

УДК 532.546; 532.5.032
PACS 47.55.Mh; 47.11.–j

Численное моделирование течения в двухслойном пористом канале методом решеточных уравнений Больцмана

И. В. Володин^{1†}, А. А. Алабужев^{1,2}

¹ Институт механики сплошных сред Уро РАН, Пермь, Россия

² Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

†ivanwolodin@gmail.com

Численно исследовано течение вязкой жидкости в поле тяжести в наклоненном двухслойном канале конечной ширины, который наполовину заполнен пористой средой. Моделирование проводилось в широком диапазоне чисел Дарси и чисел Рейнольдса. Коэффициент пористости среды считается однородным и постоянным. Задача решалась методом решеточных уравнений Больцмана. Для моделирования течения в пористой среде использовался метод репрезентативного элементарного объема. Верификация численной схемы проводилась на двух видах граничных условий на верхней границе – твердой и свободной недеформируемой границе. Показано, что метод хорошо воспроизводит характеристики течения в случае заданного значения коэффициента пористости в сравнении с результатами, полученными методом конечных разностей. Увеличение ширины канала приводит к более интенсивному течению, то есть к росту числа Рейнольдса, и, при дальнейшем увеличении, происходит развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца.

Ключевые слова: пористая среда; двухслойный канал; граница раздела; метод решеточных уравнений Больцмана; метод репрезентативного элементарного объема; неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

Поступила в редакцию 19.02.2025; после рецензии 18.03.2025; принята к опубликованию 24.03.2025

Numerical simulation of the flow in a two-layer porous channel by the lattice Boltzmann method

I. V. Volodin^{1†}, A. A. Alabuzhev^{1,2}

¹ Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

² Perm State University, Perm, Russia

†ivanwolodin@gmail.com

We have numerically investigated the flow of a viscous fluid in a gravitational field within an inclined two-layer channel of finite width, half-filled with a porous medium. The simulation was carried out over a wide range of Darcy and Reynolds numbers. The porosity coefficient of the medium was assumed to be homogeneous and constant. The problem was solved using the lattice Boltzmann method. The representative elementary volume (REV) method was used to simulate the flow in the porous medium. To verify the numerical scheme, two types of boundary conditions were applied at the upper boundary: a solid boundary and a free non-deformable boundary. As the study shows, the method accurately reproduces the flow characteristics for a given porosity coefficient, demonstrating strong agreement with results obtained using the finite difference method. An increase in the

channel width leads to a more intense flow, reflected in the growth of the Reynolds number, and with further expansion the Kelvin–Helmholtz instability develops.

Keywords: porous medium; two-layer channel; interface; lattice Boltzmann method; LBM; REV; Kelvin–Helmholtz instability

Received 19 February 2025; revised 18 March 2025; accepted 24 March 2025

doi: 10.17072/1994-3598-2025-1-52-62

1. Введение

Изучение поведения жидкости в каналах с частично заполненными пористыми средами представляет значительный фундаментальный и прикладной интерес. Такие системы часто встречаются в природе и технике, например, в фильтрационных установках, геотермальных системах, нефтяных коллекторах и биологических тканях. Понимание механики таких течений может иметь важное значение для оптимизации рабочих процессов и повышения эффективности технологий [1–3].

Стационарное течение жидкости через насыщенный пористый слой широко изучалось ранее, например, в [4–7]. Для аналитического описания таких задач используется, как правило, модель Бринкмана [8] или модель Дарси–Форхгеймера [9].

Помимо существования стационарных решений возможно возникновение неустойчивости Кельвина–Гельмгольца на границе раздела жидкость–пористая среда. При этом, как известно [10, 11], подобные системы характеризуются бимодальностью нейтральных кривых и существованием двух механизмов возникновения неустойчивости: длинноволновый механизм, когда возникающие крупные вихри захватывают оба слоя, и коротковолновый, когда вблизи границы раздела начинают формироваться маленькие вихревые структуры. В ряде работ исследовалась устойчивость таких плоскопараллельных течений [11–15]. Численное моделирование в двумерных постановках рассматривалось в [16, 17].

Отметим, что в горизонтальной двухслойной системе, состоящей из слоя бинарной жидкости и расположенного под ним слоя пористой среды, насыщенной жидкостью, также возможно развитие коротковолновой и длинноволновой неустойчивости положения механического равновесия. Коротковолновые конвективные валы формируются в слое жидкости над пористой средой. Длинноволновые валы проникают в пористый слой.

При численном моделировании, особенно для нестационарных течений, как ламинарных, так и турбулентных, большое распространение получили различные методы конечных разностей. Трудности реализации этих методов связаны с согласованностью решения граничным условиям, обеспечением численной устойчивости и управлением вычислительными ресурсами.

Одним из эффективных численных методов моделирования гидродинамических задач является метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM). За последние несколько десятилетий он приобрел широкую популярность среди исследователей [18].

Интерес к этому методу неуклонно растет с момента его возникновения на основе модели решеточного газа [19, 20]. Оба этих метода моделируют течение жидкостей и газов, имитируя их ключевые физические процессы – движение частиц и их рассеяние при столкновениях. В изотермическом случае алгоритм LBM имеет строгое теоретическое обоснование, основанное на физической кинетике, классической гидродинамике и гауссово-эрмитовых аппроксимациях [21–23].

LBM является мощным численным инструментом для моделирования течений, поскольку его вычисления локальны, что делает метод высокоэффективным для параллельных вычислений. Кроме того, он удобен для задач со сложной геометрией [21, 23].

Метод решеточных уравнений Больцмана получил широкое распространение и в задачах моделирования течений в пористых средах. В изотермическом случае для описания таких течений может быть использовано несколько подходов [21, 24–27].

В данной работе методом решеточных уравнений Больцмана проводится моделирование течения в наклонном двухслойном канале, насыщенном пористой средой. Одной из целей является апробация этого метода для подобных задач и демонстрация его возможностей.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать течение вязкой жидкости в канале шириной h , находящимся в поле тяжести под углом α к горизонту. Канал разделен на две части: нижняя часть состоит из пористой среды, верхняя часть – свободная. Коэффициенты пористости ε и проницаемости K однородны и постоянны. Геометрия задачи приведена на рис. 1, серым цветом обозначена область, занятая пористым скелетом.

В данной работе предполагается, что коэффициенты ε и K не связаны друг с другом. Рассматривается двумерная постановка, значение коэффициента пористости постоянно во всех численных экспериментах: $\varepsilon = 0.5$.

На нижней границе поставлено граничное условие прилипания, на боковых стенках – периодические граничные условия. На верхней границе рассматриваются два условия – твердая поверхность и свободная недеформируемая поверхность.

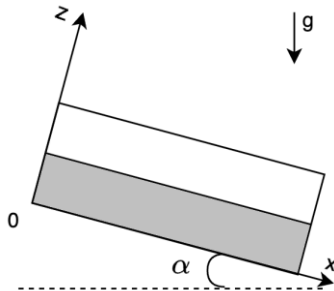


Рис. 1. Геометрия задачи

Задача в такой постановке исследовалась в [16], в которой выбранное обезразмеривание и алгоритм решения ставили жесткое ограничение на ширину канала, и практически все результаты приведены для одного значения числа Рейнольдса $Re = 100$.

В данной работе задача решается мезоскопическим численным методом и рассматривается более широкий диапазон Re .

3. Численная модель

3.1. Континуальное кинетическое уравнение Больцмана

Одним из эффективных численных методов моделирования гидродинамических задач является метод решеточных уравнений Больцмана.

Вычислительный алгоритм в изотермическом случае может быть выведен из кинетического уравнения Больцмана [28, 29], в котором, как известно, вводится статистическое представление ансамбля частиц. Само уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \xi} = \Omega(f). \quad (1)$$

Эволюция системы определяется функцией распределения $f(\mathbf{r}, \xi, t)$, где t , \mathbf{r} и ξ – время, радиус-вектор и скорость ячейки элемента фазового объема, соответственно, \mathbf{F} – сила, действующая на ячейку элемента фазового объема, ρ – плотность элемента фазового объема, $\Omega(f)$ – интеграл столкновений.

Описание системы строится на мезоскопическом масштабе, который занимает промежуточное положение между характерными масштабами молекулярной динамики и сплошной среды. Макропараметры среды выражаются через соответствующие моменты функции распределения [см., например, 29].

Критерием подобия, определяющим степень разреженности течения потока частиц, является число Кнудсена $Kn = l_{mpf}/l_s$, где l_{mpf} – средняя длина свободного пробега частиц, l_s – характерный размер задачи. При $Kn \ll 1$ можно использовать сплошносреднее описание (уравнение Навье-

Стокса), однако при $Kn \leq 1$ нельзя считать, что система находится в состоянии локального термодинамического равновесия и уравнение Навье-Стокса становится неприменимым. При этом использование кинетического уравнения Больцмана допустимо во всем диапазоне значений Kn . Таким образом, в иерархической цепочке математических моделей, описывающих динамику большого числа материальных частиц, оно стоит выше, чем уравнение Навье-Стокса [30].

Для решения разного рода задач в кинетическом уравнении Больцмана допустимо использовать линейризованное приближение интеграла столкновений [29, 31]:

$$\Omega(f) = -\frac{\bar{v}_T}{l_{mpf}} (f - f^{eq}) = -\frac{f - f^{eq}}{\tau}, \quad (2)$$

в котором вводятся равновесная функция распределения $f^{eq}(\mathbf{r}, \xi, t)$ и параметр $\tau = l_{mpf}/v_T$, где \bar{v}_T – осредненная скорость теплового движения молекул. В качестве равновесной функции используется распределение Максвелла. В оценке (2) учтено, что равновесное статистическое состояние ($f = f^{eq}$) тождественно удовлетворяет уравнению (1). Как видно, такая линейризованная оценка становится неприменимой в случае $\tau \rightarrow 0$, что соответствует системам с большой плотностью частиц ($l_{mpf} \rightarrow 0$).

Предполагая близость системы к локальному термодинамическому равновесию и оценку $Kn \ll 1$, из (1) и (2), можно вывести классические уравнения гидродинамики: уравнение неразрывности, уравнение Навье-Стокса и уравнение закона сохранения энергии [см., например, 21, 22, 29, 30].

3.2. Дискретизация кинетического уравнения Больцмана и переход к изотермической модели LBM

Первый шаг в построении численного алгоритма заключается в дискретизации исходного континуального уравнения Больцмана. Это нетривиальный шаг, так как исходное уравнение написано для $(2D + 1)$ -мерного фазового пространства, где D – размерность пространства и, кроме того, в уравнение (1) входит мезоскопическая скорость ξ элемента фазового объема и производная по этой скорости.

Тем не менее дискретизированное уравнение Больцмана может быть получено из исходного континуального несколькими способами [21]. Самый формальный и строгий подход заключается в дискретизации функций распределения в пространстве скоростей через полиномы Эрмита и квадратуру Гаусса-Эрмита, обобщенные на размерность D [21–23].

Для определения макроскопических характеристик течения, таких как плотность, импульс и энергия, достаточно первых двух моментов уравнения

Больцмана. По этой причине для восстановления макропараметров можно не рассматривать все члены ряда разложения f и f^{eq} по полиномам Эрмита, а достаточно рассмотреть только первые три члена разложения.

Исходя из вышеизложенного и полагая $D \geq 2$, можно представить дискретизированную обезразмеренную равновесную функцию распределения в индексной форме записи в виде:

$$f_i^{eq}(\rho, u_\alpha, \xi_\alpha) = \omega_i \rho \left(1 + \frac{c_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{u_\alpha u_\beta (c_{i\alpha} c_{i\beta} - c_s^2 \delta_{\alpha\beta})}{2c_s^4} \right), \quad (3)$$

где $\omega_i, c_{i\alpha}$ – веса и узлы квадратуры Гаусса–Эрмита, соответственно, $\delta_{\alpha\beta}$ – дельта символ Кронекера, u_α – скорость потока, c_s – скорость звука [23].

Макроскопические параметры тогда можно найти по следующим формулам:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{Q-1} f_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{Q-1} f_i^{eq}(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{Q-1} c_i f_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{Q-1} c_i f_i^{eq}(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

где \mathbf{x} – пространственная координата вычислительной сетки, Q – число узлов квадратуры, \mathbf{u}, ρ – значение скорости и плотности в узле \mathbf{x} , соответственно. Эволюционное уравнение (1) в дискретном виде запишется в виде:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \Delta t \frac{f_i - f_i^{eq}}{\tau} + S_i \Delta t, \quad (6)$$

где Δt – дискретный шаг по времени, S_i – источникное слагаемое.

Второй шаг построения численного алгоритма заключается в выборе числа узлов квадратуры или, в терминах LBM, выборе скоростной модели. От него зависят значение весовых коэффициентов ω_i , выбор сета скоростей $c_{i\alpha}$ и значение скорости звука c_s [32–34].

В данной работе используется модель D2Q9, что соответствует двумерному физическому пространству, значению $c_s = \sqrt{3}^{-1}$ и девяти разрешенным значениям скоростей $c_{i\alpha}$, численные значения которых можно найти, например, в [23].

При помощи разложения Чепмена–Энскога [36] дискретная модель (3)–(6), в предположении малости числа Маха ($Ma = u_\alpha / c_s$), может быть сведена к сжимаемому уравнению неразрывности и уравнению Навье–Стокса, а также можно установить связь параметра времени релаксации τ с вязкостью среды ν [см, например, 21, 23]:

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right), \quad (7)$$

3.3 Модель LBM для пористой среды

В настоящий момент используются в основном два алгоритма LBM для моделирования задач пористой среды – Pore-Structure (PS) метод и метод репрезентативного элементарного объема (Representative Elementary Volume, REV).

Первый подход требует детального описания матрицы жидкости с учетом заранее заданных препятствий, играющих роль образования пористого скелета. Очевидно, что скорость на этих препятствиях должна быть нулевой и поэтому в этом подходе ключевую роль играет правильное задание значений функции распределения на этих препятствиях [21, 23, 24].

Использование второго подхода не предполагает детализированного представления структуры пористого скелета, и среда рассматривается как континуум [14]. При этом становится возможным использование эмпирических моделей, например, таких как закон Дарси.

В представленной работе используется REV-алгоритм, который наряду с (3), (4), (6), (7) дополняется следующими слагаемыми:

$$S_i(\mathbf{x}, t) = \omega_i \rho \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) \left[\frac{\mathbf{c}_i \mathbf{F}}{c_s^2} + \frac{\mathbf{u} \mathbf{F} : (\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i - c_s^2 \mathbf{I})}{\varepsilon c_s^4} \right], \quad (8)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\varepsilon \nu}{K} \mathbf{u} - \frac{\varepsilon F_\varepsilon}{\sqrt{K}} |\mathbf{u}| \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{G}, \quad (9)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор, двоеточие означает свертку по двум индексам, \mathbf{G} – внешняя сила.

Кроме того, помимо источникового слагаемого S_i , учета объемных сил и сил, связанных с пористостью, в алгоритм вместо (5) вводится фиктивная скорость \mathbf{W} :

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_{i=0}^{Q-1} c_i f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon \mathbf{G}, \quad (10)$$

через которую пересчитывается истинная скорость течения $\mathbf{u}(U, V)$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{W}}{L_0 + \sqrt{L_0^2 + L_1 |\mathbf{W}|}}, \quad (11)$$

а коэффициенты в знаменателе имеют вид:

$$L_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \varepsilon \frac{\Delta t \nu}{2 K} \right),$$

$$L_1 = \varepsilon \frac{\Delta t F_\varepsilon}{2 \sqrt{K}}, \quad (12)$$

$$F_\varepsilon = \frac{1.75}{\sqrt{150 \varepsilon^3}}.$$

Случай $\varepsilon = 1$ и $K \rightarrow \infty$ соответствует переходу от пористой среды к обычной. Тогда REV-метод переходит в классический LBM для сплошнородных систем ($L_0 = 1/2, L_1 = 0, \mathbf{u} = \mathbf{W}$).

При помощи разложения Чепмена–Энскога можно показать, что представленная модель сво-

дится к модели Бринкмана [26]. В работе [27] проводится сравнительный анализ PS-метода и REV-метода.

Для реализации алгоритма использовался самописный код на языке C++, для визуализации результатов – язык Python версии 3.11 и библиотеки matplotlib и numpy. Для сходимости алгоритма к стационарному решению применялась оценка:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i,j} (\mathbf{u}_{i,j}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{i,j}^t)^2}}{\sqrt{\sum_{i,j} (\mathbf{u}_{i,j}^{t+\Delta t})^2}} \leq \varepsilon, \quad (13)$$

где погрешность $\varepsilon = 10^{-6}$, а индексы i, j обозначают дискретные продольные и поперечные пространственные координаты, соответственно.

4. Верификация численной модели

Проведем верификацию численной модели. Для этого размерные результаты, полученные LBM, будем сравнивать с размерными результатами работы [16].

4.1. Оценка масштабов обезразмеривания переменных

В работе [16] управляющие параметры (число Рейнольдса и число Дарси Da) и обезразмеривание скорости имели вид:

$$Re = \frac{gh^3}{\nu^2} \sin(\alpha),$$

$$[u] = C_v = \frac{gh^2}{\nu} \sin(\alpha), \quad (14)$$

$$Da = \frac{K}{h^2}.$$

Для используемого в работе [16] $Re = 100$ и для значений $\nu = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $g = 9.8 \text{ м}/\text{с}^2$, $\alpha = 30^\circ$, получаем, что толщина слоя $h \cong 1.268 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. При таких значениях скейлинговый множитель для скорости $C_v \cong 0.7883$.

Для LBM-моделирования будем использовать пространственную сетку с числом узлов $N_x = 1000$ в продольном направлении и $N_z = 100$ в поперечном направлении. Тогда скейлинговый множитель для пространства $C_l = N_y/h = 1.268 \cdot 10^{-5}$.

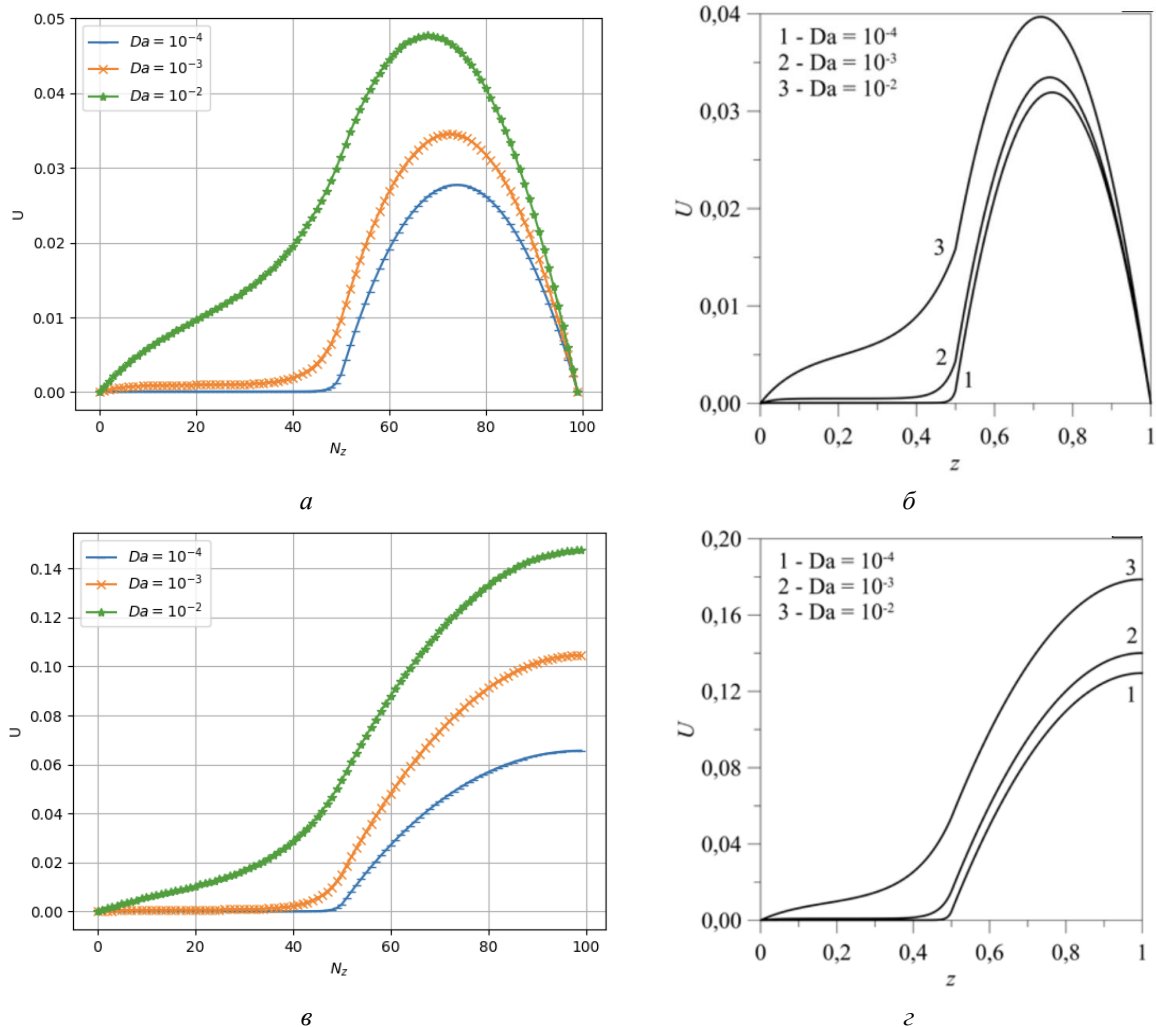


Рис. 2. Размерные значения вертикальных сечений продольной компоненты скорости в центре области для случая твердой границы (а, б) и свободной недеформируемой границы (в, г) ($Re = 100$, $\nu = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $g = 9.8 \text{ м}/\text{с}^2$, $\alpha = 30^\circ$, $h \cong 1.268 \cdot 10^{-3} \text{ м}$): (а, в) – LBM-результаты, (б, г) – результаты [16].

Безразмерный временной множитель C_t найдем исходя из отношения безразмерной и размерной вязкостей [23]. Значение безразмерной вязкости в LBM-моделировании связано с τ (7). С точки зрения численной устойчивости это важнейший параметр, для которого должно строго выполняться соотношение $\tau > 0.5$. Положив $\tau = 0.9499(9)$, получим, $C_t = 2.4117 \cdot 10^{-6}$ и, соответственно, $C_v^{LBM} = C_t/C_t \cong 5.257$.

4.2. Сравнение результатов решения для твердой границы и свободной недеформируемой границы

В случае твердых границ используется bounce-back схема [см., например, 23] для восстановления нулевой скорости $\mathbf{u}(U, V) = 0$ на границе, что соответствует условию прилипания. Сравнение результатов при $Re = 100$ приведено на рис. 2, а, б. Видно хорошее качественное совпадение результатов. С точки зрения количественного сравнения можно видеть, что получено совпадение результатов по порядку величины, но наблюдается некоторое расхождение для чисел Дарси $Da = 10^{-4}$ и $Da = 10^{-2}$. По всей видимости, расхождение связано с тем, что для промежуточных значений управляющего параметра ($Da = 10^{-3}$) достаточно линеаризованной аппроксимации оператора столкновений в дискретной модели – уравнения (6) и простого типа граничных условий Зоу–Не [23]. Для лучшего совпадения количественных результатов можно использовать более сложную модель для оператора столкновений, например, TRT-модель (Two-relaxation-time) или MRT-модель (multiple-relaxation-time), а также другую модель граничных условий, например, модель non-equilibrium extrapolation scheme [23].

Отметим также, что полученные методом конечных разностей результаты зависят от используемых граничных условий на границе раздела пористая среда – чистая жидкость. Например, в [37] отмечается, что порог неустойчивости и скорость

зависят от используемой модели пористой среды и граничных условий на поверхности раздела.

В случае свободной недеформируемой верхней границы ($\partial U/\partial z = 0, V = 0$) в LBM используется граничное условие free-slip [см., например, 23], которое соответствует граничному условию «не протекания», т.е. $V = 0$. Сравнение результатов для $Re = 100$ приведено на рис. 2, в, г. Также видим качественное и количественное совпадение результатов.

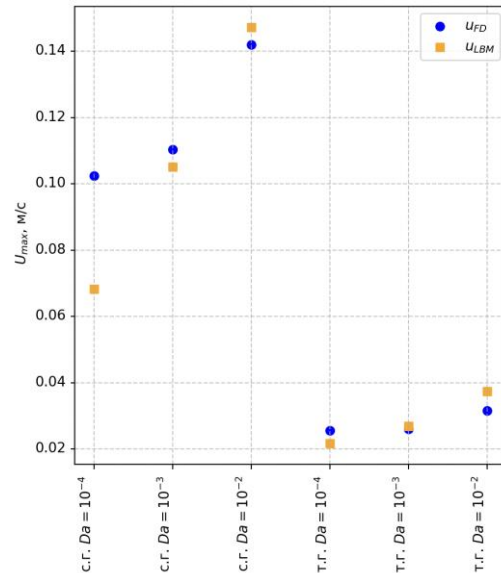


Рис. 3. Сравнение максимального значения скорости в LBM-схеме и конечно-разностной схеме [16], с.г. – свободная граница, т.г. – твердая

Для более детального сравнения, на рис. 3 приведены максимальные размерные значения продольных компонент скорости в случае рассмотренных граничных условий и при разных числах Дарси. В таблице приведены относительные погрешности полученных максимальных размерных значений продольных компонент скорости.

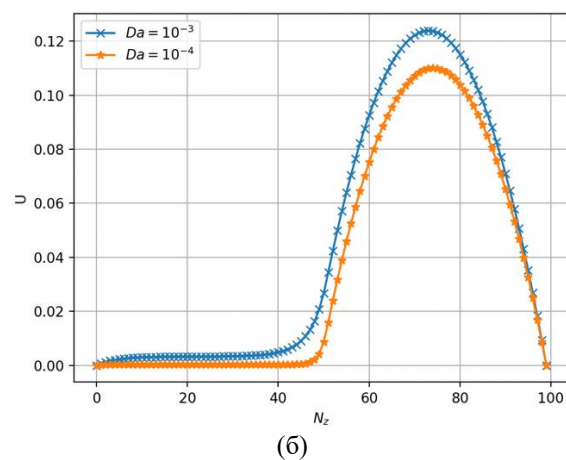
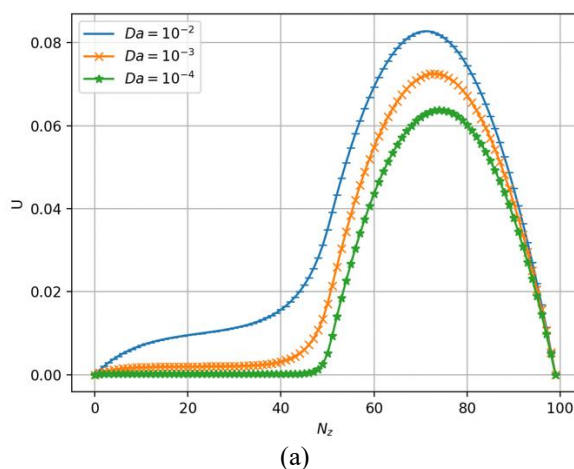


Рис. 4. Результаты моделирования задачи при разных значениях числа Дарси. Приведены вертикальные сечения продольных компонент скорости в центре области для случая твердой верхней границы при $Re = 6125$ (а) и при $Re = 10584$ (б)

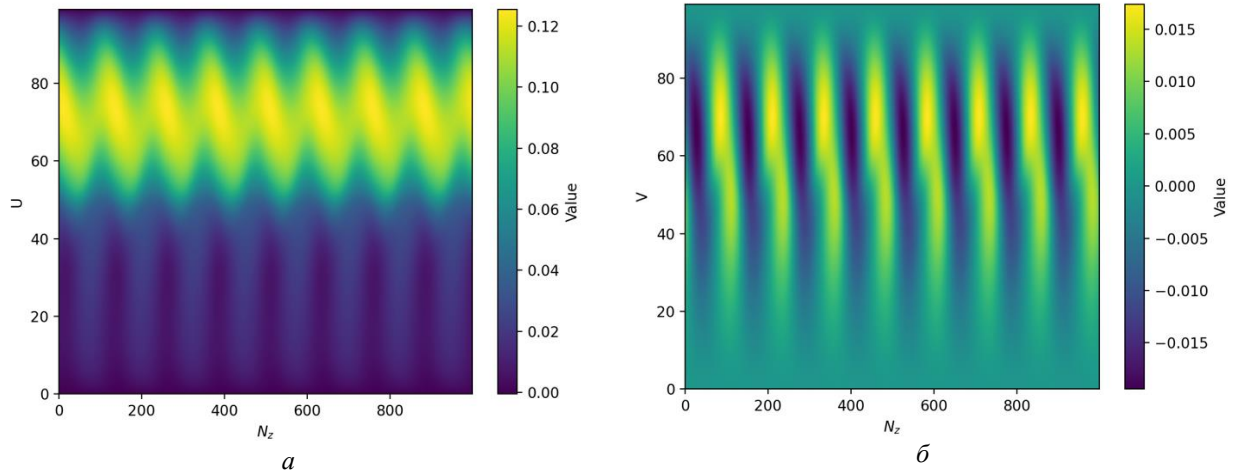


Рис. 5. Развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца при $Re = 10584$ и $Da = 10^{-2}$. Приведены мгновенные распределения продольной компоненты скорости (а) и вертикальной компоненты скорости (б), масштаб по осям не соблюден

Отличие результатов в случае свободной границы можно объяснить особенностью постановки граничных условий в LBM. Для свободной недеформируемой границы используется схема free-slip, которая удовлетворяет условию $V = 0$, но при этом не накладывает такого ограничения на $\partial U / \partial z$. Отличие результатов в случае твердой верхней границы можно объяснить малыми значениями получающихся характерных скоростей, что существенно при вычислении относительной погрешности.

Тем не менее следует отметить в целом хорошее количественное совпадение результатов.

Сравнение максимального значения продольных компонент скорости, полученных в [16] и в представленной работе при разных значениях Da и разных типах граничных условий (з.у.)

Тип г.у. на верхней границе и значение Da	Результат [16], U_{FD} , м	Результат LBM, U_{LBM} , м	Относительная погрешность, %
Свободная граница (с.г.), $Da = 10^{-4}$	$102 \cdot 10^{-3}$	$68.3 \cdot 10^{-3}$	33.1
с.г., $Da = 10^{-3}$	$110 \cdot 10^{-3}$	$105 \cdot 10^{-3}$	4.55
с.г., $Da = 10^{-2}$	$141 \cdot 10^{-3}$	$147 \cdot 10^{-3}$	4.26
Твердая граница (т.г.), $Da = 10^{-4}$	$256 \cdot 10^{-4}$	$217 \cdot 10^{-4}$	15.2
т.г., $Da = 10^{-3}$	$260 \cdot 10^{-4}$	$270 \cdot 10^{-4}$	3.85
т.г., $Da = 10^{-2}$	$315 \cdot 10^{-4}$	$374 \cdot 10^{-4}$	18.8

При этом влияние вертикальной компоненты скорости мало, что согласуется с ранее полученными результатами [16].

5. Обсуждение результатов

Рассмотрим теперь поставленную задачу со свободной недеформируемой верхней границей при больших числах Рейнольдса. Для выбранного безразмеривания (14) это будет соответствовать, например, каналу большей ширины h .

Для примера проведем вычисления при ширине канала $h = 0.5 \cdot 10^{-2}$ м и $h = 0.6 \cdot 10^{-2}$ м, что соответствует $Re = 6125$ и $Re = 10584$. Результаты решения приведены на рис. 4, 5.

Увеличение числа Рейнольдса приводит к увеличению значений продольной компоненты скорости. При значениях безразмерных параметров $Re = 10584$ и $Da = 10^{-2}$ происходит развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Отметим, что данное число $Re = 10584$ больше критического числа Рейнольдса согласно результатами линейной теории устойчивости для $Da = 10^{-2}$ [14, 15]. И течение устойчиво для более низких значений чисел Дарси $Da = 10^{-3}$ и $Da = 10^{-4}$ (рис. 4, б). Но при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса происходит развитие неустойчивости и для таких течений.

Данная работа не ставит целью изучение нахождения порога неустойчивости и сравнение его значения с результатами линейной теории [14, 15], поэтому характер возникновения неустойчивости и её развитие подлежит дальнейшему изучению.

Алгоритм LBM не позволяет провести моделирования для рассматриваемых чисел Рейнольдса для случая свободной недеформируемой поверхности по причине превышения значений получаемых продольных компонент скорости безразмерной скорости звука. Соответственно, для алгоритма перестает выполняться критически важное условие

малости числа Маха ($U \ll c_s$) и развивается численная неустойчивость.

6. Заключение

В данной работе численно исследовано течение вязкой жидкости в наклоненном двухслойном канале конечной ширины, который наполовину заполнен пористой средой, при наличии силы тяжести. Моделирование проводилось при постоянном значении коэффициента пористости $\varepsilon = 0.5$ для чисел Дарси в диапазоне $10^{-4} \div 10^{-2}$ и для разных чисел Рейнольдса.

Применяемый мезоскопический алгоритм позволяет рассматривать задачу в такой постановке в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Верификация метода для двух разных типов граничных условий для верхней границы показывает хорошее качественное и количественное соответствие с численными результатами, полученными ранее в работе [16].

Для случая горизонтальных твердых стенок увеличение ширины канала приводит к более интенсивному течению, при этом интенсификация сильнее происходит в области свободной от пористого скелета.

Для числа Рейнольдса $\sim 10^4$ при значении $Da = 10^{-2}$ происходит развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, что в целом соответствует аналитической теории, построенной в [14, 15].

В будущем планируется продолжить исследование подобных систем, модифицировав алгоритм включением эффектов тепло- и массопереноса.

Работа И.В. поддержана бюджетной темой № 124021600038-9.

Список литературы

1. *Salama R., Otto C., Fitzpatrick C.* Contributions of groundwater conditions to soil and water salinization // *Hydrogeology Journal*. 1999. Vol. 7. P. 46–64. DOI: 10.1007/s100400050179
2. *Gavrilov K., Accary G., Morvan D., Lyubimov D., Mèradji S., Bessonov O.* Numerical simulation of coherent structures over plant canopy // *Flow, Turbulence and Combustion*. 2011. Vol. 86. P. 89–111. DOI: 10.1007/s10494-010-9294-z
3. *Марышев Б. С., Паршакова Я. Н., Иванцов А. О., Зубова Н. А.* Вынос из придонного слоя речных систем загрязнений, накопленных в процессе сброса воды, содержащей продукты промышленной переработки // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2022. Т. 15. № 2. С. 209–222. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.2.16
4. *Hill A. A., Straughan B.* Poiseuille flow in a fluid overlying a highly porous material // *Adv. Water Resour.* 2009. Vol. 32. P. 1609–1614. DOI: 10.1016/j.advwatres.2009.08.007
5. *Berman A. S.* Laminar flow in channels with porous walls // *J. Appl. Phys.* 1953. Vol. 24. N. 9. P. 1232–1235. DOI: 10.1063/1.1721476
6. *Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1995. Vol. 38. P. 2635–2646. DOI: 10.1016/0017-9310(94)00346-W
7. *Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S.* Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – II. Comparison with experiment // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1995. Vol. 38. P. 2647–2655. DOI: 10.1016/0017-9310(94)00347-X
8. *Brinkman H. C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // *Appl. Sci. Res. A*. 1947. Vol. 1. P. 27–34. DOI: 10.1007/BF02120313
9. *Nield D. A., Bejan A.* *Convection in Porous Media*. Cham: Springer, 2017. 988 p.
10. *Любимов Д. В., Муратов И. Д.* О конвективной неустойчивости в слоистой системе // *Гидродинамика*. 1977. Т.10. С. 38–46.
11. *Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Baydina D. T., Kolchanova E. A., Tsiberkin K. B.* Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94, 013104. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.013104
12. *Hill A. A., Straughan B.* Poiseuille flow in a fluid overlying a porous medium // *J. Fluid Mech.* 2008. Vol. 603. P. 137–149. DOI: 10.1017/S0022112008000852
13. *Lyubimova T. P., Baydina D. T., Lyubimov D. V.* Stability and nonlinear regimes of flow over a saturated porous medium // *Nonlin. Processes Geophys.* 2013. Vol. 20. P. 543–547. DOI: 10.5194/npg-20-543-2013
14. *Цибберкин К. Б.* О влиянии пористости на режим развития неустойчивости течения жидкости над слоем пористой среды // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 134–144. DOI: 10.35634/vm100110
15. *Tsiberkin K.* Porosity effect on the linear stability of flow overlying a porous medium // *Eur. Phys. J. E*. 2020. Vol. 43, 34. DOI: 10.1140/epje/i2020-11959-6
16. *Цибберкин К. Б.* Двумерные течения в каналах ограниченной ширины, частично заполненных пористой средой // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2018. Т. 11. № 4. С. 438–447. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.4.34
17. *Hsieh P.-Ch., Hsu P.-Ya.* Hydraulic analysis of a two-dimensional water flow down a hillslope // *J. Eng. Mech.* 2018. Vol. 144, 04018020. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001432
18. *Li L., Wan Y., Lu J., Fang H., Yin Z., Wang T., Wang R., Fan X., Zhao L., Tan D.* Lattice Boltzmann

- method for fluid-thermal systems: status, hotspots, trends and outlook // *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. P. 27649–27675. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2971546
19. Hardy J., Pomeau Y., de Pazzis O. Time evolution of a two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions // *J. Math. Phys.* 1973. Vol. 14. N. 12. P. 1746–1759. DOI: 10.1063/1.1666248
 20. Frisch U., Hasslacher B., Pomeau Y. Lattice gas automata for the Navier–Stokes equations // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 56. P. 1505–1508. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.1505
 21. Succi S. *The Lattice Boltzmann Equation: For Complex States of Flowing Matter*. Oxford: Oxford University Press, 2018. 761 p. DOI: 10.1093/oso/9780199592357.001.0001
 22. Redeman M. *Deriving Navier Stokes with particle methods: Bachelor's Thesis*. Leiden: Leiden University, 2014. 53 p.
 23. Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggen E. *The Lattice Boltzmann Method*. Cham: Springer, 2017. 694 p.
 24. Succi S., Foti E., Higuera F. Three-dimensional flows in complex geometries with the lattice Boltzmann method // *Europhysics Letters*. 1989. Vol. 10. P. 433–438. DOI: 10.1209/0295-5075/10/5/008
 25. Seta T. Lattice Boltzmann method for fluid flows in anisotropic porous media with Brinkman equation // *Journal of Fluid Science and Technology*. 2009. Vol. 4. N. 1. P. 116–127. DOI: 10.1299/jfst.4.116
 26. Guo Z., Zhao T. S. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media // *Physical Review E*. 2002. Vol. 66. N. 3, 036304. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.036304
 27. D'Orazio A., Karimipour A., Ranjbarzadeh R. Lattice Boltzmann modelling of fluid flow through porous media: a comparison between pore-structure and representative elementary volume methods // *Energies*. 2023. Vol. 16. N. 14, 5354. DOI: 10.3390/en16145354
 28. Boltzmann L. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen // *Wien Akad Sitzungsber.* 1872. Vol. 66. P. 275–370. DOI: 10.1142/9781848161337_0015
 29. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Теоретическая физика. Т. 10. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
 30. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 1997. 320 с.
 31. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // *Physical Review* 1954. Vol. 94. N. 3. P. 511–525. DOI: 10.1103/PhysRev.94.511
 32. Viggen E. M. *The lattice Boltzmann method: Fundamentals and acoustics: Ph.D. thesis*. Trondheim: NTNU, 2014. 225 p.
 33. Wolf-Gladrow D. A. *Lattice-gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*. New York: Springer, 2005. 314 p.
 34. Latt J. *Hydrodynamic limit of lattice Boltzmann equations: Ph.D. Thesis*. Geneva: University of Geneva, 2007. 102 p.
 35. Silva G., Semiao V. Truncation errors and the rotational invariance of three-dimensional lattice models in the lattice Boltzmann method // *J. Comput. Phys.* 2014. Vol. 269. P. 259–279. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.03.027
 36. Chapman S., Cowling T. G. *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Cambridge: Cambridge University Press, 1952. 421 p.
 37. Циберкин К. Б. Течения и теплообмен в многофазных жидкостях и пористых средах: дис. к.ф.-м.н. Пермь: ПГНИУ, 2015. 159 с.

References

1. Salama R., Otto C., Fitzpatrick C. Contributions of groundwater conditions to soil and water salinization. *Hydrogeology Journal*, 1999, vol. 7, pp. 46–64. DOI: 10.1007/s100400050179
2. Gavrillov K., Accary G., Morvan D., Lyubimov D., Méradji S., Bessonov O. Numerical simulation of coherent structures over plant canopy. *Flow, Turbulence and Combustion*, 2011, vol. 86, pp. 89–111. DOI: 10.1007/s10494-010-9294-z
3. Maryshev B. S., Parshakova Y. N., Ivantsov A. O., Zubova N. A. Removal of pollution accumulated in the process of wastewater discharge from the bottom layer of river systems. *Computational Continuum Mechanics*, 2022, vol. 15, no. 2, pp. 209–222 (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.2.16
4. Hill A. A., Straughan B. Poiseuille flow in a fluid overlying a highly porous material. *Adv. Water Resour.*, 2009, vol. 32, pp. 1609–1614. DOI: 10.1016/j.advwatres.2009.08.007
5. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1953, vol. 24, no. 9, pp. 1232–1235. DOI: 10.1063/1.1721476
6. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development. *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 1995, vol. 38, pp. 2635–2646. DOI: 10.1016/0017-9310(94)00346-W
7. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – II. Comparison with experiment. *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 1995, vol. 38, pp. 2647–2655. DOI: 10.1016/0017-9310(94)00347-X

8. Brinkman H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Appl. Sci. Res. A*, 1947, vol. 1, pp. 27–34. DOI: 10.1007/BF02120313
9. Nield D. A., Bejan A. *Convection in Porous Media*. Cham: Springer, 2017. 988 p.
10. Lyubimov D. V., Muratov I. D. O konvektivnoi neustoiichivosti v sloistoi sisteme [On convective instability of layered system]. *Gidrodinamika*, 1977, vol.10, pp.38–46 (In Russian).
11. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Baydina D. T., Kolchanova E. A., Tsiberkin K. B. Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium. *Phys. Rev. E.*, 2016, vol. 94, 013104. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.013104
12. Hill A. A., Straughan B. Poiseuille flow in a fluid overlying a porous medium. *J. Fluid Mech.*, 2008, vol. 603, pp. 137-149. DOI: 10.1017/S0022112008000852
13. Lyubimova T. P., Baydina D. T., Lyubimov D. V. Stability and nonlinear regimes of flow over a saturated porous medium. *Nonlin. Processes Geophys.*, 2013, vol. 20, pp. 543-547. DOI: 10.5194/npg-20-543-2013
14. Tsiberkin K. B. On the porosity influence on stability of flow over porous medium. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2020, vol. 30, no. 1, pp. 134–144 (In Russian). DOI: 10.35634/vm100110
15. Tsiberkin K. Porosity effect on the linear stability of flow overlying a porous medium. *Eur. Phys. J. E*, 2020, vol. 43, 34. DOI: 10.1140/epje/i2020-11959-6
16. Tsiberkin K. B. Two-dimensional flows in finite-width channels partially filled with porous medium. *Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 438-447 (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.4.34
17. Hsieh P.-Ch., Hsu P.-Ya. Hydraulic analysis of a two-dimensional water flow down a hillslope. *J. Eng. Mech.*, 2018, vol. 144, 04018020. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001432
18. Li L., Wan Y., Lu J., Fang H., Yin Z., Wang T., Wang R., Fan X., Zhao L., Tan D. Lattice Boltzmann method for fluid-thermal systems: status, hotspots, trends and outlook. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 27649–27675. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2971546
19. Hardy J., Pomeau Y., de Pazzis O. Time evolution of a two-dimensional model system. I. Invariant states and time correlation functions. *J. Math. Phys.*, 1973, vol. 14, no. 12, pp. 1746–1759. DOI: 10.1063/1.1666248
20. Frisch U., Hasslacher B., Pomeau Y. Lattice gas automata for the Navier–Stokes equations. *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol. 56, pp. 1505–1508. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.1505
21. Succi S. *The Lattice Boltzmann Equation: For Complex States of Flowing Matter*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2018. 761 p. DOI: 10.1093/oso/9780199592357.001.0001
22. Redeman M. *Deriving Navier Stokes with particle methods*: Bachelor's Thesis. Leiden, NL: Leiden University, 2014. 53 p.
23. Krüger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G., Viggen E. *The Lattice Boltzmann Method*. Cham: Springer, 2017. 694 p.
24. Succi S., Foti E., Higuera F. Three-dimensional flows in complex geometries with the lattice Boltzmann method. *Europhysics Letters*, 1989, vol. 10, pp. 433–438. DOI: 10.1209/0295-5075/10/5/008
25. Seta T. Lattice Boltzmann method for fluid flows in anisotropic porous media with Brinkman equation. *Journal of Fluid Science and Technology*, 2009, vol. 4, no. 1, pp. 116-127. DOI: 10.1299/jfst.4.116
26. Guo Z., Zhao T. S. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media. *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 66, no. 3, 036304. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.036304
27. D’Orazio A., Karimipour A., Ranjbarzadeh R. Lattice Boltzmann modelling of fluid flow through porous media: a comparison between pore-structure and representative elementary volume methods. *Energies*, 2023, vol. 16, no. 14, 5354. DOI: 10.3390/en16145354
28. Boltzmann L. Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. *Wien Akad Sitzungsber*, 1872, vol. 66, pp. 275-370 (In German). DOI: 10.1142/9781848161337_0015
29. Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. *Physical Kinetics*. Vol. 10. Oxford: Pergamon Press, 1981. 452 p.
30. Samarskii A. A., Mikhailov A. P. *Principles of Mathematical Modelling: Ideas, Methods, Examples*. London: CRC Press, 2001. 360 p. DOI: 10.1201/9781482288131
31. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys. Rev.*, 1954, vol. 94, no. 3, pp. 511-525. DOI: 10.1103/PhysRev.94.511
32. Viggen E. M. *The lattice Boltzmann method: Fundamentals and acoustics*: PhD Thesis. Trondheim: NTNU, 2014. 225 p.
33. Wolf-Gladrow D. A. *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*. New York: Springer, 2005. 314 p.
34. Latt J. *Hydrodynamic limit of lattice Boltzmann equations*: PhD Thesis. Geneva: University of Geneva, 2007. 102 p.
35. Silva G., Semiao V. Truncation errors and the rotational invariance of three-dimensional lattice models in the lattice Boltzmann method. *J. Comput. Phys.*, 2014, vol. 269, p. 259–279. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.03.027

36. Chapman S., Cowling T. G. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*. Cambridge: Cambridge University Press, 1952. 421 p.
37. Tsiberkin K. B. *Flows and heat and mass transfer in multiphase fluids and porous media*: PhD Thesis. Perm: PSU, 2015. 159 p.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Володин И. В., Алабужев А. А. Численное моделирование течения в двухслойном пористом канале методом решеточных уравнений Больцмана // Вестник Пермского университета. Физика. 2025. № 1. С. 52–62. doi: 10.17072/1994-3598-2025-1-52-62

Please cite this article in English as:

Volodin I. V., Alabuzhev A. A. Numerical simulation of the flow in a two-layer porous channel by the lattice Boltzmann method. *Bulletin of Perm University. Physics*, 2025, no. 1, pp. 52–62. doi: 10.17072/1994-3598-2025-1-52-62

Сведения об авторах

1. *Иван Валерьевич Володин*, младший научный сотрудник лаборатории подземной утилизации углерода, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013
2. *Алексей Анатольевич Алабужев*, канд. физ.-мат. наук, профессор Физико-математического института, Пермский государственный национальный исследовательский университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614068, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН, ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614013

Author information

1. *Ivan V. Volodin*, Junior Researcher, Laboratory of Underground Carbon Sequestration, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia
2. *Alexey A. Alabuzhev*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Physics and Mathematics, Perm State University; 15, Bukireva st., Perm, 614068, Russia; Senior Researcher, Computational Fluid Dynamics Laboratory, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS; 1, Akademika Koroleva st., Perm, 614013, Russia