

УДК 532.517.2; 66.067.124
PACS 47.10.ad, 47.11.-j

Влияние ПАВ на генерацию среднего течения около искривленной поверхности раздела

Л. С. Клименко^а, Д. В. Любимов^б

^аИнститут механики сплошных сред УрО РАН
614013, Пермь, ул. Акад. Королева, 1

^бПермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, ул. Букирева, 15
email: lyudmilaklimenko@gmail.ru

Работа посвящена изучению генерации среднего течения около искривленной поверхности раздела при наличии поверхностно-активного вещества. Исследование проведено на примере жидкой капли, взвешенной в жидкости отличной плотности. Течение жидкости внутри и снаружи капли создается внешним вибрационным полем. Рассмотрен случай малоамплитудных и высокочастотных вибраций. Обмен поверхностно-активным веществом между поверхностью капли и окружающей жидкости лимитируется процессом адсорбции-десорбции. Предполагалось, что поверхностно-активные вещества растворимы в окружающей жидкости, но не растворимы в жидкости капли. Окружающая жидкость и жидкость в капле предполагались несжимаемыми. Баланс нормальных и касательных напряжений на поверхности капли выполняется при условии, что толщина пленки адсорбированных ПАВ пренебрежимо мала. Задача решена в приближении, что форма капли в присутствии адсорбированных ПАВ не теряет сферической симметрии. С помощью метода сращиваемых асимптотических разложений получены выражения для скачков касательных скоростей и касательных напряжений на внешних границах пограничных слоев, которые могут быть использованы в качестве эффективных граничных условий для течения во внешних по отношению к пограничным слоям областях.

Ключевые слова: генерация среднего течения; капля; ПАВ

Поступила в редакцию 25.10.2016; принята к опубликованию 03.12.2016

Surfactant effect on average flow generation near curved interface

L. S. Klimenko^а, D. V. Lyubimov^б

^аInstitute of Continuous Media Mechanics Ural RAS
614013, Koroleva St. 1, Perm

^бPerm State University
614990, Bukireva St. 15, Perm
email: lyudmilaklimenko@gmail.ru

The present work is devoted to the average flow generation near curved interface with a surfactant adsorbed on the surface layer. The investigation was carried out for a liquid drop embedded in a viscous liquid with a different density. The liquid flows inside and outside the drop are generated by small amplitude and high frequency vibrations. Surfactant exchange between the drop surface and the surrounding liquid is limited by the process of adsorption-desorption. It was assumed that the surfactants are soluble in the surrounding liquid, but not soluble in the liquid drop. Surrounding

liquid and the liquid in the drop are considered incompressible. Normal and shear viscous stresses balance at the interface is performed under the condition that the film thickness of the adsorbed surfactant is negligible. The problem is solved under assumption that the shape of the drop in the presence of adsorbed surfactant remains spherical symmetry. The effective boundary conditions for the tangential velocity jump and shear stress jump, describing the above generation have been obtained by matched asymptotic expansions method. The conditions under which the drop surface can be considered as a quasi-solid are determined. It is shown that in the case of the significant effect of surfactants on the surface tension, the dominant mechanism for the generation is the Schlichting mechanisms under vibrations.

Keywords: filtration; random walk; particles

Received 25.10.2016; accepted 29.11.2016

doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-42-48

1. Введение

Как известно, одним из интересных проявлений действия вибраций является возникновение осредненных эффектов. На этих эффектах построен целый раздел механики и теории колебаний – вибрационная механика [1], берущая свое начало с классической работы [2] о математическом маятнике, где впервые было отмечено, что при вибрациях системы наряду с быстрым осциллирующим движением в большинстве случаев появляется и медленное, мало изменяющееся за период колебаний. Обычно основной интерес представляет именно такое движение. Аналогичное поведение наблюдается и в жидкости.

Впервые такие течения обнаружены при вибрациях твердого тела, погруженного в жидкость. Шлихтингом и другими [3,4] исследован случай генерации таких течений около твердой поверхности, совершающей линейные поступательные вибрации. Показано, что средние течения возникают в тонком вязком стоксовском слое вблизи поверхности, имеют вихревой характер и за счет вязкой диффузии распространяются за пределы этого слоя. Методом осреднения получены уравнения и эффективные граничные условия для течений такого типа [5].

Другими особенностями обладают средние течения, генерируемые около свободной поверхности жидкости, в среднем плоской, и поверхности раздела несмешивающихся жидкостей. Для случая малоамплитудных волн такие течения были изучены Лонге-Хиггинсом [6] и Дором [7]. Механизм генерации Лонге-Хиггинса заключается в том, что средние течения формируются бегущими по свободной поверхности волнами. Для поверхности раздела существуют два механизма: Шлихтинга [5], фактически такой же, как и для твердого тела, и Дора [7], определяющий эффективные касательные напряжения. Показано [8], что генерируемые около поверхности раздела средние течения, как и в случае твердой поверхности, имеют вихревой характер и распространяются за пределы скин-слоя. Различие с генерацией около твердой поверхности

заключается в следующем. Осреднение пульсационных движений в стоксовском слое вблизи твердой поверхности приводит к эффективному граничному условию, определяющему касательную к поверхности тела компоненту скорости. В случае свободной поверхности и поверхности раздела такая операция приводит к дисбалансу касательных вязких напряжений. Изучение влияния механизма Шлихтинга (дисбаланс касательных скоростей) на генерацию средних течений вблизи поверхности раздела проведено в [8, 9]. Показано, что хотя это влияние, вообще говоря, мало, в некоторых ситуациях его недоучет может привести к существенным неточностям.

Нами был найден новый механизм генерации, связанный исключительно со средней кривизной поверхности, нечувствительный к пульсационным деформациям. Исследование было проведено применительно к свободной поверхности и к поверхности раздела. В качестве свободной поверхности рассматривался газовый пузырек, взвешенный в жидкости. Задача была решена для сферической [10] и цилиндрической геометрии [11]. При изучении искривленной поверхности раздела рассматривалась капля жидкости, взвешенной в жидкости отличной плотности [12]. Показано, что при сравнимых плотностях и вязкостях жидкостей основные механизмы генерации аналогичны механизмам Дора и Шлихтинга, в то время как влияние кривизны является вторичным фактором. Новый механизм, связанный с кривизной поверхности, становится значительным и для поверхности раздела, если отношение плотностей жидкостей является величиной второго порядка малости по сравнению с амплитудой вибраций. Это было продемонстрировано на задаче о газовом пузырьке, но с учетом течения газа внутри пузырька. Задача в аналогичной постановке была предметом исследований в работах [13,14]. Однако найденное авторами этих работ решение не может быть признано достоверным, поскольку не удовлетворяет граничным условиям на поверхности капли.

Цель настоящей работы – изучить, какие механизмы будут иметь место, когда поверхность раздела имеет тонкую пленку, созданную поверхност-

но-активным веществом. Для этой цели с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений определены эффективные граничные условия, описывающие такую генерацию.

2. Постановка задачи

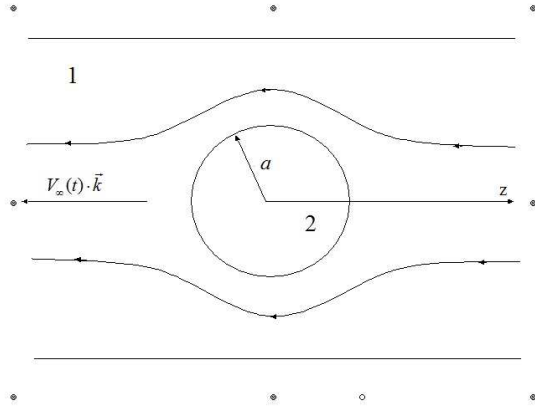


Рис. 1. Конфигурация задачи

В настоящей работе исследуется задача о поведении жидкой капли, взвешенной в жидкости отличной плотности (рис. 1). Течение жидкостей внутри и снаружи капли возникает под действием внешнего вибрационного поля. Вибрации считаются поступательными гармоническими с амплитудой b и частотой ω . Предполагаем, что как окружающая жидкость, так и жидкость в капле несжимаемы. Обмен поверхностно-активным веществом между поверхностью капли и окружающей жидкости лимитируется процессом адсорбции-десорбции. Предполагается, что поверхностно-активные вещества растворимы в окружающей жидкости, но не растворимы в жидкости капли. Окружающая жидкость и жидкость в капле считаются несжимаемыми.

Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с центром масс капли, сделав замену $\tilde{z} = z - z_0(t)$, где $z_0(t)$ – координата центра масс капли относительно лабораторной системы отсчета. При этом будем считать, что характер движения капли одномерный, направление движения капли совпадает с направлением оси вибраций \vec{k} . Уравнения движения и неразрывности в этой системе отсчета выглядят следующим образом:

$$\tilde{\rho}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + \tilde{\rho}_i \vec{V}_i \cdot \nabla \vec{V}_i = -\nabla p_i + \tilde{\eta}_i \Delta \vec{V}_i - \tilde{\rho}_i \frac{dU}{dt} \vec{k}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{V}_i = 0.$$

Здесь $U = dz_0/dt$ – скорость центра масс капли относительно лабораторной системы отсчета, $\tilde{\rho}_i, \tilde{\eta}_i$ – плотности и вязкости жидкостей, индекс i

принимает значение 1 для окружающей жидкости, 2 – для жидкости в капле.

Обсудим граничные условия. Вдали от капли при $r \rightarrow \infty$ скорость окружающей жидкости стремится к скорости вибраций, так что в системе отсчета, связанной с каплей, имеем:

$$\vec{V}_1 = (b\omega \cos \omega t - U)\vec{k}. \quad (2.2)$$

На поверхности капли, описываемой уравнением $r = a$, выполняются условия непрерывности скорости, баланса напряжений с учетом поверхностной адсорбции и кинематическое условие, связывающее смещение поверхности капли со скоростью жидкости:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2, \quad [p] - \vec{n} \cdot [\bar{\sigma}] \cdot \vec{n} - \frac{2}{r} \gamma' \Gamma = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{n} \cdot [\bar{\sigma}] \cdot \vec{\tau} - \frac{1}{r} \gamma' \frac{\partial \Gamma}{\partial \vartheta} = 0, \quad \vec{V} \cdot \vec{r} = 0.$$

Здесь $\bar{\sigma}$ – тензор вязких напряжений, γ – коэффициент поверхностного натяжения и $\gamma' = \partial \gamma / \partial \Gamma$, Γ – концентрация поверхностно-активного вещества, a – радиус капли, $\vec{n}, \vec{\tau}$ – нормаль и касательная к поверхности капли. Квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины, $[f] = f_1 - f_2$.

Поскольку капля сохраняет сферическую форму и толщина пленки пренебрежимо мала, то, согласно работам [15,16], динамику поверхностной концентрации можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Gamma_0 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\vartheta}{\partial \vartheta} + V_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right) = 0, \quad (2.4)$$

где Γ_0 – равновесное количество адсорбированного вещества.

Перепишем искомую систему уравнений в безразмерных переменных отдельно для среднего и пульсационного движения. При выборе единиц измерения учтем при этом, что средние скорости малы по сравнению с пульсационными: в качестве единиц измерения пульсационной скорости и скорости центра масс капли $v, U = b\omega$, для средней скорости – $(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) / a$.

Единицы измерения давления тоже будут разными для пульсационного – $(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2) b \omega^2 a$ и для среднего $(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2) (\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2)^2 a^{-2}$. Для остальных переменных выберем следующие единицы измерения: радиальной координаты – равновесный радиус капли a , времени – $1 / \omega$, концентрации адсорбированного вещества – Γ_0 , плотности жидкости – $(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2)$ и кинематической вязкости – $(\tilde{\nu}_1 + \tilde{\nu}_2)$.

Отметим, что измеренные в выбранных единицах плотности и вязкости жидкостей не являются независимыми, между ними имеется связь

$$\begin{aligned}\rho_1 + \rho_2 &= 1, \\ \nu_1 + \nu_2 &= 1.\end{aligned}$$

Тогда система уравнений (2.1)–(2.4) переписывается в виде

$$\vec{u}_i \cdot \nabla \vec{u}_i + \frac{\varepsilon^2}{\delta^4} \overline{\vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i} = -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \nu_i \Delta \vec{u}_i, \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \delta^2 (\vec{u}_i \cdot \nabla \vec{v}_i + \vec{v}_i \cdot \nabla \vec{u}_i) + \varepsilon \overline{\vec{v}_i \cdot \nabla \vec{v}_i} = \\ = -\frac{1}{\rho_i} \nabla \tilde{p}_i + \nu_i \delta^2 \Delta \vec{v}_i - \frac{\partial \vec{U}}{\partial t},\end{aligned} \quad (2.5b)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_i = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u}_i = 0, \quad (2.5c)$$

где черта сверху означает осреднение по времени, а знак «тильда» – взятие пульсационной части, индекс $i = 1, 2$.

Перепишем граничные условия. Вдали от капли для средней и пульсационной скорости имеем

$$r \rightarrow \infty: \vec{u} \rightarrow 0; \quad \vec{v} \rightarrow \vec{k} \cos t - \vec{U}. \quad (2.6)$$

На поверхности капли при $r = 1$ для пульсационной скорости

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2, \quad v_r = 0, \quad (2.7a)$$

$$[\tilde{p}] - 2\delta^2 \left[\rho \nu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] - 2 \frac{k}{\operatorname{We}} \Gamma = 0, \quad (2.7b)$$

$$\left[\rho \nu \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial r} - v_\vartheta \right) \right] - \frac{k}{\delta^2 \varepsilon \operatorname{We}} \frac{\partial \Gamma}{\partial \vartheta} = 0, \quad (2.7c)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \varepsilon \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + v_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta \right) = 0. \quad (2.7d)$$

Для средней скорости и давления

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2, \quad u_r = 0, \quad (2.8a)$$

$$[\bar{p}] - 2 \left[\rho \nu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] = 0, \quad (2.8b)$$

$$\left[\rho \nu \left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - u_\vartheta \right) \right] = 0. \quad (2.8c)$$

Задача характеризуется четырьмя безразмерными параметрами: $\varepsilon = b/a$ – отношение амплитуды вибраций к радиусу капли, $\delta = 1/a \sqrt{(\nu_1 + \nu_2)/\omega}$ – безразмерная толщина пограничного слоя, $k = \gamma' \Gamma_0 / \gamma$ – коэффициент эластичности Гиббса, $\operatorname{We} = \rho \omega^2 a^3 / \gamma$ – число Вебера. Будем считать параметры ε и δ малыми и искать решение в виде разложения по параметру ε . Отметим, что равномерно пригодное разложение удастся построить только тогда, когда указан-

ные параметры имеют один порядок малости. Остальные параметры будем считать конечными.

3. Метод сращиваемых асимптотических разложений

Вычислим значение касательной компоненты тензора вязких напряжений на внешней границе пограничного слоя в случае высокочастотных вибраций с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений [17].

Метод заключается в построении прямых разложений (называемых внешними разложениями) в исходных переменных и в построении разложений (называемых внутренними разложениями), использующих увеличенные масштабы. Полученные в каждом разложении решения сшиваются, согласно принципу Ван Дайка: внутреннее разложение внешнего разложения равно внешнему разложению внутреннего.

Внешнее разложение. Полученное во внешней области решение будет справедливо везде, кроме тонкого слоя около поверхности раздела. Для нахождения решения будет использоваться система (2.5) с граничным условием только вдали от капли (2.6), условия на поверхности раздела для внешнего решения не обязаны выполняться. В главном порядке для пульсационных скоростей и давлений решение можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}v_{1r} &= \operatorname{Re} \left\{ \left[1 - U + \frac{c_2}{r^3} \right] \cos \vartheta e^{it} \right\}, \\ v_{1\vartheta} &= \operatorname{Re} \left\{ - \left[1 - U - \frac{c_2}{2r^3} \right] \sin \vartheta e^{it} \right\}, \\ \vec{v}_2 &= \operatorname{Re} \left\{ (b_1 \cos \vartheta \cdot \vec{e}_r - b_1 \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta) e^{it} \right\}, \\ \tilde{p}_1 &= \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 \left[-ir + \frac{ic_2}{2r^3} \right] \cos \vartheta \cdot e^{it} \right\}, \\ \tilde{p}_2 &= \operatorname{Re} \left\{ \rho_2 (-ib_1 r - iUr) \cos \vartheta \cdot e^{it} \right\},\end{aligned} \quad (3.1)$$

здесь константы U , b_1 и c_2 должны определяться из условия сшивки с решением во внутренней области.

Внутреннее разложение. Чтобы определить разложение, пригодное в пограничных слоях внутри и снаружи капли, необходимо построить решение, введя растянутую радиальную координату $\xi = (r - 1) / \delta$.

Найдем характеристики пульсационного течения. Из уравнения непрерывности для пульсационной скорости (2.5c) находим, что для радиальной компоненты скорости как снаружи капли, так и внутри в главном порядке уравнения имеют одинаковый вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial \xi} = 0.$$

Учитывая кинематическое граничное условие на поверхности, получаем, что решение его тривиально:

$$v_{1r} = v_{2r} = 0.$$

Для давления проекция уравнения движения (2.5b) на радиальное направление дает аналогичное уравнение

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} = 0.$$

Используя непрерывность давления на границе капли, получаем, что

$$\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \text{const}(\xi) = p.$$

Тогда из касательной проекции уравнения движения (2.5b) для касательных компонент пульсационных скоростей можно найти следующие решения:

$$v_\vartheta^1 = \left(c_1^0 e^{-\alpha_1 \xi} + \frac{i}{\rho_1} p - U \right) (-\sin \vartheta) e^{it} + c.c.$$

$$v_\vartheta^2 = \left(c_2^0 e^{\alpha_2 \xi} + \frac{i}{\rho_2} p - U \right) (-\sin \vartheta) e^{it} + c.c.$$

Здесь $\alpha_1 = \sqrt{i/\nu_1}$, $\alpha_2 = \sqrt{i/\nu_2}$, *c.c.* – комплексно-сопряженные слагаемые.

Из граничного условия на поверхности капли (2.7d) находим, что для концентрации абсорбированного вещества

$$\Gamma = 2i\varepsilon \left(U - c_1^0 - \frac{i}{\rho_1} p \right) \cos \vartheta \cdot e^{it} + c.c.$$

Однако из граничного условия для касательной компоненты баланса напряжений (2.7d) получаем, что в главном порядке $\Gamma = 0$. Следовательно, из непрерывности скоростей на поверхности раздела находим

$$c_1^0 + \frac{i}{\rho_1} p - U = c_2^0 + \frac{i}{\rho_2} p - U = 0.$$

Откуда для неизвестных коэффициентов получаем

$$c_2^0 - c_1^0 = -\frac{ip(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 \rho_2}.$$

Неизвестные константы (амплитуда скорости капли U и давление p) будут найдены из условия сращивания внутреннего и внешнего решений. Действительно, перепишем внешнее решение (3.1) во внутренних переменных при $\delta \rightarrow 0$ и сопоставим с внутренним решением за пределами пограничного слоя. В итоге получаем следующую алгебраическую систему для искомых констант:

$$v_{1r}^{ext} = (1 - U + c_2)(\cos \vartheta) \cdot e^{it} = 0 = v_{1r}^{in},$$

$$v_{2r}^{ext} = b_1(\cos \vartheta) \cdot e^{it} = 0 = v_{2r}^{in},$$

$$v_{1\vartheta}^{ext} = \left(U + \frac{c_2}{2} - 1 \right) \sin \vartheta e^{it} =$$

$$= \left(U - i \frac{p}{\rho_1} \right) \sin \vartheta e^{it} = v_{1\vartheta}^{in},$$

$$v_{2\vartheta}^{ext} = -b_1 \sin \vartheta e^{it} = \left(U - i \frac{p}{\rho_2} \right) \sin \vartheta e^{it} = v_{2\vartheta}^{in}.$$

Настоящая система совместна, если $p = -i\rho_2 U$, а $U = 3\rho_1 / (2\rho_2 + \rho_1)$, что согласуется с полученными ранее результатами [11].

Таким образом, в главном порядке для пульсационной задачи получаем следующие выражения для компонент скорости и давления:

$$v_r^1 = v_r^2 = 0,$$

$$p_1 = p_2 = -\frac{3i\rho_1\rho_2}{2\rho_2 + \rho_1} \cos \vartheta e^{it} + c.c.,$$

$$v_\vartheta^1 = \frac{3(\rho_2 - \rho_1)}{2\rho_2 + \rho_1} (e^{-\alpha_1 \xi} - 1) \sin \vartheta e^{it} + c.c.,$$

$$v_\vartheta^2 = 0.$$
(3.2)

Перейдем к среднему течению. Интерес представляют касательные компоненты средней скорости внутри и снаружи капли. Для их нахождения в главном порядке имеем следующую задачу:

$$\nu_i \frac{\partial^2 u_\vartheta^i}{\partial \xi^2} = \frac{\delta^2}{\rho_i \varepsilon^2} \frac{\partial p_{-2}^i}{\partial \vartheta} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \overline{v_\vartheta^i} \frac{\partial v_\vartheta^i}{\partial \vartheta} + \frac{\varepsilon^2}{\delta^3} \overline{v_r^i} \frac{\partial v_\vartheta^i}{\partial \xi},$$

$$\xi = 0: [u_\vartheta] = 0, \quad \left[\rho \nu \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \xi} \right] = 0.$$
(3.3)

В уравнение для касательной компоненты скорости входит среднее давление p_{-2}^i . Для его нахождения рассмотрим радиальную проекцию уравнения движения для средней скорости (2.5a). В соответствующем порядке получаем, что:

$$\frac{1}{\rho_i \delta \varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \xi} p_{-2}^i = 0.$$

Таким образом, давление жидкостей в старшем порядке не зависит от растянутой координаты и не будет влиять на эффективные граничные условия, поэтому для простоты положим его равным нулю.

Как видно из уравнения для средней скорости (3.3), касательная и радиальная компоненты пульсационной скорости должны иметь разный порядок малости (чтобы второе и третье слагаемые в правой части имели одинаковый порядок). Действительно, из уравнения непрерывности для радиальных компонент пульсационных скоростей в

первом порядке внутри и снаружи капли получаем следующую систему для их нахождения:

$$\frac{\partial v_r^i}{\partial \xi} = -\delta \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\vartheta^i \sin \vartheta)$$

при условии, что $v_r^i|_{\xi=0} = 0$. Решение такой системы можно записать в следующем виде:

$$v_r^1 = -\frac{\delta}{\alpha_1} \frac{6(\rho_2 - \rho_1)}{2\rho_2 + \rho_1} (e^{-\alpha_1 \xi} - 1 + \alpha_1 \xi) \cos \vartheta e^{it} + c.c.,$$

$$v_r^2 = 0.$$

Тогда для окружающей каплю жидкости найдем, что касательная компонента средней скорости имеет вид

$$u_\vartheta^1 = A \left\{ \frac{e^{-(\alpha_1 + \alpha_1^*)\xi}}{(\alpha_1 + \alpha_1^*)^2} \left(1 - \frac{2}{\alpha_1^2} \right) - \frac{e^{-\alpha_1^* \xi}}{\alpha_1^{*2}} \left(1 - \frac{2\alpha_1^*}{\alpha_1} \right) - \frac{e^{-\alpha_1 \xi}}{\alpha_1^2} + c_1^1 + c_2^1 \xi \right\},$$

где $A = 3 \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \frac{1}{\nu_1} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \right)^2$.

Средняя скорость жидкости внутри капли имеет вид $u_\vartheta^2 = A(c_1^2 + c_2^2 \xi)$.

Из непрерывности скоростей на поверхности капли можно получить, что

$$c_1^1 - c_1^2 = -\frac{5}{4} \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} \left(3 \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2 + \rho_1} \right)^2.$$

При переходе к нерастянутой координате в пределе бесконечно малой толщины пограничного слоя Стокса для скачка касательных скоростей (в размерном виде) имеем

$$u_\vartheta^1 - u_\vartheta^2 = -\frac{5}{4\omega} v v_\tau, \quad v = 3b\omega \frac{(\tilde{\rho}_1 - \tilde{\rho}_2)}{(\tilde{\rho}_1 + 2\tilde{\rho}_2)} \sin \vartheta, \quad (3.4)$$

где v – амплитуда касательной скорости пульсационного движения внешней жидкости за пределами пограничного слоя, а $v_\tau = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}$ – ее производная по поверхности.

Для скачка касательных напряжений при этом находим, что

$$[\sigma_{r\vartheta}] = -\frac{1}{2} \frac{v v_\tau}{\sqrt{2\omega}} \tilde{\rho}_1 \sqrt{\tilde{\nu}_1}. \quad (3.5)$$

Полученные выражения для скачка касательных скоростей (3.4) и напряжений (3.5) совпадают с эффективными граничными условиями без учета ПАВ (например, в работе [12]) при стремлении вязкости внутри капли к бесконечности.

Таким образом, в случае искривленной поверхности раздела жидкостей со сравнимыми свойствами и значительным влиянием ПАВ генерация среднего течения обусловлена теми же механиз-

мами, что и в случае плоской границы, влияние кривизны проявляется в величине коэффициентов.

4. Заключение

В настоящей работе изучена генерация среднего течения в пульсационном потоке внутри и снаружи капли жидкости, взвешенной в жидкости отличающейся плотности при наличии поверхностно-активного вещества. Получены эффективные граничные условия для скачков касательных скоростей и касательных напряжений.

Показано, что в случае, когда влияние ПАВ на поверхностное натяжение значительно (параметр изотермы адсорбции Гиббса намного больше толщины вязкого пограничного слоя Стокса), механизм генерации Шлихтинга доминирует. Эффективные граничные условия, полученные с учетом ПАВ, совпадают с граничными условиями без его учета, полученными в работе [12], если устремить вязкость внутренней капли к бесконечности. Среднее и пульсационное течение внутри капли при этом отсутствуют.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-21-00090).

Список литературы

1. Блехман И. И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994.
2. Катца П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом. Успехи физических наук. 1951. Т. 44. № 5. С. 7–20.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М. Наука, 1974. 712 с.
4. Ниборг В. Акустические течения / в кн. Мэзон У. (ред.). Физическая акустика. Т. II. Ч. Б. М.: Мир, 1969. С. 364–367.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. 735 с.
6. Longuet-Higgins M. S. Mass transport in water waves // Philosophical Transactions A. 1953. Vol. 245. P. 353–581.
7. Dore D. On mass transport induced by interfacial oscillations at a single frequency // Proceeding of the Cambridge Philosophical Society. 1973. V. 74. P. 333–347.
8. Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А., Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
9. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. Thermal vibrational convection. New York: Wiley, 1998. 358 p.
10. Клименко Л. С., Любимов Д. В. Генерация среднего течения пульсационным потоком около искривленной свободной поверхности // Из-

- вестия РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 1. С. 33–43.
11. Клименко Л. С., Любимов Д. В., Генерация среднего течения пульсационным потоком около цилиндрического газового пузырька // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2011. Вып. 1 (16). С. 9–13.
 12. Любимов Д. В., Клименко Л. С. Генерация среднего течения в пульсационном потоке около искривленной поверхности раздела // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 951–953.
 13. Wu J., Du G. Streaming generated by a bubble in an ultrasound field // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1997. Vol. 101. N. 4. P. 1899–1907.
 14. Liu X., Wu J. Acoustic microstreaming around an isolated encapsulated microbubble // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2009. Vol. 125. N. 3. P. 1319–1330.
 15. Lyubimov D. V., Konovalov V. V., Lyubimova T. P., Egry I. Small amplitude shape oscillations of a spherical liquid drop with surface viscosity // *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 677. P. 204–217.
 16. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
 17. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 296 с.
 5. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of Theoretical Physics*, vol. 6. Fluid dynamics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987. 552 p.
 6. Longuet-Higgins M. S. Mass transport in water waves. *Philosophical Transactions A*. 1953, vol. 245, pp. 353–581.
 7. Dore D. On mass transport induced by interfacial oscillations at a single frequency. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1973, vol. 74, pp. 333–347.
 8. Lyubimov D. V., Lyubimova T. P., Cherepanov A. A. *Dynamics of interfaces in vibration fields*. Moscow: Fizmatlit. 2003.
 9. Gershuni G. Z., Lyubimov D. V. *Thermal Vibrational Convection*. New York: Wiley, 1998, 358 p.
 10. Klimentko L. S., Lyubimov D. V. Generation of an average flow by a pulsating stream near a curved free surface. *Fluid Dynamics*, vol. 47, no. 1, 2012, p. 26–36
 11. Klimentko L. S., Lyubimov D. V. Average flow generation by pulsating flow near cylindrical gas bubble, *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2011, no. 1, pp. 9–13.
 12. Lyubimov D. V., Klimentko L. S., Generation of an average flow in a pulsation flow near a curved fluid interface. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 2011, no. 4, pp. 951–953.
 13. J. Wu, G. Du, Streaming generated by a bubble in an ultrasound field. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1997, vol. 101, no. 4, pp. 1899–1907
 14. X. Liu, J. Wu. Acoustic microstreaming around an isolated encapsulated microbubble. *Journal of the Acoustical Society of America*. 2009, vol. 125, no. 3, pp. 1319–1330.
 15. Lyubimov D. V., Konovalov V. V., Lyubimova T. P., Egry I. Small amplitude shape oscillations of a spherical liquid drop with surface viscosity, *Journal of Fluid Mechanics*. 2011, vol. 677, pp. 204–217.
 16. Levich V. G. *Physicochemical hydrodynamics*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1962. 700 p.
 17. Van Dyke M. *Perturbation methods in fluid mechanics*. Stanford: Parabolic Press. 1975. 271 p.

References

1. Blekhman I. I. *Vibrational mechanics*. Singapore: World Scientific, 2000. 536 p.
2. Kapitza P. L. Pendulum with a vibrating suspension. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 1951, vol. 44, no. 5, pp. 7–20.
3. Schlichting H. *Boundary-layer theory*. New-York: Springer, 2000, 800 p.
4. Nyborg W. Acoustic streaming, In: Mason W. (Ed.) *Physical Acoustics*, vol. 2 B. New-York: Academic Press, 1968, pp. 265–331.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Клименко Л. С., Любимов Д. В. Влияние ПАВ на генерацию среднего течения около искривленной поверхности раздела // Вестник Пермского университета. Физика. 2016. № 3 (34). С. 42–48. doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-42-48

Please cite this article in English as:

Klimentko L. S., Lyubimov D. V. Surfactant effect an average flow generation near curved interface // *Bulletin of Perm University. Physics*, 2016, no. 3 (34), pp. 42–48. doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-42-48