УДК 1:51

DOI: 10.17072/2078-7898/2022-3-389-398

ТРИ ОТСУТСТВУЮЩИХ ФАКТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО СТРУКТУРАЛИЗМА

Ламберов Лев Дмитриевич

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина (Екатеринбург)

Математический структурализм М. Резника является вариантом ответа на поставленные П. Бенацеррафом затруднения для всякой адекватной философии математики. Кратко излагается эпистемологическая часть концепции и показывается, каким образом, согласно М. Резнику, происходит познание математических объектов на основе абстрагирования от данных восприятия. Также рассматривается онтологическая часть, в соответствии с которой в качестве критерия существования берется непротиворечивость. Для понимания позиций М. Резник использует метафору геометрической точки. Так, позиции не могут сравниваться друг с другом, если они принадлежат разным структурам, подобно тому, как точки не могут быть индивидуированы, если они не принадлежат одной и той же плоскости. Математические структуры могут находиться в отношениях конгруэнтности, встречаемости (включенности), эквивалентности, но среди этих отношений нет отношения тождества, т.к. позиции структур не обязательно совпадают. Кроме того, сравнивается концепция структурной относительности М. Резника с онтологической относительностью У.В.О. Куайна. Из концепции структурной относительности естественным образом вытекает то, что может быть названо доктриной трех типов отсутствующих фактов. Каждый тип отсутствующих фактов поясняется отдельно, затем демонстрируется, что некоторые интерпретации проблемы отождествления П. Бенацеррафа являются некорректными.
Ключевые слова: математический структурализм, математический объект, структура, тождество, онтологическая относительность.

THREE ABSENT FACTS OF MATHEMATICAL STRUCTURALISM

Lev D. Lamberov

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin (Ekaterinburg)

The mathematical structuralism of M. Resnik is a possible solution to the problems posed by P. Benacerraf for any adequate philosophy of mathematics. In the paper, the epistemological part of the concept is briefly outlined, and it is shown how, according to M. Resnik, we can obtain the knowledge of mathematical objects by disregarding the perceptual data. The ontological part, according to which consistency is taken as a criterion of existence, is also considered. To understand positions, M. Resnik uses the metaphor of a geometrical point. Thus, positions cannot be compared with one another in case they belong to different structures just as points cannot be individuated in case they do not belong to the same plane. Mathematical structures can be in relations of congruence, occurrence, and definitional equivalence, but there is no identity relation for them since the positions of the structures do not necessarily coincide. In addition, the paper compares M. Resnik's conception of structural relativity with W.V.O. Quine's ontological relativity. From the conception of structural relativity naturally follows what can be called the doctrine of three types of absent facts. Each type of absent facts is explained separately, then it is demonstrated that some interpretations of P. Benacerraf's identification problem are incorrect.
Keywords: mathematical structuralism, mathematical object, structure, identity, ontological relativity.

Математический структурализм, рассматриваемый в настоящей статье, является одной из нескольких разнородных структуралистских концепций, так или иначе распространенных в философии и ряде конкретных научных дисциплин. Отношения между ними вряд ли могут быть интересны для исследователя истории идей, поскольку эти отношения в целом просто не имеют места. Настоящая статья никаким образом не касается ни структурализма в математике XVIII–XIX вв., ни французского структурализма в философии XX в., ни структурализма в философии науки; статья посвящена структуралистской интерпретации математики в рамках аналитической философии математики, которая развивается со второй половины XX в. по настоящее время. Если более конкретно определить тематику данной статьи, то в ней рассматриваются структурализм М. Резника, вопросы онтологической относительности и некоторые следствия, естественным образом вытекающие из указанной философской точки зрения на сущность и предмет математики. Основная цель статьи — показать, каким образом М. Резник решает затруднения, сформулированные П. Бенацеррафом, и как из его концепции следует то, что три разных типа фактов не могут иметь места.

I

Позиция М. Резника представляет собой разновидность структуралистской интерпретации математики. Это *философская* позиция, которая являет собой попытку ответить на *философские* вопросы касательно математики. Свою структуралистскую интерпретацию М. Резник начал развивать с середины 1970-х гг. [Resnik M., 1975] в качестве попытки разрешить затруднения для всякой адекватной философии математики, представленные П. Бенацеррафом в статьях «Чем не могут быть числа» [Benacerraf P., 1965] и «Математическая истина» [Benacerraf P., 1973].

Первое затруднение обычно называется проблемой отождествления[1] и представляет собой аргумент, согласно которому натуральные числа не могут быть множествами [Ламберов Л.Д., 2021] и, более того, никакие математические объекты вообще не являются объектами. По мнению П. Бенацеррафа, корректнее говорить о местах, которые *произвольные* объекты занимают в структурах. Правда, с точки зрения П. Бенацеррафа, никаких структур самих по себе нет, а разговор о структурах просто является удобным способом разговора об изоморфных наборах объектов. Например, последовательность числительных какого-либо естественного языка и последовательность нумералов некоторой формализованной арифметики обладают одинаковой структурой, а потому, можно сказать, описывают структуру *любой* ω-последовательности. Кроме того, представленное П. Бенацеррафом затруднение можно понимать как разновидность проблемы неопределенности или неполноты (математических) объектов. Например, одна и та же структура может быть «реализована» различными способами с помощью множеств. Так, натуральные числа можно представить и как нумералы Цермело, и как конечные ординалы фон Неймана, и вообще бесконечным количеством разных вариантов. При этом разные варианты будут совместимы друг с другом «арифметически» (т.е. для них будут истинны одни и те же арифметические утверждения), но не будут совместимы в теоретико-множественном отношении (для них будут истинны разные теоретико-множественные утверждения, причем найдутся и такие, которые для одного варианта будут истинны, а для другого — ложны). Другими словами, позиция в одной «реализации» некоторой структуры, сохраняя определенный набор отношений, в другой «реализации» приобретает новые структурные свойства (участвует в новых отношениях). Так, число 2 в виде нумерала Цермело представляется как $\{\{\{\}\}\}$, а в виде конечного ординала фон Неймана — как $\{\{\}, \{\{\}\}\}$. Оба представления «реализуют» в контексте соответствующих определений «роль»

[1] Проблема формулируется в виде истории о мальчиках Эрни и Джонни, которых их родители сначала обучают теории множеств, а потом показывают, как с помощью теоретико-множественных понятий можно выразить числа. Родители Эрни научили его, что числа задаются как конечные ординалы фон Неймана, а родители Джонни сказали последнему, что числа определяются как нумералы Цермело. Хотя в целом Эрни и Джонни могут договориться друг с другом, существуют некоторые утверждения о числах как множествах, которые для них имеют *разные* истинностные значения.

(позицию) числа 2 в кумулятивной иерархии множеств, однако одновременно с этим участвуют в иногда совершенно разных теоретико-множественных отношениях (например, {{{}}} является подмножеством {{}, {{}}}, но не наоборот), которые, конечно же, к арифметике никакого отношения не имеют. В этом смысле описания «одних и тех же»[2] математических объектов разными математическими теориями оказываются неполными.

Второе затруднение представлено П. Бенацеррафом в виде дилеммы, согласно которой мы можем иметь либо адекватную эпистемологию для математики, либо объяснение (семантику) математического языка, совместимое со стандартной семантикой А. Тарского. Если верен математический реализм и если математические объекты (допустим, таковые имеются) являются абстрактными, то каким образом мы можем получать к ним когнитивный доступ при условии, что абстрактные объекты не располагаются в пространстве-времени и не участвуют в причинно-следственных отношениях? При этом абстрактные объекты вполне являются значениями констант и переменных, как того требует теория истины А. Тарского, а истинностные значения математических предложений оказываются независимыми от пользователей математического языка и определяются экстралингвистическими факторами (как в случае, например, и физических объектов). То есть если мы желаем задать семантику математического языка подобно стандартной семантике других областей знания, то нам придется решать «трудную проблему» построения адекватной эпистемологии математики (без постулирования разного рода мистических прозрений и интуиции). Если же мы начнем наше исследование или философскую реконструкцию математики с ответа на эпистемологические вопросы (например, скажем, что путем к познанию математических объектов является доказательство или построение), то будем вынуждены отказаться от стандартной семантики для языка математики, т.к. наше решение эпистемологических вопросов уже не будет совместимо, например, с идеей о том, что сингулярные термы обозначают какие-то не зависящие от нас экстралингвистические объекты. В этом случае мы будем вынуждены строить, например, верификационистскую или теоретико-доказательную семантику для математического языка, что, скорее всего, приведет к такой ситуации, когда языки для разных областей знания не будут иметь единообразного семантического объяснения.

В этом состоят два затруднения, представленные П. Бенацеррафом, на которые, как указано выше, должна ответить любая адекватная философия математики. Теперь перейдем к обсуждению того, каким образом эти затруднения разрешаются в рамках структуралистской концепции М. Резника.

II

Наиболее полно собственная разновидность математического структурализма формулируется М. Резником в книге «Математика как наука о паттернах» [Resnik M., 1997]. По его изначальному замыслу эта концепция должна быть платонистской в том отношении, что математика понимается как «наука об абстрактных сущностях, то есть, нематериальных и нементальных вещах, которые не существуют в пространстве и времени» [Resnik M., 1981, p. 529]. Последнее гарантирует, что «логические формы математических высказываний понимаются буквально, а их семантика представляет собой стандартную референциальную семантику, например, в духе Тарского» [Resnik M., 1981, p. 529]. Хотя изначально концепция М. Резника является платонистской, в более поздних работах он характеризует ее уже не как онтологическую концепцию, а как эпистемологическую [Resnik M., 1997] и даже как методологическую (понимая ее как синоним для термина «неонтологическая концепция») [Resnik M., 2019]. Этот переход от платонизма к своего рода умолчанию онтологической позиции связан с концепцией онтологической (и структурной) относительности, что будет рассмотрено ниже.

Как видим, к дилемме П. Бенацеррафа концепция математического структурализма М. Резника подходит со стороны семантики. Таким образом, перед ней стоит нетривиальная задача построения эпистемологии математики.

[2] Что означает «одних и тех же», нам еще предстоит выяснить, однако мы лишь попытаемся это сделать.

Эпистемология выстраивается им в спекулятивном ключе, хотя, как он заявляет, это может получить поддержку от эмпирических исследований, например школы Ж. Пиаже [Resnik M., 1982, p. 97]. С его точки зрения, познание математических структур[3] основывается на чувственном восприятии и абстрагировании и предполагает несколько стадий. Во-первых, это восприятие вещей как чего-то подпадающего под некоторые паттерны. На этой стадии различаются отдельные вещи, их формы и наборы. Во-вторых, это выявление структурных отношений эквивалентности в данных восприятия. На этой стадии обнаруживаются сходства между различными вещами, их формами или наборами вещей, а для различных отношений сходства и различия (эквивалентности) формулируются отдельные предикаты. В-третьих, к сформулированным предикатам добавляются «имена для форм, типов и других паттернов» [Resnik M., 1982, p. 98]. То есть происходит переход от отношений эквивалентности к классам эквивалентности, где классы (подобно множествам) уже считаются отдельными сущностями. Кроме того, такие классы эквивалентности уже предполагают описание отношений между их элементами и позиции, составляющие некоторую структуру, начинают «жить самостоятельной жизнью». Таким образом, эпистемология математики, предлагаемая М. Резником, развивается от чувственных восприятий путем выявления сходств и различий в воспринимаемых предметах и их наборах, а затем последовательного абстрагирования. Такого общего и даже крайне огрубленного представления о предлагаемой эпистемологии будет вполне достаточно для дальнейшего обсуждения, т.к. цель настоящей статьи состоит в обсуждении других моментов.

Онтологическая же часть концепции М. Резника заключается в том, что «математические объекты представляют собой позиции в паттернах» [Resnik M., 1988, p. 413]. Может показаться, что в таком случае должна существовать некоторая теория структур, описывающая структуру, в которой все математические объекты представляют собой позиции, либо структуру, в которой все (математические) структуры являются такими математическими объектами и занимают соответствующие позиции. Тем не менее такая точка зрения идет в разрез с основной задумкой М. Резника, т.к. свою позицию он определяет именно как *философскую*, а математике он дает структурную интерпретацию. Философия сама по себе не является наукой о структурах, поэтому философская интерпретация математики не описывает какую-то сверхструктуру, включающую в себя все математические структуры в том или ином виде. Однако, возможно, все теории описывают некие структуры, а потому неосторожная попытка построить теорию структур может с легкостью привести к противоречиям.

По мнению М. Резника, «структуры существуют независимо от людей и человеческого языка» [Resnik M., 1988, p. 414]. В качестве критерия существования здесь берется непротиворечивость в духе Д. Гильберта, которая предполагает, что для существования объектов, описываемых некоторой математической теорией, достаточно, чтобы эта теория была непротиворечива. Не важно, что окружающее нас пространство не является евклидовым, а потому не содержит в себе параллельных прямых, евклидовых треугольников и других объектов евклидовой геометрии. В силу того что геометрия Евклида является непротиворечивой теорией, описываемые ею пространство и объекты, расположенные в нем, признаются существующими в соответствии с указанным критерием существования.

Конкретные математические объекты (например, число 42, или множество всех подмножеств натуральных чисел, или прямая, лежащая на плоскости) являются позициями в соответствующих структурах и не обладают какими-либо сверхструктурными свойствами. Казалось бы, различные математические объекты могут в одних случаях являться позициями в структуре, а в других — структурами. Например, хотя пространство обычно является структурой, позициями которой будут точки, в рамках теории категорий векторные пространства понимаются как объекты категории векторных пространств. Не получается ли при этом, что

[3] Термины «структура» и «паттерн» используются М. Резником как синонимы, хотя он полагает, что термин «паттерн» является более иллюстративным [Resnik M., 1996, p. 84].

один и тот же математический объект может быть то структурой, то позицией структуры? Ответ на этот вопрос может дать более строгое разграничение структуры и позиции в структуре [Resnik M., 1994]. Так, структура описывается теорией, индивидные переменные которой «пробегают» по позициям структуры, но не могут получить в качестве значения саму структуру. Соответственно, позиция структуры — это (возможное) значение переменной некоторой теории. Значениями переменных теории чисел являются числа, поэтому они представляют собой позиции в соответствующей структуре. Однако возможна ситуация, когда, например, натуральные числа представляются в виде множеств, и тогда можно взять множество натуральных чисел, функцию взятия следующего числа и представить всю последовательность натуральных чисел в виде упорядоченного множества. Такое множество, безусловно, будет являться объектом теории множеств, а потому — позицией в кумулятивной иерархии. Более того, это множество каким-то образом структурировано и его элементы, сами будучи множествами, также являются позициями теории множеств. Такие структурированные позиции остаются полноправными объектами теории (в данном случае — теории множеств), а значит и значениями для соответствующих переменных. Такая ситуация говорит о возможности сведения одной математической теории к другой. Если же сформулировать отдельную теорию для каждого натурального числа, представив таким образом каждое число как структуру, а затем сформулировать теорию чисел как теорию теорий таких структурированных натуральных чисел (ее можно назвать «надтеорией»), то получившаяся теория не будет теорией последовательности структур, т.к. структурированные натуральные числа в рамках этой надтеории будут значениями соответствующих переменных, а потому будут являться структурированными позициями, а не самостоятельными структурами или подструктурами более обширной структуры[4].

Кратко рассмотрим, как М. Резник описывает структуры (паттерны) и отношения между ними. В рамках его концепции структура состоит из одного или нескольких объектов, называемых позициями. Для позиций не важны их внутренние свойства[5], только отношения с другими (или теми же самыми, если отношение рефлексивно) позициями. Позиции М. Резник предлагает понимать через геометрическую метафору точки. Различные структуры могут находиться в следующих отношениях: (1) конгруэнтность (структурный изоморфизм) — это отношение эквивалентности как между абстрактными структурами, так и между конкретными наборами вещей (конкретный набор вещей может реализовывать абстрактную структуру, тогда конкретные вещи «занимают позиции» в структуре); (2) встречаемость (или включение) — «рефлексивное и транзитивное отношение, имеющее место между структурами *P* и *Q*, когда *P* изоморфно структуре *R*, чьи позиции являются позициями *Q* и чьи отношения определимы в *Q*» [Resnik M., 1997, p. 205; Резник М., 2010, с. 223]; частным случаем отношения встречаемости является отношение подпаттерности (структура встречается в другой структуре, и всякая позиция первой является позицией второй); (3) дефинитивная эквивалентность — отношение, при котором две эквивалентные структуры воплощают более крупную структуру, из которой они могут быть получены путем удаления некоторых отношений. Однако для структур, по мнению М. Резника, нет подходящего отношения тождества, т.к. «тождественные паттерны содержат одни и те же позиции, тогда как эквивалентные, взаимно включающие и[ли] конгруэнтные паттерны не обязательно [содержат одни и те же позиции]» [Resnik M., 1997, p. 209].

Соответственно, проблема отождествления, поставленная П. Бенацеррафом (на примере представления натуральных чисел в виде множеств), решается в концепции М. Резника следующим образом. Следует признать, что структура арифметики натуральных чисел (в любом ее виде, например заданная через ноль и следующее число) встречается в структуре куму-

[4] Аналогичную ситуацию М. Резник рассматривает с точки зрения теории категорий, а также при сравнении своих идей с идеями П. Зиффа [Resnik M., 1994, pp. 60–61].

[5] Хотя в более широком смысле структуры (особенно вне математики) могут содержать позиции с «монадическими» отношениями (цвет, тон и др.) [Resnik M., 1997, p. 203].

лятивной иерархии множеств большое количество раз и «реализуется» разными наборами множеств. Например, она может встречается в виде нумералов Цермело, где ноль определен как пустое множество, а следующее число — как синглетон («текущего» числа, для которого задается следующее); в виде конечных ординалов фон Неймана, где ноль также определен как пустое множество, а следующее число — как объединение («текущего») числа с его же синглетоном. Позиции в такой подструктуре (на деле — усечении) структуры множеств, являющейся «реализацией» структуры натуральных чисел, могут занимать разные множества, разные объекты. Однако говорить о том, что число 2 является множеством $\{\{\{\}\}\}$ или же множеством $\{\{\}, \{\{\}\}\}$ некорректно. Указанные множества могут занимать позицию 2 в структуре натуральных чисел, могут «играть роль» числа 2, но они не являются числом 2. Никакой объект не является позицией в структуре, но может лишь занимать позицию в структуре. Другими словами, ошибочно утверждать какое-либо из двух равенств: $2 = \{\{\}, \{\{\}\}\}$ или $2 = \{\{\{\}\}\}$. Число 2 в структуре натуральных чисел является не множеством, а позицией. Какие-либо (сверхарифметические) отношения (например, отношение *быть подмножеством*) объектов, занимающих в той или иной ситуации позицию числа 2, не являются отношениями структуры натуральных чисел. Таким образом, мы подходим к концепции структурной относительности, которая развивается аналогично концепции онтологической относительности У.В.О. Куайна, но еще больше радикализирует последнюю.

III

С точки зрения У.В.О. Куайна, имеются лишь две возможные точки зрения: точка зрения описания того, как строится теория, и точка зрения самой теории. Однако это не означает, что какая-то из них (либо какая-то третья) является привилегированной в онтологическом смысле. Постулирование каких-то объектов как реально существующих выполняется с точки зрения теории, но невозможно противопоставить теорию и нечто внетеоретическое, некоторый факт например. По У.В.О. Куайну, не может быть нейтральной точки зрения чистого исследования. Всякое исследование осуществляется изнутри некоторой принимаемой теории, онтология которой в этом случае являет собой *фоновую онтологию*. Теории создаются людьми, но это не вступает в противоречие с тем, что объекты этих теорий реальны. Безусловно, можно исследовать вопрос построения теории, что, в свою очередь, предполагает выбор точки зрения, принимающей выстраиваемую теорию как нечто данное, как нечто описывающее реальность. Если основной задачей онтологии является ответ на вопрос «Что есть?» и этот ответ дается в рамках конкретных научных дисциплин, то никакой специально философской точки зрения, которая могла бы поставить под сомнение постулированные нашими наилучшими научными теориями объекты, нет. Исследование знания происходит изнутри принимаемой теории и предполагает реальность объектов этой теории. Другими словами[6], эпистемология предполагает онтологию и само объяснение того, каким образом мы выстраиваем теорию, описывающую мир, является частью этой самой теории. В решении эпистемологических вопросов мы вынуждены опираться на нашу теорию о мире, а наше объяснение того, почему мы обладаем именно такой теорией, является эпистемологическим вопросом.

Онтология, предполагаемая теорией, относительна, а «сказать, о каких объектах некто ведет речь, означает сказать не более того, как мы предлагаем переводить его термины в наши; мы свободны изменять наш выбор опосредующей функции… для теории структура важна, а не выбор объектов» [Quine W.V.O., 1981, p. 20]. При этом такой «глобальный» структурализм У.В.О. Куайна является переформулировкой его концепции онтологической относительности, а вовсе не относится к онтологии как какому-то философскому исследованию. Итак, задать опосредующую функцию (прокси-функцию), которая переводит онтологию некоторой теории в другой домен, сохраняя при этом общую структуру, значит дать перевод или интерпретацию теории с помощью нового домена. Например, термин «кролик»

[6] Ср. с описанием того, как эпистемология «содержит» естественные науки и сама «содержится» в естественных науках в [Quine W.V.O., 1969, p. 83].

может быть переведен в «манифестируемая кроликовость», «неотделимые части кролика», «мереологическое дополнение кролика» и т.д. Такой перевод, если он сохраняет структуру теории, не меняет истинностных значений ее предложений. Допустим, у нас имеется теория множеств и теория натуральных чисел. Мы можем определить опосредующую функцию, выполняющую перевод теории натуральных чисел в теорию множеств некоторым образом (например, используя для натуральных чисел конечные ординалы фон Неймана). В этом случае о теории множеств говорится как о теории, задающей *фоновую онтологию*. При этом для У.В.О. Куайна как сторонника классической логики важным является сохранение закона исключенного третьего[7], что означает следующее: для любого натурального числа то, что это число тождественно некоторому множеству, должно быть либо истинно, либо ложно. Однако такое сведение, сохраняя структуру теории, не сохраняет объекты, а элиминирует их в пользу объектов фоновой онтологии. Последнее означает, что никаких натуральных чисел в нашем случае вовсе нет, а есть только множества, т.к. натуральные числа сводимы к строго определенным множествам, которые мы получаем в качестве значений опосредующей функции, примененной к натуральным числам при переводе одной теории в другую.

Структурная относительность в концепции М. Резника проявляется в выборе инструментов для суждения о некоторой структуре, в первую очередь это касается *фоновой теории*. Так, структуры натуральных чисел с точки зрения первопорядковой логики, с точки зрения второпорядковой логики и с точки зрения теории множеств различаются в плане определимости. К примеру, в структуре первопорядковой арифметики позициями будут числа, а во второпорядковой арифметике уже имеется возможность утверждать, что существуют не только числа, но и (благодаря кодированию и функции взятия следующего числа) сама последовательность чисел. Если же мы обратимся к теоретико-множественному описанию структуры натуральных чисел, то обнаружим, что числа определяются уже не как позиции, а как структурированные позиции, да и роль числовой последовательности может играть уже не только упорядоченное множество из множества натуральных чисел и функции взятия следующего числа, но и упорядоченное множество, в котором эти два элемента поменяны местами. Очевидно, требуется соответствующая переформулировка теории, чтобы такой подход работал, однако два указанных упорядоченных множества все равно будут *разными* объектами. Соответствующим образом для разных пониманий той или иной структуры (на основе первопорядковой логики, второпорядковой логики или теории множеств) будут по-разному формулироваться отношения между структурами, и даже понятие изоморфизма оказывается относительным, если у нас, например, недостаточно выразительных средств для описания каких-то особенностей. Другими словами, использование формальных языков *более высоких* порядков дает *более подробное и точное* описание различных структур[8].

Однако хотелось бы подчеркнуть другую особенность структурной относительности в концепции М. Резника, которая может быть названа доктриной отсутствующих фактов трех типов. В рамках структурной интерпретации математического знания позиция с необходимостью является позицией некоторой структуры. Используя визуальную метафору, М. Резник предлагает понимать позиции как точки. Точка сама по себе не отличима от любой другой точки; точка не может быть каким-то образом индивидуирована, если она не расположена на некоторой плоскости; о тождестве и различии точек имеет смысл говорить только в том случае, если они принадлежат одной и той же плоскости. Точно так же позиция не может быть отличима от другой позиции, если они не принадлежат одной и той же структуре или «реализации» этой структуры. Другими словами, не могут существовать факты о тождестве и различии позиций в тех или иных структурах за исключением ситуации, когда

[7] Ср. с рассуждениями М. Резника по поводу структурализма и закона исключенного третьего у У.В.О. Куайна в [Resnik M., 2019, p. 307–308].

[8] Ср. с рассуждениями о структурной относительности у М. Резника в [Resnik M., 1996; 1997, pp. 250–254].

учитывается сама эта структура, к которой относятся рассматриваемые позиции. Это первый тип отсутствующих фактов. Соответственно, не могут существовать факты о правильной сводимости математических теорий. Например, не могут существовать факты о том, какое представление натуральных чисел как множеств является правильным. Это второй тип отсутствующих фактов. Кроме того, не могут существовать факты о том, указывают или нет термины (константы и даже предикаты) некоторой математической теории на позиции (или их группы с отношениями) в разных включениях структуры, даже если речь идет о конгруэнтных структурах. Следовательно, если не могут существовать факты о том, что числа являются множествами, то не могут существовать и факты о том, что термин «число» указывает на множество или конкретные нумералы указывают на какие-то конкретные множества. Это третий тип отсутствующих фактов. Если же акцент при рассмотрении структурной интерпретации математики переносится с объектов на теории, как это делается в более поздних работах М. Резника [Resnik M., 2019], то второй тип фактов (например, фактов о том, какое представление натуральных чисел как множеств является правильным) заменяется на соответствующий тип фактов о том, какая интерпретация одной теории в другой теории является правильной (в нашем случае — какой перевод теории натуральных чисел в теорию множеств является правильным). И факты такого типа тоже не имеют места.

В заключение хотелось бы указать на то, что спор[9] Эрни и Джонни из формулировки проблемы отождествления П. Бенацеррафа не может быть разрешен в силу того, что оба спорщика ошибаются, а не потому, что ими для указания на числа используются непереводимые каузальные цепи с точки зрения каузальной теории референции С. Крипке [Хлебалин А.В., 2008]. Связано это обстоятельство именно с тем, что теория натуральных чисел описывает определенную структуру, которая многократно встречается (включается) в структуре, описываемой теорией множеств. Выбор одной или другой «реализации» натуральных чисел как множеств не зависит от правильности выбираемой «реализации», поскольку утверждения тождества для позиций структуры имеют смысл *только* при сравнении с другими позициями той же самой структуры. Предполагать при этом, что «[т]еория множеств Г. Кантора, ее аксиоматизации, предложенные фон Нейманом, а также Цермело и Френкелем, являются каноническим описанием чисел» [Хлебалин А.В., 2008, с. 12], либо означает ошибку относительно оснований математики, либо свидетельствует в пользу доктрины У.В.О. Куайна об экспликации как элиминации с неявно принимаемой (необоснованной) гипотезой о том, что теория множеств является наилучшей научной теорией для оснований математики. Согласиться с последним весьма и весьма сложно.

[9] См. примеч. 1.

Список литературы

Ламберов Л.Д. Бенацерраф и теоретико-множественный редукционистский реализм // Эпистемология и философия науки. 2021. Т. 58, № 1. С. 142–160. DOI: https://doi.org/10.5840/eps202158115

Хлебалин А.В. Тождество, указание и истина в математике: перспективы структурализма // Гуманитарные науки в Сибири. 2008. № 1. С. 11–16.

Резник М. Структурализм и идентичность математических объектов // Логические исследования / Ин-т философии РАН. М., СПб.: Центр гуманит. инициатив, 2010. Вып. 16. С. 221–232.

Benacerraf P. Mathematical Truth // The Journal of Philosophy. 1973. Vol. 70, iss. 19. P. 661–679. DOI: https://doi.org/10.2307/2025075

Benacerraf P. What Numbers Could not Be // The Philosophical Review. 1965. Vol. 74, no. 1. P. 47–73. DOI: https://doi.org/10.2307/2183530

Quine W.V.O. Epistemology Naturalized // Ontological Relativity and Other Essayes. N.Y.: Columbia University Press, 1969. P. 69–90. DOI: https://doi.org/10.7312/quin92204-004

Quine W.V.O. Things and Their Place in Theories // Theories and Things. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1981. P. 1–23.

Resnik M. Mathematical Knowledge and Pattern Cognition // Canadian Journal of Philosophy. 1975. Vol. 5, iss. 1. P. 25–39. DOI: https://doi.org/10.1080/00455091.1975.10716095

Resnik M. Mathematics as a Science of Patterns. N.Y.: Oxford University Press, 1997. 304 p.

Resnik M. Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology // Nous. 1982. Vol. 16, no. 1. P. 95–105. DOI: https://doi.org/10.2307/2215419

Resnik M. Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference // Nous. 1981. Vol. 15, no. 4. P. 529–550. DOI: https://doi.org/10.2307/2214851

Resnik M. Mathematics from the Structuralist Point of View // Revue Internationale de Philosophie. 1988. Vol. 42, no. 167(4). P. 400–424.

Resnik M. Non-ontological Structuralism // Philosophia Mathematica. 2019. Vol. 27, iss. 3. P. 303–315. DOI: https://doi.org/10.1093/philmat/nky002

Resnik M. Numbers as Structures and as Positions in Structures // Language, Mind, and Art. Essays in Appreciation and Analysis, in Honor of Paul Ziff / ed. by D. Jamieson. Dodrecht, NL: Kluwer Academic Publishers, 1994. P. 55–67. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-015-8313-8_5

Resnik M. Structural Relativity // Philosophia Mathematica. 1996. Vol. 4, iss. 2. P. 83–99. DOI: https://doi.org/10.1093/philmat/4.2.83

Получена: 01.08.2022. Принята к публикации: 18.08.2022

References

Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. *The Journal of Philosophy*. Vol. 70, iss. 19, pp. 661–679. DOI: https://doi.org/10.2307/2025075

Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. *The Philosophical Review*. Vol. 74, no. 1, pp. 47–73. DOI: https://doi.org/10.2307/2183530

Khlebalin, A.V. (2008). [Identity, reference and truth in mathematics: The structuralists' prospects]. *Gumanitarnye nauki v Sibiri* [Humanitarian Sciences in Siberia]. No. 1, pp. 11–16.

Lamberov, L.D. (2021). [Benacerraf and set-theoretic reductionist realism]. *Epistemologiya i filosofiya nauki* [Epistemology & Philosophy of Science]. Vol. 58, no. 1, pp. 142–160. DOI: https://doi.org/10.5840/eps202158115

Quine, W.V.O. (1969). Epistemology naturalized. Ontological relativity and other essays. New York: Columbia University Press, pp. 69–90. DOI: https://doi.org/10.7312/quin92204-004

Quine, W.V.O. (1981). Things and their place in theories. *Theories and things*. Cambridge, MA: Harvard University Press, pp. 1–23.

Resnik, M. (1975). Mathematical knowledge and pattern cognition. *Canadian Journal of Philosophy*. Vol. 5, iss. 1, pp. 25–39. DOI: https://doi.org/10.1080/00455091.1975.10716095

Resnik, M. (1981). Mathematics as a science of patterns: Ontology and reference. *Nous*. Vol. 15, no. 4, pp. 529-550. DOI: https://doi.org/10.2307/2214851

Resnik, M. (1982). Mathematics as a science of patterns: Epistemology. *Nous*. Vol. 16, no. 1, pp. 95–105. DOI: https://doi.org/10.2307/2215419

Resnik, M. (1988). Mathematics from the structuralist point of view. *Revue Internationale de Philosophie* [International Journal of Philosophy]. Vol. 42, no. 167(4), pp. 400–424.

Resnik, M. (1994). Numbers as structures and as positions in structures. *D. Jamieson (ed.) Language, mind, and art. Essays in appreciation and analysis, in honor of Paul Ziff*. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publ., pp. 55–67. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-015-8313-8_5

Resnik, M. (1996). Structural relativity. *Philosophia Mathematica*. Vol. 4, iss. 2, pp. 83–99. DOI: https://doi.org/10.1093/philmat/4.2.83

Resnik, M. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. New York: Oxford University Press, 304 p.

Resnik, M. (2010). [Structuralism and the identity of mathematical objects]. *Logicheskie issledovaniya* [Logical Investigations]. Moscow, St. Petersburg: IPh RAS Publ., Tsentr Gumanitarnykh Initsiativ Publ., iss. 16, pp. 221–232.

Resnik, M. (2019). Non-ontological structuralism. *Philosophia Mathematica*. Vol. 27, iss. 3, pp. 303–315. DOI: https://doi.org/10.1093/philmat/nky002

Received: 01.08.2022. Accepted: 18.08.2022

Об авторе

Ламберов Лев Дмитриевич
кандидат философских наук, доцент,
доцент кафедры онтологии и теории познания,
Уральский гуманитарный институт

Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б.Н. Ельцина,
620002, Екатеринбург, пр. Ленина, 51;
e-mail: lev.lamberov@urfu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9228-4909
ResearcherID: Q-5183-2016

About the author

Lev D. Lamberov
Candidate of Philosophy, Docent,
Associate Professor of the Department
of Ontology and Theory of Knowledge,
Ural Institute of Humanities

Ural Federal University named after
the first President of Russia B.N. Yeltsin,
51, Lenin av., Ekaterinburg, 620002, Russia;
e-mail: lev.lamberov@urfu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9228-4909
ResearcherID: Q-5183-2016

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:
Ламберов Л.Д. Три отсутствующих факта математического структурализма // Вестник Пермского университета. Философия. Психология. Социология. 2022. Вып. 3. С. 389–398. DOI: 10.17072/2078-7898/2022-3-389-398

For citation:
Lamberov L.D. [Three absent facts of mathematical structuralism]. *Vestnik Permskogo universiteta. Filosofia. Psihologia. Sociologia* [Perm University Herald. Philosophy. Psychology. Sociology], 2022, issue 3, pp. 389–398 (in Russian). DOI: 10.17072/2078-7898/2022-3-389-398