

УДК 532.526.2; 536.252  
PACS 47.15.Cb, 47.56.+r, 47.55.P-

## Структура смежных течений у нагретой границы жидкости и пористой среды

**И. В. Тюлькина, К. Б. Циберкин**

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
614990, Пермь, ул. Букирева, 15  
email: irinatiulkina95@gmail.com

Представлены результаты исследования структуры ламинарного конвективного пограничного слоя возле нагретой границы раздела однородной жидкости и пористой среды Бринкмана, насыщенной той же жидкостью. Граница раздела однородно нагрета и поддерживается при постоянной температуре. В предположении степенной зависимости проницаемости от продольной координаты получено автомодельное представление уравнений конвекции жидкости в смежных средах в приближении пограничного слоя и рассчитаны профили скорости и температуры при различных параметрах жидкости, интенсивности нагрева и свойствах пористой среды. Показано, что максимум скорости течения всегда располагается в однородной жидкости. Найденные автомодельные решения для поля скорости и температуры у границы раздела сред малочувствительны к изменению интенсивности нагрева и параметров пористой среды. Приведены зависимости автомодельной скорости в характерных точках: в максимуме и на границе раздела. Скорость течения с высокой точностью пропорциональна температуре границы. Основным управляющим параметром задачи является число Прандтля, рост которого приводит к снижению скорости течения в обеих средах и увеличению ширины вязкого пограничного слоя.

**Ключевые слова:** конвективный пограничный слой; пористая среда; смежные течения

*Поступила в редакцию 14.10.2016; принята к опубликованию 10.11.2016*

## Structure of coupled flows near the heated interface between liquid and porous medium

**I. V. Tiulkina, K. B. Tsiberkin**

Perm State University  
Bukireva St. 15, 614990, Perm  
email: irinatiulkina95@gmail.com

We consider a structure of laminar convective boundary layer near the heated interface between the homogeneous liquid and Brinkman porous medium is saturated with the same liquid. The interface is heated uniformly. It has the constant temperature. We get the self-similar form of the convection equations in the boundary layer approximation. Also, we assume the power-law dependence of the medium permeability on the longitudinal coordinate. The self-similar profiles of the velocity and temperature in the both media are calculated with the different values of the liquid parameters, heat intensity and porous media properties. The velocity maximum always places in the uniform liquid layer. The self-similar solutions for velocity and temperature have a weak dependence on the heating intensity and porous medium parameters. Therefore, the obtained solution can be considered as universal in the first approximation. The dependencies of flow velocity on the control parameters in characteristic points are obtained. They are maximum velocity position and the interface be-

tween media. The flow velocity is almost proportional to the interface temperature. The main control parameter is the Prandtl number. Its' growth leads to the flow deceleration and viscous boundary layer expansion.

**Keywords:** convective boundary layer; porous medium; coupled flows

Received 14.10.2016; accepted 10.11.2016

doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-49-57

## 1. Введение

Задачи о взаимодействии смежных потоков жидкости имеют широкий спектр приложений. В частности, они могут быть применены к описанию движения жидкостей в фильтрах, топливных ячейках, теплообмену в процессе сушки материалов, распространения загрязнений в грунтовых водах и поверхностных водоёмах, транспорта лекарств и питательных веществ в тканях организмов [1, 2]. Сложная структура перечисленных систем обуславливает широкий спектр возможных физических явлений.

Особенности течения в гидродинамических системах, которые включают смежные области пористой среды и однородной жидкости, активно исследовались ранее различными авторами. Классической может быть названа задача о движении несжимаемой вязкой жидкости в плоском слое, ограниченном твёрдой границей сверху и бесконечным слоем пористой среды – снизу, при наличии продольного градиента давления [2].

Течение в пористой среде может быть описано, в зависимости от свойств среды, скорости течения и вызывающих его сил, моделью Дарси [2, 3], хорошо подходящей для сред с низкой проницаемостью, или моделью Бринкмана, более актуальной при высокой пористости и проницаемости [2, 4], с применением соответствующих той или иной модели граничных условий [5–7]. В работе [8] показано, что несмотря на возможность согласования стационарных профилей скорости течения в смежных средах путём подбора эмпирических параметров, входящих в граничные условия, пороги устойчивости течений и механизмы потери устойчивости в модели Дарси и Бринкмана кардинально различаются.

Важные результаты в описании взаимодействия смежных течений были получены при использовании приближения пограничного слоя, расположенного на границе раздела двух разнородных областей [9–12]. Взаимодействие потока однородной жидкости с фильтрационным течением также может быть описано в приближении пограничного слоя. Основной особенностью такой постановки являются ненулевое значение скорости течения на границе и увлечение жидкости в пористом слое внешним потоком.

Модель Дарси не содержит дифференциального уравнения для скорости, поэтому не допускает формирования вязкого пограничного слоя в течении. С её помощью тем не менее возможно описание теплопередачи или диффузии молекулярных примесей в жидкостях [2, 13–15]. Напротив, модель Бринкмана допускает существование вязкого пограничного слоя [15, 16]. В рамках такого подхода ранее были изучены, в частности, температурные пограничные слои в смежных пористых средах с различными параметрами [17]. В работе [18] представлено описание изотермического пограничного слоя на границе жидкости и пористой среды Бринкмана при наличии внешнего вынужденного течения.

В настоящей работе исследуется структура поля скорости в конвективном пограничном слое возле нагретой границы между однородной жидкостью и пористой средой Бринкмана, насыщенной той же жидкостью. Рассматривается влияние температуры границы и проницаемости пористой среды на структуру тепловых и динамических пограничных слоёв в однородной жидкости и пористой среде, а также на скорость возникающего конвективного течения.

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Геометрия системы

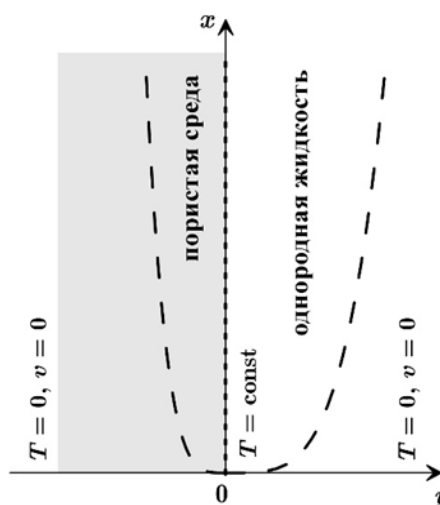


Рис. 1. Геометрия задачи и схематическая структура пограничных слоёв

В работе исследуется структура стационарного свободноконвективного течения, которое развивается вблизи нагретой вертикальной границы однородной жидкости и пористой среды, поддерживаемой при постоянной температуре, в поле тяжести (рис. 1). Температура в обеих средах на удалении от границы одинакова и принята за начало отсчёта. Вынужденное течение вдали от границы раздела, а также поперечные градиенты давления в системе отсутствуют.

## 2.2. Уравнения движения

Исходная полная система уравнений гидродинамики описываемой задачи включает уравнения Навье–Стокса для внешнего течения и уравнения Бринкмана для пористой среды [8, 18], а также уравнения теплопроводности для обеих сред. Выбор модели Бринкмана обуславливается её более высокой физической достоверностью по сравнению с моделью Дарси, поскольку последняя допускает только однородный профиль скорости и формирование вязкого пограничного слоя в рамках модели Дарси невозможно [2]. Кроме того, модель Бринкмана и соответствующие ей граничные условия могут быть получены путём осреднения уравнений Навье–Стокса на микроскопическом уровне в отличие от условий для закона Дарси [6, 7, 19].

Уравнения для однородной жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + g \beta_0 T \boldsymbol{\gamma}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \end{aligned} \quad (2.1)$$

уравнения для пористой среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \cdot \nabla) \mathbf{v}_p &= -\frac{1}{\rho} \nabla P_p + \nu_{eff} \Delta (\boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}_p) - \\ &- \frac{\nu}{K} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}_p + g \beta_0 T_p \boldsymbol{\gamma}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_p &= 0, \quad \frac{\partial T_p}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \nabla T_p = \chi \Delta T_p, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{v} = \{u(x,y), w(x,y), 0\}$  – скорость течения жидкости (поле скорости предполагается двумерным),  $P$  – давление,  $T$  – температура,  $\varphi$ ,  $K$  – пористость и проницаемость пористой среды, соответственно;  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $\beta_0$  – плотность, кинематическая вязкость, температуропроводность и коэффициент объёмного теплового расширения, жидкости, соответственно;  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\boldsymbol{\gamma}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $x$ . Индекс  $p$  обозначает величины, относящиеся к пористой среде. Для упрощения описания принято, что пористая среда находится в тепловом равновесии с жидкостью, и температуропроводности сред совпадают. В уравнение Бринкмана для пористой среды (см. (2.2))

помимо диссипативного слагаемого с эффективной вязкостью, определяемой как  $\nu_{eff} = \nu/\varphi$  [6, 7], входит сила сопротивления Дарси, пропорциональная скорости.

На границе раздела  $y = 0$  поставлены условия на скорость, температуру, нормальные и касательные вязкие напряжения [6, 7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}_p, \\ P - 2\rho\nu \frac{\partial w}{\partial y} &= P_p - 2\rho\nu_{eff} \boldsymbol{\varphi} \frac{\partial w_p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\nu_{eff}}{\nu} \boldsymbol{\varphi} \frac{\partial u_p}{\partial y} &= -\frac{\beta}{K^{1/2}} \boldsymbol{\varphi} u_p, \\ T = T_p &= \Theta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\beta$  – эмпирический параметр, определяемый свойствами пористой матрицы и геометрией пор на микроуровне, а  $\Theta$  – температура, поддерживаемая на границе раздела сред.

Задача замыкается условиями на удалении от границы раздела:

$$\begin{aligned} y \rightarrow +\infty: \mathbf{v} &\rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0, \\ y \rightarrow -\infty: \mathbf{v}_p &\rightarrow 0, \quad T_p \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 3. Автомодельные уравнения

### 3.1. Приближение пограничного слоя

Для описания течения вблизи нагретой границы раздела используется стандартное приближение Прандтля [9], поскольку основное изменение скорости и температуры в описываемой системе происходит в поперечном направлении в пределах тонкой области с характерной шириной  $\delta$ . Таким образом, рассматриваемая в настоящей работе задача по постановке и структуре близка известной задаче Польгаузена о конвективном факеле возле нагретой пластины [9, 20].

Приближение Прандтля с учётом предполагаемой стационарности течения приводит уравнения (2.1) и (2.2) к следующему виду:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g \beta_0 T, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

$$u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + w_p \frac{\partial u_p}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} = g \beta_0 T_p, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial w_p}{\partial y} = 0, \quad u_p \frac{\partial T_p}{\partial x} + w_p \frac{\partial T_p}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T_p}{\partial y^2}.$$

Соответственно, условия на границе раздела (2.3) в приближении пограничного слоя с учётом того, что продольный градиент давления отсутствует,

поскольку течение возникает только благодаря конвекции, и вдали от границы скорость жидкости равна нулю в обеих средах, принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \varphi \mathbf{v}_p, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_p}{\partial y} &= -\frac{\beta \varphi}{K^{1/2}} u_p, \\ T &= T_p = \Theta. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Вид граничных условий (2.4) не изменяется.

### 3.2. Автомодельная форма уравнений

Основываясь на известных результатах и подходах теории пограничного слоя, дальнейший анализ задачи удобно производить в терминах функции тока с использованием автомодельных преобразований. Введение функции тока сокращает число уравнений, поскольку уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, и модель (3.1), (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = g \beta_0 T, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_p}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_p}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 \psi_p}{\partial y^3} &= \\ &= g \beta_0 T_p - \frac{\nu}{K} \varphi \frac{\partial \psi_p}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \psi_p}{\partial y} \frac{\partial T_p}{\partial x} + \frac{\partial \psi_p}{\partial x} \frac{\partial T_p}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T_p}{\partial y^2}.$$

Условия на границе раздела записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} y=0: \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \varphi \frac{\partial \psi_p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \varphi \frac{\partial \psi_p}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial y^2} &= -\frac{\beta \varphi}{K^{1/2}} \frac{\partial \psi_p}{\partial y}, \\ T &= T_p = \Theta. \end{aligned} \quad (3.6)$$

На удалении от границы раздела температура и производные функции тока стремятся к нулю:

$$\begin{aligned} y \rightarrow +\infty: \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, T &\rightarrow 0, \\ y \rightarrow -\infty: \quad \frac{\partial \psi_p}{\partial x}, \frac{\partial \psi_p}{\partial y}, T_p &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Наконец, модель (3.4)–(3.7) допускает автомодельное преобразование координат, которое удобно провести одновременно с обезразмериванием задачи. Выбор автомодельной координаты, функции тока и температуры в форме

$$\xi = Bx^\alpha y, \quad \psi = Ax^\beta f(\xi), \quad T = \Theta g(\xi), \quad (3.8)$$

где  $f, g$  – новые неизвестные функции, обеспечивает автомодельное преобразование, единое для обеих сред ввиду линейности граничных условий. Однако для уравнений в пористой среде оно оказывается применимым только при задании степенной зависимости проницаемости от продольной координаты

$$K = K_0 x^{1/2}. \quad (3.9)$$

Последовательное применение преобразований (3.8) к задаче (3.4)–(3.7) однозначно определяет показатели степени и масштабные множители

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{3}{4}, \\ A &= -\frac{4}{3} \chi B, \quad B = \left( \frac{9g\beta_0\Theta}{4\chi^2} \right)^{1/4}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Уравнения для автомодельных функций  $f$  и  $g$  принимают окончательный вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} (2f'^2 - 3ff'') &= f''' + g, \\ g'' + fg' &= 0, \\ \frac{1}{Pr} (2f_p'^2 - 3f_p f_p'') &= \\ &= f_p''' + g_p - \frac{8\varphi Pr^{1/2}}{Da_0 Ra^{1/2}} f_p', \\ g_p'' + f_p g_p' &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где введены безразмерные управляющие параметры: число Прандтля  $Pr = \nu/\chi$ , число Рэлея  $Ra = 9g\beta_0\Theta\delta^3/\nu\chi$ , и аналог числа Дарси  $Da_0 = K_0/\delta^{3/2}$ . Условия на границе раздела  $\xi = 0$ :

$$\begin{aligned} f &= \varphi f_p, \quad f' = \varphi f_p', \\ f'' - f_p'' &= \frac{2^{1/2}}{3^{1/2}} \frac{\beta \varphi}{Pr^{1/4} Ra^{1/4} Da_0^{1/2}} f_p', \\ g &= g_p = 1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

условия вдали от границы:

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= 0, \quad f_p(-\infty) = 0, \\ g(+\infty) &= 0, \quad g_p(-\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Условие для смешанных производных функции тока удовлетворяется тождественно. Полученные уравнения (3.11) по структуре совпадают с записью задачи Польгаузена [20], за исключением чис-

ловых коэффициентов и дополнительного слагаемого, описывающего силу сопротивления в пористой среде.

### 3.3. Метод решения задачи

Полученная краевая задача для автомодельных функций скорости и температуры решается численно методом установления [21]. В уравнения (3.11) введено фиктивное время  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= u'' + g - \frac{1}{Pr}(2u^2 - 3fu'), \\ \frac{\partial g}{\partial \tau} &= g'' + fg', \\ \frac{\partial u_p}{\partial \tau} &= u_p'' + g_p - \frac{8\varphi Pr^{1/2}}{Da_0 Ra^{1/2}} u_p' - \\ &\quad - \frac{1}{Pr}(2u_p^2 - 3f_p u_p'), \\ \frac{\partial g_p}{\partial \tau} &= g_p'' + f_p g_p', \end{aligned} \quad (3.14)$$

т.е. предполагается, что задача (3.11) является стационарным пределом системы параболических уравнений (3.14). Решение полученной задачи реализовано посредством конечно-разностного алгоритма, основанного на методе тридиагональной прогонки. Для его реализации введена новая неизвестная функция  $u = f'$ , так что исходное уравнение третьего порядка относительно функции  $f$  переписывается в виде уравнения второго порядка относительно  $u$ .

В качестве начального приближения задаются значения скорости течения и температуры во всей системе, близкие к нулю. Последующее установление стационарного режима в расчёте обеспечивается поддержанием постоянной температуры на границе раздела. После вычисления следующих приближений для  $u$  и  $g$  в обеих средах методом трапеций интегрируются уравнения для функции тока  $f$ :

$$f_p = \int_{-\infty}^0 u_p d\xi, \quad f = \int_0^{+\infty} u d\xi. \quad (3.15)$$

Последовательное применение граничных условий (3.12), задающих непрерывность  $f$  и  $u$  и скачок производной  $u'$  в точке  $\xi = 0$ , позволяет реализовать сходящийся самосогласованный итерационный процесс, который повторяется до достижения заданной относительной точности решения.

Численный алгоритм реализован в виде программы на языке FORTRAN-90. Расчёт производится на отрезке  $[-10, 10]$ . Возможность перехода от бесконечных пределов к конечным обусловлена экспоненциальным приближением решений к нулю вдали от границы раздела [9]. Величина шага интегрирования составляет 0.01, и вся область рас-

чёта разбита на 2000 интервалов. Относительная точность решения, по достижении которой прекращаются итерации, задана на уровне  $10^{-9}$ , время выполнения каждого расчёта при этом составляет около 7 ч на компьютере с центральным процессором Intel® Core™ i7-2600 с тактовой частотой 3.4 ГГц, и при использовании настроек компилятора, которые обеспечивают максимальную оптимизацию скорости исполнения программы.

Рис. 2 иллюстрирует сходимость итерационного процесса для расчёта со значениями параметров  $Ra = 10^3$ ,  $Da_0 = 10^{-4}$ ,  $Pr = 1$ ,  $\varphi = 0.5$  и  $\beta = 0$ . Приведена зависимость максимума автомодельной скорости от номера итерации.

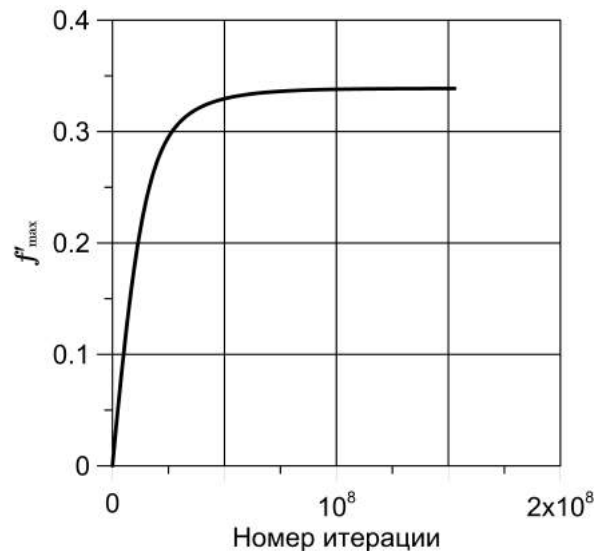


Рис. 2. Демонстрация сходимости итерационного процесса. Зависимость максимального значения функции скорости  $f'(\xi)$  от номера итерации

Ниже представлены результаты расчётов структуры конвективного факела при различных значениях управляющих параметров  $Ra$ ,  $Da_0$ ,  $\beta$  и фиксированном значении пористости  $\varphi = 0.5$  и числа Прандтля  $Pr = 1$ .

## 4. Структура конвективного факела

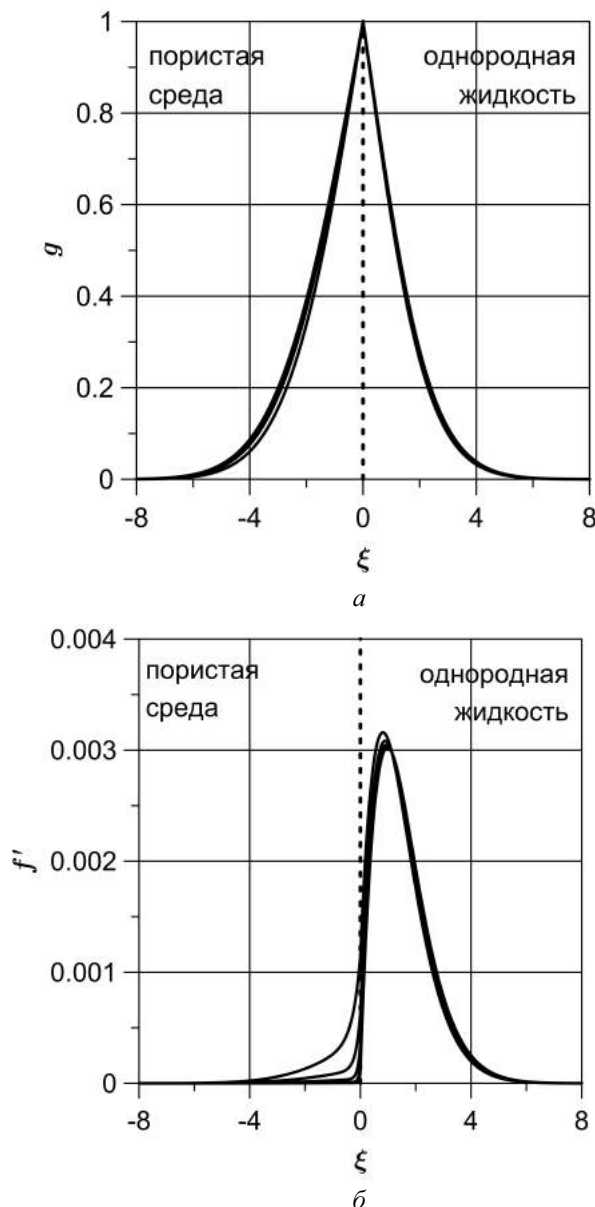
### 4.1. Профиль скорости и температуры

На рис. 3 показаны рассчитанные поперечные профили функций  $g$  и  $f'$ . На графиках представлено по пять наложенных друг на друга кривых, полученных для  $Pr = 1$ ,  $\beta = 0$  и следующих пар значений управляющих параметров:

1.  $Ra = 10^2$ ,  $Da_0 = 10^{-3}$ ;
2.  $Ra = 10^3$ ,  $Da_0 = 10^{-2}$ ;
3.  $Ra = 10^3$ ,  $Da_0 = 10^{-3}$ ;
4.  $Ra = 10^3$ ,  $Da_0 = 10^{-4}$ ;
5.  $Ra = 10^4$ ,  $Da_0 = 10^{-3}$ .

Из рисунков хорошо видно, что различие профилей течения и температуры относительно невели-

ко. Из структуры амплитудных множителей  $A$  и  $B$  (3.10) следует также, что основным управляющим физическим параметром задачи является температура границы, а продольная скорость течения пропорциональна  $\Theta^{1/2}$ . Тем не менее изменения проницаемости пористой среды оказывают выраженное влияние на скорость фильтрации и толщину динамического пограничного слоя в пористой среде (левая половина графиков на рис. 4). Изменения скорости фильтрации вызывают некоторые изменения в автомодельной зависимости температуры (рис. 3), тогда как автомодельная температура однородной жидкости не зависит от параметров системы.



**Рис. 3.** Профили автомодельных решений для различных значений  $Ra$  и  $Da_0$ :  $a$  – температура  $g(\xi)$ ;  $b$  – скорость  $f'(\xi)$

Качественно структура пограничного слоя согласуется с результатами задачи Польшаузена, поскольку уравнения модели подчиняются тем же автомодельным преобразованиям: толщина пограничного слоя в обеих средах возрастает как  $x^{1/4}$ , а максимальная скорость течения жидкости пропорциональна  $x^{1/2}$ . Максимум скорости локализован в однородной жидкости вблизи границы раздела. При этом толщина динамического пограничного слоя в пределах пористой среды оказывается существенно меньше, чем в однородной жидкости, тогда как толщина тепловых слоёв совпадает.

#### 4.2. Влияние параметров модели на структуру конвективного факела

На основе проделанных расчётов проанализированы зависимости толщины динамических и тепловых пограничных слоёв, а также значения автомодельной функции скорости  $f'$  в характерных точках – на границе раздела сред и в точке максимума. Толщина пограничных слоёв определяется условиями

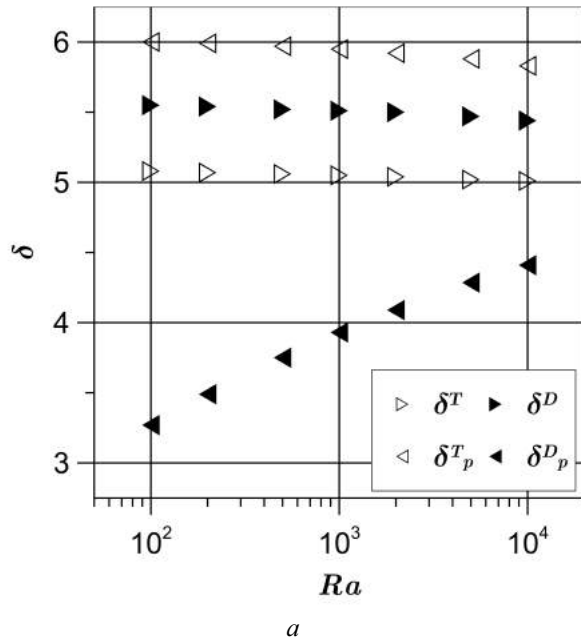
$$\begin{aligned} g(\delta^T) &= 0.01\Theta, & g_p(\delta_p^T) &= 0.01\Theta, \\ f'(\delta^D) &= 0.01f'(\xi_{max}), & f'_p(\delta_p^D) &= 0.01f'_p(0), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\xi_{max}$  – положение максимума автомодельной скорости. Рис. 4 и 5 иллюстрируют полученные зависимости значений скорости и толщин пограничных слоёв от управляющих параметров задачи. На рис. 4 зафиксировано значение  $Da_0 = 10^{-3}$ , а на рис. 5 –  $Ra = 10^3$ .

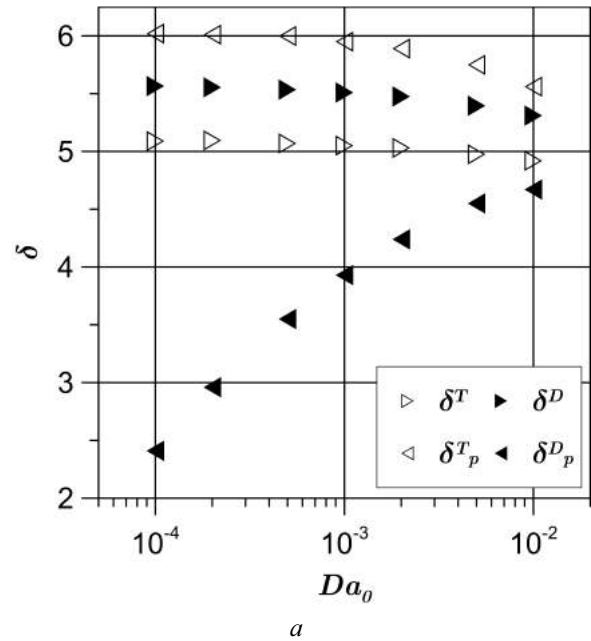
Видно, что толщина тепловых пограничных слоёв, динамического пограничного слоя в однородной жидкости, максимум автомодельного профиля скорости и его положение слабо зависят от управляющих параметров  $Ra$  и  $Da_0$ . В то же время динамический пограничный слой в пористой среде обладает высокой чувствительностью к их изменению, что связано с большим вкладом силы сопротивления Дарси в уравнение Бринкмана.

Значение автомодельной скорости непосредственно на границе раздела также чувствительно к изменению чисел Рэлея и Дарси ввиду того, что оба параметра входят в автомодельное граничное условие для скачка касательной компоненты тензора вязких напряжений (3.12). Вычисленные значения толщины пограничного слоя согласуются с известными результатами для задачи Польшаузена [9, 20] при  $Pr \approx 1$ .

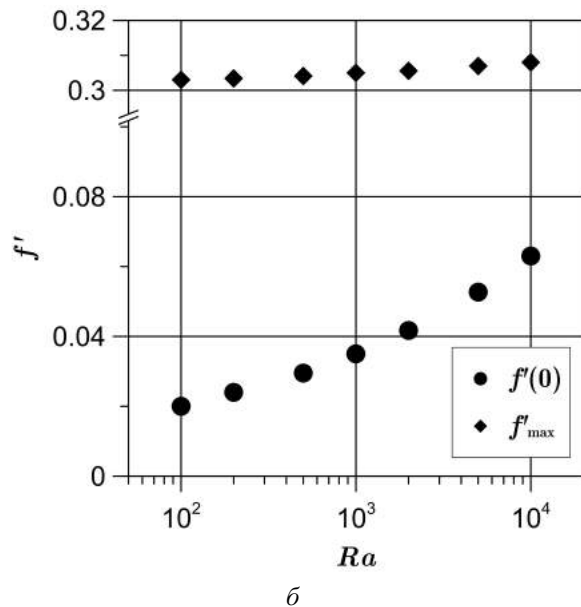
Увеличение числа Прандтля приводит к значительному снижению максимальной скорости течения и изменению толщины пограничных слоёв. Однако подробное исследование влияния  $Pr$  на течение в рассматриваемой системе остаётся предметом дальнейшего изучения.



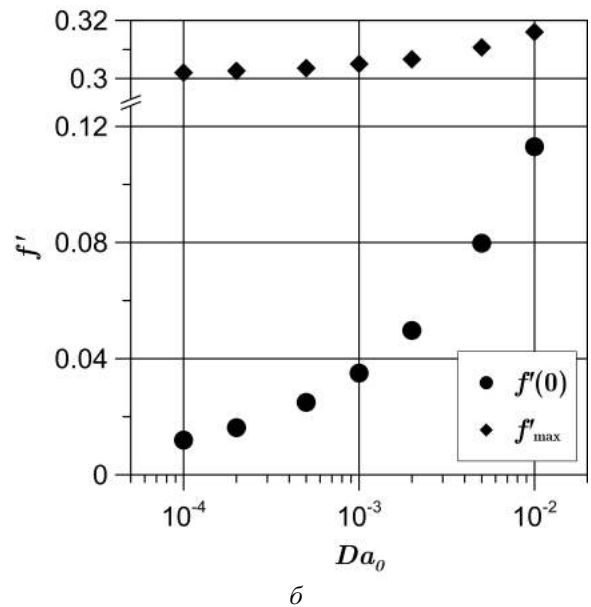
а



а



б



б

**Рис. 4.** Зависимости характеристик структуры конвективного факела у нагретой границы жидкости и пористой среды от числа Рэлея при фиксированном значении  $Da_0 = 10^{-3}$ : а – толщина пограничных слоёв; б – автомодельная скорость на границе раздела и в точке максимума

**Рис. 5.** Зависимости характеристик структуры конвективного факела у нагретой границы жидкости и пористой среды от числа Дарси при фиксированном значении  $Ra = 10^3$ : а – толщина пограничных слоёв; б – автомодельная скорость на границе раздела и в точке максимума

## 5. Заключение

В целом представленные результаты соответствуют общим сведениям из теории пограничного слоя. Толщина пограничных слоёв убывает по мере роста интенсивности течения, за исключением динамического слоя в пористой среде, формирование которого вызвано совместным действием конвективного и гидродинамического механизмов – течение возникает благодаря неоднородности тем-

пературы и увлечению жидкости течением во внешнем слое.

Выявленные зависимости структуры течения от параметров пористой среды свидетельствуют о значимости учёта течения в пористой среде в задачах, где требуется описание переноса импульса через границу раздела в системах смежных сред. Вопрос о влиянии фильтрационного течения на поток тепла через границу раздела на данном этапе исследований остаётся открытым, поскольку в рассмотренной постановке прямой теплообмен между

смежными средами исключается. Детальный анализ теплопереноса в приближении пограничного слоя может быть получен при исследовании конвективного факела над локализованным (точечным) источником тепла, расположенным на границе раздела двух сред.

Представленные в [18] и настоящей работе результаты показывают, что для исследования моделей теплопереноса в смежных средах в приближении пограничного слоя необходимо использовать те же автомодельные преобразования, что и при описании течений в однородных системах [9, 10, 20]. Таким образом, анализ течения над локализованным источником может быть выполнен путём применения уже известных результатов для двумерного и трёхмерного конвективного факела [22–24], при задании степенной зависимости проницаемости среды от продольной координаты, определяемой автомодельными преобразованиями полей скорости и температуры.

### Список литературы

1. White F. M. *Viscous fluid flow*. New-York: McGraw-Hill, 2006. 640 p.
2. Nield D. A., Bejan A. *Convection in porous media*. New-York: Springer, 2013. 778 p.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. Brinkman H. C. Calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // *Applied Scientific Research*. 1949. Vol. 1. P. 27–34.
5. Beavers G. S., Joseph D. D. Boundary conditions at a naturally permeable wall // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. Vol. 30. N. 1. P. 197–207.
6. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1995. Vol. 38. P. 2635–2646.
7. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – II. Comparison with experiment // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1995. Vol. 38. P. 2647–2655.
8. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Baydina D. T., Kolchanova E. A., Tsiberkin K. B. Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium // *Physical Review E*. 2016. Vol. 94, 013104.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
10. Lock R. C. The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1951. Vol. 4. N. 1. P. 42–63.
11. Boyadjiev Chr., Mitev Pl., Sapundzhiev T. Laminar boundary layers of co-current gas-liquid stratified flows – I. Theory // *International Journal of Multiphase Flow*. 1976. Vol. 3. N. 1. P. 51–55.
12. Paster A., Dagan G. Mixing at the interface between two fluids in porous media: a boundary-layer solution // *Journal of Fluid Mechanics*. 2007. Vol. 584. P. 455–472.
13. Cheng P., Minkowycz W. J. Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike // *Journal of Geophysical Research*. 1977. Vol. 82. N. 14. P. 2040–2044.
14. Gorla R. S. R., Tornabene R. Free convection from a vertical plate with nonuniform surface heat flux and embedded in a porous medium // *Transport in Porous Media*. 1988. Vol. 3. P. 95–106.
15. Kazi S. M. (Ed.) An overview of heat transfer phenomena. Rijeka, Croatia: InTech, 2012. 526 p.
16. le Bars M., Worster M. G. Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification // *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. Vol. 550. P. 149–173.
17. Gorla R. S. R., Mansour M. A., Gaid Sahar M. Natural convection from a vertical plate in a porous medium using Brinkman's model // *Transport in Porous Media*. 1999. Vol. 36. P. 357–371.
18. Циберкин К. Б. О структуре поля скорости стационарного течения вблизи границы раздела однородной жидкости и пористой среды Бринкмана // *Журнал технической физики*. 2016. Т. 86. Вып. 8. С. 62–67.
19. Mikelić A., Jäger W. On the interface boundary condition of Beavers, Joseph, and Saffman // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2000. Vol. 60. N. 4. pp. 1111–1127.
20. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
21. Тарунин Е. Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции: учеб. пособие. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 228 с.
22. Зельдович Я. Б. Предельные законы свободно-восходящих конвективных потоков // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1937. Т. 7. Вып. 12. С. 1463–1465.
23. Brand R. S., Lahey F. J. The heated laminar vertical jet // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. Vol. 29. N. 2. P. 305–315.
24. Fujii T. Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line heat source and a point heat source // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1963. Vol. 6. P. 597–606.

### References

1. White F. M. *Viscous Fluid Flow*. New-York: McGraw-Hill, 2006. 640 p.
2. Nield D. A., Bejan A. *Convection in porous media*. New-York: Springer, 2013. 778 p.



3. Polubarinova-Kochina P. Ya., *Theory of ground water movement*. Princeton: Princeton University Press, 1962. 613 p.
4. Brinkman H. C. Calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Applied Scientific Research*, 1949, vol. 1, pp. 27–34.
5. Beavers G. S., Joseph D. D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 30, no. 1, pp. 197–207.
6. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – I. Theoretical development. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1995, vol. 38, pp. 2635–2646.
7. Ochoa-Tapia J. A., Whitaker S. Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid – II. Comparison with experiment. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1995, vol. 38, pp. 2647–2655.
8. Lyubimova T. P., Lyubimov D. V., Baydina D. T., Kolchanova E. A., Tsiberkin K. B. Instability of plane-parallel flow of incompressible liquid over a saturated porous medium. *Physical Review E*, 2016, vol. 94, 013104.
9. Schlichting H. *Boundary-layer theory*. New-York: Springer, 2000, 800 p.
10. Lock R. C. The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1951, vol. 4, no. 1, pp. 42–63.
11. Boyadjiev Chr., Mitev Pl., Sapundzhiev T. Laminar boundary layers of co-current gas-liquid stratified flows – I. Theory. *International Journal of Multiphase Flow*, 1976, vol. 3, no. 1, pp. 51–55.
12. Paster A., Dagan G. Mixing at the interface between two fluids in porous media: a boundary-layer solution *Journal of Fluid Mechanics*, 2007, vol. 584, pp. 455–472.
13. Cheng P., Minkowycz W. J. Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike. *Journal of Geophysical Research*, 1977, vol. 82, no. 14, pp. 2040–2044.
14. Gorla R. S. R., Tornabene R. Free convection from a vertical plate with nonuniform surface heat flux and embedded in a porous medium. *Transport in Porous Media*, 1988, vol. 3, pp. 95–106.
15. Kazi S. M. (Ed.) *An overview of heat transfer phenomena*. Rijeka, Croatia: InTech, 2012, 526 p.
16. le Bars M., Worster M. G. Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium: implications for binary alloy solidification. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, vol. 550, pp. 149–173.
17. Gorla R. S. R., Mansour M. A., Gaid Sahar M. Natural convection from a vertical plate in a porous medium using Brinkman's model. *Transport in Porous Media*, 1999, vol. 36, pp. 357–371.
18. Tsiberkin K. B. On the structure of the steady-state flow velocity field near the interface between a homogeneous liquid and a Brinkman porous medium. *Technical Physics*, 2016, vol. 61, no. 8, pp. 1181–1186.
19. Mikelić A., Jäger W. On the interface boundary condition of Beavers, Joseph, and Saffman. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2000, vol. 60, no. 4, pp. 1111–1127.
20. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M., Nepomniashchii A. A. *Ustoichivost' konvektivnykh techenii (Stability of convective flows)* M.: Nauka, 1989, 320 p. (In Russian).
21. Tarunin E. L. Vychislitel'nyi eksperiment v zadachakh svobodnoi konveksii (Numerical experiment in free convection problems). Irkutsk, Russia: Irkutsk University, 1990, 228 p. (In Russian).
22. Zel'dovich Ya. B. The asymptotic laws of freely-ascending convective flows. *Soviet Physics JETP*, 1937, vol. 7, no. 12, pp. 1463–1465 (In Russian).
23. Brand R. S., Lahey F. J. The heated laminar vertical jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 29, no. 2, pp. 305–315.
24. Fujii T. Theory of the steady laminar natural convection above a horizontal line heat source and a point heat source. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1963, vol. 6, pp. 597–606.

**Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

Тюлькина И. В., Циберкин К. Б. Структура смежных течений у нагретой границы жидкости и пористой среды // Вестник Пермского университета. Физика. 2016. № 3 (34). С. 49–57. doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-49-57

**Please cite this article in English as:**

Tiulkina I. V., Tsiberkin K. B. Structure of coupled flows near the heated interface between liquid and porous medium // Bulletin of Perm University. Physics, 2016, no. 3 (34), pp. 49–57. doi: 10.17072/1994-3598-2016-3-49-57