоя. Базовое ускорение свободного падения g_0 увеличивает порог неустойчивости, но это увеличение происходит медленнее, чем линейное, $\sigma_{gcr} \propto g_0^{1/2}$.

В (4.21) диссипативное сопротивление возбуждению, обусловленное вязкостью и теплопроводностью, представлено комбинированной мерой $\chi(\nu/K)^{1/2}$. Оба механизма диссипации должны быть немалыми, чтобы противодействовать стохастическому возбуждению конвективной неустойчивости; если хотя бы один из χ и (ν/K) стремится к 0, порог σ_g становится малым. В этом отношении данный случай существенно отличается от случая конвекции свободной жидкости (без пористой среды) [3], где $\sigma_{gcr} \propto (\chi + \nu)^{1/2}$, и исчезновение одного из двух механизмов диссипации не приводит к сингулярному снижению порога.

Согласно (4.22), в условиях низкой гравитации постоянная составляющая остаточного ускорения силы тяжести g_0 не влияет на ведущий порядок. Критическая интенсивность шума ниже при большей неоднородности плотности $\beta \Delta T$ и более толстом слое. Диссипативное сопротивление возбуждению за счёт вязкости и теплопроводности представлено комбинированной мерой $\chi^{3/2} \nu / K$. Эта мера становится малой, что приводит к низкому порогу стохастической неустойчивости, если один из двух механизмов диссипации, вязкость или теплопроводность, ослабевает.

5. Теплопередача: число Нуссельта

Безразмерный теплообмен через границы слоёв характеризуется числом Нуссельта, которое, как известно, квадратично зависит от амплитуды тока вблизи порога неустойчивости [23–25]. Следовательно, теплообмен через слой может быть охарактеризован только в рамках нелинейной задачи. Система уравнений (2.1)–(2.3) без линеаризации дает нелинейную версию уравнений (2.6)–(2.7):

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = -\Delta \psi + \text{Rp} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + J(\psi, \theta) = \Delta \theta + s \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (5.2)$$

где Якобиан

$$J(f, g) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}.$$

5.1. Слабо нелинейная динамика

Исходная нелинейная система уравнений (5.1)–(5.2) может быть спроецирована в пространство Фурье

$$\psi = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \Psi_{nm}(t) \sin nkx \sin m\pi z, \quad (5.3)$$

$$\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \Theta_{nm}(t) \cos nkx \sin m\pi z, \quad (5.4)$$

и сохраняются только члены, отвечающие геометрии задачи, симметрии уравнений и граничным условиям. Очевидно, что $\Psi_{nm} = 0$ для $n \leq 0$ или $m \leq 0$, и $\Theta_{nm} = 0$ для $n \leq -1$ или $m \leq 0$. Заметим также, что разложение с этой комбинацией основных функций x соответствует случаю прямоугольной ячейки с непроницаемыми теплоизолирующими боковыми границами. Для бесконечного слоя разложение (5.3)–(5.4) позволяет изучать нелинейные режимы монотонной неустойчивости под влиянием модуляции, но не режимы бегущих волн, которые не обязательно имеют вертикальные границы конвективных ячеек и подчиняются геометрическому ограничению, накладываемому членами $\sin nkx$ и $\cos nkx$ в $\psi(x, z, t)$ и $\theta(x, z, t)$ соответственно. Однако в пористых средах режимы бегущих волн наблюдаются только при большой надкритичности [4], тогда как нас интересуют режимы ниже и умеренно выше порога неустойчивости системы без модуляции.

В Фурье-пространстве система нелинейных уравнений (5.1)–(5.2) имеет вид:

$$\varepsilon \dot{\Psi}_{nm} = -\Psi_{nm} + \frac{nk \text{Rp}}{\mathcal{D}_{nm}} \Theta_{nm}, \quad (5.5)$$

$$\dot{\Theta}_{nm} = snk \Psi_{nm} - \mathcal{D}_{nm} \Theta_{nm} - \text{P}_{nm} J(\psi, \theta). \quad (5.6)$$

На непроницаемой границе нормальная составляющая скорости течения $v^{(z)} = 0$, а безразмерный тепловой поток

$$J_Q = -\frac{\partial}{\partial z} (-sz + \theta) \Big|_{z=0} = s(1 - s \frac{\partial}{\partial z} \theta) \Big|_{z=0}.$$

Следовательно, число Нуссельта:

$$Nu = 1 - s \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\rangle. \quad (5.7)$$

Уравнение (2.8) определяет форму линейного решения ведущего порядка:

$$\psi_1 = \Psi(t) \sin kx \sin \pi z, \quad \theta_1 = \Theta(t) \cos kx \sin \pi z.$$

Было установлено, что среднее значение стремится к нулю в интересующем нас диапазоне параметров; следовательно, необходима ведущая нелинейная поправка $\{\psi_2, \theta_2\}$. Более того, если Nu усредняется по граничной области, $\theta_1 \propto \cos kx$ также вносит нулевой вклад.

Для $\{\psi_2, \theta_2\}$ система уравнений (5.1)–(5.2) даёт

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi_2 = -\Delta \psi_2 + \text{Rp} \frac{\partial \theta_2}{\partial x}, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} + J(\psi_1, \theta_1) = \Delta \theta_2 + s \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \quad (5.9)$$

где $J(\psi_1, \theta_1) = -(k\pi/2) \Psi(t) \Theta(t) \sin 2\pi z$. Следовательно

$$\{\psi_2, \theta_2\} = \{\Psi_{02}(t), \Theta_{02}(t)\} \sin 2\pi z, \quad (5.10)$$

а уравнения (5.5) и (5.6) становятся не только взаимно независимыми, но и член с $\xi(t)$ (в Rp) выпадает:

$$\varepsilon \frac{d\Psi_{02}}{dt} = -\Psi_{02}, \quad (5.11)$$

$$\frac{d\Theta_{02}}{dt} = -4\pi^2 \Theta_{02} + \frac{k\pi}{2} \Psi \Theta. \quad (5.12)$$

Согласно (5.11), поток Ψ_{02} всегда затухает; уравнение (5.12) можно усреднить по реализациям шума:

$$\frac{d}{dt} \langle \Theta_{02} \rangle = -4\pi^2 \langle \Theta_{02} \rangle + \frac{k\pi}{2} \langle \Psi \Theta \rangle. \quad (5.13)$$

Для $\langle \Psi \Theta \rangle \propto e^{\lambda t}$ рассматриваем $\langle \Theta_{02} \rangle \propto e^{\lambda t}$ и

$$\langle \Theta_{02} \rangle = \frac{k\pi}{2} \frac{\langle \Psi \Theta \rangle}{\lambda + 4\pi^2} = -s \frac{\pi}{4} \frac{\lambda + 2\mathcal{D}_{11}}{\lambda + 4\pi^2} \langle \Theta^2 \rangle,$$

где использовано уравнение (4.11).

Подставляя температурное поле из (5.10) в выражение (5.7), получаем

$$\begin{aligned} Nu &= 1 - 2\pi s \langle \Theta_{02} \rangle = \\ &= 1 + \frac{\pi^2}{2} \frac{\lambda + 2(\pi^2 + k^2)}{\lambda + 4\pi^2} \langle \Theta^2 \rangle = \\ &= 1 + \frac{\pi^2}{2} \frac{\lambda + 2(\pi^2 + k^2)}{\lambda + 4\pi^2} [\Theta(0)]^2 e^{\lambda t}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Здесь не рассматривается нелинейное насыщение роста возмущения. Для статистически стационарного состояния, где нелинейные члены препятствуют дальнейшему экспоненциальному росту конвективных потоков, недостаточно просто положить $\lambda = 0$ в уравнении (5.14), чтобы отразить тот факт, что $(d/dt)\langle\Theta^2\rangle = 0$ в (4.11) и $(d/dt)\langle\Theta_{02}\rangle = 0$ в (5.13), требуется более детальное рассмотрение.

Таким образом, скорость экспоненциального роста $\langle\Theta^2\rangle$, которая исследовалась в предыдущих разделах, определяет возбуждение конвективного переноса тепла, которое является важной наблюдаемой величиной для тепловой конвекции. Эта наблюдаемая величина также играет решающую роль в сложных системах, включающих элементы теплопередачи/изоляции.

6. Заключение

В данной работе сформулирована математическая модель стохастического параметрического возбуждения тепловой конвекции в пористых средах при случайной модуляции силы тяжести.

Получены уравнения стохастической динамики для амплитуд малых возмущений полей температуры и функции тока. На их основе выведены условия роста среднеквадратичных значений, которые использованы как критерий возбуждения конвективных движений (разделы 4.2, 4.3, рис. 1).

Обнаружено влияние стохастической модуляции на тепловой поток, характеризуемый числом Нуссельта. Показано, что порог стохастического возбуждения вторых моментов определяет порог возбуждения конвективного теплопереноса, что оправдывает интерес именно к ним в разделах 4.2, 4.3. При подогреве сверху (стабилизирующем в детерминированном случае) наблюдается дестабилизация системы случайными вибрациями.

Установлено, что критическая интенсивность шума зависит от неоднородности плотности по слою и толщины слоя.

Определено, что диссипативное сопротивление возбуждению, обусловленное вязкостью и теплопроводностью, представлено комплексом $\chi(v/K)^{1/2}$, который становится малым при ослаблении одного из механизмов диссипации, что приводит к снижению порога стохастической неустойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (тема № 124021600038-9).

Список литературы

1. Ibrahim R. A. Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems // *Journal of Fluids Engineering*. 2015. Vol. 137. № 9, 090801. DOI: 10.1115/1.4029544
2. Пермякова Э. В., Голдобин Д. С. Стохастическое параметрическое возбуждение конвекции Рэлея-Бенара // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2022. № 4. С. 34–44. DOI: 10.17072/1994-3598-2022-4-34-44
3. Permyakova E. V., Goldobin D. S. Stochastic parametric excitation of convective heat transfer // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2023. Vol. 381, 20220084. DOI: 10.1098/rsta.2022.0084
4. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. 3rd ed. New-York: Springer Verlag, 2006. 640 p.
5. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1966. № 5. С. 51–55.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра // *Прикладная математика и механика*. 1970. Т. 34. № 3. С. 470–483.
7. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal vibrational convection*. Chichester: Wiley, 1998. 376 p.
8. Gardiner C. W. *Handbook of Stochastic Methods*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997. 443 p.
9. Horton C. W., Rogers F. T. Convection currents in a porous medium // *Journal of Applied Physics*. 1945. Vol. 16. P. 367–370. DOI: 0.1063/1.1707601
10. Lapwood E. R. Convection of a fluid in a porous medium // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1948. Vol. 44. № 4. P. 508–521. DOI: 10.1017/S030500410002452X
11. Khasminskii R. *Stochastic Stability of Differential Equations*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. 342 p. DOI: 10.1007/978-3-642-23280-0
12. Klyatskin V. I. *Stochastic parametric resonance // Fundamentals of Stochastic Nature Sciences*. Cham: Springer, 2017. P. 55–57. DOI: 10.1007/978-3-319-56922-2_6
13. Кляцкин В. И. *Статистическое описание систем с флуктуирующими параметрами*. М.: Наука, 1975. 240 с.
14. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1831. Vol. 121. P. 299–318. DOI: 10.1098/RSTL.1831.0018
15. Rayleigh, Lord. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure // *Philosophical Magazine*. 1887. Vol. 24. № 147. P. 145–159. DOI: 10.1080/14786448708628074
16. Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance // *Journal of Physics A: Math-*

- emational and General. 1981. Vol. 14. № 11. P. L453–L457. DOI: 10.1088/0305-4470/14/11/006
17. Gang H., Ditzinger T., Ning C. Z., Haken H. Stochastic resonance without external periodic force // *Physical Review Letters*. 1993. Vol. 71. № 6. P. 807–810. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.807
 18. Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., Marchesoni F. Stochastic resonance // *Reviews of Modern Physics*. 1998. Vol. 70. № 1. P. 223–287. DOI: 10.1103/RevModPhys.70.223
 19. Pikovsky A. S., Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system // *Physical Review Letters*. 1997. Vol. 78. № 5. P. 775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775
 20. Zillmer R., Pikovsky A. Continuous approach for the random-field Ising chain // *Physical Review E*. 2005. Vol. 72. № 5. 056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.056108
 21. Goldobin D. S., Shklyaeva E. V. Localization and advective spreading of convective currents under parametric disorder // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2013. Vol. 09, P09027. DOI: 10.1088/1742-5468/2013/09/P09027
 22. Goldobin D. S. Two scenarios of advective washing-out of localized convective patterns under frozen parametric disorder // *Physica Scripta*. 2019. Vol. 94, 014011. DOI: 10.1088/1402-4896/aaeefa
 23. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
 24. Silveston P. L. Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten // *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*. 1958. Vol. 24. № 1. P. 29–32. DOI: 10.1007/BF02557078
 25. Silveston P. L. Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten // *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*. 1958. Vol. 24. № 2. P. 59–69. DOI: 10.1007/BF02557095
 5. Zen'kovskaya S. M., Simonenko I. B. Effect of high frequency vibration on convection initiation. *Fluid Dynamics*, 1966, vol. 1, no. 5, pp. 35–37. DOI: 10.1007/BF01022147
 6. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M., Iurkov Iu. S. On convective stability in the presence of periodically varying parameter. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 34, no. 3, pp. 442–452. DOI: 10.1016/0021-8928(70)90090-0
 7. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal Vibrational Convection*. Chichester: Wiley, 1998. 376 p.
 8. Gardiner C. W. *Handbook of Stochastic Methods*. Berlin: Springer, 1997. 443 p.
 9. Horton C. W., Rogers F. T. Convection currents in a porous medium. *Journal of Applied Physics*, 1945, vol. 16, pp. 367–370. DOI: 10.1063/1.1707601
 10. Lapwood E. R. Convection of a fluid in a porous medium. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1948. vol. 44, no. 4, pp. 508–521. DOI: 10.1017/S030500410002452X
 11. Khasminskii R. *Stochastic Stability of Differential Equations*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. 342 p. DOI: 10.1007/978-3-642-23280-0
 12. Klyatskin V. I. Stochastic parametric resonance. *Fundamentals of Stochastic Nature Sciences*. Cham: Springer, 2017, pp. 55–57. DOI: 10.1007/978-3-319-56922-2_6
 13. Klyatskin V. I. *Statisticheskoe opisanie sistem s fluktuiruiushchimi parametrami* [Statistical Description of Dynamic Systems with Fluctuating Parameters]. Moscow: Nauka Publ., 1975, 240 p. (In Russian).
 14. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1831, vol. 121, pp. 299–318. DOI: 10.1098/RSTL.1831.0018
 15. Rayleigh, Lord. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. *Philosophical Magazine*, 1887, vol. 24, no. 147, pp. 145–159. DOI: 10.1080/14786448708628074
 16. Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1981, vol. 14, no. 11, pp. L453–L457. DOI: 10.1088/0305-4470/14/11/006
 17. Gang H., Ditzinger T., Ning C. Z., Haken H. Stochastic resonance without external periodic force. *Physical Review Letters*, 1993, vol. 71, no. 6, pp. 807–810. DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.807
 18. Gammaitoni L., Hänggi P., Jung P., Marchesoni F. Stochastic resonance. *Reviews of Modern Physics*, 1998, vol. 70, no. 1, pp. 223–287. DOI: 10.1103/RevModPhys.70.223

References

1. Ibrahim R. A. Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems. *Journal of Fluids Engineering*, 2015, vol. 137, no. 9, 090801. DOI: 10.1115/1.4029544
2. Permyakova E. V., Goldobin D. S. Stochastic parametric excitation of Rayleigh–Bénard convection. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2022, no. 4, pp. 34–44. DOI: 10.17072/1994-3598-2022-4-34-44
3. Permyakova E. V., Goldobin D. S., Stochastic parametric excitation of convective heat transfer. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2023, vol. 381, 20220084. DOI: 10.1098/rsta.2022.0084
4. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. 3rd ed. New-York: Springer Verlag, 2006. 640 p.

19. Pikovsky A. S., Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Physical Review Letters*, 1997, vol. 78, no. 5, pp. 775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775
20. Zillmer R., Pikovsky A. Continuous approach for the random-field Ising chain. *Physical Review E*, 2005, vol. 72, no. 5, 056108. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.056108
21. Goldobin D. S., Shklyayeva E. V. Localization and advective spreading of convective flows under parametric disorder. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2013, P09027. DOI: 10.1088/1742-5468/2013/09/P09027
22. Goldobin D. S. Two scenarios of advective washing-out of localized convective patterns under frozen parametric disorder. *Physica Scripta*, 2019, vol. 94, 014011. DOI: 10.1088/1402-4896/aaeefa
23. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids*. Jerusalem, Israel: Keter Publishing House, 1976. 330 p.
24. Silveston P. L. Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 1958, vol. 24, no. 1, pp. 29–32. DOI: 10.1007/BF02557078 (In German)
25. Silveston P. L. Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten. *Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens A*, 1958, vol. 24, no. 2, pp. 59–69. DOI: 10.1007/BF02557095 (In German)

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Пермякова Э. В., Голдобин Д. С., Тюлькина И. В. Стохастическое параметрическое возбуждение тепловой конвекции в слое пористой среды // Вестник Пермского университета. Физика. 2026. № 2. С. 13–23. doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-13-23

Please cite this article in English as:

Permyakova E. V., Goldobin D. S., Tyulkina I. V. Stochastic parametric excitation of thermal convection in a porous medium layer. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2026, no. 2, pp. 13–23. doi: 10.17072/1994-3598-2026-2-13-23

Сведения об авторах

1. Пермякова Эвелина Владимировна, аспирант, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва, 1, Пермь, 614013.
2. Голдобин Денис Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией подземной утилизации углерода, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва, 1, Пермь, 614013.
3. Тюлькина Ирина Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королёва, 1, Пермь, 614013.

Author information

1. Evelina V. Permyakova, Postgraduate Student, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia.
2. Denis S. Goldobin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory of Underground Utilization of Carbon, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia.
3. Irina V. Tyulkina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia.