

Учредитель: Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Научный журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" публикует оригинальные научные статьи, краткие сообщения и обзорные статьи по направлениям журнала на русском и английском языках, ранее не публиковавшиеся и не представленные для публикации в других изданиях. Все статьи проходят рецензирование членами редакционной коллегии журнала и внешними рецензентами.

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

БУЗМАКОВА М. М., к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАЛАНИН В. В., д. т. н., профессор; Пермь, Россия;

БАРУЛИНА М. А., д. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

НУРБАКОВА Д. М., PhD in Computer Science; Национальный институт прикладных наук Лиона (National Institute of Applied Sciences of Lyon), Лион, Франция.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

БУЗМАКОВА М. М., к.ф.-м.н., доцент, **главный редактор**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

РУСАКОВА О. Л., к.ф.-м.н., доцент, **ответственный секретарь**; Пермь, Россия;

АЛЕКСЕЕВ А. О., д.т.н., доцент; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

АПТУКОВ В. Н., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

АПУШКИНСКАЯ Д. Е., д.ф.-м.н.; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

БАРУЛИНА М. А., д.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

БИРЮКОВ А. Н., д.э.н., доцент; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;

БОРИСОВ В. В., д.т.н., профессор; Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», Смоленск, Россия;

ВЕЧТОМОВ Е. М., д.ф.-м.н., профессор; Вятский государственный университет, Киров, Россия;

ГУСЕВ А. Л., д.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ДЕМИДОВ С. С., д.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

ИВАНОВ Д. В., д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

ИСАЕВ К. П., д.ф.-м.н.; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ИШКИН Х. К., д.ф.-м.н.; доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

КРИВОШЕЕВА О. А., д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

КОССОВИЧ Л. Ю., д.ф.-м.н., профессор; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

КУЗНЕЦОВ А. Г., к.т.н.; Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия;

МАЛАНИН В. В., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАТВЕЕНКО В. П., д.т.н., профессор, академик РАН; Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия;

МАХНЕВ А. А., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

ПАЛКОВА И. В., д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

ПЕСТРЕНИН В. М. к.ф.-м.н., доцент; Пермь, Россия;

ПОЛОСКОВ И. Е., д.ф.-м.н., доцент; Пермь, Россия.

РУСАКОВ С. В., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

САВЧИН В. М., д.ф.-м.н., профессор; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

СЕЛЕТКОВ И. П., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ТРУСОВ П. В., д.ф.-м.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

ХАЧАЙ М. Ю., д.ф.-м.н., профессор РАН, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

ХЕННЕР Е. К., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАО; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ФАЗУЛЛИН З.Ю., д.ф.-м.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ЧЕРМНЫХ В. В., д.ф.-м.н., доцент; Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия;

ЧЕРКАСОВА В. А., к.ф.-м.н., доцент; Астраханский государственный университет имени В. Н. Татищева, Астрахань, Россия;

ЧЕРНИКОВ А. В., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ЧИНЕНОВА В. Н., к.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

ШАХМАМЕТОВА Г. Р., ` д.т.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ШВАРЦ К. Г., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ЮМАГУЛОВ М. Г., д.ф.-м.н., профессор; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ЯСНИЦКИЙ Л. Н., д.т.н., профессор; Пермский филиал Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики", Пермь, Россия.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ No ФС 77-66787 от 08.08.2016.

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (приказ от 08.07.2024). Научные специальности: Вещественный, комплексный и функциональный анализ; Дифференциальные уравнения и математическая физика; Геометрия и топология; Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика; Теоретическая механика, динамика машин; Механика деформируемого твердого тела; Механика жидкости, газа и плазмы; Искусственный интеллект и машинное обучение; Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; Теоретическая информатика, кибернетика; Системный анализ управления и обработка информации, статистика; Вычислительные системы и их элементы; Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования. Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ, eLIBRARY ID 28484).

Founder: Perm State University

The journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" publishes Full Articles, Short Communications Article and Review paper/perspectives on the journal's directions, which have not been previously published. The papers have been written in Russian and English. The papers are reviewed by the journal editorial board members and external reviewers.

EDITORIAL COUNCIL

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm, Russia;
BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
NURBAKOVA D. M., PhD in Computer Science; National Institute of Applied Sciences of Lyon, France.

EDITORIAL BOARD

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Editor-in-Chief**; Perm State University, Perm, Russia;
RUSAKOVA O. L., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Executive Secretary**; Perm, Russia;
ALEKSEEV A. O., Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
APTUKOV V. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
APUSHKINSKAYA D. E., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;
BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
BIRUKOV A. N., Doctor of Science in Economics, Associate Professor; Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;
BORISOV V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Smolensk Branch of National Research University "MEI", Smolensk, Russia;
VECHTOMOV E. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Vyatka State University, Kirov, Russia;
GUSEV A. L., Doctor of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
DEMIDOV S. S., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
IVANOV D. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
ISAEV K. P., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
ISHKIN H. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
KRIVOSHEEVA O. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
KOSSOVICH L. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
KUZNECOV A. G., Candidate of Science in Engineering; Perm State Humanitarian and Pedagogical University, Perm, Russia;
MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
MATVEENKO V. P., Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician of RAS; Institute of Continuous Media Mechanics, UrD RAS, Perm, Russia;

MAHNEV A. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS;
PAPKOVA I. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
PESTRENIN V. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm, Russia;
POLOSKOV I. E., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm, Russia;
RUSAKOV S. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
SAVCHIN V. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;
SELETKOV I. P., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
TRUSOV P. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
HACHAI M. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of RAS, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS, Yekaterinburg, Russia;
HENNER E. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAO; Perm State University, Perm, Russia;
FAZULLIN Z. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
CHERMNYH V. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Piterim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia;
CHEKASOVA V. A., Candidate of Sciences in Physical and Mathematical, Associate Professor; V. N. Tatishchev Astrakhan State University, Astrakhan, Russia;
CHERNIKOV A. V., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
CHINENOVA V. N., Candidate of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
SHAHMAMETOVA G. R., Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
SHVARTS K. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
UMAGULOV M. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
YASNICKIY L. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm Branch of the National Research University Higher School of Economics, Perm, Russia.

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor). Certificate of registration of the mass media PI No. FS 7 -66787 dated 08.08.2016.

The journal is included in the peer-reviewed scientific publications list for the main research results should be published (Candidate of Sciences and Doctor of Sciences, order dated 07/08/2024). Scientific specialties: Real, complex and functional analysis; Differential equations and mathematical physics; Geometry and topology; Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics; Computational Mathematics; Theoretical mechanics, dynamics of machines; Mechanics of deformable solids; Mechanics of liquid, gas and plasma; Artificial intelligence and machine learning; Mathematical modeling, numerical methods and software packages; Theoretical Computer science, cybernetics; System analysis, information management and processing, statistics; Computer systems and their elements; Computer modeling and design automation. The journal is included in the national information and analytical system "Russian Science Citation Index" (eLIBRARY ID 28484).

Содержание

МАТЕМАТИКА

Алфёров Г. В., Иванов Г. Г., Королёв В. С., Потоцкая И. Ю. Производные числа и устойчивость решений динамических систем.....	5
Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Иванов С. К., Лановая А. В. Квадратурная формула для сингулярных интегралов с ядром Гильберта.....	18
Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф. Симметричные системы координатных функций для однородных краевых задач на прямоугольнике с уравнениями в частных производных.....	30
Протасов Н. С., Черных В. В. Пирсовский пучок полуколец для полукольца с инволюцией.....	49

МЕХАНИКА

Bauer S. M., Dorofeev N. P., Smirnov A. L. Natural Frequencies of Coupled Beams: The Effect of Geometric Parameters.....	58
Тукмаков Д. А. Численное моделирование колебаний электрически заряженной газовой среды в акустическом резонаторе с электрическим потенциалом на стенках.....	71

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Ковальчик Р. В., Ротанева Н. Ю., Зареченский Д. А. Использование искусственных нейронных сетей для оптимизации технологических параметров процессов наплавки высоколегированных сплавов.....	87
Старцева О. Г., Фаттахов Э. Р. Сравнительный анализ производительности и архитектурных характеристик фреймворков Spring Boot, ASP.NET Core и Ktor для разработки серверных приложений.....	99
Правила подачи и оформления рукописей.....	110

C o n t e n t s

MATHEMATICS

Alferov G. V., Ivanov G. G., Korolev V. S., Pototskaya I. Yu. Derivate Numbers and Solution Stability in Dynamical Systems.....	5
Orlov V. N., Kornilov A. Ya., Ivanov S. K., Lanovaya A. V. Quadrature Formula for Singular Integrals With the Hilbert Kernel.....	18
Pastukhov D. F., Pastukhov Yu. F. Symmetric Systems of Coordinate Functions for Homogeneous Boundary Value Problems on a Rectangle With Partial Differential Equations.....	30
Protasov N. S., Chermnykh V. V. Pierce Sheaf of Semirings for a Semiring With Involution.....	49

MECHANICS

Bauer S. M., Dorofeev N. P., Smirnov A. L. Natural Frequencies of Coupled Beams: The Effect of Geometric Parameters.....	58
Tukmakov D. A. Numerical Simulation of Oscillations of an Electrically Charged Gas Suspension in an Acoustic Resonator With an Electric Potential on the Walls.....	71

COMPUTER SCIENCE

Kovalchik R. V., Rotaneva N. Yu., Zarechenskiy D. A. Use of An Artificial Neural Networks for Optimizing Technological Parameters of High-Alloy Surfacing Processes..	87
Startseva O. G., Fattakhov E. R. Comparative Analysis of Performance and Architectural Characteristics of Spring Boot, ASP.NET Core, and Ktor Frameworks for Developing Server Applications.....	99
Rules for submission and structure of manuscripts.....	111

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 517.925.7

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-5-17

<https://elibrary.ru/xbhxbo>**Производные числа и устойчивость решений
динамических систем****Геннадий Викторович Алфёров¹, Геннадий Григорьевич Иванов²,
Владимир Степанович Королёв³, Ирина Юрьевна Потоцкая⁴**^{1, 2, 3, 4} Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия¹ g.alferov@spbu.ru² guennadi.ivanov@gmail.com³ v.korolev@spbu.ru,⁴ i.pototskaia@spbu.ru

Аннотация. В настоящей работе решается задача расширения класса исследуемых динамических систем за счет ослабления требований к дифференцируемости их правых частей. Целью является разработка критериев устойчивости для систем, где функции не обладают непрерывными производными. В основе предлагаемого подхода лежит применение аппарата частных производных чисел (ЧПЧ). Данный математический инструмент позволяет анализировать сложные функции нескольких переменных в точках, где обычный градиент не определен. Авторы развивают теорию ЧПЧ, базируясь на ранее опубликованных общетеоретических работах и результатах применения этого аппарата в задачах стабилизации. Важной особенностью исследования является отказ от использования аппарата производных Дини. Это позволило избежать излишнего усложнения доказательств и необходимости введения громоздких вспомогательных конструкций для функций многих переменных. В терминах теории частных производных чисел сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В работе представлены соответствующие теоремы и их подробные обоснования. Полученные результаты позволяют эффективно исследовать устойчивость сложных нелинейных систем, не требуя классической гладкости их математических моделей. Данный подход расширяет возможности прикладного анализа динамических процессов в технике и управлении.

Ключевые слова: *устойчивость систем обыкновенных дифференциальных уравнений; устойчивость нулевого решения; второй метод Ляпунова; производные числа; частные производные числа.*

Для цитирования: Алфёров Г. В., Иванов Г. Г., Королёв В. С., Потоцкая И. Ю. Производные числа и устойчивость решений динамических систем // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 5–17. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-5-17. <https://elibrary.ru/xbhxbo>.

Статья поступила в редакцию 13.04.2026; одобрена после рецензирования 07.09.2026; принята к публикации 30.09.2026.



© Алфёров Г. В., Иванов Г. Г., Королёв В. С., Потоцкая И. Ю., 2026
Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MATHEMATICS

Research article

Derivate Numbers and Solution Stability in Dynamical Systems

Gennady V. Alferov¹, Gennady G. Ivanov², Vladimir S. Korolev³, Irina Yu. Pototskaya⁴

^{1, 2, 3, 4} St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

¹ g.alferov@spbu.ru

² guennadi.ivanov@gmail.com

³ v.korolev@spbu.ru,

⁴ i.pototskaia@spbu.ru

Abstract. This paper addresses the problem of expanding the class of investigated dynamical systems by relaxing the differentiability requirements for their right-hand sides. The objective is to develop stability criteria for systems where functions lack continuous derivatives. The proposed approach is based on the application of the framework of partial derivate numbers (PDN). This mathematical tool enables the analysis of complex functions of several variables at points where the conventional gradient is undefined. The authors further develop the theory of PDN, building upon previously published theoretical works and results of applying this framework to stabilization problems. A key feature of this study is deliberate avoidance of Dini derivatives. This approach circumvents excessive complexity in proofs and the need for cumbersome auxiliary constructions for functions of multiple variables. In terms of the theory of partial derivate numbers, necessary and sufficient stability conditions for the zero solution of a system of ordinary differential equations (ODEs) are formulated and proven. The paper presents the relevant theorems along with their detailed substantiations. The obtained results allow for efficient investigation of the stability of complex nonlinear systems without requiring classical smoothness of their mathematical models. This approach extends the capabilities of applied analysis of dynamical processes in engineering and control.

Keywords: *stability of systems of ordinary differential equations; stability of the trivial solution; Lyapunov's second method; derivative numbers; partial derivative numbers.*

For citation: Alferov, G. V., Ivanov, G. G., Korolev, V. S. and Pototskaya, I. Yu. (2026), "Derivate Numbers and Solution Stability in Dynamical Systems", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 5–17, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-5-17, <https://elibrary.ru/xbhxbo>.

The article was submitted 13 Apr 2026; approved after review 07 Sep 2026; accepted for publication 30 Sep 2026.

Введение

При исследовании устойчивости движения одним из основных методов является метод, предложенный А. М. Ляпуновым [1], который сводится к отысканию некоторых функций, обладающих определенными свойствами. Первым вопрос об обратимости метода Ляпунова поставил Н. Г. Четаев [2]. Сформулированная проблема привлекла внимание исследователей еще в 30-е годы XX века. Первый положительный результат в этом направлении был получен К. П. Персидским [3], установившим обратимость теоремы Ляпунова об устойчивости.

Положительное решение вопроса о существовании функций Ляпунова не только обосновало универсальность классических теорем второго метода Ляпунова, но и позволило развить глубокую теорию устойчивости движения.

В последующем, особенно в 1950-е годы, в литературе появилось значительное число работ, посвященных второму методу Ляпунова. Подробное освещение этого вопроса можно найти в монографии Н. Н. Красовского [4] и И. Г. Малкина [5]. Основным вывод, который следует из результатов этих работ, был сформулирован Красовским и заключается в том, что характер поведения возмущенных движений, определенный той или иной функцией из классических теорем второго метода Ляпунова, является необходимым и достаточным условием существования такой функции.

В настоящей работе предлагается новый подход к исследованию устойчивости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамический объект. Он основывается на применении аппарата производных чисел и частных производных чисел [6]. Это математический инструмент, позволяющий исследовать сложные функции нескольких переменных. Его использование позволяет снизить требования к степени гладкости правых частей ОДУ, что расширяет класс исследуемых систем.

Ранее авторами были опубликованы общетеоретические работы [7–16], в которых сформулированы основные определения и положения теории производных чисел для функций одной и нескольких переменных, приведены необходимые обоснования и доказательства, обобщены некоторые классические теоремы математического анализа. В статьях [17–20] рассмотрены возможности применения математического аппарата ЧПЧ в прикладных задачах управления и стабилизации.

Для последовательного и понятного изложения предлагаемого подхода начнем с изложения основных понятий и главных положений аппарата ЧПЧ.

Производные числа функции одной переменной

Пусть f — определенная на открытом интервале (a, b) функция, принимающая значения из множества вещественных чисел R , т. е. $f : (a, b) \rightarrow R$, $a, b \in R$, $a < b$.

Выберем на промежутке (a, b) произвольную точку x_0 .

Определение 1. Число λ будем называть *производным числом функции f в точке x_0* , если существует последовательность $\{x_k\}$ такая, что $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} = \lambda.$$

Для большей ясности отметим, что справедливы следующие очевидные утверждения: в каждой точке интервала (a, b) функция f имеет по крайней мере одно производное число; функция f дифференцируема в точке $x \in (a, b)$ тогда и только тогда, когда в точке x она имеет только одно производное число.

То обстоятельство, что λ есть производное число функции f в точке x_0 , будем записывать как $\lambda = \lambda[f](x_0)$.

Определение 2. Функция f называется *монотонной*, если из $x < y$ следует $f(x) \leq f(y)$ или $f(x) \geq f(y)$. В первом случае функция f называется *возрастающей*, а во втором — *убывающей*. Если же из $x < y$ следует выполнение строгого неравенства $f(x) < f(y)$ или $f(x) > f(y)$, то f называется *строго монотонной*. Желая подчеркнуть при необходимости, о какой именно монотонности идет речь, говорят, что функция f строго возрастает, если из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$, и строго убывает, если реализуется вторая возможность [21].

Теорема 1. Для того чтобы непрерывная функция f была строго монотонной, необходимо и достаточно, чтобы все ее производные числа были одного знака, и не существовало интервала, в каждой точке которого функция f имела бы нулевое производное число.

Доказательство.

Необходимость. Пусть f непрерывна, и для определенности будем считать ее строго возрастающей. Выберем произвольную точку x_0 и сходящуюся к ней последовательность $\{x_k\}$. Не нарушая общности, последовательность $\{x_k\}$ можно выбрать такой, чтобы существовал предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}.$$

По предположению функция f строго возрастает, и потому сразу для всех k будет

$$\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0} \geq 0,$$

откуда, в силу произвольности выбора точки x_0 и последовательности $\{x_k\}$, и следует, что все производные числа функции f имеют один и тот же знак. Случай, когда f строго убывает, рассматривается аналогично.

Покажем теперь, что если f строго монотонна и непрерывна, то выполняется и второе условие теоремы. Пусть, напротив, существует интервал $[a, b]$, в каждой точке которого функция f имеет нулевое производное число. В силу непрерывности и монотонности f переводит интервал $[a, b]$ в некоторый интервал $[\alpha, \beta]$ с мерой $m[\alpha, \beta] = \beta - \alpha > 0$.

Как известно [1], если для некоторого $p \geq 0$ строго монотонная функция f в каждой точке множества $E \subset [a, b]$ имеет хотя бы одно производное число $\lambda[f](x)$ такое, что

$$|\lambda[f](x)| \leq p,$$

то

$$m^*f(E) \leq p \cdot m^*E,$$

где через m^* обозначается внешняя мера соответствующего множества.

Применяя этот результат к рассматриваемому случаю при $p = 0$, будем иметь

$$m^*f([a, b]) = mf([a, b]) = m[\alpha, \beta] = |\beta - \alpha| = 0 \cdot |\beta - \alpha| = 0.$$

Но это противоречит полученному выше неравенству $|\beta - \alpha| > 0$, и, следовательно, интервала $[a, b]$, в каждой точке которого функция f имеет нулевое производное число, существовать не может.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Покажем, что в этом случае функция f является строго монотонной. Предположим противное, т.е., что f не является монотонной. Тогда она, в частности, не является монотонно возрастающей, следовательно, найдутся две точки x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$, такие, что $f(x_1) > f(x_2)$. Через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ проведем прямую $l(x) = qx + r$. Заметим, что так как $f(x_1) > f(x_2)$, то q обязательно меньше нуля.

Рассмотрим все возникающие при таком построении возможности. Предположим сначала, что существует убывающая последовательность $\{x'_k\}$, сходящаяся к x_1 , и такая, что для всех k будет $f(x'_k) \leq l(x'_k)$. Тогда, учитывая, что $f(x_1) = l(x_1)$, имеем

$$\frac{f(x'_k) - f(x_1)}{x'_k - x_1} \leq \frac{l(x'_k) - l(x_1)}{x'_k - x_1} = q < 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$ (его, не нарушая общности, можно считать существующим), заключаем, что функция f в точке x_1 имеет отрицательное производное число, не превосходящее q .

Пусть такой последовательности $\{x'_k\}$ не существует, но существует возрастающая последовательность $\{x''_k\}$, сходящаяся к x_2 , и такая, что для всех k $f(x''_k) \geq l(x''_k)$. Повторяя для последовательности $\{x''_k\}$ рассуждения, которые были приведены для последовательности $\{x'_k\}$, снова придем к заключению, что функция f в точке x_2 имеет производное число, не превышающее q .

Наконец, если не существуют ни последовательность $\{x'_k\}$, ни последовательность $\{x''_k\}$, то это означает, что для всех $x > x_1$ и расположенных в достаточно малой окрестности точки x_1 , $f(x) > l(x)$, а для всех $x < x_2$ и расположенных в достаточно малой окрестности точки x_2 , $f(x) < l(x)$. Тогда, в силу непрерывности функции f , существуют точка $x_0 \in (x_1, x_2)$ и убывающая последовательность $\{x^*_k\}$, сходящаяся к x_0 , такие, что $f(x_0) = l(x_0)$ и для всех значений k выполняется $f(x^*_k) \leq l(x^*_k)$. Но эта ситуация полностью совпадает с ситуацией, в которой рассматривалась последовательность $\{x'_k\}$, следовательно, для точки x_0 справедлив тот же вывод, который был сделан для точки x_1 при наличии последовательности $\{x'_k\}$.

Таким образом, в любой из возможных ситуаций существует хотя бы одна точка, в которой функция f имеет отрицательное производное число.

Далее, функция f , не являясь монотонной, не является и убывающей. Следовательно, найдутся две точки y_1 и y_2 , $y_1 < y_2$, такие, что $f(y_1) < f(y_2)$. Практически повторяя для точек y_1 и y_2 приведенные выше рассуждения, найдем, что существует хотя бы одна точка, в которой функция f имеет положительное производное число.

Итак, если функция f не является монотонной, то она обязательно имеет производные числа разных знаков, что противоречит требованиям теоремы. Следовательно, если выполнены условия теоремы, то функция f является монотонной.

Пусть f – монотонная функция, но не строго монотонная. Тогда найдутся две точки z_1 и z_2 такие, что $f(z_1) = f(z_2)$. Поскольку f – монотонная, то и для всех $x \in [z_1, z_2]$ будет $f(x) = f(z_1)$. В этом случае из определения производных чисел следует, что для всех $x \in (z_1, z_2)$ будет $\lambda[f](x) = 0$, что противоречит предположению теоремы об отсутствии интервалов такого типа.

Таким образом, если выполнены условия теоремы, то функция f обязательно является строго монотонной.

Частные производные числа

Здесь мы дадим определение частных производных чисел для функции нескольких переменных и приведем некоторые результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем. Пусть функция f задана в некоторой открытой области пространства R^n , и пусть $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – произвольная точка этой области.

Определение 3. Число λ называется *частным производным числом функции f в точке x по переменной x_i* , если существует сходящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\{\Delta x_i^k\}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i^k, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i^k} = \lambda.$$

То обстоятельство, что λ есть частное производное число функции f в точке x по переменной x_i , мы будем записывать как $\lambda = \lambda_{x_i}[f](x)$.

Пусть функция $u = f(x)$ определена в некоторой области из R^n , причем каждая из переменных x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в свою очередь, является функцией от переменной t в некотором промежутке: $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть, кроме того, при изменении t вектор x не выходит за пределы области определения функции u .

Подставив значения $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, в функцию u , получим сложную функцию $u = f(x(t))$.

Теорема 2. Пусть все частные производные числа функции u в точке x ограничены, а также ограничены все производные числа функций $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, в точке t . Тогда любое производное число λ сложной функции u в точке t представимо в виде $\lambda[u](t) = \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x) \lambda[x_i](t)$.

Доказательство. Если $\lambda[u](t)$ есть производное число сложной функции u в точке t , то существует стремящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\{\Delta t_k\}$, $\Delta t_k \neq 0$, на которой это число реализуется. Тогда, не нарушая общности, можно считать, что на этой последовательности для любого $i \in (1, \dots, n)$ реализуется производное число $\lambda[x_i](t)$.

Положим

$$x^k = x(t + \Delta t_k), \quad \Delta x^k = x^k - x(t).$$

Разность $f(x^k) - f(x)$ запишем в виде:

$$\begin{aligned} f(x^k) - f(x) &= f(x_1 + \Delta x_1^k, \dots, x_n + \Delta x_n^k) - f(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \left[\frac{f(x_1 + \Delta x_1^k, \dots, x_n + \Delta x_n^k) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2^k, \dots, x_n + \Delta x_n^k)}{\Delta x_1^k} \right] \Delta x_1^k + \\ &+ \left[\frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2^k, \dots, x_n + \Delta x_n^k) - f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3^k, \dots, x_n + \Delta x_n^k)}{\Delta x_2^k} \right] \Delta x_2^k + \\ &+ \dots + \left[\frac{f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \Delta x_n^k) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_n^k} \right] \Delta x_n^k. \end{aligned}$$

Заметим, что так как функции $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, непрерывны в точке t , в силу предположения, что все производные числа $\lambda[x_i](t), i = 1, 2, \dots, n$, ограничены, то при $k \rightarrow \infty$ $\Delta x^k \rightarrow 0$. Следовательно, можно считать, что каждая из дробей выше приведенного равенства стремится к некоторому частному производному числу $\lambda_{x_i}[f](x)$. Этого всегда можно добиться, переходя, если нужно, к подпоследовательности. Тогда, разделив вышеприведенное равенство на Δt_k и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим, в силу ограниченности всех производных чисел $\lambda[x_i](t), i = 1, 2, \dots, n$, требуемое представление.

Пусть x – внутренняя точка области определения функции f , и l – произвольный единичный вектор.

Определение 4. Число λ будем называть *производным числом функции f в точке x по направлению l* , если существует сходящаяся к нулю при $k \rightarrow \infty$ последовательность $\{t_k\}, t_k \neq 0$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + t_k l) - f(x)}{t_k} = \lambda.$$

То обстоятельство, что λ есть производное число функции f в точке x по направлению l , будем записывать как

$$\lambda = \lambda_l[f](x).$$

Если в точке x все частные производные числа функции f ограничены, то, в силу теоремы 2,

$$\lambda_l[f](x) = \lambda_x[f](x) \cdot l,$$

где через $\lambda_x[f](x)$ обозначен n -мерный вектор, представляющий собой набор частных производных чисел функции f по переменным $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, в точке x , реализуемых на общей последовательности $\{t_k\}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, зависят не от одной переменной t , а от нескольких переменных, например,

$$x_i = x_i(t, s), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

После подстановки функций $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, в функцию f будем иметь некоторую функцию $u(f(x(t, s)))$ от двух переменных t и s . Возникает вопрос, можно ли выразить частные производные числа функции u через частные производные числа функций f и $x_i, i = 1, 2, \dots, n$?

Теорема 3. Пусть все частные производные числа функций f в точке x и функций $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, в точке (t, s) ограничены. Тогда имеют место представления:

$$\begin{aligned} \lambda_t[u](t, s) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x) \cdot \lambda_t[x_i](t, s), \\ \lambda_s[u](t, s) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x) \cdot \lambda_s[x_i](t, s). \end{aligned}$$

Доказательство. Придадим переменным t и s произвольные приращения Δt и Δs . Тогда $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, получают соответственные приращения Δx_i . Представим разность $u(t + \Delta t, s + \Delta s) - u(t, s)$ в двух формах:

$$u(t + \Delta t, s + \Delta s) - u(t, s) = \lambda_t[u](t, s; \Delta t, \Delta s)\Delta t + \lambda_s[u](t, s; \Delta t, \Delta s)\Delta s$$

и

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t, s + \Delta s) - u(t, s) &= f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x_1, \dots, x_n; \Delta x_1, \dots, \Delta x_n) [\lambda_t[x_i](t, s)\Delta t + \lambda_s[x_i](t, s)\Delta s]. \end{aligned}$$

Вычитая из первого представления второе и приравнявая к нулю коэффициенты при Δt и Δs (это можно делать, так как Δt и Δs произвольны и независимы), получим два соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_t[u](t, s) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x_1, \dots, x_n) \cdot \lambda_t[x_i](t, s), \\ \lambda_s[u](t, s) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{x_i}[f](x_1, \dots, x_n) \cdot \lambda_s[x_i](t, s). \end{aligned}$$

Выбирая теперь сходящуюся к нулю последовательность $\{\Delta t_k, \Delta s_k\}$, на которой реализуются, например, $\lambda_t[u](t, s)$, $\lambda_{x_i}[f](x)$ и $\lambda_t[x_i](t, s)$, и переходя в первом из двух полученных выше равенств к пределу при $k \rightarrow \infty$, убеждаемся в справедливости первого из доказываемых представлений. Справедливость второго представления проверяется аналогично.

Теорема об устойчивости движения

Пусть движение объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – n -мерный вектор фазовых переменных, t – время. Сформулируем сначала вспомогательную теорему.

Теорема 4. Пусть функция f в области

$$t \geq 0, \quad |x| < H \quad (H = \text{const} > 0) \quad (2)$$

имеет ограниченные частные производные числа. Тогда решение $x(t; t_0, x_0)$ системы (1), начинающееся в момент $t_0 > 0$ в точке x_0 ($\|x_0\| < H$), имеет ограниченные частные производные числа по начальным данным.

Доказательство. Решение системы (1) запишем в интегральной форме Вольтерры

$$x(t; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau; t_0, x_0)) d\tau.$$

Отсюда, с учетом теорем 2 и 3, имеем

$$\lambda_{x_0}[x](t; t_0, x_0) = \lambda_{x_0}[x_0] + \int_{t_0}^t \lambda_x[f](\tau, x(\tau; t_0, x_0)) \cdot \lambda_{x_0}[x](\tau; t_0, x_0) d\tau.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\|\lambda_{x_0}[x](t; t_0, x_0)\| \leq \|\lambda_{x_0}[x_0]\| + \int_{t_0}^t \|\lambda_x[f](\tau, x(\tau; t_0, x_0))\| \cdot \|\lambda_{x_0}[x](\tau; t_0, x_0)\| d\tau.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла [22] и учитывая ограниченность частных производных чисел $\lambda_x[f](t, x)$, убеждаемся в ограниченности частных производных чисел $\lambda_{x_0}[x](t, t_0, x_0)$. Ограниченность частных производных чисел по t_0 доказывается аналогично.

Теперь, используя результаты доказанной выше теоремы, сформулируем и докажем теорему об устойчивости нулевого решения динамической системы (1).

Теорема 5. Если в области (2) функция f имеет ограниченные частные производные числа, тогда для того, чтобы решение $x = 0$ системы (1) было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно определенная функция $V(t, x)$, частные производные числа которой в силу системы (1) были бы неположительными.

Доказательство.

Необходимость. При доказательстве воспользуемся методом, предложенным К.П. Персидским [3]. Наряду с (1) рассмотрим систему

$$\dot{y} = g(t, y) = f(t, y)\phi(y), \quad (3)$$

где ϕ – скалярная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\phi(y) = \begin{cases} 1: & \|y\| \leq h \\ 0: & H_1 \leq \|y\| \leq H, \end{cases} \quad (0 < h < H_1 < H), 0 \leq \phi \leq 1. \quad (4)$$

Через $y(t; t_0, y_0)$ обозначим решение системы (3), начинающееся в точке y_0 при $t = t_0$.

Из (4), очевидно, следует, что для любой точки (t, x) из области (2) ни при каком $\tau \geq 0$ не может нарушиться неравенство $\|y(\tau; t, x)\| \leq H_1$. Это означает, что функция $y(\tau; t, x)$ определена при всех $\tau \geq 0$, откуда следует, что функция $y(0; t, x)$ определена в области (2).

Положим

$$V(t, x) = \|y(0; t, x)\|^2. \quad (5)$$

Из теоремы 4 следует, что функция $V(t, x)$ имеет ограниченные частные производные числа.

Согласно (4), правые части систем (1) и (3) в области (2) совпадают, а следовательно, в этой области совпадают и частные производные числа функции (5) в силу этих систем.

Отсюда, учитывая формулу

$$\lambda_t[V](t, x) = \{\lambda_\tau[V](\tau, x(\tau; t, x))\}_{\tau=t},$$

которая следует из [8], а также свойство единственности решения, которое следует из ограниченности частных производных чисел функции f ,

$$x(t; \tau, x(\tau; t_0, x_0)) = x(t; t_0, x_0), \quad (6)$$

получаем

$$\lambda_t[V]_{(1)}(t, x) = \lambda_t[V]_{(3)}(t, x) = \{\lambda_\tau[\|y\|^2](0; \tau, y(\tau; t, x))\}_{\tau=t} = \{\lambda_\tau[\|y\|^2](0; t, x)\}_{\tau=t}.$$

Теперь нам осталось показать, что функция (5) положительно определенная. Так как движение $x = 0$ системы (1) устойчиво, а следовательно, и движение $y = 0$ системы (3) устойчиво, то для любого ϵ , $0 < \epsilon \leq h$, существует $\delta(\epsilon) > 0$. такое, что из $\|x\| < \delta$ следует $\|y(t; 0, x)\| < \epsilon$ при всех $t \geq 0$.

Покажем, что если $t \geq 0$, $\epsilon \leq \|x\| \leq h$, то $\|y(0; t, x)\| \geq \delta$.

Пусть, напротив, существует точка (t^*, x^*) , для которой $t^* \geq 0$, $\epsilon \leq \|x^*\| \leq h$, но $\|y(0; t^*, x^*)\| < \delta$. Отсюда, в силу устойчивости движения $y = 0$ системы (3), следует, что выполняется неравенство $\|y(t; 0, y(0; t^*, x^*))\| < \epsilon$ при всех $t \geq 0$, или, согласно (6), $\|y(t; t^*, x^*)\| < \epsilon$. Полагая в этом неравенстве $t = t^*$, получаем

$$\|y(t^*; T^*, x^*)\| = \|x^*\| < \epsilon,$$

что противоречит выбору точки (t^*, x^*) .

Пусть теперь $h > \epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_s > \dots$ – такая последовательность положительных чисел, что $\epsilon_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Согласно предыдущему, существует последовательность $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_s > \dots, \delta_s > 0, \delta_s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, для которой $\|y(0; t, x)\| \geq \delta_s$ при $\epsilon_{s+1} \leq \|x\| \leq \epsilon_s$. Но в таком случае в области (2) выполняется неравенство $\|y(0; t, x)\| \geq \mu(\|x\|)$, $\mu(r) \in \mathcal{H}$, где, например, можно положить

$$\mu(\|x\|) = \delta_{s+1} + \frac{\delta_s - \delta_{s+1}}{\epsilon_s - \epsilon_{s+1}} (\|x\| - \epsilon_{s+1})$$

при $\epsilon_{s+1} \leq \|x\| \leq \epsilon_s$. Следовательно, функция (5) положительно определена.

Достаточность. Пусть имеется функция $V(t, x)$, для которой существует положительно-определенная функция $W(x)$, удовлетворяющая в области (2) ограничению

$$V(t, x) \geq W(x). \quad (7)$$

Выберем произвольные $\epsilon, H > \epsilon > 0$, и обозначим через l точную нижнюю грань функции $W(x)$ на сфере $\|x\| = \epsilon$. Функция $V(t_0, x)$ не зависит явно от времени, непрерывна и $V(t_0, 0) = 0$. Следовательно, для числа $l > 0$ найдется такое $\delta(\epsilon, t_0) > 0$, что при $\|x\| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$V(t_0, x) < l. \quad (8)$$

По условию теоремы $\lambda_t[V](t, x(t; t_0, x_0)) \leq 0$ в области (2). В силу теоремы 1 это означает, что на решениях системы (1) в области (2) функция $V(t, x(t; t_0, x_0))$ не возрастает. Тогда из только что сказанного следует, что если начальное значение x_0 решения $x(t; t_0, x_0)$ выбрано согласно неравенству $\|x_0\| < \delta$, то $V(t, x(t; t_0, x_0))$ не может покинуть ϵ -сферы точки 0, поскольку на основании неравенств (7) и (8) имеем

$$W(x(t; t_0, x_0)) \leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < l.$$

Поскольку l – точная нижняя грань функции $W(x)$ на сфере $\|x\| = \epsilon$, то для всех $t \geq t_0$ будет выполняться условие $\|x(t; t_0, x_0)\| < \epsilon$, что и доказывает устойчивость решения $x = 0$ системы (1).

Заключение

В статье предлагается использовать для анализа поведения решений систем дифференциальных уравнений аппарат производных чисел. Приведенные в работе теоремы и положения позволили сформулировать и доказать необходимые и достаточные условия устойчивости нулевого решения уравнений динамической системы в терминах этой теории. На основании этого можно сделать вывод, что предложенный подход позволяет

ослабить ограничения на степень гладкости исследуемых систем, делая возможным практически классическими методами исследовать более широкий класс систем, не требуя дифференцируемости правых частей исследуемых систем уравнений.

Список источников

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. 3-е изд. М.: Гостехиздат, 1955. 208 с.
3. Персидский К.П. Об одной теореме Ляпунова // ДАН СССР. 1937. Т. 14, № 9. С. 541–544.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1974. 480 с.
7. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. Derived numbers of one variable convex functions // Italian journal of pure and applied mathematics. 2019. Vol. 41. P. 649–662.
8. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. About stability of selector linear differential inclusions // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2040. Art. № 150013.
9. Alferov G. V., Ivanov G. G., Efimova P. A., Sharlay A. S. Stability of linear systems with multitask right-hand member (Book Chapter) // Stochastic Methods for estimation and problem solving in engineering. 2018. P. 74–112.
10. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. Possible solutions of a linear homogeneous system of differential equations // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2293. Art. № 060002.
11. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2293. Art. № 060004.
12. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Ефимова П. А. Условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. № 3(34). С. 37–48.
13. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Ефимова П. А. Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. № 2(37). С. 25–30.
14. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Королёв В. С. Об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2022, № 2(57). С. 31–39.
15. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Королёв В. С. Теорема об области асимптотической устойчивости и ее приложения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. № 1(56). С. 5–13.
16. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2293. Art. № 060005.
17. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2040. Art. № 150014.
18. Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P. Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System // AIP Conference Proceedings (ICNAAM-2017). 2017. Vol. 1863. Art. № 080002. DOI: 10.1063/1.4992263.
19. Иванов Г. Г., Алфёров Г. В., Королёв В. С. Стабилизация программных движений систем переменной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. № 2(61). С. 16–28.

20. Kulakov F., Kadry S., Alferov G., Sharlay A. Bilateral remote control over space manipulators // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2040. Art. № 150015.
21. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. М. Виноградов. Москва: Советская энциклопедия, 1977–1985. (Энциклопедии. Словари. Справочники). 1982. 1184 с.
22. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям. "Высшая Школа", Минск, 1977. 240 с.

References

1. Lyapunov, A. M. (1950), *The General Problem of Stability of Motion* [Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya], Gostekhizdat, Moscow, 472 p.
2. Chetaev, N. G. (1955), *Stability of Motion* [Ustoychivost dvizheniya], 3rd ed., Gostekhizdat, Moscow, 208 p.
3. Persidskiy, K. P. (1937), "On a Lyapunov Theorem" [Ob odnoy teoreme Lyapunova], *Reports of the USSR Academy of Sciences* [DAN SSSR], no 14(9), pp. 541–544.
4. Krasovskiy, N. N. (1959), *Some Problems of the Theory of Stability of Motion* [Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya], Fizmatgiz, Moscow, 211 p.
5. Malkin, I. G. (1966), *Theory of Stability of Motion* [Teoriya ustoychivosti dvizheniya], Nauka, Moscow, 530 p.
6. Natanson, I. P. (1974), *Theory of Functions of a Real Variable* [Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy], Nauka, Moscow, 480 p.
7. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Sharlay, A. (2019), "Derived numbers of one variable convex functions", *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, no 41, pp. 649–662.
8. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Sharlay, A. (2018), "About stability of selector linear differential inclusions", *AIP Conference Proceedings*, no 2040, Art. no 150013.
9. Alferov, G. V., Ivanov, G. G., Efimova, P. A. and Sharlay, A. S. (2018), "Stability of linear systems with multitask right-hand member (Book Chapter)", in *Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering*, pp. 74–112.
10. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Korolev, V. (2020), "Possible solutions of a linear homogeneous system of differential equations", *AIP Conference Proceedings*, no 2293, Art. no 060002.
11. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Korolev, V. (2020), "Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations", *AIP Conference Proceedings*, no 2293, Art. no 060004.
12. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Efimova, P. A. (2016), "Stability Conditions for Linear Homogeneous Systems with Switching" [Usloviya ustoychivosti lineynykh odnorodnykh sistem s pereklyucheniymi], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 3(34), pp. 37–48.
13. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Efimova, P. A. (2017), "Stability of Selector-Linear Differential Inclusions" [Ustoychivost selektorno-lineynykh differentsialnykh vklucheniye], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 2(37), pp. 25–30.
14. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev, V. S. (2022), "On the Stability of Solutions of a System of Linear Differential Equations" [Ob ustoychivosti resheniy sistemy lineynykh differentsialnykh uravneniy], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 2(57), pp. 31–39.

15. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev, V. S. (2022), "A Theorem on the Domain of Asymptotic Stability and Its Applications" [Teorema ob oblasti asimptoticheskoy ustoychivosti i ee prilozheniya], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 1(56), pp. 5–13.
16. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Korolev, V. (2020), "About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations", *AIP Conference Proceedings*, no 2293, Art. no 060005.
17. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Sharlay, A. (2018), "Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements", *AIP Conference Proceedings*, no 2040, Art. no 150014.
18. Ivanov, G., Alferov, G., Sharlay, A. and Efimova, P. (2017), "Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System", *AIP Conference Proceedings* (IC-NAAM-2017), no 1863, Art. no 080002, DOI: 10.1063/1.4992263.
19. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev, V. S. (2023), "Stabilization of Program Motions of Variable Structure Systems" [Stabilizatsiya programmnykh dvizheniy sistem peremennoy struktury], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 2(61), pp. 16–28.
20. Kulakov, F., Kadry, S., Alferov, G. and Sharlay, A. (2018), "Bilateral remote control over space manipulators", *AIP Conference Proceedings*, no 2040, Art. no 150015.
21. Vinogradov, I. M. (ed.) (1977–1985), *Mathematical Encyclopedia* [Matematicheskaya entsiklopediya], Moscow: Soviet Encyclopedia [Sovetskaya entsiklopediya], 1184 p.
22. Bogdanov, Yu. S. (1977), *Lectures on Differential Equations* [Lektsii po differentsialnym uravneniyam], Minsk: Vysshaya Shkola ["Vyssheshnaya Shkola"], 240 p.

Информация об авторах:

Г. В. Алфёров – кандидат физико-математических наук; старший преподаватель кафедры механики управляемого движения факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), eLibrary AuthorID: 11754, ORCID: 0000-0002-3989-7850, Scopus Author ID: 56651918300;

Г. Г. Иванов – кандидат физико-математических наук; научный сотрудник кафедры механики управляемого движения факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), eLibrary AuthorID: 818451, ORCID: 0000-0003-2808-7913, Scopus Author ID: 57193393962;

В. С. Королёв – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры механики управляемого движения факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), eLibrary AuthorID: 11786, ORCID: 0000-0001-5812-1794, Scopus Author ID: 56651788200;

И. Ю. Потоцкая – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры механики управляемого движения факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), eLibrary AuthorID: 11794, ORCID: 0000-0002-3012-9740, Scopus Author ID: 56652325100.

Information about the authors:

G. V. Alferov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Senior Lecturer at the Department of Mechanics of Controlled Motion, Faculty of PM-PU (Applied Mathematics

and Control Processes), St. Petersburg State University (35, Universitetskiy prospekt, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia), eLibrary AuthorID: 11754, ORCID: 0000-0002-3989-7850, Scopus Author ID: 56651918300;

G. G. Ivanov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Researcher at the Department of Mechanics of Controlled Motion, Faculty of PM-PU (Applied Mathematics and Control Processes), St. Petersburg State University (35, Universitetskiy prospekt, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia), eLibrary AuthorID: 818451, ORCID: 0000-0003-2808-7913, Scopus Author ID: 57193393962;

V. S. Korolev – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor of the Department of Mechanics of Controlled Motion, Faculty of PM-PU (Applied Mathematics and Control Processes), St. Petersburg State University (35, Universitetskiy prospekt, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia), eLibrary AuthorID: 11786, ORCID: 0000-0001-5812-1794, Scopus Author ID: 56651788200;

I. Yu. Pototskaya – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor at the Department of Mechanics of Controlled Motion, Faculty of PM-PU (Applied Mathematics and Control Processes), St. Petersburg State University (35, Universitetskiy prospekt, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia), eLibrary AuthorID: 11794, ORCID: 0000-0002-3012-9740, Scopus Author ID: 56652325100.

Научная статья

УДК 519.644; 519.644.7; 519.21; 519.23

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-18-29

<https://elibrary.ru/nvfgfy>



Квадратурная формула для сингулярных интегралов с ядром Гильберта

Виктор Николаевич Орлов¹, Александр Яковлевич Корнилов²,
Сергей Константинович Иванов³, Анна Владимировна Лановая⁴

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный
Университет, Москва, Россия

^{2, 3, 4} Московский государственный университет технологий и управления
им. К. Г. Разумовского, Москва, Россия

¹ orlovvn@mgsu.ru

² a.kornilov@mgut.ru

³ sergey.k.ivanov@gmail.com

⁴ anna.lanovaja@mail.ru

Аннотация. В работе представлена квадратурная формула интерполяционного типа для интегралов с ядром Гильберта, построенная конструктивно – на основе аппроксимации плотности тригонометрическим полиномом степени n в равноотстоящих узлах с последующим точным (в смысле главного значения) вычислением интеграла. Получена конструктивная формула для расчетов (без предельных переходов и без явной оценки остатка) и свободная от деления на $\cos x$, что важно для устойчивости при проведении расчетов. Предлагаемый алгоритм расчетов сопровождается численными экспериментами, подтверждающими точность построенных квадратурных формул.

Ключевые слова: конструктивная математика; теория алгоритмов; квадратурные формулы; ядро Гильберта; вычислимые функции; сингулярные интегралы; неклассическая логика; тригонометрические полиномы.

Для цитирования: Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Иванов С. К., Лановая А. В. Квадратурная формула для сингулярных интегралов с ядром Гильберта // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 18–29. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-18-29. <https://elibrary.ru/nvfgfy>.

Статья поступила в редакцию 21.04.2026; одобрена после рецензирования 25.08.2026; принята к публикации 12.10.2026.

Research article

Quadrature Formula for Singular Integrals With the Hilbert Kernel

Viktor N. Orlov¹, Alexander Ya. Kornilov², Sergey K. Ivanov³, Anna V. Lanovaya⁴

¹ Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

^{2, 3, 4} K. G. Razumovsky Moscow State University of Technology and Management, Moscow, Russia

¹ orlovvn@mgsu.ru

² a.kornilov@mgut.ru

³ sergey.k.ivanov@gmail.com

⁴ anna.lanovaja@mail.ru



© Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Иванов С. К., Лановая А. В., 2026
Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. This paper presents an interpolation-type quadrature formula for integrals with a Hilbert kernel. It is constructed, based on the approximation of the density by a trigonometric polynomial of degree n at equally spaced nodes, followed by an exact (in the sense of the principal value) calculation of the integral. The resulting formula is constructive for calculations (without limit passages and without explicit evaluation of the remainder) and is free from division by $\cos x$, which is important for stability during calculations. The proposed calculation algorithm is supported by numerical experiments confirming the accuracy of the constructed quadrature formulas.

Keywords: *constructive mathematics; theory of algorithms; quadrature formulas; Hilbert kernel; computable functions; singular integrals; non-classical logic; trigonometric polynomials.*

For citation: Orlov, V. N., Kornilov, A. Ya., Ivanov, S. K. and Lanovaya, A. V. (2026), "Quadrature Formula for Singular Integrals With the Hilbert Kernel", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 18–29, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-18-29, <https://elibrary.ru/nvfgfy>.

The article was submitted 21 Apr 2026; approved after reviewing 25 Aug 2026; accepted for publication 12 Oct 2026.

Введение

Фундаментальные основы теории сингулярных интегральных уравнений и их многочисленные приложения подробно изложены в классических трудах Н. И. Мусхелишвили [1, 2], И. Н. Векуа [3], Ф. Д. Гахова [4] и других авторов. Задача получения конструктивных решений, доведенных до числового результата, неоднократно определялась ведущими математиками как одно из приоритетных направлений исследований. В частности, важность "доведения до числа" подчеркивали Н. И. Мусхелишвили, М. А. Лаврентьев и И. Н. Векуа. Пионерские результаты в данной области были представлены М. А. Лаврентьевым в работе 1932 года [5]. В предисловии к этой работе академик С. А. Чаплыгин указал на высокую значимость полученных результатов для практики и выразил надежду на дальнейшее развитие исследований в этом направлении. Значение работы М. А. Лаврентьева получило высокую оценку и в трудах Н. И. Мусхелишвили, который во всех изданиях своей монографии [2] неизменно отмечал, что разработка приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений является одной из наиболее актуальных задач современной теории. Существенный прогресс в развитии вычислительных подходов, вызванный потребностями прикладных задач, связан с исследованиями С. М. Белоцерковского (1954 г.) в области аэродинамики. Эти работы заложили основы метода дискретных особенностей – эффективного численного метода решения сингулярных интегральных уравнений, получившего в настоящее время широкое распространение и признание. Отдельного упоминания заслуживает также значительный вклад академика С. Л. Соболева в развитие теории квадратурных и кубатурных формул [6], составивший теоретическую базу для последующего обоснования многих численных алгоритмов. Сингулярные интегральные уравнения являются универсальным языком описания широкого круга физических явлений, характеризующихся наличием особенностей, и служат основой для построения высокоточных численных моделей. Аналитические решения таких задач, как правило, представимы в виде сингулярных интегралов с известными ядрами.

В классической теории сингулярных интегральных уравнений часто используются неконструктивные методы: предельные переходы, принцип исключенного третьего, аппроксимации без оценки погрешности. В рамках конструктивной математики и теории алгоритмов [7] требуется, чтобы все построения были эффективно вычислимы, а сходимость – конструктивно обоснована.

В данной работе предлагается квадратурная формула, удовлетворяющая принципам конструктивного анализа: узлы сетки вычислимы; веса формулы выражаются через элементарные функции; отсутствует деление на величины, которые могут обратиться в нуль в недетерминированных точках; интеграл понимается в смысле главного значения, но с явной вычислимой оценкой.

Отметим, что в работе [8] получена следующая квадратурная формула:

$$\int_0^\pi \frac{\varphi(t, x)}{\sin(t - x)} dt \approx \frac{\pi}{2n + 1} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\varphi(t_k, x)}{\sin(t_k - x)} \left[1 - (-1)^k \cos t_k \cdot \frac{\cos(2n + 1)x}{\cos x} \right], \quad (1)$$

где

$$t_k = \frac{\pi k}{2n + 1}, k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Следует отметить, что соотношение (1) для некоторых значений аргумента x приводит к потере точности из-за деления на $\cos x$ в знаменателе. Вторым недостатком квадратурной формулы (1) является особенность, возникающая при $x = \pi/2$, где $\cos x = 0$ и $\cos(2n + 1)x$ также равен нулю. Указанные особенности актуализируют получение новых квадратурных формул, позволяющих исключить эти ситуации.

Следует отметить также квадратурную формулу [9] интерполяционного типа, не содержащую деления на $\cos x$:

$$\int_0^\pi \frac{\varphi(t, x)}{\sin(t - x)} dt \approx \frac{\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi(t_k, x) \operatorname{ctg} \frac{t_k - x}{2}, m = 2n.$$

Данная формула является приближенной, о точности которой автор в своей работе ничего не конкретизирует, кроме того, что в пределе она стремится к нулю. Это информация не применима для практического применения и не позволяет определить значение n в квадратурной формуле для заданной точности в расчетах. В формуле веса содержат котангенс, что при $t_k \approx x$ требует отдельной аналитической обработки особенности.

Конструктивная постановка задачи и метод решения

Рассмотрим некоторую непрерывную по своим аргументам функцию $F(t, x)$ на квадрате $[0, \pi] \times [0, \pi]$, за исключением $t = x$, где она имеет сингулярные особенности вида $\sin(t - x)$. Пусть $F(t, x)$ является π -периодической по каждой переменной, т. е.

$$F(\pi + t, x) = F(t, x), \quad F(t, \pi + x) = F(t, x). \quad (2)$$

Требуется вычислить (в смысле вычислимой аппроксимации) значение интеграла:

$$I(x) = \int_0^\pi F(t, x) dt. \quad (3)$$

В силу периодичности функции $F(t, x)$ имеем следующее представление:

$$F(t, x) = \frac{\varphi(t, x)}{\sin(t - x)},$$

где $\varphi(t, x)$ — вычислимая функция на всем квадрате $[0, \pi] \times [0, \pi]$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi(2\pi + t, x) = -\varphi(t, x), \quad \varphi(t, 2\pi + x) = -\varphi(t, x). \quad (4)$$

Поэтому интеграл (3) можно представить в виде:

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{\varphi(t, x)}{\sin(t - x)} dt. \quad (5)$$

Замечание. Ядро

$$\frac{1}{\sin(t - x)}$$

называется ядром Гильберта для периодических функций на отрезке $[0, \pi]$. Оно имеет особенность первого порядка при $t = x$. Интеграл понимается как главное значение по Коши, но в конструктивной формулировке мы заменяем его конечной суммой с оценкой погрешности.

При фиксированном значении x функцию $\varphi(t, x)$ будем рассматривать как функцию по переменной t на интервале $[0, \pi]$. В силу периодичности ядра интегрального оператора удобно использовать тригонометрические полиномы.

Обозначим $\psi(t) = \varphi(t, x)$. Введем $N = 2n + 1$ равноотстоящих узлов на периоде:

$$t_k = \frac{\pi k}{2n + 1}, k = 0, 1, \dots, 2n. \quad (6)$$

Построим тригонометрический интерполяционный полином $\psi_n(t)$, интерполирующий функцию $\psi(t)$ в узлах t_k . Для нечетного числа узлов на периоде $[0, \pi]$ ядро интерполяционного процесса может быть представлено в виде

$$\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \psi(t_k) \cdot \ell_k(t),$$

где $\ell_k(t)$ – фундаментальные полиномы Лагранжа, соответствующие тригонометрической интерполяции. При равномерном распределении узлов с шагом $h = \frac{\pi}{2n+1}$ указанные базисные функции принимают вид:

$$\ell_k(t) = \frac{1}{2n + 1} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - t_k)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(t - t_k)\right)}, \quad (7)$$

что представляет собой классическое ядро Дирихле. Однако для последующего интегрирования с ядром

$$1/\sin(t - x)$$

более удобной оказывается эквивалентная форма записи, использующая произведение синусов. Применяя тригонометрические преобразования, интерполяционную формулу можно привести к следующему виду:

$$\varphi(t, x) \approx \frac{2\pi}{2n + 1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi(t_k, x) \cdot \frac{\sin((n + 1)(t_k - t)) \sin(n(t_k - t))}{\sin(2(t_k - t))}. \quad (8)$$

Подставим аппроксимацию (8) в исходный интеграл (5):

$$I \approx \int_0^\pi \left(\frac{2\pi}{2n + 1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi(t_k, x) \cdot \frac{\sin((n + 1)(t_k - t)) \sin(n(t_k - t))}{\sin(2(t_k - t))} \right) \frac{dt}{\sin(t - x)}.$$

Меняем местами знаки суммы и интеграла и получаем:

$$I \approx \frac{2\pi}{2n + 1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi(t_k, x) \int_0^\pi \frac{\sin((n + 1)(t_k - t)) \sin(n(t_k - t))}{\sin(2(t_k - t)) \cdot \sin(t - x)} dt. \quad (9)$$

Из [10] известно, что тригонометрические полиномы обладают свойством "воспроизведения" для сингулярных интегралов с ядром Гильберта.

Лемма (Основное тождество) [10]. Для любых $t_k \neq x$ справедливо:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin((n + 1)(t_k - t)) \sin(n(t_k - t))}{\sin(2(t_k - t)) \cdot \sin(t - x)} dt \\ = \frac{\sin((n + 1)(t_k - x)) \sin(n(t_k - x))}{\sin(2(t_k - x))}. \end{aligned} \quad (10)$$

При $t_k = x$ правая часть понимается как предел:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin((n+1)u)\sin(nu)}{\sin(2u)} = 0,$$

где $u = t_k - x$. В этом случае левая часть интеграла становится регулярной, и тождество сохраняется.

Обоснование предела:

$$\sin((n+1)u) \sim (n+1)u, \sin(nu) \sim nu, \sin(2u) \sim 2u (u \rightarrow 0),$$

откуда

$$\frac{((n+1)u)(nu)}{2u} = \frac{n(n+1)}{2}u \rightarrow 0.$$

Подставляя результат леммы (10) в выражение (9), получаем искомую квадратурную формулу:

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{\varphi(t, x)}{\sin(t-x)} dt \approx \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \varphi(t_k, x) \frac{\sin((n+1)(t_k-x)) \sin(n(t_k-x))}{\sin(2(t_k-x))}, \quad (11)$$

где

$$t_k = \frac{\pi k}{2n+1}, k = 0, 1, \dots, 2n, n - \text{нечетное положительное число.}$$

Численные эксперименты

Для проверки эффективности предложенной квадратурной формулы (11) проведем ее тестирование на примерах, как допускающих точное аналитическое вычисление, так и не имеющих аналитического решения в элементарных функциях.

Задача 1. Для проверки эффективности предложенной квадратурной формулы (11) проведем ее тестирование на примере, допускающем точное аналитическое вычисление. Рассмотрим интеграл (5) с функцией

$$\varphi(t, x) = \sin(t-x). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (5), получаем

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(t-x)}{\sin(t-x)} dt = \int_0^\pi dt = \pi. \quad (13)$$

Таким образом, точное значение интеграла не зависит от x и равно π .

Вычислим данный интеграл с использованием квадратурной формулы (11). По условию

$$\varphi(t_k, x) = \sin(t_k - x).$$

Подстановка последнего в (11) дает

$$I(x) \approx \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} \sin(t_k - x) \frac{\sin((n+1)(t_k-x)) \sin(n(t_k-x))}{\sin(2(t_k-x))}. \quad (14)$$

Обозначим

$$S_k = \sum_{k=0}^{2n} \sin(t_k - x) \frac{\sin((n+1)(t_k-x)) \sin(n(t_k-x))}{\sin(2(t_k-x))}. \quad (15)$$

Для демонстрации работоспособности формулы выберем наименьшее нечетное значение $n = 1$.

Тогда $2n+1 = 3$, и узлы сетки имеют вид $t_k = \frac{\pi k}{3}, k = 0, 1, 2$.

При $n = 1$ выражение (15) упрощается:

$$S_k = \sin(t_k - x) \frac{\sin(2(t_k-x)) \sin(t_k-x)}{\sin(2(t_k-x))} = \sin^2(t_k - x).$$

Следовательно, квадратурная сумма (15) принимает вид

$$S = \sin^2(x) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right). \quad (16)$$

Применяя формулу понижения степени для квадрата синуса из (16), получаем:

$$S = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) \right].$$

Сумма косинусов в квадратных скобках последнего выражения равна нулю, что проверяется непосредственно.

Таким образом,

$$S = \frac{3}{2}.$$

Подставляя найденное значение в формулу (14), получаем

$$I(x) \approx \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} = \pi.$$

Следовательно, результат, полученный по квадратурной формуле (11), совпадает с точным значением интеграла (13).

Задача 2. Рассмотрим интеграл (5) с функцией

$$\varphi(t, x) = \sin(t + x). \quad (17)$$

Требуется вычислить интеграл

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(t + x)}{\sin(t - x)} dt. \quad (18)$$

Данный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, так как подынтегральная функция имеет особенность при $t = x$ при $x \in (0, \pi)$.

Аналитическое вычисление. В формуле (18) в числителе подынтегральной функции на основании тригонометрических формул осуществляем преобразование:

$$\sin(t + x) = \sin((t - x) + 2x) = \sin(t - x)\cos 2x + \cos(t - x)\sin 2x.$$

Тогда подынтегральная функция принимает вид

$$\frac{\sin(t + x)}{\sin(t - x)} = \cos 2x + \sin 2x \cdot \frac{\cos(t - x)}{\sin(t - x)} = \cos 2x + \sin 2x \cdot \operatorname{ctg}(t - x).$$

Следовательно,

$$I(x) = \int_0^\pi \cos 2x dt + \sin 2x \int_0^\pi \operatorname{ctg}(t - x) dt = \pi \cos 2x + \sin 2x \cdot J(x), \quad (19)$$

где

$$J(x) = \int_0^\pi \operatorname{ctg}(t - x) dt. \quad (20)$$

Вычислим $J(x)$. Выполним замену переменной $u = t - x \Rightarrow du = dt$.

Пределы интегрирования: при $t = 0$: $u = -x$; при $t = \pi$: $u = \pi - x$.

Тогда

$$J(x) = \int_{-x}^{\pi-x} \operatorname{ctg} u du.$$

При $x \in (0, \pi)$ точка $u = 0$ лежит внутри интервала $(-x, \pi - x)$, потому что $-x < 0 < \pi - x$. Последний интеграл является несобственным интегралом 2 рода, для которого по определению:

$$\begin{aligned} J(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-x}^{-\varepsilon} \operatorname{ctg} u du + \int_{\varepsilon}^{\pi-x} \operatorname{ctg} u du \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln |\sin u|]_{-x}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln |\sin u|]_{\varepsilon}^{\pi-x} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln |\sin(-\varepsilon)| - \ln |\sin(-x)|) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln |\sin(\pi - x)| - \ln |\sin \varepsilon|).$$

Вычисление последних пределов приводит к результату $J(x) = 0$. Следовательно, исходный интеграл (18), имеет значение:

$$I(x) = \pi \cos 2x. \quad (21)$$

Вычислим значение интеграла (18) с помощью квадратурной формулы (11) для функции

$$\varphi(t, x) = \sin(t + x).$$

Введем обозначение функции $\varphi(t_k, x) = \sin(t_k + x)$. При $n = 1$ и узлах $t_k = \frac{\pi k}{3}$, $k = 0, 1, 2$, квадратурная формула (11) принимает вид

$$I(x) \approx \frac{2\pi}{3} \sum_{k=0}^2 \sin(t_k + x) \frac{\sin(2(t_k - x)) \sin(t_k - x)}{\sin(2(t_k - x))} = \frac{2\pi}{3} \sum_{k=0}^2 \sin(t_k + x) \sin(t_k - x).$$

На основании тригонометрических формул из последнего следует:

$$\sin(t_k + x) \sin(t_k - x) = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 2t_k).$$

Следовательно,

$$I(x) \approx \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 (\cos 2x - \cos 2t_k) = \frac{\pi}{3} \left(3 \cos 2x - \sum_{k=0}^2 \cos 2t_k \right).$$

С учетом $t_k = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ из последнего имеем

$$\sum_{k=0}^2 \cos 2t_k = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$I(x) \approx \frac{\pi}{3} \cdot 3 \cos 2x = \pi \cos 2x.$$

Что совпадает с точным аналитическим значением (21).

Результаты численного интегрирования задачи 2. Проверяем квадратурную формулу (11) для данной задачи. Вычисления проведены с помощью программы, реализованной на JavaScript для функции

$$\varphi(t, x) = \sin(t + x)$$

при различных значениях аргумента x . В качестве параметра дискретизации выбрано $n = 5$, что соответствует количеству узлов сетки равное $2n + 1 = 11$. В таблице 1 представлены значения интеграла, полученные по аналитическому выражению (15) и по квадратурной формуле (11), а также абсолютная погрешность:

$$\Delta_5 = |I(x) - I_5(x)|.$$

Таблица 1. Численные расчеты интеграла по аналитическому выражению и квадратурной формуле

x	$I(x)$	$I_5(x)$	Δ_5
0	3.1415926536	3.1415926536	0.0000000000
$\pi/4$	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
1.5	-3.1101531544	-3.1101531544	0.0000000000
2	-2.0534819974	-2.0534819974	0.0000000000
π	3.1415926536	3.1415926536	0.0000000000

Как видно из табл. 1, при $n = 5$ квадратурная формула (11) дает значение интеграла, совпадающее с аналитическим результатом.

Задача 3. Рассмотрим следующий интеграл:

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{\vartheta_1(t-a)\vartheta_4(t+a)}{\vartheta_1(t-x)\vartheta_4(t+x)} dt, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_1(t) &= 2q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} \sin(2n+1)t, \\ \vartheta_4(t) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nt - \end{aligned}$$

тета-функции Якоби [11] с нормой $q = e^{\pi i \tau}$, $\text{Im } \tau > 0$, $|\tau| = -\frac{\ln q}{\pi}$, a и x – заданные параметры.

Замечание. Подынтегральная функция имеет простые полюсы при $t = x$ (в нуле ϑ_1) и при $t = -x$ (с учетом периодичности). Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Получим аналитическое выражение для $I(x)$ в терминах логарифмических производных тета-функций, пригодное для дальнейших численных расчетов.

На основании тождество Вейерштрасса–Якоби [12]:

$$\frac{\vartheta_1(t-a)\vartheta_4(t+a)}{\vartheta_1(t-x)\vartheta_4(t+x)} = A \cdot \frac{\vartheta_1'(t-x)}{\vartheta_1(t-x)} + B \cdot \frac{\vartheta_4'(t+x)}{\vartheta_4(t+x)} + C, \quad (23)$$

из двоякопериодичности левой части по t (с периодами π и $\pi\tau$) следует, что

$$B = -A. \quad (24)$$

Определим коэффициенты A и C . Для нахождения A умножим обе части тождества (23) на $\vartheta_1(t-x)$ и перейдем к пределу $t \rightarrow x$.

Слева:

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{\vartheta_1(t-a)\vartheta_4(t+a)}{\vartheta_4(t+x)} = \frac{\vartheta_1(x-a)\vartheta_4(x+a)}{\vartheta_4(2x)}.$$

Справа:

$$\lim_{t \rightarrow x} [A \cdot \vartheta_1'(t-x) + B \cdot \frac{\vartheta_4'(t+x)}{\vartheta_4(t+x)} \vartheta_1(t-x) + C \vartheta_1(t-x)].$$

Так как $\vartheta_1(t-x) \sim \vartheta_1'(0)(t-x)$ при $t \rightarrow x$, второе и третье слагаемые стремятся к нулю. Остается $A \cdot \vartheta_1'(0)$.

Приравнявая:

$$A \cdot \vartheta_1'(0) = \frac{\vartheta_1(x-a)\vartheta_4(x+a)}{\vartheta_4(2x)}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{\vartheta_1(x-a)\vartheta_4(x+a)}{\vartheta_1'(0)\vartheta_4(2x)} \quad (25)$$

Коэффициент C находим из (23) при $t = a$:

$$C = A \cdot \left[\frac{\vartheta_1'(x-a)}{\vartheta_1(x-a)} + \frac{\vartheta_4'(x+a)}{\vartheta_4(x+a)} \right]. \quad (26)$$

Интегрируя (23) от 0 до π и используя свойства логарифмических производных тета-функций, получаем:

$$\begin{aligned} I(x) &= A \cdot \int_0^\pi \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(t-x) dt + B \cdot \int_0^\pi \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(t+x) dt + C\pi = \\ &= A \ln \left| \frac{\vartheta_1(\pi-x)}{\vartheta_1(-x)} \right| + B \ln \left| \frac{\vartheta_4(\pi+x)}{\vartheta_4(x)} \right| + C\pi. \end{aligned}$$

С учетом (24), (25) и (26) окончательное аналитическое выражение интеграла (22) принимает вид:

$$I(x) = \pi \cdot \frac{\vartheta_1(x-a)\vartheta_4(x+a)}{\vartheta_1'(0)\vartheta_4(2x)} \cdot \left[\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_1}(x-a) + \frac{\vartheta_4'}{\vartheta_4}(x+a) \right]. \quad (27)$$

Численное тестирование квадратурной формулы (11) проводилось для двух значений нормы q при фиксированном $a = \pi/2$.

Таблица 2. Значения интеграла (22) при $a = \pi/2$, $q = 0.1$ и $n = 11$

x	$I(x)$	$I_{11}(x)$	Δ_{11}
0.0785	0.661863650185544	0.661863650268924	-0.8338×10^{-10}
0.2356	1.749342391815649	1.749342392037261	-0.2216×10^{-9}
0.3927	2.369877414935797	2.369877415240109	-0.3043×10^{-9}
0.5498	2.627698464144353	2.627698464489365	-0.3450×10^{-9}
0.7069	2.705974181006287	2.705974181373787	-0.3675×10^{-9}

Как видно из табл. 2, при $n = 11$ абсолютная погрешность не превышает $3,7 \times 10^{-10}$.

Таблица 3. Значения интеграла (20) при $a = \pi/2$, $q = 0,5$ и $n = 25$

x	$I(x)$	$I_{25}(x)$	Δ_{25}
0.0785	78.118507750736	78.118507788496	-0.3776×10^{-7}
0.2356	79.645634438020	79.645634475880	-0.3786×10^{-7}
0.3927	43.047040002891	43.047040022731	-0.1984×10^{-7}
0.5498	22.258565385914	22.258565395741	-0.9827×10^{-8}
0.7069	12.178767398389	12.178767403511	-0.5122×10^{-8}

Для случая $q = 0.5$ требуется более мелкая дискретизация; при $n = 25$ абсолютная погрешность составляет величину порядка $10^{-7} \div 10^{-8}$, что подтверждает сходимость квадратурной формулы.

Задача 4. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t, x) = e^{\sin t}, \quad x = 1.$$

Тогда

$$I(x) = \int_0^\pi \frac{e^{\sin t}}{\sin(t-1)} dt. \quad (28)$$

В заданной области при попытке воспользоваться программными комплексами "Математика" результата в элементарных функциях для интеграла (28) не получаем.

Для интеграла (28) численные значения, полученные по квадратурной формуле (11) при $n = 5$ и $n = 11$, составили $I_5 \approx 4.695574969512963$ и $I_{11} \approx 4.693786801341791$. На основе экстраполяции Рундсона с отношением шагов $r = h_1/h_2 = 11/5 = 2.2$ определен фактический порядок точности метода. Анализ показал, что при предположении о четвертом порядке ($p = 4$) экстраполированное значение $I_{\text{экстр}} \approx 4.69378$ практически совпадает с I_{11} , тогда как при $p = 2$ наблюдается заметное расхождение ($I_{\text{экстр}} \approx 4.69118$), что свидетельствует о фактическом порядке точности $p = 4$. Оценка погрешности составила $\varepsilon_{11} \sim 7 \times 10^{-6}$ для $n = 11$ и $\varepsilon_5 \sim 1.6 \times 10^{-4}$ для $n = 5$.

Таким образом, использование экстраполяции Ричардсона позволяет уточнить численный результат до $\sim 10^{-6}$ и подтверждает высокую эффективность примененной квадратурной формулы.

Конструктивные особенности и связь с неклассическими логиками

Предложенная квадратурная формула (11) обладает рядом преимуществ по сравнению с известной формулой (1). В ней отсутствует деление на $\cos x$, что исключает потерю точности в окрестности точек $x = \pi/2 + \pi t$. Структура формулы позволяет сохранять устойчивость при любых значениях аргумента x , включая случаи, когда знаменатель формулы (11) $\sin(2(t_k - x))$ обращается в нуль; при этом соответствующие предельные переходы могут быть выполнены аналитически. Все проведенные операции в задачах 1–4 выполнимы и согласуются с теорией алгоритмов [13].

Проведенные численные эксперименты с тригонометрическими функциями и тета-функциями Якоби демонстрируют высокую точность метода. Для гладких функций уже при малых n достигается точность, близкая к машинной. Для более сложных функций, таких как тета-функции Якоби, требуется увеличение числа узлов, однако полученные результаты подтверждают сходимость и устойчивость квадратурной формулы.

В интуиционистской логике не допускается закон исключенного третьего в бесконечных конструкциях. В данной работе: все аппроксимации конечны; точность устанавливается конструктивно: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать n (зависящее от φ и x), такое что погрешность меньше ε . В работе не используется принцип выбора в неконструктивной форме. Формула может быть верифицирована в системах типа CIC (Calculus of Inductive Constructions) или Agda [14–16], где требуется явное предъявление вычислимой функции.

Оценка погрешности

Для гладких функций (дважды непрерывно дифференцируемых по t) тригонометрическая интерполяция обеспечивает погрешность аппроксимации $O(1/n^2)$. Интегрирование с ядром Гильберта, являющимся сингулярным оператором, сохраняет этот порядок.

Для произвольных вычислимых функций полное аналитическое обоснование выходит за рамки данной работы. В рамках конструктивного подхода для каждого конкретного вычисления предлагается контроль погрешности методом Ричардсона, что позволяет получить результат с гарантированной точностью.

Заключение

В работе получена новая квадратурная формула интерполяционного типа для сингулярных интегралов с ядром Гильберта, удовлетворяющая требованиям: конструктивности (все шаги алгоритмически выполнимы); вычислимости (отсутствие неэффективных предельных переходов); совместимости с неклассическими логиками (финитность, явные оценки). Формула построена на основе аппроксимации плотности тригонометрическим полиномом в равноотстоящих узлах и точного интегрирования полученного выражения. Предложенная квадратурная формула свободна от недостатков, присущих известным подходам, связанных с делением на $\cos x$ и численной неустойчивостью в особых точках. Проведенное тестирование на аналитических примерах с тригонометрическими функциями и тета-функциями Якоби подтвердило корректность полученного соотношения и его высокую точность. Представленный метод может быть использован при численном решении сингулярных интегральных уравнений, возникающих в задачах

аэродинамики, теории упругости, математической физики, также в алгоритмических системах символьных вычислений, формальных доказательствах в интуиционистской математике, где требуется явное предъявление алгоритма и других областях.

Список литературы

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Векуа И. Н. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 380 с.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. Лаврентьев М. А. Теория аналитических функций. Математика. Наука в СССР за пятнадцать лет (1917–1932). Москва; Ленинград: ГТТИ, 1932. С. 49 – 83.
6. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
7. Орлов В. Н., Корнилов А. Я., Воробьева А. В. Оптимизация априорной оценки аналитического приближенного решения одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности. Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2024. С. 35–50. DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.003.
8. Корнилов А. Я. Об одной квадратурной формуле. Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2006. № 2. С. 40–42.
9. Du J. Quadrature formulas for singular integrals with Hilbert kernel. Journal of Computational Mathematics. 1988. Vol. 6, № 3, P. 205–225.
10. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. Москва: Наука, 1985. 253 с.
11. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
12. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. 2, гл. 21: Тэта-функции. М.: Физматлит, 1963. С. 345–378.
13. Марков А. А. Теория алгорифмов. М.: Наука, 1954. 376 с.
14. Troelstra A. S., van Dalen D. Constructivism in Mathematics. 2 vol. Amsterdam: North-Holland, 1988.
15. Bishop E., Bridges D. Constructive Analysis. Berlin: Springer, 1985. 488 p. DOI: 10.1007/978-3-642-61667-9.
16. Weihrauch K. Computable Analysis. Berlin: Springer, 2000. 298 p. DOI: 10.1007/978-3-642-56999-9.

References

1. Muskhelishvili, N. I. (1968), *Singular Integral Equations* [Singulyarnye integralnye uravneniya], Moscow: Nauka, 511 p.
2. Muskhelishvili, N. I. (1966), *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* [Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti], Moscow: Nauka, 708 p.
3. Vekua, I. N. (1970), *Systems of Singular Integral Equations and Some Boundary Value Problems* [Sistemy singulyarnykh integralnykh uravneniy i nekotorye granichnye zadachi], Moscow: Nauka, 380 p.
4. Gakhov, F. D. (1977), *Boundary Value Problems* [Kraevye zadachi], Moscow: Nauka, 640 p.
5. Lavrentev, M. A. (1932), *Theory of Analytic Functions* [Teoriya analiticheskikh funktsii], in Mathematics. Science in the USSR over Fifteen Years (1917–1932) [Matematika. Nauka v SSSR za pyatnadsat let (1917–1932)], GTTI, Moscow; Leningrad, P. 49–83.
6. Sobolev, S. L. (1974), *Introduction to the Theory of Cubature Formulas* [Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul], Moscow: Nauka, 808 p.
7. Orlov, V. N., Kornilov, A. Ya. and Vorobyeva, A. V. (2024), "Optimization of the A Priori Estimate of the Analytical Approximate Solution of One Class of Nonlinear Differential Equation of the Third Order in the Domain of Analyticity" [Optimizatsiya apriornoy otsenki analiticheskogo priblizhennogo resheniya odnogo klassa nelineynogo differentsialnogo uravneniya

- tretyego poryadka v oblasti analitichnosti], *Bulletin of ChSPU named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of Limit State* [Vestnik ChGPU im. I. Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya], pp. 35–50, DOI: 10.37972/chgpu.2024.60.2.003.
8. Kornilov, A. Ya. (2006), "On a Quadrature Formula" [Ob odnoy kvadraturnoy formule], *Bulletin of KSTU named after A. N. Tupolev* [Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva], no 2, pp. 40–42.
 9. Du, J. (1988), "Quadrature formulas for singular integrals with Hilbert kernel", *Journal of Computational Mathematics*, no 6(3), pp. 205–225.
 10. Belotserkovskiy, S. M. and Lifanov, I. K. (1985), *Numerical Methods in Singular Integral Equations* [Chislennyye metody v singulyarnykh integralnykh uravneniyakh], Moscow: Nauka, 253 p.
 11. Akhiezer, N. I. (1970), *Elements of the Theory of Elliptic Functions* [Elementy teorii ellipticheskikh funktsiy], Moscow: Nauka, 304 p.
 12. Whittaker, E. T. and Watson, J. N. (1963), *A Course of Modern Analysis. Part 2, Chapter 21: Theta Functions* [Kurs sovremennogo analiza. Ch. 2, gl. 21: Teta-funktsii], Moscow: Fizmatlit, pp. 345–378.
 13. Markov, A. A. (1954), *Theory of Algorithms* [Teoriya algorifmov], Moscow: Nauka, 376 p.
 14. Troelstra, A. S. and van Dalen, D. (1988), *Constructivism in Mathematics*, 2 vol., Amsterdam: North-Holland.
 15. Bishop, E. and Bridges, D. (1985), *Constructive Analysis*, Berlin: Springer, 488 p.
 16. Weihrauch, K. (2000), *Computable Analysis*, Berlin: Springer, 298 p.

Информация об авторах:

В. Н. Орлов – доктор физико-математических наук, доцент; профессор Национального исследовательского Московского государственного строительного Университета (129337, Россия, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26), ORCID: 0000-0001-7606-5490, eLibrary AuthorID: 711175;

А. Я. Корнилов – кандидат физико-математических наук; доцент Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского (109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной Вал, д. 73), ORCID: 0009-0003-5435-2941, eLibrary AuthorID: 161334;

С. К. Иванов – кандидат технических наук; доцент Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского (109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной Вал, д. 73), eLibrary AuthorID: 5876;

А. В. Лановая – кандидат физико-математических наук; доцент Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского (109004, Россия, г. Москва, ул. Земляной Вал, д. 73), eLibrary AuthorID: 749548.

Information about the authors:

V. N. Orlov – Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor; Professor at Moscow State University of Civil Engineering (26, Yaroslavl'skoe shosse, Moscow, 129337, Russia), ORCID: 0000-0001-7606-5490, eLibrary AuthorID: 711175;

A. Ya. Kornilov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor at K. G. Razumovsky Moscow State University State University of Technology and Management (73, Zemlyanoy Val st., Moscow, 109004, Russia), ORCID: 0009-0003-5435-2941, eLibrary AuthorID: 161334;

S. K. Ivanov – Candidate of Sciences (Engineering); Associate Professor at K. G. Razumovsky Moscow State University State University of Technology and Management (73, Zemlyanoy Val st., Moscow, 109004, Russia), eLibrary AuthorID: 5876;

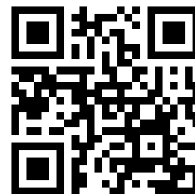
A. V. Lanovaya – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor at K. G. Razumovsky Moscow State University State University of Technology and Management (73, Zemlyanoy Val st., Moscow, 109004, Russia), eLibrary AuthorID: 749548.

Научная статья

УДК 519.6

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-30-48

<https://elibrary.ru/rfmqyd>



Симметричные системы координатных функций для однородных краевых задач на прямоугольнике с уравнениями в частных производных

Дмитрий Феликсович Пастухов¹, Юрий Феликсович Пастухов²

^{1,2} Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Белоруссия

¹ dmitrij.pastuhov@mail.ru

² pulsar1900@mail.ru

Аннотация. В данной работе впервые предложена идея решения однородных краевых задач с однородными уравнениями в частных производных на выделенном классе функций двух переменных с сохранением симметрии. Для достижения наилучшей точности используется 7 четных или 7 нечетных координатных функций по каждой переменной. Показано, что произвольную непрерывную функцию в правой части уравнения можно представить суммой четырех непрерывных функций, по одной из каждого класса симметрии. Методом Бубнова–Галеркина численно находится решение в каждом из 4 классов симметрии функций, решение задачи равно сумме четырех частных решений. В первой части работы доказаны 3 леммы и теорема – критерий принадлежности решения данному классу четности. В работе численно решены четыре краевые задачи с уравнением Пуассона, правая часть которого принадлежит разным классом четности. Равномерная норма невязки решения задач имеет порядок 10^{-8} . Также преимуществом предложенного алгоритма является быстроедействие, которое, например, в 5–10 раз превосходит метод векторной прогонки для решения уравнения Пуассона.

Ключевые слова: численные методы; краевая задача; уравнение Пуассона; бигармоническое уравнение; дифференциальные уравнения в частных производных; функциональный анализ.

Для цитирования: Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф. Симметричные системы координатных функций для однородных краевых задач на прямоугольнике с уравнениями в частных производных // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 30–48. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-30-48. <https://elibrary.ru/rfmqyd>.

Благодарности: авторы выражают благодарность профессору Волосову К. А. (д.ф.–м.н.), Волосовой А. К. (к.ф.–м.н.), Волосовой Н. К. за исследования по тематике краевых задач с уравнениями в частных производных.

Статья поступила в редакцию 13.08.2026; одобрена после рецензирования 20.09.2026; принята к публикации 06.10.2026.



© Пастухов Д. Ф., Пастухов Ю. Ф., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

Symmetric Systems of Coordinate Functions for Homogeneous Boundary Value Problems on a Rectangle With Partial Differential Equations

Dmitry F. Pastukhov¹, Yuri F. Pastukhov²

^{1,2} Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Novopolotsk, Belarus

¹ dmitrij.pastuhov@mail.ru

² pulsar1900@mail.ru

Abstract. This paper is the first to propose the idea of solving homogeneous boundary value problems with homogeneous partial differential equations on a selected class of functions of two variables while preserving symmetry. To achieve the best accuracy, 7 even or 7 odd coordinate functions are used for each variable. It is shown that an arbitrary continuous function on the right side of the equation can be represented as the sum of four continuous functions, one from each symmetry class. Using the Bubnov–Galerkin method, a solution is found numerically in each of the 4 symmetry classes of functions; the solution to the problem is equal to the sum of four partial solutions. In the first part of the work, 3 lemmas and a theorem are proved – a criterion for a solution to belong to a given parity class. We numerically solve four boundary value problems with the Poisson equation, the right side of which belongs to different parity classes. The uniform norm of the discrepancy in solving the problems is of the order of 10^{-8} . Another advantage of the proposed algorithm is its high-speed performance; for example, it outperforms the vector sweep method for solving the Poisson equation by a factor of 5 to 10.

Keywords: numerical methods; boundary value problem; Poisson's equation; biharmonic equation; partial differential equations; functional analysis.

For citation: Pastukhov, D. F. and Pastukhov, Yu. F. (2026), "Symmetric Systems of Coordinate Functions for Homogeneous Boundary Value Problems on a Rectangle With Partial Differential Equations", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 30–48, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-30-48, <https://elibrary.ru/rfmqyd>.

Acknowledgments: the authors express their gratitude to Professor K. A. Volosov (Dr. Sci. in Phys. and Math.), A. K. Volosova (Cand. Sci. in Phys. and Math.), N. K. Volosova for research on boundary value problems with partial differential equations.

The article was submitted 13 Aug 2026; approved after review 20 Sep 2026; accepted for publication 06 Oct 2026.

Введение

В данной работе показано, что симметрии функций (четность и нечетность) играют важную роль даже в краевых задачах с уравнениями в частных производных (УЧП). Аналитические методы решения задач с УЧП приведены в работах [1] (метод параметра), [2] (метод функции Грина). В работе [3, стр.29], [3, стр.77] описаны простейшие уравнения эллиптического типа – Пуассона и гармоническое уравнение и методы их решения. Уравнение Пуассона применяется в гидродинамике [4], а бигармоническое [5] в механике. В работе [6] указано, что важно правильно выбрать системы базисных (координатных) функций, например, для численного решения уравнения Фредгольма, используя сплайны аналитического и неаналитического типа, тогда удастся решить интегральные уравнения с разрывом первого рода в интегральных ядрах.

В работе [7], как и в данной краевой задаче на прямоугольнике модельными являются уравнение Пуассона и бигармоническое уравнения, которые автор решает численно методом коллокации и методом наименьших квадратов [8]. В работах [9], [10] в краевых задачах с обыкновенным дифференциальным уравнением замечено удобство

применения четных и нечетных координатных функций относительно середины отрезка. В данной работе идея четных и нечетных координатных функций впервые обобщена на двухмерный случай для краевых задач в прямоугольнике.

Постановка задачи

Рассмотрим однородную краевую задачу для однородного уравнения в частных производных эллиптического типа на прямоугольнике. Примерами таких уравнений является уравнение Пуассона [3, стр. 29] (задача (1)) или бигармоническое уравнение [3, стр. 77] (задача (2)). Особенность однородных уравнений эллиптического типа заключается в том, что все слагаемые в уравнении имеют одинаковый порядок частных производных, например, второй или четвертый. Пусть неизвестная функция принадлежит классу функций $u(x, y) \in C^2[a, b] \times [c, d]$, $(u(x, y) \in C^4[a, b] \times [c, d])$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d \\ u|_{x=a} = u|_{x=b} = u|_{y=c} = u|_{y=d} = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = f(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d \\ u|_{x=a} = u|_{x=b} = u|_{y=c} = u|_{y=d} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Задача (1) моделирует распределение электрического потенциала внутри прямоугольного металлического заземленного контура с непрерывным распределением электрического заряда внутри. Задача (1) также описывает стационарное распределение температуры внутри прямоугольной пластины, стороны которой находятся при температуре тающего льда с источниками тепла внутри. Задача (2) применяется в механике сплошной среды для описания напряжений и деформации прямоугольного бруса [3, стр. 80].

Для однородных краевых задач (1), (2) введем следующие системы линейно-независимых однородных координатных функций:

$$\begin{cases} X_j^u(x) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2j} (x^2 - x(a+b) + ab)^j, & j = 1, 2, \dots \quad a < x < b \\ Y_i^u(y) = \left(\frac{2}{d-c}\right)^{2i} (y^2 - y(c+d) + cd)^i, & i = 1, 2, \dots \quad c < y < d \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} X_j^h(x) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2(j-1)} \sin\left(\frac{\pi}{b-a}(2x - a - b)\right) (x^2 - x(a+b) + ab)^{j-1}, & j = 1, 2, \dots \\ Y_i^h(y) = \left(\frac{2}{d-c}\right)^{2(i-1)} \sin\left(\frac{\pi}{d-c}(2y - c - d)\right) (y^2 - y(c+d) + cd)^{i-1}, & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

Систему координатных функций (3) назовем четной, а систему (4) назовем нечетной координатной системой (верхний индекс в формулах (3), (4)). В силу построения координатные функции систем (3), (4) однородны: $X_j(a) = X_j(b) = 0$, $Y_i(c) = Y_i(d) = 0$, $i, j = 1, 2, \dots$.

Системы координатных функций (3), (4) имеют 2 важных преимущества:

1. Функции системы (3) не изменяют знака на отрезке $[a, b]$ (на отрезке $[c, d]$), а функции системы (4) изменяют знак ровно один раз на отрезке $[a, b]$ (на отрезке $[c, d]$), что уменьшает погрешность численного интегрирования в формулах скалярного произведения (13), (14).

2. Максимальное значение равномерной нормы функций типа (3) равно 1 в середине отрезка, а для функций типа (4) меньше единицы, то есть системы функций (3), (4) – ограничены в равномерной норме.

Рассмотрим некоторые свойства координатных систем (3), (4).

Лемма 1. Координатные функции системы (3) и их вторые (четвертые) производные четны относительно середины отрезка $\bar{c} = (a + b)/2$.

Доказательство.

Введем переменную $x|_a^b = t|_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} + \bar{c}$, $dx = dt$. Тогда имеем

$$x^2 - x(a + b) + ab = (x - a)(x - b) = \left(t + \frac{b - a}{2}\right)\left(t - \frac{b - a}{2}\right) = t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}.$$

$$X_j^{\text{ч}}(x) = \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} (x^2 - x(a + b) + ab)^j = \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^j,$$

$$X_j^{\text{ч}}(-t) = \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left((-t)^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^j = \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^j = X_j^{\text{ч}}(t),$$

то есть, координатная функция четна. Найдем первую и вторую производные

$$\frac{d}{dx} X_j^{\text{ч}}(x) = \frac{d}{dt} X_j^{\text{ч}}(t) = 2tj \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^{j-1}, \frac{d}{dt} X_j^{\text{ч}}(-t) = -\frac{d}{dt} X_j^{\text{ч}}(t) -$$

первая производная является нечетной функцией.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} X_j^{\text{ч}}(x) &= \frac{d^2}{dt^2} X_j^{\text{ч}}(t) = 4t^2 j(j - 1) \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^{j-2} + \\ &+ 2j \left(\frac{2}{b - a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b - a)^2}{4}\right)^{j-1}, j \geq 2 \quad \frac{d^2}{dt^2} X_j^{\text{ч}}(-t) = \frac{d^2}{dt^2} X_j^{\text{ч}}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Вторая производная является четной функцией. Аналогично, производная третьего порядка ($j \geq 3$) является нечетной функцией, а производная четвертого порядка ($j \geq 4$) четной функцией относительно средней точки $\bar{c} = (a + b)/2$ отрезка $[a, b]$. Доказательство четности производных четного порядка (нечетности производных нечетного порядка) для функций $Y_i(y)$ системы (3) относительно середины $\bar{c} = (c + d)/2$ отрезка $[c, d]$ аналогично. **Лемма 1** доказана.

Лемма 2. Координатные функции системы (4) и их вторые (четвертые) производные нечетны относительно середины отрезка $\bar{c} = \frac{a+b}{2}$, $H = \frac{b-a}{2}$.

Доказательство.

Если $i = 1$, имеем $x = t + \frac{a+b}{2}$, $t = x - \frac{a+b}{2}$

$$X_1^{\text{н}}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{b - a}(2x - a - b)\right) = \sin\left(\frac{2\pi t}{b - a}\right), X_1^{\text{н}}(-t) = -\sin\left(\frac{2\pi t}{b - a}\right) = -X_1^{\text{н}}(t)$$

$$\frac{d}{dx} X_1^{\text{н}}(x) = \frac{d}{dt} X_1^{\text{н}}(t) = \frac{2\pi}{b - a} \cos\left(\frac{2\pi t}{b - a}\right), \frac{d}{dt} X_1^{\text{н}}(-t) = \frac{d}{dt} X_1^{\text{н}}(t) \quad - \text{четная функция,}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} X_1^{\text{н}}(x) = \frac{d^2}{dt^2} X_1^{\text{н}}(t) = -\frac{4\pi^2}{(b - a)^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{b - a}\right), \frac{d^2}{dt^2} X_1^{\text{н}}(-t) = -\frac{d^2}{dt^2} X_1^{\text{н}}(t) \quad - \text{нечетная функция}$$

В общем случае ($i > 1$) имеем

$$\begin{aligned} X_j^H(x) &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2(j-1)} \sin\left(\frac{\pi}{b-a}(2x-a-b)\right) (x^2 - x(a+b) - ab)^{j-1}, \\ X_j^H(t) &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2(j-1)} \sin\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right) (t^2 - H^2)^{j-1}, X_j^H(-t) = -X_j^H(t) - \text{нечетная функция} \\ \frac{d}{dt} X_j^H(t) &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2(j-1)} \left[\frac{2\pi \cos\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)}{b-a} (t^2 - H^2)^{j-1} + 2t(j-1) \sin\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right) (t^2 - H^2)^{j-2} \right], \\ \frac{d}{dt} X_j^H(-t) &= \frac{d}{dt} X_j^H(t) - \text{четная функция.} \end{aligned}$$

Запишем производную второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} X_j^H(t) &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2(j-1)} \left[\frac{-4\pi^2 \sin\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)}{(b-a)^2} (t^2 - H^2)^{j-1} + \right. \\ &+ \frac{8\pi t}{b-a} (j-1) \cos\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right) (t^2 - H^2)^{j-2} + \sin\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right) (2(j-1)(t^2 - H^2)^{j-2} + \\ &\left. + 4t^2(j-1)(j-2)(t^2 - H^2)^{j-3}) \right], j \geq 3. \end{aligned} \quad (6)$$

Она является нечетной функцией, так как каждое из трех слагаемых последнего выражения нечетно, в итоге имеем $\frac{d^2}{dt^2} X_j^H(-t) = -\frac{d^2}{dt^2} X_j^H(t)$.

Аналогично, производная третьего порядка и любого нечетного порядка – четная функция. А производная четвертого порядка и любого четного порядка от координатной функции системы (4) – нечетная функция. **Лемма 2** доказана.

Замечание 1. В точках $x = a, x = b$ координатные функции $X_j(x)$ системы (4) имеют нули j -го порядка, ($j \geq 1$) и являются нечетными на всем отрезке $[a, b]$.

Определение 1. Говорят, что непрерывная функция $f_1(x, y) \in C_{0,0}(D)$ принадлежит первому классу симметрии (обозначение $C_{0,0}$) в области D , если она четна по каждой из переменных x, y . То есть, $f_1(-x, y) = f_1(x, y), f_1(x, -y) = f_1(x, y)$.

Определение 2. Говорят, что непрерывная функция $f_2(x, y) \in C_{0,1}(D)$ принадлежит второму классу симметрии (обозначение $C_{0,1}$) в области D , если она четна по переменной x и нечетна по переменной y . То есть, $f_2(-x, y) = f_2(x, y), f_2(x, -y) = -f_2(x, y)$.

Определение 3. Говорят, что непрерывная функция $f_3(x, y) \in C_{1,0}(D)$ принадлежит третьему классу симметрии (обозначение $C_{1,0}$) в области D , если она нечетна по переменной x и четна по переменной y . То есть, $f_3(-x, y) = -f_3(x, y), f_3(x, -y) = f_3(x, y)$.

Определение 4. Говорят, что непрерывная функция $f_4(x, y) \in C_{1,1}(D)$ принадлежит четвертому классу симметрии (обозначение $C_{1,1}$) в области D , если она нечетна по каждой из переменных x, y . То есть, $f_4(-x, y) = -f_4(x, y), f_4(x, -y) = -f_4(x, y)$.

Лемма 3. Любая непрерывная функция двух переменных $f(x, y) \in C(D)$ представима суммой четырех непрерывных функций, принадлежащих определенным выше классам симметрии, то есть $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) + f_4(x, y)$. Где $f_1(x, y) \in C_{0,0}(D), f_2(x, y) \in C_{0,1}(D), f_3(x, y) \in C_{1,0}(D), f_4(x, y) \in C_{1,1}(D)$.

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательные функции на базе функции $f(x, y), (x, y) \in D$:

$$f_1(x, y) = \frac{1}{4} [(f(x, y) + f(-x, y)) + (f(x, -y) + f(-x, -y))] \in C(D)$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) + f(-x, y)) - (f(x, -y) + f(-x, -y))] \in C(D)$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) - f(-x, y)) + (f(x, -y) - f(-x, -y))] \in C(D)$$

$$f_4(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) - f(-x, y)) - (f(x, -y) - f(-x, -y))] \in C(D).$$

Во-первых:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) + f_4(x, y) = f(x, y).$$

Во-вторых:

1.

$$f_1(-x, y) = \frac{1}{4}[(f(-x, y) + f(x, y)) + (f(-x, -y) + f(x, -y))] = f_1(x, y)$$

$$f_1(x, -y) = \frac{1}{4}[(f(x, -y) + f(-x, -y)) + (f(x, y) + f(-x, y))] = f_1(x, y)$$

То есть, $f_1(x, y) \in C_{0,0}(D)$.

2.

$$f_2(-x, y) = \frac{1}{4}[(f(-x, y) + f(x, y)) - (f(-x, -y) + f(x, -y))] = f_2(x, y)$$

$$f_2(x, -y) = \frac{1}{4}[(f(x, -y) + f(-x, -y)) - (f(x, y) + f(-x, y))] = -f_2(x, y)$$

То есть, $f_2(x, y) \in C_{0,1}(D)$.

3.

$$f_3(-x, y) = \frac{1}{4}[(f(-x, y) - f(x, y)) + (f(-x, -y) - f(x, -y))] = -f_3(x, y)$$

$$f_3(x, -y) = \frac{1}{4}[(f(x, -y) - f(-x, -y)) + (f(x, y) - f(-x, y))] = f_3(x, y)$$

То есть, $f_3(x, y) \in C_{1,0}(D)$.

4.

$$f_4(-x, y) = \frac{1}{4}[(f(-x, y) - f(x, y)) - (f(-x, -y) - f(x, -y))] = -f_4(x, y)$$

$$f_4(x, -y) = \frac{1}{4}[(f(x, -y) - f(-x, -y)) - (f(x, y) - f(-x, y))] = -f_4(x, y)$$

То есть, $f_4(x, y) \in C_{1,1}(D)$. **Лемма 3** доказана.

Теорема 1 (критерий принадлежности функции определенному классу симметрии). Для того чтобы решение задачи (1) $u(x, y) \in C^2[a, b] \times [c, d]$ (решение задачи (2) $u(x, y) \in C^4[a, b] \times [c, d]$) принадлежало определенному классу симметрии, необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения (1) или уравнения (2) принадлежала тому же классу симметрии.

Доказательство.

Для определенности проведем, например, для класса функций (пример обозначения при сужении класса функций смотрим в работе [11, стр. 73]):

$$C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d] = C_{0,0}[a, b] \times [c, d] \cap C^2[a, b] \times [c, d].$$

Необходимость. Пусть решение задачи (1) или решение задачи (2) принадлежит классу $u(x, y) \in C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$ ($u(x, y) \in C_{0,0}^4[a, b] \times [c, d]$). Тогда решение, разложенное по системе координатных функций вида (3) по каждой переменной x, y представимо в виде двойной суммы, в которой каждое слагаемое принадлежит классу $C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$ ($C_{0,0}^4[a, b] \times [c, d]$). $C_{i,j}$ – коэффициенты разложения:

$$u(x, y) = u(t + \bar{c}, s + \bar{c}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C_{i,j} X_j^q(t) Y_i^q(s). \quad (7)$$

Где:

$$x = t + \bar{c} = t + \frac{a+b}{2}; y = s + \bar{c} = s + \frac{c+d}{2}$$

$$X_j^q(t) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{2j} \left(t^2 - \frac{(b-a)^2}{4}\right)^j, Y_i^q(s) = \left(\frac{2}{d-c}\right)^{2i} \left(s^2 - \frac{(d-c)^2}{4}\right)^i, i, j \geq 1.$$

На основании **Леммы 1** каждое слагаемое решения в левой части уравнения (1) после взятия частной производной четного порядка сохраняет исходную четность. В итоге сумма

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{tt} + u_{ss} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C_{i,j} \left(\frac{d^2 X_j^q(t)}{dt^2} Y_i^q(s) + X_j^q(t) \frac{d^2 Y_i^q(s)}{ds^2} \right).$$

$$\in C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$$

Но в силу уравнения (1) функция из класса $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \in C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$, который является подмножеством класса функций $C_{0,0}[a, b] \times [c, d]$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Теоремы 1 докажем от противного. Пусть правая часть $f(x, y)$ уравнения (1) $f(x, y) \in C_{0,0}[a, b] \times [c, d]$, то есть четна по двум переменным x, y , а решение задачи (1) не принадлежит классу $C_{0,0}[a, b] \times [c, d]$. Тогда из **Леммы 3** следует, что общее решение задачи (1) представимо (по системам координатных функций (3), (4)) в виде

$$u(x, y) = \sum_i \sum_j C_{ij}^1 X_j^q(t) Y_i^q(s) + \sum_i \sum_j C_{ij}^2 X_j^q(t) Y_i^h(s) + \sum_i \sum_j C_{ij}^3 X_j^h(t) Y_i^q(s) +$$

$$+ \sum_i \sum_j C_{ij}^4 X_j^h(t) Y_i^h(s). \quad (8)$$

Где в формуле (8) только первая сумма является функцией из класса $C_{0,0}[a, b] \times [c, d]$ и из класса $C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$, $u(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция в задаче (1). И хотя бы одно слагаемое во второй или третьей или в четвертой сумме тождественно не равно нулю. На основании результатов **Леммы 1**, **Леммы 2** каждое слагаемое в четырех суммах формулы (8) сохранит принадлежность исходному классу и после действия оператора Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Таким образом, функция в левой части уравнения (1) $u_{xx} + u_{yy}$ не из класса $C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d]$, в то время как правая часть уравнения $f(x, y) \in C_{0,0}[a, b] \times [c, d]$. То есть, $f(x, y)$ четна по каждой переменной, а левая часть $u_{xx} + u_{yy}$ не является четной хотя бы по одной переменной. Полученное противоречие завершает доказательство достаточности. **Теорема 1** доказана.

Замечание 2. Аналогично с использованием **Леммы 1** и **Леммы 2** доказываем одновременную принадлежность решения задачи (1) (решение задачи (2)) и правой части соответствующего уравнения второму, третьему и четвертому классу симметрии.

Замечание 3. Благодаря доказанным Леммам 1, 2, 3, методом редукции линейной задачи (1) (задачи (2)) для каждого класса симметрии можно решать однородные краевые задачи для однородных уравнений в частных производных не только любого четного порядка, но и для уравнений нечетного порядка, разлагая правую часть уравнения на 4

слагаемых согласно **Лемме 3**. Однако для однородного уравнения нечетного порядка решение и правую часть уравнения нужно выбирать из сопряженных классов симметрии.

Используя метод редукции линейной задачи, сведем задачу (1) (задачу (2)):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d \\ u|_{x=a} = u|_{x=b} = u|_{y=c} = u|_{y=d} = 0 \end{cases}$$

к решению четырех однородных краевых задач:

$$t = x - \frac{a+b}{2}; s = y - \frac{c+d}{2}$$

$$1) \begin{cases} u_{xx}^1 + u_{yy}^1 = f_1(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d, \quad f_1(x, y) \in C_{0,0}[a, b] \times [c, d] \\ u^1|_{x=a} = u^1|_{x=b} = u^1|_{y=c} = u^1|_{y=d} = 0, u^1(x, y) \in C_{0,0}^2[a, b] \times [c, d] \end{cases} \quad (9)$$

$$f_1(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) + f(-x, y)) + (f(x, -y) + f(-x, -y))]$$

$$u^1(x, y) = \sum_{p=1}^n \sum_{i+j \leq p+1} C_{ij}^1 X_j^q(t) Y_i^q(s) = \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^1 X_{p+1-i}^q(t) Y_i^q(s)$$

с координатными функциями по формуле (3). Где индекс k одномерного вектора C_k^1 связан с i условием $k = \frac{p(p-1)}{2} + i, i = \overline{1, p}, p = \overline{1, n}$ если $\frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2}$.

$$2) \begin{cases} u_{xx}^2 + u_{yy}^2 = f_2(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d, \quad f_2(x, y) \in C_{0,1}[a, b] \times [c, d] \\ u^2|_{x=a} = u^2|_{x=b} = u^2|_{y=c} = u^2|_{y=d} = 0, u^2(x, y) \in C_{0,1}^2[a, b] \times [c, d] \end{cases} \quad (10)$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) + f(-x, y)) - (f(x, -y) + f(-x, -y))]$$

$$u^2(x, y) = \sum_{p=1}^n \sum_{i+j \leq p+1} C_{ij}^2 X_j^q(t) Y_i^h(s) = \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^2 X_{p+1-i}^q(t) Y_i^h(s)$$

с координатными функциями по формулам (3) и (4). Где индекс k одномерного вектора C_k^2 связан с i условием $k = \frac{p(p-1)}{2} + i, i = \overline{1, p}, p = \overline{1, n}$ если $\frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2}$.

$$3) \begin{cases} u_{xx}^3 + u_{yy}^3 = f_3(x, y), & a < x < b, \quad c < y < d, \quad f_3(x, y) \in C_{1,0}[a, b] \times [c, d] \\ u^3|_{x=a} = u^3|_{x=b} = u^3|_{y=c} = u^3|_{y=d} = 0, u^3(x, y) \in C_{1,0}^2[a, b] \times [c, d] \end{cases} \quad (11)$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{4}[(f(x, y) - f(-x, y)) + (f(x, -y) - f(-x, -y))]$$

$$u^3(x, y) = \sum_{p=1}^n \sum_{i+j \leq p+1} C_{ij}^3 X_j^h(t) Y_i^q(s) = \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^3 X_{p+1-i}^h(t) Y_i^q(s)$$

с координатными функциями по формулам (3) и (4). Где индекс k одномерного вектора C_k^3 связан с i условием $k = \frac{p(p-1)}{2} + i, i = \overline{1, p}, p = \overline{1, n}$ если $\frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2}$.

$$4) \begin{cases} u_{xx}^4 + u_{yy}^4 = f_4(x, y), \quad a < x < b, \quad c < y < d, \quad f_4(x, y) \in C_{1,1}[a, b] \times [c, d] \\ u^4|_{x=a} = u^4|_{x=b} = u^4|_{y=c} = u^4|_{y=d} = 0, u^4(x, y) \in C_{1,1}^2[a, b] \times [c, d] \end{cases} \quad (12)$$

$$f_4(x, y) = \frac{1}{4} [(f(x, y) - f(-x, y)) - (f(x, -y) - f(-x, -y))]$$

$$u^4(x, y) = \sum_{p=1}^n \sum_{i+j \leq p+1} C_{ij}^4 X_j^H(t) Y_i^H(s) = \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^4 X_{p+1-i}^H(t) Y_i^H(s)$$

с координатными функциями по формуле (4). Где индекс k одномерного вектора C_k^4 связан с i условием $k = \frac{p(p-1)}{2} + i, i = \overline{1, p}, p = \overline{1, n}$, если $\frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2}$.

Общее решение задачи (1) (задачи (2)) запишем в виде

$$u(x, y) = u^1(x, y) + u^2(x, y) + u^3(x, y) + u^4(x, y)$$

Будем решать задачи (9), (10), (11), (12) для нахождения векторов неизвестных коэффициентов $C_k^1, C_k^2, C_k^3, C_k^4, k = \overline{1, \frac{n(n+1)}{2}}$ методом Бубнова–Галеркина. Например, в задаче (9) левую и правую части уравнения умножим скалярно на координатную функцию $X_{p_1+1-i_1}^q(t) Y_{i_1}^q(s), k_1 = \frac{p_1(p_1-1)}{2} + i_1, i_1 = \overline{1, p_1}, p_1 = \overline{1, n}$, получим:

$$u_{xx}^1 + u_{yy}^1 = f_1(x, y),$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^1 \left(\frac{d^2}{dt^2} X_{p+1-i}^q(t) Y_i^q(s) + X_{p+1-i}^q(t) \frac{d^2}{ds^2} Y_i^q(s) \right) &= f_1(x, y), \\ \sum_{p=1}^n \sum_{i=1}^p C_k^1 \left(\left\langle \frac{d^2}{dt^2} X_{p+1-i}^q(t) Y_i^q(s) + X_{p+1-i}^q(t) \frac{d^2}{ds^2} Y_i^q(s), X_{p_1+1-i_1}^q(t) Y_{i_1}^q(s) \right\rangle \right) &= \\ \langle f_1(t, s), X_{p_1+1-i_1}^q(t) Y_{i_1}^q(s) \rangle &= f_{k_1} \end{aligned} \quad (13)$$

Где: $k_1 = \frac{p_1(p_1-1)}{2} + i_1, i_1 = \overline{1, p_1}, p_1 = \overline{1, n}$.

Формула (13) равносильна системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} A_{k_1, k} C_k^1 = f_{k_1}, \quad (14)$$

$$\text{Где: } A_{k_1, k} = \left\langle \frac{d^2}{dt^2} X_{p+1-i}^q(t) Y_i^q(s) + X_{p+1-i}^q(t) \frac{d^2}{ds^2} Y_i^q(s), X_{p_1+1-i_1}^q(t) Y_{i_1}^q(s) \right\rangle$$

$$f_{k_1} = \langle f_1(t, s), X_{p_1+1-i_1}^q(t) Y_{i_1}^q(s) \rangle$$

$$k = \frac{p(p-1)}{2} + i, i = \overline{1, p}, p = \overline{1, n}, \text{ если } \frac{p(p-1)}{2} < k \leq \frac{p(p+1)}{2}$$

$$k_1 = \frac{p_1(p_1-1)}{2} + i_1, i_1 = \overline{1, p_1}, p_1 = \overline{1, n}, \text{ если } \frac{p_1(p_1-1)}{2} < k_1 \leq \frac{p_1(p_1+1)}{2}.$$

Аналогично записывается алгоритм Бубнова–Галеркина для частных случаев в задачах (10), (11), (12). В этих задачах формально можно получить формулы из формул (13), (14), меняя нижний индекс для правой части функции $f_i(x, y), i = 2, 3, 4$ и меняя

одновременно верхний индекс $z, z_1 = \{\text{ч}, \text{н}\}$ соответственно в задачах (10), (11), (12). для координатных функций $X_{p+1-i}^z(t), Y_i^{z_1}(s), X_{p+1-i_1}^z(t), Y_{i_1}^{z_1}(s)$.

Матричные коэффициенты $A_{k_1, k}$ и правая часть f_{k_1} в формуле (14) используют скалярное произведение двух функций. Численное значение скалярного произведения, вычислялось программой по формуле (15) из работы [9], [10]:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b \int_c^d f_1(x, y) f_2(x, y) dx dy = 25h_1 h_2 \sum_{i=0}^{n_2} \sum_{j=0}^{n_1} C_i^{n_2} C_j^{n_1} f_1(x_i, y_j) f_2(x_i, y_j) + (15) \\ + O(h_1^{12} + h_2^{12})$$

$$x_i = a + h_1 i, y_j = c + h_2 j, h_1 = \frac{b-a}{n_1}, h_2 = \frac{d-c}{n_2}, i = \overline{0, n_1}, j = \overline{0, n_2}, n_s = 10p_s, s = 1, 2$$

Где весовые коэффициенты $C_i^{n_1}, C_j^{n_2}$ квадратурной формулы имеют вид

$$C_i^{n_s} = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, \text{ если } i = 0 \text{ или } i = n_s, \\ \frac{16067}{149688}, \text{ если } i \equiv 0(\text{mod}10) \text{ и } 0 < i < n_s \\ \frac{26575}{74844}, \text{ если } i \equiv 1(\text{mod}10) \text{ или } i \equiv 9(\text{mod}10) \\ \frac{-16175}{99792}, \text{ если } i \equiv 2(\text{mod}10) \text{ или } i \equiv 8(\text{mod}10) \\ \frac{5675}{6237}, \text{ если } i \equiv 3(\text{mod}10) \text{ или } i \equiv 7(\text{mod}10) \\ \frac{-4825}{5544}, \text{ если } i \equiv 4(\text{mod}10) \text{ или } i \equiv 6(\text{mod}10) \\ \frac{17807}{12474}, \text{ если } i \equiv 5(\text{mod}10) \\ s = 1, 2 \end{cases}$$

Точные и численные решения с помощью алгоритма (3)–(15)

Рассмотрим несколько примеров численного решения однородных краевых задач для уравнения Пуассона на прямоугольнике с известными точными решениями.

Пример 1. Правая часть уравнения Пуассона четна по переменным t, s относительно середины квадрата со стороной π .

$$\sin^2 x \sin y = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + t \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + s \right) = \cos^2(t) \cos(s) \\ \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin^2 x \sin y = \sin y \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right), & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Решение примера (16) ищем в виде $u(x, y) = f(x) \sin y$. Подставляя решение в систему уравнений (16), получим

$$\begin{cases} f''(x) - f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}, & 0 < x < \pi. \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $f_{00}(x) = A \cosh x + B \sinh x$. Частное решение ищем в виде $f_{\text{ч}}(x) = C_0 + C_1 \cos 2x, f_{\text{ч}}''(x) = -4C_1 \cos 2x$. После подстановки получим

$$-4C_1 \cos 2x - C_0 - C_1 \cos 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, C_0 = -\frac{1}{2}, C_1 = \frac{1}{10}$$

Общее решение неоднородного уравнения $f_{\text{он}}(x) = A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{10}$. С учетом краевых условий получим $f(0) = 0$, $A - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0$, $A = \frac{2}{5}$, $f(\pi) = 0$, $\frac{2}{5} \operatorname{ch} \pi + B \operatorname{sh} \pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0$, $B = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right)$. Запишем ответ с учетом найденных коэффициентов A , B

$$u(x, y) = \left(\frac{2}{5} \left(\operatorname{ch} x + \left(\frac{1 - \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x \right) - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{10} \right) \sin y. \quad (17)$$

Таблица 1. Вычисленное программой численное $u_{i,j}^{\text{num}}$ и точное значение $u_{i,j}^{\text{exact}}$ по формуле (17). Число координатных функций $n=7$. $n_1 = n_2 = 60$

x_j	y_i	$u_{i,j}^{\text{num}}$	$u_{i,j}^{\text{exact}}$	$ u_{i,j}^{\text{exact}} - u_{i,j}^{\text{num}} $
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.785398163	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
1.57079632	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
2.35619449	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
3.14159265	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.000000000	0.785398163	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.785398163	0.785398163	-0.2042391699	0.2042391704	4.94569-010
1.57079632	0.785398163	-0.3115408340	-0.3115408348	8.250E-010
2.35619449	0.785398163	-0.2042391699	-0.2042391704	4.94560E-010
3.14159265	0.785398163	0.000000000	0.000000000	0.0000E+000
0.000000000	1.570796326	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.785398164	1.570796326	-0.2888378048	-0.2888378033	1.43244E-009
1.570796326	1.570796326	-0.4405852714	-0.4405852738	2.40345E-009
2.356194490	1.570796326	-0.2888378033	-0.2888378048	1.43244E-009
3.141592653	1.570796326	0.000000000	0.000000000	0.00000000
0.000000000	1.570796326	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.7853981633	1.570796326	-0.2888378033	-0.2888378048	1.43244E-009
1.570796326	1.570796326	-0.4405852714	-0.4405852738	2.40345E-009
2.356194490	1.570796326	-0.2888378033	-0.2888378048	1.43244E-009
3.141592653	1.570796326	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.000000000	2.356194490	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000
0.7853981633	2.356194490	-0.2042391699	-0.2042391704	4.94560E-010
1.570796326	2.356194490	-0.31154083401	-0.31154083484	8.25066E-010
2.356194490	2.356194490	-0.2042391699	-0.2042391704	4.94560E-010
3.141592653	2.356194490	0.000000000	0.000000000	0.00000E+000

Координатные функции по переменным x, y заданы формулой (3). Решение примера 1 программируем по формуле (9). Программа дает равномерную норму (Чебышева) вычислительной погрешности в примере 1 алгоритмом (3)–(15):

$$\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{\substack{i=0, n_2 \\ j=0, n_1}} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 2.403451992982752E - 009,$$

$$\|u^{exact}\|_C = \max_{\substack{i=0, n_2 \\ j=0, n_1}} |u_{i,j}^{exact}| = 0.440585273864645.$$

Пример 2. Правая часть уравнения Пуассона четна по переменной t и нечетна по переменной s относительно середины квадрата со стороной π .

$$\begin{cases} \sin x \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) s^3 = \cos(t) s^3 \\ u_{xx} + u_{yy} = \sin x \cdot \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi. \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Решение примера (18) ищем в виде $u(x, y) = f(y) \sin x$. Подставляя решение в систему уравнений (18), получим:

$$\begin{cases} f''(y) - f(y) = \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3, \quad 0 < y < \pi, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = y - \frac{\pi}{2} \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(z) - f(z) = z^3, \quad -\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2} \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения $f_{00}(z) = A \operatorname{ch} z + B \operatorname{sh} z$. Частное решение ищем в виде $f_{\text{ч}}(z) = C_0 z + C_1 z^3$, $f_{\text{ч}}''(z) = 6C_1 z$. После подстановки получим:

$$6C_1 z - C_0 z - C_1 z^3 = z^3, \quad C_0 = 6C_1 = -6, \quad C_1 = -1.$$

Общее решение неоднородного уравнения $f_{0\text{н}}(z) = A \operatorname{ch} z + B \operatorname{sh} z - 6z - z^3$. С учетом краевых условий получим:

$$\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, A \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right) - B \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, A \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\pi - \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0 \end{cases}, \quad A = 0, B = \frac{3\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Запишем ответ с учетом найденных коэффициентов A, B :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left(\left(\frac{3\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right) \operatorname{sh} z - 6z - z^3 \right) \sin x = \\ &= \left(\left(\frac{3\pi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right) \operatorname{sh}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - 6\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3 \right) \sin x. \end{aligned} \quad (19)$$

Таблица 2. Вычисленное программой численное $u_{i,j}^{num}$ и точное значение $u_{i,j}^{exact}$ по формуле (19). Число координатных функций $n=7$. $n_1 = n_2 = 70$

x_j	y_i	$u_{i,j}^{num}$	$u_{i,j}^{exact}$	$ u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num} $
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.000000E+000
0.6731984257	0.0000000000	4.1987116E-017	-1.107540E-015	1.1495274E-015
1.346396851	0.0000000000	6.5653555E-017	-1.731819E-015	1.797473E-015
2.019595277	0.0000000000	6.0673040E-017	-1.600442E-015	1.6611152E-015
2.692793703	0.0000000000	2.9218668E-017	-7.707323E-016	7.999510E-016
0.0000000000	0.6731984257	0.0000000000	0.0000000000	0.000000E+000
0.6731984257	0.6731984257	0.1220789217	0.1220789423	-2.063954E-008
1.346396851	0.6731984257	0.1908902876	0.1908903209	-3.333566E-008
2.0195952773	0.67319842576	0.1764091508	0.1764091828	-3.198914E-008
2.692793703	0.6731984257	0.08495417623	0.08.495418499	-8.759563E-009
0.0000000000	1.346396851	0.0000000000	0.0000000000	0.000000E+000
0.6731984257	1.346396851	0.03107955473	0.03107953195	2.2777731E-008
1.346396851	1.346396851	0.04859792331	0.04859791308	1.0225394E-008
2.019595277	1.346396851	0.04491123769	0.04491122490	1.2786412E-008
2.692793703	1.346396851	0.02162813399	0.02162810601	2.7974960E-008
0.0000000000	2.019595277	0.0000000000	0.0000000000	0.000000E+000
0.6731984257	2.019595277	-0.06319668605	-0.06319672189	3.5836E-008
1.346396851	2.019595277	-0.09881834825	-0.09881837353	2.5275804E-008
2.019595277	2.019595277	-0.09132188139	-0.09132190905	2.7659922E-008
2.692793703	2.019595277	-0.04397827572	-0.04.397831354	3.7819510E-008
0.0000000000	2.692793703	0.0000000000	0.0000000000	0.000000E+000
0.6731984257	2.692793703	-0.1315158668	-0.1315158539	-1.286272E-008
1.346396851	2.692793703	-0.2056465031	-0.2056464701	-3.302175E-008
2.019595277	2.692793703	-0.1900459453	-0.1900459152	-3.007367E-008
2.6927937030	2.692793703	-0.09152128907	-0.09152128919	1.1451521E-010

Координатные функции по переменной x задаются формулой (3), а по переменной y задаются формулой (4). Решение примера 2 программируем по формуле (10). Программа дает равномерную норму (Чебышева) вычислительной погрешности в примере 2 алгоритмом (3)–(15):

$$\|u^{exact} - u^{num}\|_C = \max_{\substack{i=0,n_2 \\ j=0,n_1}} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 4.022184701968357E - 008,$$

$$\|u^{exact}\|_C = \max_{\substack{i=0,n_2 \\ j=0,n_1}} |u_{i,j}^{exact}| = 0.211525779807633.$$

Пример 3. Правая часть уравнения Пуассона четна по переменной t и произвольна по переменной s (то есть не является четной и не является нечетной по переменной s) относительно середины квадрата со стороной π .

$$\sin x \cdot y^2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \left(\frac{\pi}{2} + s\right)^2 = \cos(t) \left(\frac{\pi}{2} + s\right)^2$$

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin x \cdot y^2, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}. \quad (20)$$

Решение примера (20) ищем в виде $u(x, y) = f(y) \sin x$. Подставляя решение в систему уравнений (18), получим:

$$\begin{cases} f''(y) - f(y) = y^2, & 0 < y < \pi \\ f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Общее решение однородного уравнения $f_{00}(z) = A \operatorname{ch} z + B \operatorname{sh} z$. Частное решение ищем в виде $f_{\text{ч}}(y) = C_0 + C_1 y^2$, $f''_{\text{ч}}(z) = 2C_1$. После подстановки получим

$$2C_1 - C_0 - C_1 y^2 = y^2, \quad C_0 = 2C_1 = -2, \quad C_1 = -1.$$

Общее решение неоднородного уравнения $f_{\text{он}}(y) = A \operatorname{ch} y + B \operatorname{sh} y - 2 - y^2$. С учетом краевых условий получим

$$f(0) = 0, \quad A = 2, \quad f(\pi) = 0, \quad 2 \operatorname{ch} \pi + B \operatorname{sh} \pi - 2 - \pi^2 = 0, \quad B = \frac{2 + \pi^2 - 2 \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi}.$$

Запишем ответ с учетом найденных коэффициентов A, B :

$$u(x, y) = \left(\left(2 \operatorname{ch} y + \left(\frac{2 + \pi^2 - 2 \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} y \right) - 2 - y^2 \right) \sin x. \quad (21)$$

Координатные функции по переменной x задаются формулой (3), а по переменной y задаются формулами (3) и (4). Решение примера 3 программируем по двум частным задачам, разлагая правую часть на четное и нечетное слагаемое по переменной y (**Лемма 3**). В первой частной задаче строим численное решение по формуле (9), во второй частной задаче – по формуле (10). Затем складываем численные решения задач:

$$u_{i,j}^{\text{num}} = u_{i,j}^{\text{num}(9)} + u_{i,j}^{\text{num}(10)}, \quad j = \overline{0, n_1}, \quad i = \overline{0, n_2}.$$

Программа дает равномерную норму (Чебышева) вычислительной погрешности в примере 3 алгоритмом (3)–(15):

$$\|u^{\text{exact}} - u^{\text{num}}\|_C = \max_{\substack{i=\overline{0, n_2} \\ j=\overline{0, n_1}}} |u_{i,j}^{\text{exact}} - u_{i,j}^{\text{num}}| = 4.965370670184655\text{E} - 008,$$

$$\|u^{\text{exact}}\|_C = \max_{\substack{i=\overline{0, n_2} \\ j=\overline{0, n_1}}} |u_{i,j}^{\text{exact}}| = 2.07084359002153,$$

$$\frac{\|u^{\text{exact}} - u^{\text{num}}\|_C}{\|u^{\text{exact}}\|_C} = 2.397752632845165\text{E} - 008.$$

Таблица 3. Вычисленное программой численное $u_{i,j}^{num}$ и точное значение $u_{i,j}^{exact}$ по формуле (21). Число координатных функций $n=7$. $n_1 = n_2 = 90$

x_j	y_i	$u_{i,j}^{num}$	$u_{i,j}^{exact}$	$ u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num} $
0.0000000000	0.0000000000	2.8847452E-048	0.0000000000	2.8847452E-048
0.6981317007	0.0000000000	8.8121821E-017	0.0000000000	8.8121821E-017
1.396263401	0.0000000000	1.3501033E-016	0.0000000000	1.3501033E-016
2.094395102	0.0000000000	1.18726E-016	0.0000000000	1.1872614E-016
2.792526803	0.0000000000	4.6888667E-017	0.0000000000	4.6888667E-017
0.0000000000	0.698131700	8.9150597E-034	0.0000000000	8.9150597E-034
0.6981317007	0.6981317007	-0.4633010528	-0.4633010412	-1.160963E-008
1.396263401	0.6981317007	-0.7098183953	-0.7098183763	-1.901752E-008
2.094395102	0.6981317007	-0.6242038230	-0.6242038043	-1.873738E-008
2.792526803	0.6981317007	-0.2465173309	-0.2465173350	4.1067097E-009
0.0000000000	1.396263401	1.8284102E-033	0.0000000000	1.8284102E-033
0.6981317007	1.396263401	-0.9768696634	-0.9768696782	1.4812790E-008
1.396263401	1.396263401	-1.496651166	-1.496651177	1.0777631E-008
2.0943951023	1.3962634015	-1.316132947	-1.316132957	9.7307812E-009
2.792526803	1.396263401	-0.5197814741	-0.5197814991	2.4968398E-008
0.0000000000	2.094395102	2.9270042E-033	0.0000000000	2.927004E-033
0.6981317007	2.094395102	-1.324359349	-1.324359357	7.8451543E-009
1.396263401	2.094395102	-2.029036254	-2.029036253	-9.207226E-010
2.094395102	2.094395102	-1.784304535	-1.784304535	-3.805200E-011
2.792526803	2.094395102	-0.7046768753	-0.7046768955	2.0289889E-008
0.0000000000	2.792526803	1.8255772E-033	0.0000000000	1.8255772E-033
0.6981317007	2.792526803	-0.8871460549	-0.8871460301	-2.480204E-008
1.396263401	2.792526803	-1.359186580	-1.359186573	-7.733131E-009
2.094395102	2.792526803	-1.195248629	-1.195248613	-1.694967E-008
2.792526803	2.792526803	-0.4720405607	-0.4720405430	-1.766452E-008

Пример 4. Правая часть уравнения Пуассона произвольна по переменной t и произвольна по переменной s (не является четной и не является нечетной по переменным t, s) относительно середины квадрата со стороной π .

$$\begin{aligned}
 y^2 \sin x + x^2 \sin y &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\left(\frac{\pi}{2} + s\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + s\right)\left(\frac{\pi}{2} + t\right)^2 \\
 \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y^2 \sin x + x^2 \sin y, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi. \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \quad (22)$$

Решение примера 4 получим из решения примера 3, используя редукцию линейной задачи (22) и симметрию правой части (22):

$$u(x, y) = \left(\left(2 \operatorname{ch} y + \left(\frac{2 + \pi^2 - 2 \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} y \right) - 2 - y^2 \right) \sin x +$$

$$+ \left(\left(2 \operatorname{ch} x + \left(\frac{2 + \pi^2 - 2 \operatorname{ch} \pi}{\operatorname{sh} \pi} \right) \operatorname{sh} x \right) - 2 - x^2 \right) \sin y. \quad (23)$$

Таблица 4. Вычисленное программой численное $u_{i,j}^{num}$ и точное значение $u_{i,j}^{exact}$ по формуле (23). Число координатных функций $n=7$. $n_1 = n_2 = 90$

x_j	y_i	$u_{i,j}^{num}$	$u_{i,j}^{exact}$	$ u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num} $
0.0000000000	0.0000000000	8.1655973E-048	0.0000000000	8.1655973E-048
0.6981317007	0.0000000000	8.8121821E-017	0.0000000000	8.8121821E-017
1.396263401	0.0000000000	1.3501033E-016	0.0000000000	1.3501033E-016
2.094395102	0.0000000000	1.1872614E-016	0.0000000000	1.1872614E-016
2.792526803	0.0000000000	4.6888667E-017	0.0000000000	4.6888667E-017
0.0000000000	0.6981317007	8.812182E-017	0.0000000000	8.8121821E-017
0.6981317007	0.6981317007	-0.9266021121	-0.9266020825	-2.954416E-008
1.396263401	0.6981317007	-1.686688061	-1.686688054	-7.043760E-009
2.094395102	0.6981317007	-1.948563174	-1.948563162	-1.274737E-008
2.792526803	0.6981317007	-1.133663387	-1.133663365	-2.229445E-008
0.0000000000	1.396263401	1.3501033E-016	0.0000000000	1.3501033E-016
0.6981317007	1.396263401	-1.686688083	-1.686688054	-2.927367E-008
1.396263401	1.396263401	-2.993302360	-2.993302354	-5.895098E-009
2.094395102	1.396263401	-3.345169217	-3.345169210	-7.318042E-009
2.792526803	1.396263401	-1.878968061	-1.878968072	1.0975811E-008
0.0000000000	2.094395102	1.1872614E-016	0.0000000000	1.1872614E-016
0.6981317007	2.094395102	-1.948563188	-1.948563162	-2.658253E-008
1.396263401	2.094395102	-3.345169212	-3.345169210	-1.953105E-009
2.094395102	2.094395102	-3.568609077	-3.568609071	-6.000962E-009
2.792526803	2.094395102	-1.899925509	-1.899925508	-3.849329E-010
0.0000000000	2.792526803	4.6888667E-017	0.0000000000	4.6888667E-017
0.6981317007	2.792526803	-1.133663387	-1.133663365	-2.193001E-008
1.396263401	2.792526803	-1.878968056	-1.878968072	1.6172456E-008
2.094395102	2.792526803	-1.899925507	-1.899925508	1.6218706E-009
2.792526803	2.792526803	-0.9440811219	-0.9440810861	-3.578233E-008

Координатные функции по переменным x и y задаются формулами (3) и (4). Решение примера 4 программируем по четырем частным задачам, разлагая правую часть уравнения на четыре слагаемых согласно **Лемме 3**. Соответственно, строим численные решения задач по формулам (9), (10), (11), (12). Затем складываем численные решения задач:

$$u_{i,j}^{num} = u_{i,j}^{num(9)} + u_{i,j}^{num(10)} + u_{i,j}^{num(11)} + u_{i,j}^{num(12)}, \quad j = \overline{0, n_1}, i = \overline{0, n_2}$$

Программа дает равномерную норму (Чебышева) вычислительной погрешности в примере 4 алгоритмом (3)–(15):

$$\begin{aligned}\|u^{exact} - u^{num}\|_C &= \max_{\substack{i=0, n_2 \\ j=0, n_1}} |u_{i,j}^{exact} - u_{i,j}^{num}| = 9.734341377409805E - 008, \\ \|u^{exact}\|_C &= \max_{\substack{i=0, n_2 \\ j=0, n_1}} |u_{i,j}^{exact}| = 3.74139188742999, \\ \frac{\|u^{exact} - u^{num}\|_C}{\|u^{exact}\|_C} &= 2.601796783201037E - 008.\end{aligned}$$

Наибольшее время работы программы (для примера 4) составило 4.328125 секунды, что значительно меньше (20 секунд) для решения уравнения Пуассона методом векторной прогонки [8, стр. 548] при одинаковом числе узлов сетки.

Основные полученные в работе результаты

Впервые предложены четные и нечетные системы однородных координатных функций симметричных относительно середины прямоугольника.

Определены 4 класса четности непрерывных функций двух переменных $C_{0,0}, C_{0,1}, C_{1,0}, C_{1,1}$ (четно-четные, четно-нечетные, нечетно-четные, нечетно-нечетные). Каждый класс функций инвариантен относительно частных производных четного порядка, например, для действия на функции оператора Лапласа или бигармонического оператора (Лемма 1, Лемма 2).

Доказано, что любую непрерывную функцию двух переменных можно разложить в сумму 4 непрерывных слагаемых, каждое слагаемое принадлежит по четности классам $C_{0,0}, C_{0,1}, C_{1,0}, C_{1,1}$ (Лемма 3).

Доказана Теорема 1, согласно которой решение любой однородной краевой задачи для однородного линейного уравнения в частных производных сводится редукцией к решению 4 простых задач на каждом по четности классе функций.

Предложен численный алгоритм Бубнова–Галеркина (3)–(15) для решения краевой задачи с уравнением Пуассона на прямоугольнике для иллюстрации метода симметричных систем координатных функций.

Численно решены четыре однородных краевых задачи с уравнением Пуассона из различных классов симметрии правой части уравнения (четно-четной, четно-нечетной, четно-произвольной, произвольно-произвольной).

Точность решения краевых задач методом Бубнова–Галеркина с однородными уравнениями в частных производных имеет порядок 10^{-8} в равномерной метрике.

Для краевой задачи с бигармоническим уравнением (2), решаемой алгоритмом Бубнова–Галеркина (13), (14) для вычисления смешанной производной u_{xxyy} достаточно использовать формулы второй производной (5), (6), а для производной u_{xxxx} написать формулу четвертой производной. В левую часть уравнений (13), (14) вместо оператора Лапласа необходимо подставить три слагаемых $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$ для бигармонического оператора. Причем $u(x, y)$ представимо суммой по координатным функциям либо в виде (9), либо (10), либо (11), либо (12).

Список источников

1. Волосов К. А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрической форме // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 4. С. 492–497.
2. Бурский В. П. Некоторые новые методы исследования краевых задач для общих дифференциальных уравнений в частных производных // Теоретическая и математическая физика. 2024. Т. 218, № 1. С. 48–59.

3. Пикулин В. П., Похожаев С. И. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004. 208 с.
4. Сухинов А. И., Чистяков А. Е., Никитина А. В. [и др.] Метод решения сеточных уравнений для задач гидродинамики в плоских областях // Математическое моделирование. 2023. Т. 35, № 3. С. 35–58.
5. Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Никифорова О. Ю. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. Т. 70. С. 127–142.
6. Бурова И. Г., Алцыбеев Г. О. Применение сплайновых аппроксимаций второго порядка к решению интегральных уравнений второго рода // Вычислительные методы и программирование. 2025. Т. 26, № 2. С. 175–191.
7. Шапеев В. П., Беляев В. А. Решение краевых задач для уравнений с частными производными в треугольных областях методом коллокации и наименьших квадратов // Вычислительные методы и программирование. 2018. Т. 19, № 1. С. 96–111.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: учеб. пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. 636 с.
9. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К. [и др.]. Модифицированный метод Бубнова–Галеркина для решения краевых задач с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением // Computational Mathematics and Information Technologies. 2024. Т. 8, № 3. С. 23–33.
10. Волосова Н. К., Волосов К. А., Волосова А. К. [и др.]. Решение краевых задач для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений методом Бубнова–Галеркина // Computational Mathematics and Information Technologies. 2025. Т. 9, № 1. С. 7–19.
11. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи. М.: Физматлит, 2008. 255 с.

References

1. Volosov, K. A. (2007), "Construction of Solutions of Quasilinear Parabolic Equations in Parametric Form" [Postroenie resheniy kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy v parametricheskoy forme], *Differential Equations* [Differentsialnye uravneniya], no 43(4), pp. 492–497.
2. Burskiy, V. P. (2024), "Some New Methods for Studying Boundary Value Problems for General Partial Differential Equations" [Nekotorye novye metody issledovaniya kraevykh zadach dlya obshchikh differentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh], *Theoretical and Mathematical Physics* [Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika], no 218(1), pp. 48–59.
3. Pikulin, V. P. and Pokhohaev, S. I. (2004), *A Practical Course on Equations of Mathematical Physics* [Prakticheskiy kurs po uravneniyam matematicheskoy fiziki], MCCME [M TsNMO], Moscow, 208 p.
4. Sukhinov, A. I., Chistyakov, A. E., Nikitina, A. V. et al. (2023), "Method for Solving Grid Equations for Hydrodynamics Problems in Plane Domains" [Metod resheniya setochnykh uravneniy dlya zadach gidrodinamiki v ploskikh oblastyakh], *Mathematical Modeling* [Matematicheskoe modelirovanie], no 35(3), pp. 35–58.
5. Chernyshov, A. D., Goryainov, V. V., Kuznetsov, S. F. and Nikiforova, O. Yu. (2021), "Application of Fast Expansions for Constructing Exact Solutions of the Problem of

- Bending of a Rectangular Membrane Under Variable Load" [Primenenie bystrykh razlozheniy dlya postroeniya tochnykh resheniy zadachi o progrebe pryamougolnoy membrany pod deystviem peremennoy nagruzki], *Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics* [Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika], no 70, pp. 127–142.
6. Burova, I. G. and Altsybeev, G. O. (2025), "Application of Second-Order Spline Approximations to Solving Integral Equations of the Second Kind" [Primenenie splaynovykh approksimatsiy vtorogo poryadka k resheniyu integralnykh uravneniy vtorogo roda], *Computational Methods and Programming* [Vychislitelnye metody i programmirovaniye], no 26(2), pp. 175–191.
 7. Shapeev, V. P. and Belyaev, V. A. (2018), "Solution of Boundary Value Problems for Partial Differential Equations in Triangular Domains by the Collocation and Least Squares Method" [Reshenie kraevykh zadach dlya uravneniy s chastnymi proizvodnymi v treugolnykh oblastiakh metodom kollokatsii i naimenshikh kvadratov], *Computational Methods and Programming* [Vychislitelnye metody i programmirovaniye], no 19(1), pp. 96–111.
 8. Bakhvalov, N. S., Zhidkov, N. P. and Kobelkov, G. M. (2011), *Numerical Methods: A Study Guide for Students of Physics and Mathematics Specialties of Higher Educational Institutions* [Chislennye metody: uchebnoe posobie dlya studentov fiziko-matematicheskikh spetsialnostey vysshikh uchebnykh zavedeniy], Binom. Laboratory of Knowledge [Binom. Laboratoriya znaniy], Moscow, 636 p.
 9. Volosova, N. K., Volosov, K. A., Volosova, A. K. et al. (2024), "Modified Bubnov-Galerkin Method for Solving Boundary Value Problems with a Linear Ordinary Differential Equation" [Modifitsirovannyi metod Bubnova-Galerkina dlya resheniya kraevykh zadach s lineynym obyknovennym differentsialnym uravneniem], *Computational Mathematics and Information Technologies*, no 8(3), pp. 23–33.
 10. Volosova, N. K., Volosov, K. A., Volosova, A. K. et al. (2025), "Solving Boundary Value Problems for Some Nonlinear Differential Equations by the Bubnov-Galerkin Method" [Reshenie kraevykh zadach dlya nekotorykh nelineynykh differentsialnykh uravneniy metodom Bubnova-Galerkina], *Computational Mathematics and Information Technologies*, no 9(1), pp. 7–19.
 11. Alekseev, V. M., Galeev, E. M. and Tikhomirov, V. M. (2008), *Collection of Problems in Optimization: Theory. Examples. Problems* [Sbornik zadach po optimizatsii: Teoriya. Primery. Zadachi], Fizmatlit, Moscow, 255 p.

Информация об авторах:

Д. Ф. Пастухов – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, д. 29), eLibrary AuthorID: 405101;

Ю. Ф. Пастухов – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), eLibrary AuthorID: 405109.

Information about the authors:

D. F. Pastukhov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor at the Departments of Programming Technologies, Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk (29, Blokhina st., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), eLibrary AuthorID: 405101;

Yu. F. Pastukhov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Associate Professor at the Departments of Programming Technologies, Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk (29, Blokhina st., Novopolotsk, 211440, Republic of Belarus), eLibrary AuthorID: 405109.

Научная статья

УДК 512.55

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-49-57

<https://elibrary.ru/idhngf>



Пирсовский пучок полуколец для полукольца с инволюцией

Никита Сергеевич Протасов¹ Василий Владимирович Чермных²

^{1,2} Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия

¹ protasownikita@yandex.ru

² vv146@mail.ru

Аннотация. Для полукольца с инволюцией рассматривается его пирсовский пучок полуколец (без инволюций). Предлагается конструкция антиавтоморфизма этого пучка. Полукольцо сечений пучка является полукольцом с инволюцией, дается описание строения инволюции.

Ключевые слова: полукольцо с инволюцией; изоморфизм пучков; пирсовское представление; пирсовский слой.

Для цитирования: Протасов Н. С., Чермных В. В. Пирсовский пучок полуколец для полукольца с инволюцией // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 49–57. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-49-57. <https://elibrary.ru/idhngf>.

Статья поступила в редакцию 20.07.2026; одобрена после рецензирования 01.09.2026; принята к публикации 06.10.2026.

Research article

Pierce Sheaf of Semirings for a Semiring With Involution

Nikita S. Protasov¹, Vasily V. Chermnykh²

^{1,2} Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia

¹ protasownikita@yandex.ru

² vv146@mail.ru

Abstract. The paper deals with pierce sheaf of semirings (without involution) for a semiring with involution. An antiautomorphism construction for this sheaf is proposed. The semiring of sheaf sections is a semiring with involution; the involution structure is described.

Keywords: semiring with involution; sheaf isomorphism; Pierce representation; Pierce stalk.

For citation: Protasov, N. S. and Chermnykh, V. V. (2026), "Pierce Sheaf of Semirings for a Semiring With Involution", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 49–57, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-49-57, <https://elibrary.ru/idhngf>.

The article was submitted 20 Jul 2026; approved after review 01 Sep 2026; accepted for publication 06 Oct 2026.



© Протасов Н. С., Чермных В. В., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Введение и первоначальные понятия

Представление алгебр сечениями пучков является известным и хорошо зарекомендовавшим себя методом исследования алгебр. Смысл использования пучков заключается в том, что изучаемая абстрактная алгебра интерпретируется как алгебра непрерывных функций. Как правило, при пучковых представлениях выбираются конструкции пучков с более простыми алгебрами-слоями; привлечение топологических свойств пучков часто позволяет глубже понять структуру представляемого объекта. Настоящая статья посвящена пирсовским представлениям полуколец с инволюцией.

Пирсовские пучки являются наиболее востребованными пучковыми конструкциями. Это обуславливается тем, что пирсовский пучок имеет хорошее базисное пространство, а само пирсовское представление является изоморфным для всех алгебр, к которым применимы пучковые представления (кольца, ограниченные дистрибутивные решетки, почти-кольца, решеточно упорядоченные группы и кольца, полукольца). Изоморфные пирсовские представления имеют также кольца и полукольца с инволюцией.

Основная идея нашей статьи следующая. Рассмотрим полукольцо S с инволюцией. Для него имеются два пирсовских пучка – пучок полуколец $\mathbb{P}(S)$ и пучок полуколец с инволюцией $\mathbb{P}^*(S)$. Полукольцо, изоморфное полукольцу с инволюцией, является полукольцом с инволюцией. Поэтому полукольцо $\Gamma(\mathbb{P}(S))$ всех глобальных сечений пирсовского пучка является полукольцом с инволюцией. Очевидно, что сечение $\widehat{a}^*$ будет сопряженным к сечению $\widehat{a}$. Одна из задач заключается в нахождении связи между значениями сечений $\widehat{a}^*$ и $\widehat{a}$ в каждом слое (еще раз подчеркнем, что в слоях инволюции нет). Для этого мы рассматриваем преобразование пирсовского пучка $\mathbb{P}(S)$, при котором с помощью инволюции на S переставляются как точки базисного пространства пучка, так и соответствующие пирсовские слои. Полученное преобразование задает антиавтоморфизм пирсовского пучка (теорема 1), который позволяет указать вид инволюции полукольца глобальных сечений $\Gamma(\mathbb{P}(S))$ (теорема 2).

Начнем с основных определений.

Под *полукольцом* мы понимаем алгебру $\langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, которая является коммутативной полугруппой с нулем относительно сложения, полугруппой с единицей относительно умножения, умножение дистрибутивно справа и слева относительно сложения, нуль мультипликативен (т. е. справедливо условие $a0 = 0 = 0a$ для любого $a \in S$). Будем рассматривать полукольца с единицей, отличной от нуля.

Определение 1. Полукольцо S называется **-полукольцом* (или *полукольцом с инволюцией*), если существует антиавтоморфизм $*$: $a \mapsto a^*$ полукольца S :

$$a^{**} = a, (a + b)^* = a^* + b^*, (ab)^* = b^*a^*.$$

Примеры полуколец с инволюцией.

1. Любое кольцо с инволюцией является *-полукольцом.
2. Любое коммутативное полукольцо можно рассматривать как полукольцо с тождественной ($a^* = a$) инволюцией.
3. Полное полукольцо матриц есть *-полукольцо, где в качестве инволюции берется транспонирование матриц.
4. Пусть B – конечная булева алгебра, τ – произвольная перестановка второго порядка атомов (т.е. τ раскладывается в произведение независимых транспозиций). Для любого ненулевого $a \in B$ имеем $a = e_1 + \dots + e_k$ для однозначно

определенных атомов e_i . Положим $a^* = \tau(e_1) + \dots + \tau(e_k)$. Стандартно проверяется, что $*$ – инволюция на B . Более того, любая инволюция $*$ на B задается некоторой перестановкой атомов, поскольку, легко показать, как каждый атом переводит в атом.

Определение 2. Тройка (Π, π, X) называется *пучком полуколец*, если выполняются условия:

- 1) Π, X – топологические пространства;
- 2) $\pi: \Pi \rightarrow X$ – локальный гомеоморфизм;
- 3) для любого $x \in X$ $\Pi_x = \pi^{-1}(x)$ – полукольцо;
- 4) сложение, умножение в каждом Π_x являются непрерывными операциями;
- 5) отображения, сопоставляющие каждому $x \in X$ нуль и единицу из Π_x , непрерывны.

Если в пункте 3) заменить полукольцо на $*$ -полукольцо, а в пункте 4) потребовать непрерывность инволюции, рассматриваемой как унарная операция, то получим определение пучка $*$ -полуколец.

Пространства X и Π называются *базисным* и *накрывающим* соответственно; Π_x называется *слоем* пучка. Непрерывное отображение $\sigma: X \rightarrow \Pi$, определенное на всем X и такое, что $\sigma(x) \in \Pi_x$ называется *глобальным сечением*; непрерывное отображение, определенное на открытом подмножестве базисного пространства, называется *локальным сечением*. Локальные сечения образуют базис открытых множеств накрывающего пространства.

Множество $\Gamma(\Pi)$ всех глобальных сечений с послойно определенными операциями образует полукольцо. *Пучковым представлением* полукольца S называется произвольный гомоморфизм S в полукольцо глобальных сечений пучка Π .

Основными конструкциями, интересующими нас, являются пирсовские пучок полуколец и пучок $*$ -полуколец. Напомним их строение.

I. Пусть S – произвольное полукольцо.

1) Мультипликативный идемпотент $e = e^2 \in S$ называется *центральным дополняемым*, если для любого $a \in S$ выполняется $ae = ea$ и найдется такой элемент $e^\perp$, что $e + e^\perp = 1$ и $ee^\perp = 0$. Элемент $e^\perp$ находится однозначно и также является центральным дополняемым идемпотентом.

2) Обозначим через BS множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца S . Положим для $e, f \in BS$:

$$e \vee f = ef^\perp + f = e^\perp f + e, \quad e \wedge f = ef.$$

Тогда $\langle BS, \vee, \wedge \rangle$ – булева алгебра. Элемент $e^\perp$, определенный в пункте 1), будет также дополнением к e в булевой алгебре BS . Порядок в BS задается стандартно: $e \leq f \Leftrightarrow e = ef$.

3) Пусть $\text{Max } BS$ – множество всех максимальных идеалов булевой алгебры BS . С топологией Стоуна–Зарисского $\text{Max } BS$ становится топологическим пространством с открытыми множествами вида

$$d(A) = \{M \in \text{Max } BS: A \notin M\}$$

для произвольного идеала A из BS . Пространство $\text{Max } BS$ является нульмерным компактом, т. е. компактным хаусдорфовым пространством с базисом открыто-замкнутых множеств вида $d(e) = \{M \in \text{Max } BS: e \notin M\}$, $e \in BS$.

4) Рассмотрим конгруэнцию ρ_M на полукольце S , положив для произвольных $a, b \in S$, $M \in \text{Max } BS$:

$$a \equiv b \pmod{\rho_M} \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M.$$

Факторполукольцо S/ρ_M называется *пирсовским слоем* полукольца S .

5) Наконец, пирсовский пучок полукольца S имеет вид

$$(\mathbb{P}(S), \text{Max } BS),$$

где $\mathbb{P}(S)$ – накрывающее пространство пучка, являющееся дизъюнктивным объединением пирсовских слоев S/ρ_M по всем точкам базисного пространства $\text{Max } BS$.

Рассмотренная конструкция является обобщением классического пучка колец, введенного в обиход Р.С. Пирсом в 1967 г. [1]; в этой же работе получено изоморфное представление произвольного кольца сечениями своего пирсовского пучка (theorem 4.4). Изоморфизм пирсовского представления произвольного полукольца установлен В.В. Чермных в 1993 г. (см. теорема 3 в [2]).

II. Конструкция пирсовского пучка $*$ -полуколец имеет следующие отличия от пирсовского пучка полуколец.

Пусть S – произвольное $*$ -полукольцо. Элемент $a \in S$ называется *самосопряженным*, если $a^* = a$. Дополняемый самосопряженный идемпотент называется *проекцией*. Обозначим через B^*S булеву алгебру всех центральных проекций. Пространство $\text{Max } B^*S$ – множество всех максимальных идеалов кольца B^*S с топологией Стоуна–Зарисского. Рассмотрим конгруэнцию ρ_M^* на $*$ -полукольце S , положив для произвольных $a, b \in S$, $M \in \text{Max } B^*S$:

$$a \equiv b \pmod{\rho_M^*} \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in B^*S \setminus M.$$

Факторполукольцо S/ρ_M^* называется *пирсовским слоем* $*$ -полукольца S . Тогда пирсовский пучок $*$ -полукольца S имеет вид

$$(\mathbb{P}^*(S), \text{Max } B^*S),$$

где $\mathbb{P}^*(S)$ – накрывающее пространство пучка, являющееся дизъюнктивным объединением пирсовских слоев S/ρ_M^* по всем точкам базисного пространства $\text{Max } B^*S$.

Пример. Приведем простой пример, показывающий отличия пирсовского пучка полуколец и пирсовского пучка $*$ -полуколец для $*$ -полукольца. Пусть B – восьмиэлементная булева алгебра с атомами a, b, c , а инволюция на B задана условиями $a^* = b$ и $c^* = c$. Тогда пирсовский пучок $\mathbb{P}(B)$ полуколец имеет трехточечное базисное пространство, а его слои двухэлементны. В свою очередь пирсовский пучок $\mathbb{P}^*(B)$ $*$ -полуколец содержит два слоя, один из которых двухэлементная, а другой – четырехэлементная булева алгебра.

Впервые изоморфное пирсовское представление было получено для произвольного $*$ -кольца К. Салавой [3], для $*$ -полукольца – Р.В. Марковым [4]. Если S – произвольное полукольцо, то элементу $s \in S$ при пирсовском представлении соответствует глобальное сечение $\hat{s}$, где $\hat{s}(M) = s_M$ – класс элемента s в пирсовском слое S/ρ_M .

Постановка задач

Во-первых, отметим, что полукольцо, изоморфное полукольцу с инволюцией, также является полукольцом с инволюцией. Действительно, пусть S – $*$ -полукольцо, T – полукольцо, φ – полукольцевой изоморфизм. Для любого $t \in T$ положим $t^* = \varphi(s^*)$, где $\varphi(s) = t$. Тогда $t^{**} = (\varphi(s^*))^* = \varphi(s^{**}) = \varphi(s) = t$. Если $u = \varphi(v)$, то из $\varphi(sv) = tu$ следует $(tu)^* = \varphi((sv)^*) = \varphi(v^*s^*) = \varphi(v^*)\varphi(s^*) = u^*t^*$. Таким же образом устанавливается, что $(t + u)^* = t^* + u^*$.

Пусть сейчас S – $*$ -полукольцо. Будем рассматривать S как полукольцо, забыв об инволюции, и пусть $(\mathbb{P}(S), \text{Max } BS)$ – его пирсовский пучок полуколец (не $*$ -полукольцо!). Поскольку S изоморфно полукольцу $\Gamma = \Gamma(\mathbb{P}(S))$, то полукольцо Γ является полукольцом с инволюцией. Легко проверяется, что для произвольного сечения $\hat{a} \in \Gamma$, $a \in S$, сопряженный к нему элемент $(\hat{a})^*$ – глобальное сечение $\widehat{a^*}$. Пирсовские слои полукольца S в общем не являются полукольцами с инволюцией, поэтому мы не можем оперировать элементами вида $(a_M)^*$. Возникают следующие вопросы:

- 1) Как связаны значения сечений $\hat{a}$ и $\widehat{a^*}$ в произвольной точке пирсовского пучка?
- 2) Конгруэнцию ρ на $*$ -полукольце S будем называть *стабильной относительно инволюции $*$* (или *$*$ -конгруэнцией*), если $a \equiv b \pmod{\rho} \Leftrightarrow a^* \equiv b^* \pmod{\rho}$. Пусть ρ – $*$ -конгруэнция на S , тогда факторполукольцо S/ρ становится полукольцом с инволюцией, если положить $a_\rho^* = (a^*)_\rho$ для любого $a_\rho \in S/\rho$. Когда пирсовская конгруэнция на $*$ -полукольце S является $*$ -конгруэнцией?

Основные результаты

Исследования пирсовского пучка полуколец $*$ -полукольца S позволило заметить связанное с инволюцией преобразование пирсовского пучка $\mathbb{P}(S)$. Для описания этого преобразования потребуется понятие изоморфизма пучков. Заметим, что пучок кроме алгебраической имеет и топологическую составляющую, поэтому совпадение соответствующих слоев двух пучков, даже на одном и том же базисном пространстве, еще не позволяет сделать вывод о каком-либо равенстве пучков. Наиболее употребительное определение изоморфизма пучков дается через рассмотрение пучков как предпучков. При таком подходе с каждым открытым множеством U базисного пространства связано полукольцо $P(U)$ (это в случае, если мы рассматриваем пучок полуколец, а если работаем с пучком алгебр сигнатуры Ω , то $P(U)$ – алгебра сигнатуры Ω). Тогда для совпадения пучков требуется гомеоморфизм базисных пространств и изоморфизм полуколец над соответствующими при этом гомеоморфизме открытыми множествами. Поскольку пучок определяется нами в терминах расслоенного пространства, то мы используем следующее определение изоморфизма пучков.

Определение 3. Пусть Π – пучок полуколец Π_X над пространством X , Λ – пучок полуколец Λ_Y над пространством Y . *Изоморфизмом пучков Π и Λ* называется гомеоморфизм $\varphi: Y \rightarrow X$ и семейство $\{f_y: y \in Y\}$ изоморфизмов $f_y: \Pi_{\varphi(y)} \rightarrow \Lambda_y$, таких, что для любого локального сечения α на открытом множестве $U \subseteq X$ пучка Π отображение β , определенное по формуле

$$\beta(y) = f_y(\alpha(\varphi(y))), \quad y \in \varphi^{-1}(U),$$

непрерывно.

Для любого подмножества A $*$ -полукольца S положим

$$A^* = \{a^* \in S: a \in A\}.$$

Лемма 1. Пусть S — $*$ -полукольцо, $a, b \in BS$. Тогда справедливы утверждения:

- 1) $(a^\perp)^* = (a^*)^\perp$;
- 2) $(a \vee b)^* = a^* \vee b^*$;
- 3) если $M \in \text{Max } BS$, то $M^* \in \text{Max } BS$.

Доказательство.

Проверяется стандартно.

Лемма 1 позволяет определить отображение:

$$\varphi: \text{Max } BS \rightarrow \text{Max } BS, \text{ такое, что } \varphi(M) = M^*.$$

Лемма 2. Отображение φ является гомеоморфизмом.

Доказательство.

Поскольку $(M^*)^* = \{e^*: e \in M^*\} = \{(e^*)^*: e \in M\} = \{e: e \in M\} = M$, то $\varphi = \varphi^{-1}$. Поэтому, чтобы показать, что биекция φ является гомеоморфизмом, достаточно показать непрерывность φ .

Пусть $d(e) = \{M \in \text{Max } BS: e \notin M\}$. Тогда $\varphi^{-1}(d(e)) = \varphi(d(e)) = \{M \in \text{Max } BS: M^* \in d(e)\} = \{M \in \text{Max } BS: e \notin M^*\}$. Поскольку $e \notin M^* \Leftrightarrow e^* \notin M$, имеем, $\{M \in \text{Max } BS: e \notin M^*\} = \{M \in \text{Max } BS: e^* \notin M\} = d(e^*)$ и $\varphi^{-1}(d(e)) = d(e^*)$ открыто. Следовательно, отображение φ непрерывно.

Далее, для каждого $M \in \text{Max } BS$ определим отображение между пирсовскими слоями

$$f_M: S/\rho_{\varphi(M)} \rightarrow S/\rho_M \text{ по правилу } f_M(a_{\varphi(M)}) = (a^*)_M.$$

Лемма 3. Для любого $M \in \text{Max } BS$ $*$ -полукольца S отображение f_M является антиизоморфизмом полуколец.

Доказательство.

Пусть $a \equiv b \pmod{\rho_{\varphi(M)}}$. Тогда $ae = be$ для некоторого $e \in BS \setminus \varphi(M)$. Действуя инволюцией, получим $a^*e^* = b^*e^*$. Поскольку $e \notin \varphi(M) = M^*$, то $e^* \notin M$, а значит, $a^* \equiv b^* \pmod{\rho_M}$. Верно и обратное, таким образом, $a \equiv b \pmod{\rho_{\varphi(M)}}$ равносильно условию $a^* \equiv b^* \pmod{\rho_M}$. Это означает, что отображение f_M задано корректно и является инъективным. Сюръективность легко проверяется, поэтому f_M — биекция. Поскольку $(a + b)^* = a^* + b^*$, то $(a + b)^* \equiv a^* + b^* \pmod{\rho_M}$ для любого M ; аналогично, $(ab)^* \equiv b^*a^* \pmod{\rho_M}$. Договоримся элемент $a_{\varphi(M)}$ факторполукольца $S/\rho_{\varphi(M)}$ обозначать через a_{M^*} . Получаем:

$$\begin{aligned} f_M(a_{M^*} + b_{M^*}) &= f_M((a + b)_{M^*}) = (a + b)_M^* = a_M^* + b_M^* = f_M(a_{M^*}) + f_M(b_{M^*}), \\ f_M(a_{M^*} \cdot b_{M^*}) &= f_M((ab)_{M^*}) = (ab)_M^* = b_M^* \cdot a_M^* = f_M(b_{M^*}) \cdot f_M(a_{M^*}). \end{aligned}$$

Следовательно, f_M — антиизоморфизм.

Для произвольного локального сечения σ над открытым множеством $U \subseteq \text{Max } BS$, зададим определенное на $\varphi^{-1}(U)$ отображение σ^* , так, что

$$\sigma^*(N) = f_N(\sigma(\varphi(N)))$$

для любого $N \in \varphi^{-1}(U)$.

Локальное сечение σ является объединением локальных сечений вида $\hat{s}_i|_{U_i}$ для открытых подмножеств $U_i \subseteq \text{Max } BS$, дизъюнктное объединение которых дает U . Произвольная точка $N \in \varphi^{-1}(U)$ попадает в некоторое открытое множество $\varphi^{-1}(U_i)$, поэтому локальное сечение $\sigma|_{U_i}$ совпадает с $\hat{s}_i|_{U_i}$. Следовательно, $\sigma^*(N) = f_N(\hat{s}_i(\varphi(N))) =$

$\hat{S}_i(N)$ для произвольной точки $N \in \varphi^{-1}(U_i)$. Получаем, $\sigma^*|_{\varphi^{-1}(U_i)}$ совпадает с $\hat{S}_i$ на $\varphi^{-1}(U_i)$, поэтому σ^* – непрерывное отображение.

Подведем итоги. Предыдущим рассуждением и леммами 1 и 2 установлено:

- 1) отображение $\varphi: \text{Max } BS \rightarrow \text{Max } BS$, $\varphi(M) = M^*$, является гомеоморфизмом;
- 2) для каждого $M \in \text{Max } BS$ отображение $f_M: S/\theta_{\varphi(M)} \rightarrow S/\theta_M$, $f_M(a_{\varphi(M)}) = (a^*)_M$ является полукольцевым антиизоморфизмом;
- 3) для произвольного локального сечения σ над открытым $U \subseteq \text{Max } BS$ отображение $\sigma^*(N) = f_N(\sigma(\varphi(N)))$, $N \in \varphi^{-1}(U)$, непрерывно.

Рассмотрим аналог определения 3, сформулированный для полуколец, без использования инволюции, и с антиизоморфизмами вместо изоморфизмов. Назовем получаемое соответствие между пучками *антиизоморфизмом пучков*. Изоморфизм пучков с условиями $X = Y$ и $\Pi = \Lambda$ назовем *автоморфизмом пучков*. Пользуясь этими соглашениями и пунктами 1)-3), получаем:

Теорема 1. Для произвольного $*$ -полукольца S $(\varphi, \{f_M\})$ – антиавтоморфизм пирсовского пучка $(\mathbb{P}(S), \text{Max } BS)$.

Обозначим пучок полуколец – образ при антиавтоморфизме, указанном в теореме 1, через $(\mathbb{P}^*(S), \text{Max } BS)$. В следующей теореме описывается инволюция на полукольце глобальных сечений пирсовского пучка полуколец, построенного для полукольца с инволюцией. Тем самым, дается некоторый вариант ответа на вопрос 1) раздела 1.

Теорема 2. Для произвольного $*$ -полукольца S отображение $f: \hat{a} \mapsto (\hat{a})^*$ задает $*$ -антиизоморфизм между $*$ -полукольцами глобальных сечений пучков полуколец $(\mathbb{P}(S), \text{Max } BS)$ и $(\mathbb{P}^*(S), \text{Max } BS)$.

Доказательство.

Из проведенных выше рассуждений понятна связь между аддитивными и мультипликативными операциями полуколец сечений, показывающая, что f является антигомоморфизмом. Легко устанавливается биективность f , например, из $\hat{a} \neq \hat{b}$ следует, что $\hat{a}(M) \neq \hat{b}(M)$ для некоторой точки $M \in \text{Max } BS$, поэтому $(\hat{a})^* \neq (\hat{b})^*$ в точке M^* пучка $\mathbb{P}^*(S)$. Наконец, заметим, что с любым глобальным сечением $\hat{a}$ пучка сопряжено глобальное сечение $\hat{a}^*$. Действительно, для любой точки $M \in \text{Max } BS$ сечение $\hat{a}$ принимает значение a_M , а сечение $\hat{a}^*$ принимает значение $\hat{a}^*(M) = f_{M^*}(\hat{a}(\varphi(M))) = f_M(a_{\varphi(M)}) = (a^*)_M$. Поэтому $f(\hat{a}^*) = (\hat{a}^*)^* = (\hat{a})^* = f(\hat{a})^*$, теорема доказана.

О стабильности пирсовской конгруэнции

Укажем некоторые условия, при которых пирсовская конгруэнция ρ_M является $*$ -конгруэнцией.

Пусть S – $*$ -полукольцо, $M \in \text{Max } BS$. Рассмотрим ситуацию, когда найдется атом $e \in BS$, не лежащий в M ; в этом случае будем пользоваться обозначением $M = M_e$.

Лемма 4. Пусть $M = M_e$, тогда справедливы утверждения:

- 1) e – единственный атом из BS , не лежащий в M ;
- 2) $M_e = (e^\perp)$ – главный идеал, порожденный $e^\perp$;
- 3) если $a \equiv b \pmod{\rho_M}$, то $ae = be$.

Доказательство.

1) Если e, f – два различных атома из $BS \setminus M$, то $0 = ef \in M$, противоречие с простотой максимального идеала M .

2) Пусть $a \in M$, тогда $ae = 0$, поэтому $a = ae^\perp$.

3) Если $a \equiv b \pmod{\rho_M}$, то $af = bf$ для некоторого $f \in BS \setminus M$. Поскольку $f^\perp \in M$, то $f^\perp = f^\perp e^\perp$ по пункту 2). Тогда $f = (f^\perp e^\perp)^\perp = fe^\perp + e$, поэтому $fe = e$. Следовательно, $ae = be$.

Предложение 1. Пусть S – $*$ -полукольцо, $M \in \text{Max } BS$ – максимальный идеал вида M_e для некоторого атома $e \in BS$. Тогда равносильны условия:

- 1) $(M_e)^* = M_e$;
- 2) $e^* = e$;
- 3) пирсовская конгруэнция ρ_{M_e} является $*$ -конгруэнцией.

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2). Элемент e не лежит в M_e , поэтому $e^* \notin (M_e)^*$. Поскольку $(M_e)^* \in \text{Max } BS$ и e^* – атом, то из $(M_e)^* = M_e$ и пункта 1) леммы 4 следует $e^* = e$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $a \equiv b \pmod{\rho_M}$, тогда $ae = be$ по пункту 3) леммы 4. Следовательно, $a^*e = b^*e$ и $a^* \equiv b^* \pmod{\rho_M}$,

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $(M_e)^* \neq M_e$, тогда $e \in (M_e)^*$, и поэтому $e^* \in M_e$. Отсюда следует $e^* \equiv 0 \pmod{\rho_{M_e}}$ и, учитывая $e \equiv 1 \pmod{\rho_{M_e}}$, получаем $e^* \not\equiv e \pmod{\rho_{M_e}}$, т. е. ρ_{M_e} не является $*$ -конгруэнцией.

Непосредственно из предложения 1 вытекает

Следствие 1. Любая пирсовская конгруэнция $*$ -полукольца S с конечной булевой алгеброй BS стабильна относительно инволюции.

Примеры. 1. Не каждый максимальный идеал булевой алгебры имеет вид M_e для некоторого атома e . Например, рассмотрим $\beta(\mathbb{N})$ – булеан множества натуральных чисел. Это атомная булева решетка, одноэлементные подмножества являются ее атомами. Рассмотрим собственный идеал в $\beta(\mathbb{N})$, состоящий из всех конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$. По лемме Цорна он содержится в некотором максимальном идеале, который, очевидно, содержит все атомы булевой алгебры. Вместо $\mathbb{N}$ может быть выбрано любое бесконечное множество.

2. Максимальные идеалы всякой конечной булевой алгебры имеют вид M_e .

В заключение отметим, что авторам не известен какой-либо аналог предложенной конструкции преобразования пирсовского пучка, ни для полуколец, ни для колец с инволюцией. В дальнейшем нами предполагается применить полученную конструкцию для изучения конкретных полуколец с инволюцией.

Список источников

1. Pierce R. S. Modules over commutative regular rings // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 70. P. 1–112. DOI:10.1090/memo/0070.
2. Чермных В. В. Пучковые представления полуколец // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 5. С. 185–186. DOI: 10.1070/RM1993v048n05ABEH001078.
3. Салавова К. Кольца с инволюцией: дис. ... канд. физ.-матем. наук / К. Салавова. М.: 1978. IstinaResearcherID (IRID): 842017.
4. Марков Р. В. Пирсовское представление полуколец с инволюцией // Изв. вузов. матем. 2014. № 4. С. 18–24.

References

1. Pierce, R. S. (1967), "Modules over commutative regular rings", *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 70, pp. 1–112, DOI:10.1090/memo/0070.

2. Chermnykh, V. V. (1993), "Sheaf representations of semirings" [Puchkovye predstavleniya polukolec], *Russian Math. Surveys* [Uspekhi mat. nauk], vol. 48, no 5, pp. 169–170.
3. Salavova, K. (1978), Rings with Involution [Koltsa s involyutsiey], Candidate of Physico-Mathematical Sciences dissertation, Moscow.
4. Markov, R. V. (2014), "Pierce Representation of Semirings with Involution" [Pirsovskoe predstavlenie polukolets s involyutsiey], *Russian Mathematics* (Izvestiya VUZ. Matematika) [Izv. vuzov. matem.], no 4, pp. 18–24, DOI:10.3103/S1066369X14040033.

Информация об авторах:

Н. С. Протасов – преподаватель кафедры физико-математического и информационного образования Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр-т, д. 55);

В. В. Чермных – доктор физико-математических наук, доцент; главный научный сотрудник Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (167001, Россия, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский пр-т, д. 55).

Information about the authors:

N. S. Protasov – Lecturer at the Departments of Physico-Mathematical and Information Education, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University (55, Oktyabrsky prospect, Syktyvkar, 167001, Russia);

V. V. Chermnykh – Doctor of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor; Chief Researcher, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University (55, Oktyabrsky prospect, Syktyvkar, 167001, Russia).

MECHANICS

Research article

УДК 534.11

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-58-70

<https://elibrary.ru/obkejt>**Natural Frequencies of Coupled Beams:
The Effect of Geometric Parameters****Svetlana M. Bauer¹, Nikita P. Dorofeev², Andrey L. Smirnov³**^{1, 2, 3} St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia¹ s.bauer@spbu.ru² nikita.dorofeev@spbu.ru³ a.l.smirnov@spbu.ru

Abstract. The effect of geometric parameters on the planar free vibrations of a two-beam structure coupled at a fixed angle is studied. The total mass of the structure and the thickness parameter are kept constant, while the coupling angle, the beam-length ratio, and the cross-sectional radius ratio are varied. The study examines the effect of these parameters on the lower natural frequencies and vibration modes. It is shown that geometric asymmetry may lead to vibration localization; in such cases, the frequency curves veer rather than cross, accompanied by mode swapping. This effect becomes more pronounced as the coupling between the parts of the structure weakens; such weakening occurs, for example, with increasing coupling angle and length ratio. The relationship between the natural frequencies of the structure and the frequencies of the uncoupled beams, referred to as partial frequencies, is also examined. The analytical results obtained within the Euler–Bernoulli beam theory agree well with the numerical results from the finite element analysis.

Keywords: *coupled beams; free vibrations; frequency veering.*

For citation: Bauer, S. M., Dorofeev, N. P. and Smirnov, A. L. (2026), "Natural Frequencies of Coupled Beams: The Effect of Geometric Parameters", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 58–70, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-58-70, <https://elibrary.ru/obkejt>.

Acknowledgments: this study is supported by Saint Petersburg State University, Project No. 116636233.

The article was submitted 20 Jul 2026; approved after review 13 Oct 2026; accepted for publication 19 Oct 2026.



© Бауэр С. М., Дорофеев Н. П., Смирнов А. Л., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

МЕХАНИКА

Научная статья

Частоты собственных колебаний сопряженных стержней. Влияние геометрических параметров

Светлана Михайловна Бауэр¹, Никита Павлович Дорофеев²,

Андрей Леонидович Смирнов³

^{1, 2, 3} Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

¹ s.bauer@spbu.ru

² nikita.dorofeev@spbu.ru

³ a.l.smirnov@spbu.ru

Аннотация. В статье исследуется влияние геометрических параметров на плоские собственные колебания конструкции, состоящей из двух тонких стержней, соединенных под постоянным углом. Для фиксированного параметра толщины и при условии, что общая масса конструкции остается постоянной, изучается влияние величины угла сопряжения, отношения длин и поперечных размеров стержней на низшие собственные частоты. При значениях параметров конструкции, приводящих к локализации форм колебаний, наблюдается эффект сближения (veering) частотных кривых. Этот эффект проявляется тем нагляднее, чем слабее связь между частями конструкции, причем эта связь ослабевает, например, с увеличением угла сопряжения и отношения длин стержней. Исследуется связь собственных частот конструкции с частотами несвязанных стержней (парциальные частоты). Аналитические результаты, полученные на основе уравнений Эйлера–Бернулли, и численные результаты, полученные с помощью метода конечных элементов, хорошо согласуются.

Ключевые слова: *сопряженные стержни; собственные колебания; расхождение частот.*

Для цитирования: Bauer S. M., Dorofeev N. P., Smirnov A. L. Natural Frequencies of Coupled Beams: The Effect of Geometric Parameters // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 58–70. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-58-70. <https://elibrary.ru/obkejt>.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (проект 116636233).

Статья поступила в редакцию 20.07.2026; одобрена после рецензирования 13.10.2026; принята к публикации 19.10.2026.

Introduction and Literature Review

Beam structures are widely used in various areas of construction and civil engineering. Studying the dynamic behavior of such structures is fundamental to effective design and vibration control. The free vibrations of beams and other thin-walled structures are a classical subject of mechanics. Methods for formulating the eigenvalue problem and for the analysis of eigenfrequencies and eigenmodes of beam elements are well developed [1]. However, on passing from a single beam to a multi-beam structure, the frequency spectrum becomes substantially more complex, since not only the properties of the individual elements but also the coupling conditions must be considered.

Numerous studies have been devoted to the free vibrations of various beam structures. In this paper we restrict the discussion to the analysis of lower natural frequencies and vibration modes of coupled thin beams. Most often, such papers consider the free vibrations of planar serial frame structures or structures connected at right angles. Of primary concern are the coupled transverse–axial vibrations of the beam. Although, in a linear formulation, the differential

equations for the axial and bending vibrations of a beam are decoupled, at the points of connection a relationship between their axial and bending deformations arises.

The derivation of such coupling conditions from elasticity equations is considered in [2, 3]. In [2], a one-dimensional model of two thin coupled beams is obtained by asymptotic analysis of a plane problem of linear elasticity. The model includes conditions of displacement compatibility and equality of rotations at the joint. The force and moment equilibrium conditions are derived using Green's formula in the variational formulation. In [3], the three-dimensional free vibration problem for two perpendicular rods with clamped boundary conditions is studied. As the rod thickness tends to zero, coupling conditions are obtained for low-frequency flexural vibrations. These conditions preserve the right angle between the projections of the rod axes onto the plane of the structure. This type of connection is adopted in the present study as well as in [4, 5]. The coupling conditions express displacement compatibility, equality of rotations, and force and moment equilibrium. The angle between the tangents to the beam centerlines at the coupling point is therefore preserved during small vibrations.

A number of papers are devoted to the effect of the geometric parameters of beams on the natural frequencies of beam structures; in particular, the conditions leading to the crossing or veering of frequency curves as the system parameters change are studied.

In [6], the vibration modes of planar beam structures consisting of Euler–Bernoulli beams with variable cross-sectional geometric characteristics are analyzed. After separating the variables, the numerical procedure for solving the system of partial differential equations is reduced to a two-point boundary-value problem for a system of ordinary differential equations with variable coefficients and linear boundary conditions. Changes in the geometric parameters of beam structures, such as beam lengths, angles between adjacent beams, etc., lead either to the crossing of frequency curves that are dependent on the structural parameter of the beam structure, or to a close mutual convergence of curves in the immediate vicinity of a certain value of the structural parameter, a phenomenon known as veering. This paper analyzes the influence of system symmetry on the crossing and veering phenomena.

The vibrations of systems consisting of beams with different geometric parameters are considered in [7], which deals with the free vibrations of eccentrically stepped beams with a single step change of cross-section. The segments of the beam system are modeled within the framework of the Euler–Bernoulli theory of elastic beams. The eccentric offset between the centroidal axes of the segments is identified as the source of the coupling between axial and bending vibrations.

In [8], it is shown that, in systems with close eigenvalues, small structural irregularities lead to both strong localization of vibration modes and abrupt veering away or mutual repulsion of the eigenvalue curves when these are plotted against a parameter representing the disorder in the system. The occurrence of strong localization and the veering of the eigenvalue loci are two manifestations of the same phenomenon. The vibrations of a multi-span beam with irregular spacing of the supports are considered as an example. In [9], the phenomena of frequency curve veering and mode localization are analyzed. Based on this analysis, close eigenvalues are identified as the key factor behind these phenomena.

In [10], the veering of frequency curves is analyzed with an emphasis on weakly coupled oscillator systems. The natural frequencies of an uncoupled system depend on a variable parameter and may coincide for certain critical values of the parameter. It is shown that the natural frequencies of the coupled system veer at these critical frequencies in the presence of arbitrarily small coupling, while the corresponding mode shapes rotate and exchange their character between the two branches. Moreover, the distance between the frequency curves near the critical frequencies depends on the coupling parameter of the system.

The papers by Ratazzi et al. [11] and by Grossi et al. [12] are devoted to the vibrations of beam systems containing elastic elements. In [11], the authors examine the free planar vibrations of a system consisting of two orthogonal beams with an internal elastic hinge. The vibrations are analyzed within the framework of Euler–Bernoulli theory for various boundary conditions at the elastically connected end, including, as special cases, the classical conditions of restraint, simple support, and free end. In the frequency analysis, special attention is paid to the effect of the stiffness and location of the elastic hinge. In [12, 13], the natural frequencies of a beam with intermediate elastic elements are studied. The paper [14] examines the vibrations of a structure consisting of several coupled beams with arbitrary angles between adjacent beams and with arbitrary boundary conditions. The influence of the stiffness of the boundary conditions and the coupling angle is studied.

The results make it possible to identify which mode dominates in the structure at a given frequency or coupling angle.

In [15], semi-infinite one-dimensional and two-dimensional coupled structures are considered to determine the conditions under which vibrations are hypersensitive to coupling parameters. For a structure consisting of coupled beams, where the coupling parameter is a fixed angle between adjacent beams, it is shown that there are two critical angles, the values of which depend only on the ratio of the wavenumbers.

Paper [16] employs a model of beams coupled at right angles and governed by the Euler–Bernoulli equations to analyze the free vibrations of a jib crane. The free modes and lowest natural frequencies were found for the given boundary conditions.

In [4, 5], low-frequency transverse-axial planar vibrations of a structure consisting of two thin beams with a constant angle between the two beams were studied within the framework of Euler–Bernoulli theory. By analyzing the characteristic equation, the authors obtained the dependence of the natural frequencies on the geometric parameters of the structure, namely the coupling angle, thickness parameter, and beam length ratio. Good agreement between the analytical and finite-element results is demonstrated in [4] for two identical beams and in [5] for beams of different lengths.

This paper studies how the coupling angle, the beam lengths, and the cross-sectional dimensions of two beams joined at a constant angle affect the natural frequencies of the structure, while the total mass and the relative thickness parameter are held fixed. Special attention is paid to the phenomena of frequency veering and vibration localization resulting from geometric asymmetry.

Problem Statement

We consider the planar vibrations of a structure consisting of two beams of length l_i , cross-sectional area S_i , and moment of inertia J_i ($i = 1, 2$), coupled at an angle β in such a way that the angle between the tangents to the beam centerlines at the point of contact is preserved during deformation. The beams are made of the same material with density ρ and Young's modulus E .

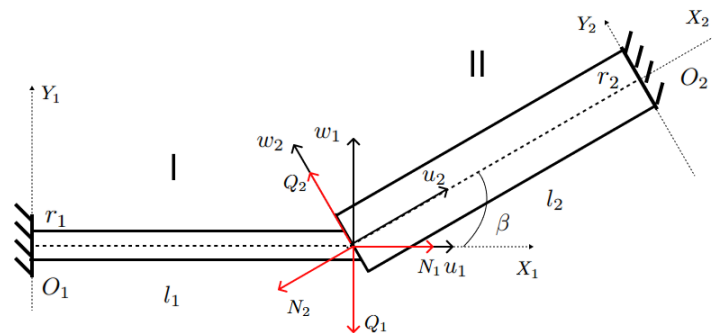


Fig. 1. Coupled beams

The beams are joined by an ideal rigid joint that prevents relative displacements and rotations; the dimensions and inertia of the joint are neglected. This model is applicable when the compliance and inertia of the connection do not significantly affect the lowest modes of free vibration considered here.

Let N_i and Q_i denote the axial and transverse forces, respectively, and let M_i denote the bending moment in the cross-section of the i -th beam at the coupling point. The positive directions of the forces acting on the beams at the joint are shown in Fig. 1.

In the absence of external forces and moments, the equilibrium conditions for the massless joint have the form

$$\begin{aligned} -N_1 + N_2 \cos \beta + Q_2 \sin \beta &= 0, \\ Q_1 + N_2 \sin \beta - Q_2 \cos \beta &= 0, \\ -M_1 + M_2 &= 0. \end{aligned}$$

The first two equations express the balance of forces in the X_1 and Y_1 directions, while the third equation expresses the balance of moments about the coupling point. These conditions involve the force and moment resultants only; the stress distributions in the corresponding cross-sections are not assumed to be identical.

The equations governing the bending and axial vibrations of the beams in the coordinate systems $\{O_i, X_i, Y_i\}$, $i = 1, 2$ (see Fig. 1), are the following:

$$EJ_i w_i^{IV}(x_i) - \omega^2 \rho S_i w_i(x_i) = 0, \quad Eu_i''(x_i) + \omega^2 \rho u_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

where w_i and u_i are the deflection and axial displacement of the i -th beam, respectively, and x_i is the axial coordinate.

Upon introducing the dimensionless variables $x_i^* = x_i/l_i$ (the asterisk is omitted hereafter), eq. (1) takes the form

$$w_i^{IV}(x) - \Lambda_i^4 w_i(x) = 0, \quad u_i''(x) + \lambda_i^2 u_i(x) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Here

$$\lambda_i = \Lambda_i^2 \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = \sqrt{J_i/(S_i l_i^2)}, \quad \lambda_i^2 = \omega^2 l_i^2 \rho/E.$$

The problem of free vibrations of two identical beams coupled at a constant angle was considered in [4]. We denote the geometric parameters of that problem with subscript 0.

In what follows, the total mass of the structure is kept constant as the beam lengths and cross-sectional radii are varied. Fixing the total mass makes it possible to isolate the influence of purely geometric or elastic factors on the frequency spectrum, thereby eliminating the side effects associated with increasing or decreasing the mass. Such analysis is critical for structural optimization.

Let the lengths of the beams be defined by the relations

$$l_1 = l_0(1 - \mu), \quad l_2 = l_0(1 + \mu).$$

These relations give a total system length equal to $2l_0$. When $\mu = 0$, both beams are of the same length l_0 .

Suppose that the beams have circular cross-sections with radii

$$r_1 = \alpha r_0(1 - \eta), \quad r_2 = \alpha r_0(1 + \eta).$$

When $\eta = 0$, the radii of the beam cross-sections are equal. If $\eta > 0$, the second beam has a larger radius than the first; if $\eta < 0$, the first beam has the larger of the two radii. The factor α is chosen to satisfy the constant-mass condition,

$$\rho 2\pi r_0^2 l_0 = \rho(\pi r_1^2 l_1 + \pi r_2^2 l_2),$$

that is

$$2 = \alpha^2((1 - \eta)^2(1 - \mu) + (1 + \eta)^2(1 + \mu)),$$

and hence

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu\eta + \eta^2}}.$$

Therefore

$$r_1 = r_0\tau_1, \quad r_2 = r_0\tau_2,$$

where

$$\tau_1 = \frac{1 - \eta}{\sqrt{1 + 2\mu\eta + \eta^2}}, \quad \tau_2 = \frac{1 + \eta}{\sqrt{1 + 2\mu\eta + \eta^2}}.$$

For a circular cross-section

$$S_i = S_0\tau_i^2, \quad J_i = J_0\tau_i^4, \quad i = 1, 2,$$

where

$$S_0 = \pi r_0^2, \quad J_0 = \frac{\pi r_0^4}{4}.$$

The thickness parameters for the beams are as follows:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \frac{\tau_1}{1 - \mu}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \frac{\tau_2}{1 + \mu}, \quad \varepsilon_0 = \frac{r_0}{2l_0}.$$

For $\mu = 0$ and $\eta = 0$,

$$\Lambda_i^4 = \Lambda_0^4 = \frac{\omega^2 \rho S_0 l_0^4}{E J_0}, \quad i = 1, 2.$$

Therefore, for arbitrary μ and η ,

$$\Lambda_i = \left(\frac{\omega^2 \rho l_i^4 S_i}{E J_i} \right)^{1/4} = \frac{\Lambda_0 (1 + (-1)^i \mu)}{\sqrt{\tau_i}}, \quad i = 1, 2.$$

At the same time,

$$\lambda_i = \varepsilon_0 \Lambda_0^2 (1 + (-1)^i \mu), \quad i = 1, 2.$$

These expressions do not contain factors τ_i , since the frequencies of the beam axial vibrations do not depend on the cross-sectional area. However, the axial forces under coupling conditions depend on the cross-sectional area, and the characteristic equation includes factors τ_i^2 .

Furthermore, we set

$$a_i = \tau_i^{-1/2}, \quad b_i = \tau_i^3, \quad c_i = \tau_i^{5/2}, \quad d_i = \tau_i^2.$$

Upon introducing dimensionless coordinates and expressing the forces and moments in terms of the displacements, the compatibility conditions at the coupling point of the beams are the following:

$$\begin{aligned}
 w_1(1) &= w_2(-1)\cos\beta + u_2(-1)\sin\beta, \\
 u_1(1) &= -w_2(-1)\sin\beta + u_2(-1)\cos\beta, \\
 a_1 \frac{w_1'(1)}{\Lambda_1} &= a_2 \frac{w_2'(-1)}{\Lambda_2}, \\
 b_1 \frac{w_1''(1)}{\Lambda_1^2} &= b_2 \frac{w_2''(-1)}{\Lambda_2^2}, \\
 -\varepsilon_0 \Lambda_0 c_1 \frac{w_1'''(1)}{\Lambda_1^3} &= -\varepsilon_0 \Lambda_0 c_2 \frac{w_2'''(-1)}{\Lambda_2^3} \cos\beta + d_2 \frac{u_2'(-1)}{\lambda_2} \sin\beta, \\
 d_1 \frac{u_1'(1)}{\lambda_1} &= \varepsilon_0 \Lambda_0 c_2 \frac{w_2'''(-1)}{\Lambda_2^3} \sin\beta + d_2 \frac{u_2'(-1)}{\lambda_2} \cos\beta.
 \end{aligned} \tag{3}$$

These conditions express compatibility of the displacements and equilibrium of the forces and moments at the coupling point. Specifically, the first two equations impose displacement compatibility, the third equation preserves the angle between the beam axes, the fourth equation gives the balance of bending moments, and the last two equations give the balance of transverse and axial forces. For beams of equal length, these conditions were derived in [4], and for beams of unequal length in [5].

The ends of the beams are assumed to be clamped at the points $x_i = 0$:

$$w_i(0) = 0, \quad w_i'(0) = 0, \quad u_i(0) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Together with the coupling conditions (3) and the boundary conditions (4), eqs. (2) constitute a boundary-value eigenvalue problem.

Analytical Solution

The general solutions of the bending eqs. (2) have the form

$$w_i = A_i \cos(\Lambda_i x_i) + B_i \sin(\Lambda_i x_i) + C_i \cosh(\Lambda_i x_i) + D_i \sinh(\Lambda_i x_i),$$

whereas those of the axial equations read

$$u_i = O_i \cos(\lambda_i x_i) + P_i \sin(\lambda_i x_i).$$

It follows from the boundary conditions (4) that

$$C_i = -A_i, \quad D_i = -B_i, \quad O_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Subsequently, the coupling conditions (3) lead to a homogeneous linear algebraic system for the coefficients A_i , B_i , and P_i , $i = 1, 2$:

$$MZ^T = 0, \quad Z = (A_1, B_1, A_2, B_2, P_1, P_2).$$

Let us denote

$$\begin{aligned}
 C_i^- &= \cos\Lambda_i - \cosh\Lambda_i, & C_i^+ &= \cos\Lambda_i + \cosh\Lambda_i, \\
 S_i^- &= \sin\Lambda_i - \sinh\Lambda_i, & S_i^+ &= \sin\Lambda_i + \sinh\Lambda_i, & i &= 1, 2.
 \end{aligned}$$

These factors are included in condition, which expresses the equality of the rotation angles and the equilibrium of the bending moments, as well as the transverse and axial forces at the joint.

The system of coupling and boundary conditions may be written as a system of linear equations

$$M(\Lambda_0, \beta, \mu, \varepsilon_0, \eta)Z^T = 0,$$

which has a non-trivial solution if and only if the determinant is zero. Thus, the characteristic equation is

$$\det M(\Lambda_0, \beta, \mu, \varepsilon_0, \eta) = 0.$$

The determinant of the matrix M has the form

$$\begin{vmatrix} C_1^- & S_1^- & -C_2^- \cos \beta & S_2^- \cos \beta & 0 & \sin \lambda_2 \sin \beta \\ 0 & 0 & C_2^- \sin \beta & -S_2^- \sin \beta & \sin \lambda_1 & \sin \lambda_2 \cos \beta \\ -a_1 S_1^+ & a_1 C_1^- & -a_2 S_2^+ & -a_2 C_2^- & 0 & 0 \\ -b_1 C_1^+ & -b_1 S_1^- & b_2 C_2^+ & -b_2 S_2^- & 0 & 0 \\ -\varepsilon_0 \Lambda_0 c_1 S_1^- & \varepsilon_0 \Lambda_0 c_1 C_1^+ & -\varepsilon_0 \Lambda_0 c_2 S_2^- \cos \beta & -\varepsilon_0 \Lambda_0 c_2 C_2^+ \cos \beta & 0 & -d_2 \cos \lambda_2 \sin \beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \Lambda_0 c_2 S_2^- \sin \beta & \varepsilon_0 \Lambda_0 c_2 C_2^+ \sin \beta & d_1 \cos \lambda_1 & -d_2 \cos \lambda_2 \cos \beta \end{vmatrix}.$$

If $\eta = 0$, we have

$$\tau_1 = \tau_2 = 1, \quad a_i = b_i = c_i = d_i = 1,$$

and

$$\Lambda_1 = \Lambda_0(1 - \mu), \quad \Lambda_2 = \Lambda_0(1 + \mu).$$

For this parameter value, the characteristic equation coincides with the one studied in [5].

Effect of Cross-Sectional Dimensions on Natural Frequencies

The effect of the parameters ε , μ , and β on the natural frequencies of coupled beams was studied in [4, 5]. Here, we examine the dependence of the lower natural frequencies on the parameter η , which characterizes the ratio of the beams' cross-sectional radii. Consider thin beams with $\varepsilon_0 = 0.0025$. At this value of the thickness parameter, the several lowest natural frequencies correspond to the transverse vibrations of the beams, whereas the axial frequencies lie well above the spectral range considered.

Varying the parameters may reveal the veering phenomenon, in which two natural frequencies of a multi-mode system approach each other but, instead of crossing, turn away. A key feature of this phenomenon is mode switching: the mode shapes change rapidly in the neighborhood of the closest approach [6, 8].

To interpret the results, we introduce dashed reference lines corresponding to the partial frequencies $\Lambda_n^{(i)}$ ($i = 1, 2$) of single beams with lengths $l_1 = l_0(1 - \mu)$, $l_2 = l_0(1 + \mu)$ and radii $r_1 = r_0\tau_1$, $r_2 = r_0\tau_2$.

Let α_n^{CS} denote the roots of the characteristic equation corresponding to the clamped–simply supported condition,

$$\tan \alpha = \tanh \alpha,$$

and let α_n^{CC} denote the roots of the characteristic equation corresponding to the clamped–clamped condition

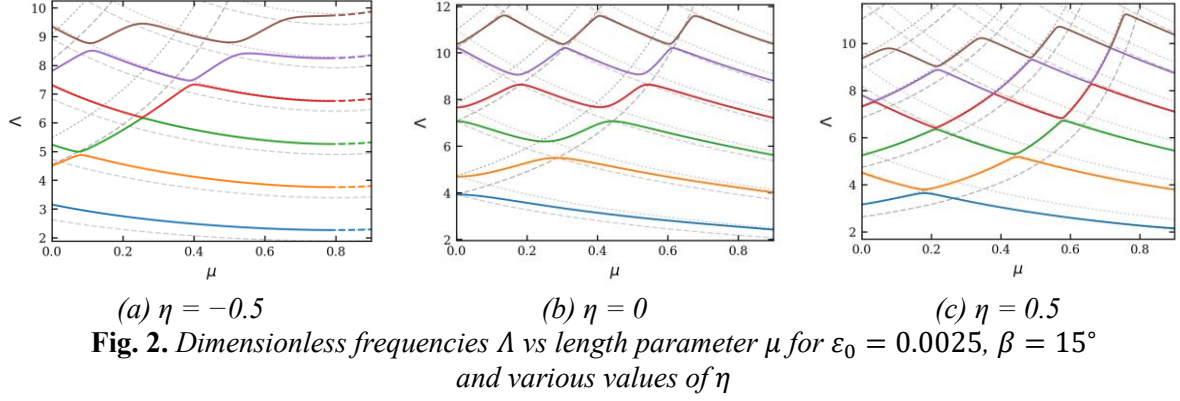
$$\cosh \alpha \cos \alpha = 1.$$

Then the frequencies of the single beams are written as

$$\Lambda_n^{(1)}(\mu, \eta) = \alpha_n^{(CS, CC)} \frac{\sqrt{\tau_1}}{1 - \mu}, \quad \Lambda_n^{(2)}(\mu, \eta) = \alpha_n^{(CS, CC)} \frac{\sqrt{\tau_2}}{1 + \mu}.$$

These families of curves are convenient for interpreting the behavior of frequency curves $\Lambda(\mu)$. It is evident that the characteristic inflection points and local extrema of the frequency curves lie in the vicinity of the intersection points of the dashed lines. For the "clamped–simply supported" boundary condition, the dashed lines serve as a lower bound for the frequency curves, whereas for the "clamped–clamped" condition, they serve as an upper bound.

Fig. 2 shows the effect of the parameter μ at a fixed coupling angle $\beta = 15^\circ$ for three values of the parameter η on the first six dimensionless frequencies Λ . The plots of the frequency curves for $\eta = 0$ were obtained in [5]. It appears that the parameter η has a significant effect on the behavior of the frequency curves.



For $\eta > 0$, the second beam has a larger radius than the first beam. For positive μ , the first beam is short and thin, while the second is long and thick. In this case, the simultaneous increase in length and thickness exerts opposing effects on the natural frequencies, since an increase in length leads to a decrease in frequency, whereas an increase in cross-sectional radius leads to an increase in frequency. Consequently, the solid curves retain a shape similar to that of the case $\eta = 0$. A different picture emerges when $\eta = -0.5$. In this case, for $\mu > 0$, the first beam is short and thick, while the second is long and thin. Now, the effects of length and thickness act in the same direction: the frequencies of the first beam increase, while those of the second decrease. Consequently, the frequency behavior differs significantly from the cases where $\eta = 0$ or $\eta = 0.5$. As demonstrated in [5], increasing the parameter μ enhances the localization of modes. It turns out that decreasing the parameter η has a similar effect; at $\eta = -0.5$, the frequencies begin to behave like those of single beams at smaller values of μ .

Fig. 3 shows plots of the frequency parameter $\Lambda(\mu)$ for the first six natural frequencies for $\eta = -0.5$ and beam coupling angles $\beta = 0^\circ$, 5° , and 10° , respectively. As demonstrated in [4], increasing the angle enhances the localization of vibration modes, causing the frequencies to approach those of the single beams. As the coupling angle increases, the distance between the frequency curves decreases at the points of approach; the lower the frequency, the smaller this distance becomes. This is attributed to the strong localization of modes at lower frequencies. In cases of mode localization, the reference curves define the upper and lower frequency borders, forming a frequency strip. Consequently, as the angle increases, the arrangement of the frequency curves—particularly the lower ones—fits better with the frequency strip.

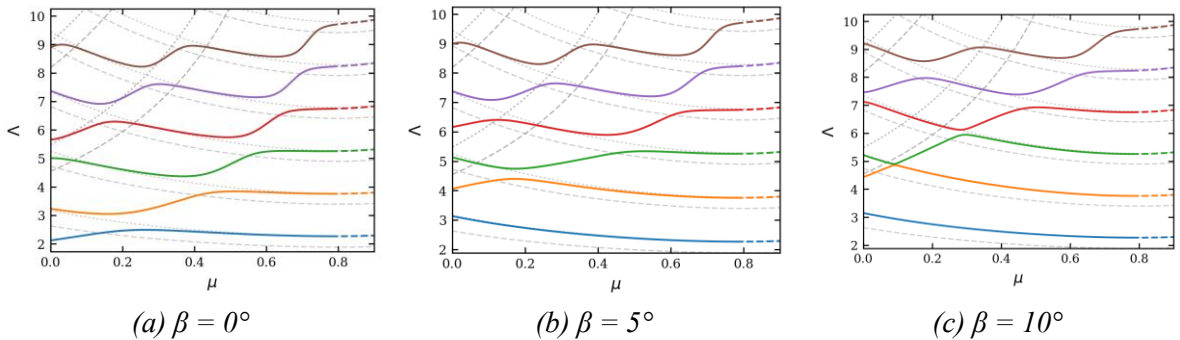


Fig. 3. Dimensionless frequencies Λ vs length parameter μ for $\varepsilon_0 = 0.0025$ and $\eta = -0.5$ for various values of the angle β

Fig. 4 shows plots of the frequency parameter $\Lambda(\mu)$ for the first six natural frequencies versus μ for $\eta = 0.5$ and beam coupling angles $\beta = 0^\circ$, $\beta = 5^\circ$, and $\beta = 10^\circ$. In this case, the parameter β has little effect on the curves; only at small values of β does the increase of angle cause the frequency curves to draw closer together.

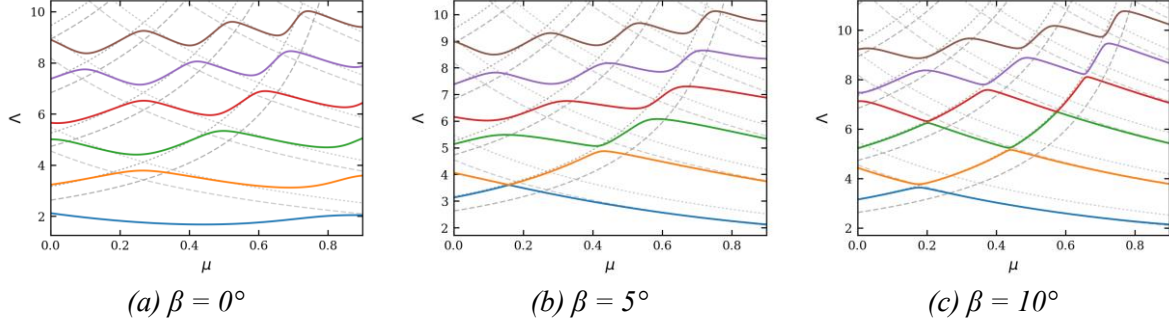


Fig. 4. Dimensionless frequencies Λ vs length parameter μ for $\varepsilon_0 = 0.0025$ and $\eta = 0.5$ for various values of the angle β

Next, let us consider the effect of the angle β on the frequency parameter Λ for fixed values of the parameters μ and η . In [4] (Fig. 5a), the graph of $\Lambda(\beta)$ is plotted for the case where the beams are identical and the structure possesses symmetry.

In this case, the modes with even wave numbers are antisymmetric and, for any angle β , have a node at the coupling point, which acts as a hinge. Furthermore, the frequencies corresponding to the $2n$ -th ($n = 1, 2, \dots$) modes of the structure with clamped-clamped boundary conditions coincide with the frequencies of the n -th modes of a single beam with clamped-simply supported boundary conditions and are independent of the value of the angle β .

At the same time, as the angle β increases, the centers of the $(2n - 1)$ -th modes of the structure approach the coupling point and, beyond a certain value of β , come into contact with it. Meanwhile, the frequencies corresponding to the $(2n - 1)$ -th modes of the structure with clamped-clamped boundary conditions rise rapidly with increasing β , approaching the frequencies of the n -th modes of a single beam with clamped-pinned boundary conditions.

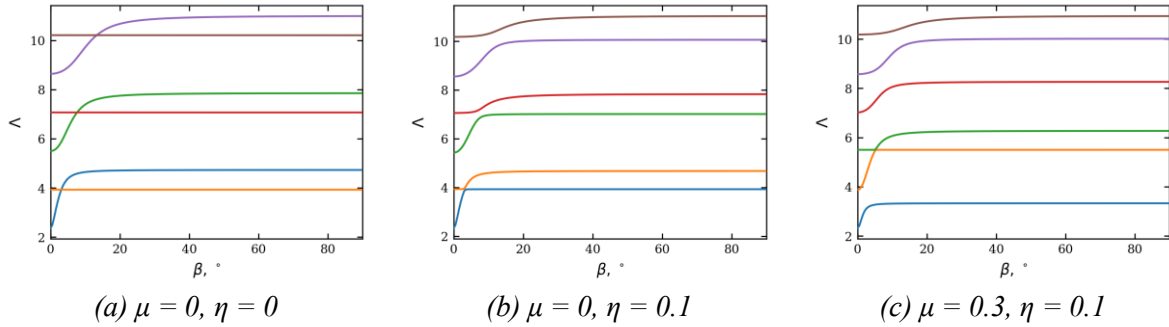


Fig. 5. Dimensionless frequencies Λ vs angle β for $\varepsilon_0 = 0.0025$ and various values of μ and η

Thus, the frequency curves corresponding to even and odd mode shapes intersect as the angle β increases; the smaller the thickness parameter ε , the earlier this occurs.

A fundamental difference compared to the structure with beams of varying cross-sections is that, when symmetry is broken, the intersection of frequency curves does not take place (Fig. 5). Even when the curves approach each other very closely, a tiny gap remains between them, which is attributed to strong mode localization associated with veering.

Natural Frequencies as the Coupling Angle Approaches 90°

When considering the natural frequencies of a structure composed of identical beams as the coupling angle β approaches 90 degrees [4] it was revealed that the structure's odd-numbered frequencies are close to those of a single beam with "clamped-simply supported" boundary conditions, while the even-numbered frequencies are close to those of a single beam with "clamped-clamped" boundary conditions.

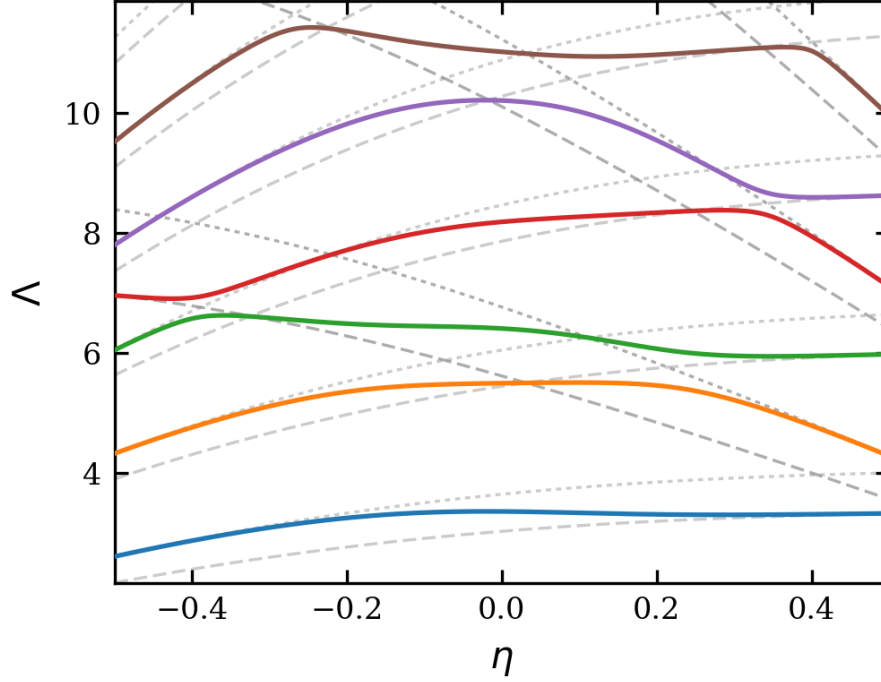


Fig. 6. Dimensionless frequencies Λ vs the parameter η for $\beta = 90^\circ$ and $\mu = 0.3$

The situation differs for beams with not equal geometric parameters. Fig. 6 shows the plot $\Lambda(\eta)$ for $\beta = 90^\circ$ and $\mu = 0.3$.

It can be seen that the frequency curves lie within the strip bounded by the reference lines. The ascending dashed lines correspond to the vibration frequencies of the longer beam, which becomes thicker as the parameter η increases. The descending dashed lines correspond to the vibration frequencies of the shorter beam, which becomes thinner as the parameter η increases.

It should be noted that at $\eta = -0.5$, where the radii of the beam cross-sections differ by a factor of three, the frequency curves (with the exception of the fourth) coincide with the curves corresponding to the frequencies of a long beam with clamped-clamped boundary conditions. The fourth frequency, however, is close to the frequency of a short beam with clamped-simply supported boundary conditions.

The frequency curves behave similarly at $\eta = 0.5$, where the frequencies alternate: the odd-numbered frequencies are close to those of a single, longer beam with clamped-simply supported boundary conditions, while the even-numbered frequencies are close to those of a shorter beam with clamped-clamped boundary conditions.

Moreover, for the considered range of the parameter η , the frequency curves do not extend beyond the strip formed by the reference lines, but they can move from one strip to another in the area where these strips intersect.

Conclusion

The effect of geometric parameters on the planar free vibrations of a structure consisting of two thin beams joined at a constant angle was considered in the paper. With the structure's mass constant, the effect of the coupling angle, the ratio of the beam lengths, and the radii of the beam cross-sections on the lowest natural frequencies was studied. Particular attention was given to the effects of crossing and veering of frequency curves as the parameters vary. It had been shown that increasing the difference in beams lengths or cross-section radii increases the localization of vibrations, leading to frequency veering. Increasing the coupling angle also led to this effect. However, when the parameter changes acted in opposite directions – for instance, when the beam length increased while its cross-sectional size also increased – the frequency loci changed only slightly. A comparison of the analytical results obtained using the Euler–Bernoulli equation with numerical results obtained with finite element analysis revealed good agreement.

References

1. Leissa, A. W., (1969), *Vibration of Plates*, NASA, SP-160.
2. Leugering, G., Nazarov, S. A. and Slutskiy, A. S., (2019), "The asymptotic analysis of a junction of two elastic beams", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 99, no 1, art. e201700192, DOI: 10.1002/zamm.201700192.
3. Kerdid, N. and Messaoudi, M., (2026), "Asymptotic analysis of flexural, torsional, and stretching modes in a multi-rod structure", *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, vol. 25, no 2, pp. 5–27, DOI: 10.17512/jamcm.2026.2.01.
4. Bauer, S. M., Dorofeev, N. P., Nesterchuk, G. A. and Smirnov, A. L., (2025), "Free vibrations of coupled rods", *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 3, no 92, pp. 73–81.
5. Bauer, S. M., Dorofeev, N. P. and Smirnov, A. L., (2026), "Effect of the Rod Length Ratio on the Natural Frequencies of Two Rigidly Coupled Rods", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, vol. 4, no 59, (in print).
6. Obradović, A., Šalinić, S. and Tomović, A., (2020), "Free vibrations of planar serial frame structures in the case of axially functionally graded materials", *Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 47, no 2, pp. 221–239.
7. Šalinić, S., Todorović, M. and Obradović, A., (2023), "An analytical approach for free vibration analysis of Euler-Bernoulli stepped beams with axial-bending coupling effect", *Engineering Today*, vol. 1, no 4.
8. Pierre, C., (1988), "Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 126, no 3, pp. 485–502.
9. Liu, X. L., (2002), "Behavior of derivatives of eigenvalues and eigenvectors in curve veering and mode localization and their relation to close eigenvalues", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 256, no 3, pp. 551–564.
10. Mace, B. and Manconi, E., (2012), "Mode veering in weakly coupled systems", *International Conference on Noise and Vibration Engineering*, pp. 3225–3236.
11. Ratazzi, A. R., Bambill, D. V. and Rossit, C. A., (2013), "Free Vibrations of Beam System Structures with Elastic Boundary Conditions and an Internal Elastic Hinge", *Chinese Journal of Engineering*, vol. 3, pp. 10.
12. Grossi, R. O. and Albarracín, C. M., (2003), "Eigenfrequencies of generally restrained beams", *Journal of Applied Mathematics*, vol. 10, pp. 503–516.
13. Albarracín, C. M. and Grossi, R. O., (2005), "Vibrations of elastically restrained frames", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 285, pp. 467–476.
14. Pengxin, T., Yang, L., Jingtao, D. and Zhigang, L. (2023), "Wave-based in-plane vibration analysis of multiple coupled beam structures with arbitrary connection angle and

- elastic boundary restraints", *Journal of Vibration and Control*, vol. 29, no 21–22, pp. 4948–4958.
15. Ouisse, M. and Guyader, J. L., (2003), "Vibration sensitive behaviour of a connecting angle. Case of coupled beams and plates", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 267, no 4, pp. 809–850.
16. Umar, U. S., Jamil, M. M., Hamisu, M. T. and Sa'ad, A., (2020), "Vibration Analysis of a Jib Crane using Frame Structures Approach. Applications of Modelling and Simulation", *Chinese Journal of Engineering*, vol. 4, pp. 71–80.

Information about the authors:

S. M. Bauer – Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor; Head at the Department of Theoretical and Applied Mechanics, St. Petersburg State University (7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russia), eLibrary AuthorID: 6610, Scopus Author ID: 8549215600, ORCID 0000-0003-3732-2110, ResearcherID: M-5054-2013;

N. P. Dorofeev – Postgraduate student, St. Petersburg State University (7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russia), eLibrary AuthorID: 1184153, Scopus Author ID: 57377072700, ORCID 0000-0002-9094-7956, ResearcherID: JEF-5023-2023;

A. L. Smirnov – Candidate of Science (Physics and Mathematics); Associate Professor of the Theoretical and Applied Mechanics Department, St. Petersburg State University (7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russia), eLibrary AuthorID: 7703, Scopus Author ID: 55911826500, ORCID 0000-0002-1526-2869, ResearcherID: H-2450-2013.

Информация об авторах:

С. М. Бауэр – доктор физико-математических наук, профессор; заведующая кафедрой теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета (199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7–9), eLibrary AuthorID: 6610, Scopus Author ID: 8549215600, ORCID 0000-0003-3732-2110, ResearcherID: M-5054-2013;

Н. П. Дорофеев – аспирант Санкт-Петербургского государственного университета (199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7–9), eLibrary AuthorID: 1184153, Scopus Author ID: 57377072700, ORCID 0000-0002-9094-7956, ResearcherID: JEF-5023-2023;

А. Л. Смирнов – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета (199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7–9), eLibrary AuthorID: 7703, Scopus Author ID: 55911826500, ORCID 0000-0002-1526-2869, ResearcherID: H-2450-2013.

Научная статья

519.6:532.529

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-71-86

<https://elibrary.ru/dbtocp>

Численное моделирование колебаний электрически заряженной газовзвеси в акустическом резонаторе с электрическим потенциалом на стенках

Дмитрий Алексеевич Тукмаков

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ, ИММ Казанский научный центр Российской академии наук, Казань, Россия
tukmakovda@imm.knc.ru

Аннотация. Работа посвящена численному моделированию колебаний электрически заряженной газовзвеси в акустическом резонаторе с электрическими потенциалами, приложенными к стенкам резонатора. Математическая модель реализовывала континуальную методику моделирования динамики многофазных сред в эйлеровых координатах, позволяющую учесть взаимодействие газа и дисперсной фазы. Динамика несущей среды описывается системой уравнений Навье–Стокса для сжимаемого теплопроводного газа. Проведены расчеты динамики аэрозолей в монодисперсном приближении для различных размеров дисперсных включений электрически нейтральной и электрически заряженной газовзвесей. Исследовано влияние объемного содержания дисперсной фазы и размера дисперсных включений на интенсивность колебаний несущей среды и дисперсной фазы без учета и с учетом влияния силы Кулона. Численные расчеты демонстрируют, что в электрически нейтральной газовзвеси при увеличении объемного содержания дисперсной фазы и уменьшении размера частиц, при их фиксированном объемном содержании, скорость колебаний несущей среды и дисперсной компоненты уменьшается. Скорость колебаний мелкодисперсных частиц согласуется со скоростью колебаний несущей среды. Выявлено, что в электрически заряженных газовзвесах скорость движения компонент газовзвеси больше, чем в электрически нейтральной газовзвеси. Что можно объяснить тем, что за счет осаждения дисперсных частиц на стенках резонатора под действием электрического поля уменьшается влияние дисперсной фазы на колебания несущей среды. В результате большей скорости движения несущей среды в электрически заряженной газовзвеси дисперсные частицы также имеют большую скорость в сравнении со скоростью дисперсных частиц в электрически нейтральной газовзвеси. Численные расчеты демонстрируют, что в газовзвесах с большим объемным содержанием и в газовзвесах с меньшим размером дисперсных включений влияние электрического поля на динамику компонент смеси имеют более выраженное значение, чем в газовзвесах с малым содержанием дисперсной фазы или в газовзвесах с крупнодисперсными частицами.

Ключевые слова: *механика жидкости и газа; многофазные среды; электрогидродинамика; континуальная методика; численное моделирование.*

Для цитирования: Тукмаков Д. А. Численное моделирование колебаний электрически заряженной газовзвеси в акустическом резонаторе с электрическим потенциалом на стенках // Вестник



© Тукмаков Д. А., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 71–86. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-71-86. <https://elibrary.ru/dbtocp>.

Статья поступила в редакцию 08.05.2026; одобрена после рецензирования 31.08.2026; принята к публикации 14.10.2026.

Research article

Numerical Simulation of Oscillations of an Electrically Charged Gas Suspension in an Acoustic Resonator With an Electric Potential on the Walls

Dmitry A. Tukmakov

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,

Kazan Scientific Center of RAS, Kazan, Russia

tukmakovda@imm.knc.ru

Abstract. This paper presents numerical simulations of oscillations of an electrically charged gas suspension in an acoustic resonator with electric potentials applied to the resonator walls. The mathematical model utilizes a continuum technique for modeling the dynamics of multiphase media in Euler coordinates, accounting for the interaction between the gas and the dispersed phase. The dynamics of the carrier medium are described by a system of Navier-Stokes equations for a compressible, heat-conducting gas. Aerosol dynamics are calculated in the monodisperse approximation for various sizes of dispersed inclusions in electrically neutral and electrically charged gas suspensions. The influence of the volume content of the dispersed phase and the size of the dispersed inclusions on the oscillation intensity of the carrier medium and the dispersed phase is investigated, with and without the influence of the Coulomb force. Numerical calculations demonstrate that in an electrically neutral gas suspension, with an increasing volume fraction of the dispersed phase and a decreasing particle size, at a fixed volume fraction, the oscillation velocity of the carrier medium and the dispersed component decreases. The oscillation velocity of fine particles is consistent with the oscillation velocity of the carrier medium. The study has found that in electrically charged gas suspensions, the velocity of the gas suspension components is greater than in an electrically neutral gas suspension. This can be explained by the fact that the deposition of dispersed particles on the resonator walls under the influence of the electric field reduces the influence of the dispersed phase on the oscillations of the carrier medium. As a result of the higher velocity of the carrier medium in an electrically charged gas suspension, the dispersed particles also have a higher velocity compared to the velocity of dispersed particles in an electrically neutral gas suspension. Numerical calculations demonstrate that in gas suspensions with a high-volume content and in gas suspensions with a smaller size of dispersed inclusions, the influence of the electric field on the dynamics of the mixture components is more pronounced than in gas suspensions with a low content of the dispersed phase or in gas suspensions with coarse particles.

Keywords: *fluid and gas mechanics; multiphase media; electrohydrodynamics; continuum methodology; numerical modeling.*

For citation: Tukmakov, D. A. (2026), "Numerical Simulation of Oscillations of an Electrically Charged Gas Suspension in an Acoustic Resonator With an Electric Potential on the Walls", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 71–86, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-71-86, <https://elibrary.ru/dbtocp>.

The article was submitted 08 May 2026; approved after reviewing 31 Aug 2026; accepted for publication 14 Oct 2026.

Введение

Одной из проблем механики жидкости и газа является исследование колебаний сплошных сред (жидкостей и газов) в замкнутых объемах [1]. Частным случаем сплошных сред являются неоднородные среды [2]. Проблемам динамики неоднородных сред посвящен ряд монографий и статей в периодической печати [1–17]. В монографии [3] разработаны основы теории динамики многофазных и многокомпонентных сред, основанные на уравнениях механики сплошных сред, представлены уравнения континуальной методики моделирования течений многофазных сред. В монографии [4] на основе континуальной методики моделирования многофазных сред разработаны математические модели одномерной нестационарной динамики газовзвесей без учета вязкости несущей среды. В публикации [5] рассматриваются различные теоретические проблемы исследования воздействия акустических полей на дисперсные частицы с целью приложения в медицинских технологиях и технологиях промышленной экологии. В статье [6] с помощью численного решения двумерного уравнения Гельмгольца исследованы течения газа с мелкодисперсными частицами в каналах с прямоугольным сечением под действием резонансных акустических полей. В работе [7] изучались газодинамические процессы в технологиях электрической фильтрации газодисперсных сред, в которых происходит улавливание аэрозольных частиц из воздушного потока при использовании комбинированных фильтрующих систем. В публикации [8] проводится исследование нового типа акустического резонатора с радиальным возбуждающим электрическим полем. Рассчитаны характеристики различных мод акустических колебаний для резонаторов. В статье [9] представлена математическая модель пылевых ионизационных волн и пылевых акустических волн. Теоретический подход основан на уравнениях движения и непрерывности массы для пылевых частиц и уравнении Пуассона для электрического поля. Выявлены физические закономерности пылевых акустических волн. Уравнения математической модели рассматривались в нестационарном приближении с одномерной геометрией процесса. В публикации [10] с помощью асимптотических методов в приближении первого порядка малости исследованы динамические процессы слабо заряженных капель естественного происхождения в электрическом и акустическом полях. Расчеты проводятся на модели идеальной несжимаемой электропроводной жидкости. В работе [11] с помощью математического моделирования исследовано влияние электрического поля на траектории колебаний заряженных микронных диэлектрических частиц в линейной квадрупольной ловушке в воздухе при атмосферном давлении. Математическая модель основана на решении уравнения Ланжевена без учета уравнений газовой динамики в качестве силы межфазного обмена импульсом для получения линейного дифференциального уравнения рассматривалась только сила Стокса.

Целью представленных в обзоре работ является исследование динамических процессов в газодисперсных средах в том числе аэрозолей, движущихся в электрическом поле. Актуальность работы связана с тем, что воздействие акустических и электрических полей на аэрозоли могут применяться в различных технологиях очистки промышленных выбросов от дисперсных включений. В данной работе проводится моделирование течений газодисперсных сред в рамках континуальной эйлеровой математической модели для исследования колебаний электрически заряженной газовзвеси в закрытом акустическом резонаторе.

Новизна работы заключается в том, что применение континуальной методики моделирования течений газовзвесей позволяет исследовать взаимобратные физические эффекты, возникающие в течениях электрически заряженных газовзвесей. В монодисперсном приближении исследованы колебания электрически заряженных газодисперсных сред в акустических полях с учетом осаждения дисперсной компоненты на стенках канала.

Математическая модель и численный алгоритм

Для описания движения неоднородной среды применяется система уравнений динамики двухскоростной и двухтемпературной газовой смеси с учетом взаимодействия компонент смеси. Одним из наиболее важных параметров дисперсной компоненты гетерогенной смеси является "средняя плотность", представляющая собой произведение объемного содержания дисперсной компоненты на физическую плотность материала дисперсной фазы [3,4]. Физическая плотность материала дисперсных включений в процессе течения многофазной среды не изменяется. При этом объемное содержание является функцией временной и пространственных переменных. Все дисперсные включения предполагались одинакового размера и сферической формы [4]. Движение несущей среды описывается двумерной системой уравнений Навье–Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с учетом межфазного обмена импульсом и теплообмена (1)–(4) [12–14]. Динамика дисперсной фазы описывалась системой уравнений включавшей в себя уравнения сохранения средней плотности (5), уравнениями сохранения составляющих импульса (6)–(7) и уравнением сохранения энергии дисперсной фазы (8), также система движения газодисперсной смеси дополнялась уравнением Пуассона, описывающим распределение электрического поля (9):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) = F_x + \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) = -F_y + \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left([e + p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy}v - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left([e + p - \tau_{yy}]v - \tau_{xy}u - \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) =$$

$$= Q - |F_x|(u - u_1) - |F_y|(v - v_1) + \alpha \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 u_1 v_1) = F_x - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 u_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_1 v_1^2) = F_y - \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(e_1 v_1) = -Q, \quad (8)$$

$$\Delta \varphi = \rho_1 q_0, \quad (9)$$

$$\rho_1 = \alpha \rho_{10}, \quad e_1 = \rho_1 C_{v1} T_1.$$

Тензор вязких напряжений несущей среды вычисляется следующим образом [15]:

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Межфазный обмен импульсом включал в себя силу аэродинамического сопротивления

$-F_{AD}$, динамическую силу Архимеда $-F_{DA}$, силу присоединенных масс $-F_{MA}$ [3]:

$$F_{ADx} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho \sqrt{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2} (u-u_1),$$

$$F_{DAx} = \alpha \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$F_{AMx} = 0.5 \alpha \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial t} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right),$$

$$F_x = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho_1 \sqrt{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2} (u-u_1) + \alpha \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$+ 0.5 \alpha \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial t} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right),$$

$$F_y = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{d} C_d \rho \sqrt{(u-u_1)^2 + (v-v_1)^2} (v-v_1) + \alpha \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) +$$

$$+ 0.5 \alpha \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial t} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right).$$

Компоненты вектора межфазного силового взаимодействия включают в себя силу аэродинамического сопротивления, динамическую силу Архимеда и силу присоединенных масс [3], также при описании динамики частиц учитывается сила Кулона [16]. Здесь p , ρ , u , v – давление, плотность, декартовы составляющие скорости несущей среды в направлении осей x и y соответственно; T , e – температура и полная энергия газа; ρ_1 , T_1 , e_1 , u_1 , v_1 – средняя плотность, температура, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости дисперсной фазы, F_k – составляющие вектора силового взаимодействия дисперсной фазы и несущей среды, $k = 1, 2$; Q – тепловой поток между дисперсной фазой и несущей средой [1–3]; λ – теплопроводность, μ – вязкость несущей среды. Температура несущей среды находится из уравнения $T = (\gamma - 1)(e/\rho - 0.5(u^2 + v^2))/R$, где R – газовая постоянная несущей фазы, γ – постоянная адиабаты. Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как $e_1 = \rho C_p T$, где C_p – удельная теплоемкость единицы массы вещества дисперсной фазы. Тепловой поток между компонентами смеси описывается выражением: $Q = 6\alpha Nu_1 \lambda (T - T_1) d^2$. Число Нуссельта определяется с помощью известной аппроксимации в зависимости от относительных чисел Маха, Рейнольдса и от числа Прандтля [3, 4]:

$$M_1 = |\vec{V} - \vec{V}_1|/c, \quad Re_1 = \rho |\vec{V} - \vec{V}_1| d \mu^{-1}, \quad Pr = C_p \mu \lambda^{-1},$$

$$Nu_1 = 2 \exp(-M_{12}) + 0.459 Re_1^{0.55} Pr^{0.33}.$$

Коэффициент аэродинамического сопротивления вычислялся с использованием следующего выражения [3,4]:

$$C_d = \frac{24}{Re_1} + \frac{4}{Re_1^{0.5}} + 0.4.$$

Математическая модель приемлема для расчетов двухфазных течений с параметрами [4]:

$$0 < M_1 < 2, 0 < Re_1 < 2 \cdot 10^5.$$

Составляющие силы Кулона на единицу объема газозвеси определяются через ее удельный заряд, объемную плотность твердой фазы и напряженность электрического поля. Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона. В правой части уравнения Пуассона содержится плотность заряда газозвеси, отнесенная к абсолютной диэлектрической проницаемости несущей среды [16]:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{эл}}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\bar{\nabla} \varphi, \quad \Delta^2 \varphi = -\frac{\rho_{эл}}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad \rho_{эл} = \alpha \rho_{20} \cdot q_0 = \rho_2 \cdot q_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \Phi / \text{м}.$$

где q_0 – удельный заряд единицы массы твердой фракции, φ – потенциал электрического поля.

Система уравнений (1)–(6) интегрировалась явным конечно-разностным методом Мак-Кормака второго порядка точности [15]. Рассмотрим применение численного алгоритма явного метода Мак-Кормака на примере скалярного нелинейного уравнения в частных производных (10):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x} + \frac{\partial a(f)}{\partial y} = c(f). \quad (10)$$

Алгоритм явного конечно-разностного метода Мак-Кормака [15] для скалярного нелинейного уравнения (9) имеет вид (11)–(12):

$$f_{j,k}^* = f_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j+1,k}^n - a_{j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{j,k+1}^n - b_{j,k}^n) + \Delta t c_{j,k}^n, \quad (11)$$

$$f_{j,k}^{n+1} = 0.5(f_{j,k}^n + f_{j,k}^*) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j,k}^* - a_{j-1,k}^*) - 0.5 \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{j,k}^* - b_{j,k-1}^*) + 0.5 \Delta t c_{j,k}^*. \quad (12)$$

Здесь $\Delta x, \Delta y$ – шаги по пространственному направлению, Δt – шаг по времени.

В расчетах применялась схема расщепления по пространственным переменным [17], реализуемая в виде симметричной последовательности одномерных операторов – P_x, P_y , явного конечно-разностного метода Мак-Кормака, выполняющих шаги предиктор и корректор, по соответствующим координатным осям, позволяющая построить решение на следующем временном слое (13):

$$f_{j,k}^{n+1} = P_x \left(\frac{\Delta t_x}{2} \right) P_y \left(\frac{\Delta t_y}{2} \right) P_y \left(\frac{\Delta t_y}{2} \right) P_x \left(\frac{\Delta t_x}{2} \right) f_{j,k}^n. \quad (13)$$

Временные шаги $\Delta t_x = \Delta t_y = \Delta t$.

Для получения монотонного численного решения к сеточной функции на каждом временном шаге применялась схема нелинейной коррекции [18, 19]. Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль всех узлов. Рассмотрим алгоритм коррекции решения на примере функции f . В случае если выполняются условия $(\delta f_{j-1/2} \cdot \delta f_{j+1/2}) < 0$ или $(\delta f_{j+1/2} \cdot \delta f_{j+3/2}) < 0$ то к функции f в j -ом узле применяется алгоритм схемы коррекции: $\tilde{f}_j = f_j + \kappa (\delta f_{j+1/2} - \delta f_{j-1/2})$. Нижний индекс обозначает номер узла сетки.

Здесь использованы обозначения: $\delta f_{j-\frac{1}{2}} = f_j - f_{j-1}, \delta f_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+1} - f_j, \delta f_{j+\frac{3}{2}} = f_{j+2} - f_{j+1}$. В противном случае: $\tilde{f}_j = f_j$, $\tilde{f}_j$ – значение функции в j -ом узле после перехода на $(n+1)$ -й временной слой по схеме Мак-Кормака, κ – коэффициент коррекции.

Двухмерное уравнение Пуассона, описывающее электрическое поле (7), преобразуется к нестационарному виду (14) и интегрировалось методом установления [20] (15):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y^2} + \rho_1 q_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\Delta t \left(\frac{\varphi_{i+1j}^n - 2\varphi_{ij}^n + \varphi_{i-1j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{ij+1}^n - 2\varphi_{ij}^n + \varphi_{ij-1}^n}{\Delta y^2} + q_0 \rho_{1ij}^n \right) + \varphi_{ij}^n = \varphi_{ij}^{n+1}. \quad (15)$$

Постановка задачи

В данной работе численно исследовались колебания монодисперсной газозвеси в двумерном прямоугольном акустическом резонаторе – закрытом канале с граничными условиями "прилипания", на стенках и движущемся поршне на одной из поперечных стенок (рис. 1). В численных расчетах длина канала составляла $L = 1$ м, ширина канала $H = 0.1$ м. Предполагалось, что в начальный момент времени дисперсная компонента смеси равномерно распределена в физической области, к продольным стенкам которой приложен электрический потенциал.

При моделировании динамических процессов в электрически заряженной газозвеси задавались следующие граничные условия – на неподвижных поверхностях однородные условия Дирихле для составляющих скорости на неподвижных поверхностях, для остальных динамических функций везде задавались однородные граничные условия Неймана:

$$\begin{aligned} u(t, 1, j) &= A\omega \sin(\omega t), \quad u_1(t, 1, j) = u(t, 1, j), \\ v(t, 1, j) &= 0, \quad v_1(t, 1, j) = v(t, 1, j), \\ u(t, N_x, j) &= 0, \quad u_1(t, N_x, j) = 0, \\ v(t, N_x, j) &= 0, \quad v_1(t, N_x, j) = 0, \\ u(t, i, 1) &= 0, \quad u_1(t, i, 1) = 0, \\ v(t, i, 1) &= 0, \quad v_1(t, i, 1) = 0, \\ u(t, i, N_y) &= 0, \quad u_1(t, i, N_y) = 0, \\ v(t, i, N_y) &= 0, \quad v_1(t, i, N_y) = 0, \\ \rho(t, 1, j) &= \rho(t, 2, j), \quad \rho_1(t, 1, j) = \rho_1(t, 2, j), \\ \rho(t, N_x, j) &= \rho(t, N_x - 1, j), \quad \rho_1(t, N_x, j) = \rho_1(t, N_x - 1, j), \\ \rho(t, i, 1) &= \rho(t, i, 2), \quad \rho_1(t, i, 1) = \rho_1(t, i, 2), \\ \rho(t, i, N_y) &= \rho(t, i, N_y - 1), \quad \rho_1(t, i, N_y) = \rho_1(t, i, N_y - 1), \\ e(t, 1, j) &= e(t, 2, j), \quad e_1(t, 1, j) = e_1(t, 2, j), \\ e(t, N_x, j) &= e(t, N_x - 1, j), \quad e_1(t, N_x, j) = e_1(t, N_x - 1, j), \\ e(t, i, 1) &= e(t, i, 2), \quad e_1(t, i, 1) = e_1(t, i, 2), \\ e(t, i, N_y) &= e(t, i, N_y - 1), \quad e_1(t, i, N_y) = e_1(t, i, N_y - 1). \end{aligned}$$

Для потенциала электрического поля задавались значения на границах расчетной области:

$$\varphi(1, j) = \varphi(N_x, j) = \varphi_0, \quad \varphi(i, 1) = \varphi(i, N_y) = \varphi_0.$$

В статье [12] проведено сопоставление численных расчетов динамики электрически нейтрального аэрозоля с результатами физического эксперимента. В статье [14] исследована сеточная сходимость численной модели динамики электрически заряженной газозвеси (1)–(7).

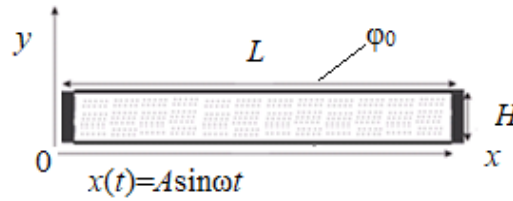


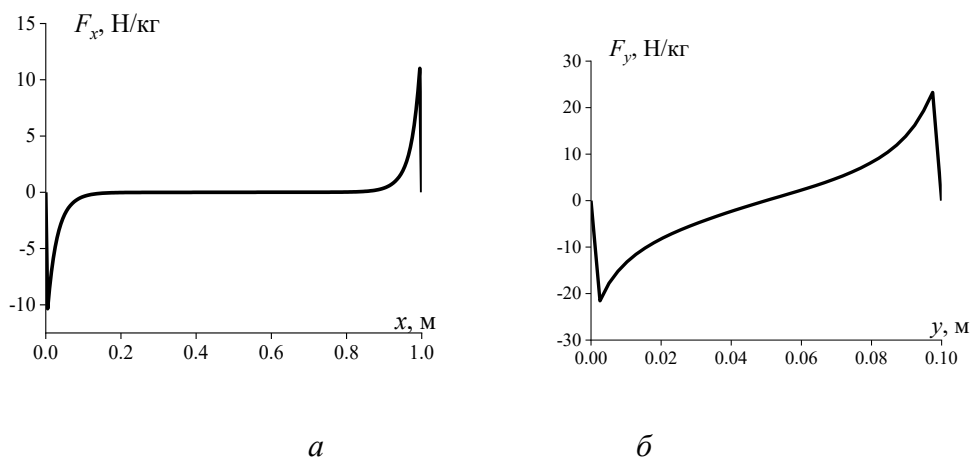
Рис. 1. Общая схема моделируемого процесса

Скорость звука c вычисляется из уравнения: $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, где $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха, теплопроводность несущей среды предполагалась равной $\lambda = 0.02553$ Вт/(м·К), динамическая вязкость несущей среды $\mu = 1.72 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\gamma = 1.4$, $R = 8.31$ Дж/(моль · К). Газовзвесь в начальный момент времени представляет собой смесь воздуха с равномерно распределенными в объеме резонатора частицами твердой фазы – сферами одинакового диаметра с фиксированной плотностью вещества $\rho_{10} = 2200$ кг/м³. В момент времени $t = 0$ поршень начинал движение по гармоническому закону $x(t) = A \cdot \sin(\omega t)$, где $\omega = 2\pi\nu$, $\nu = c/2L$, частота первого линейного резонанса колебаний газового столба в закрытой трубе [1]. $A = 1$ мм – амплитуда хождения поршня. Величина потенциала, приложенного к стенкам канала $\phi_0 = 10$ кВ.

Результаты расчетов

На рисунке 2 представлены пространственные распределения пространственных компонент удельной силы Кулона в продольном и поперечном сечениях акустического резонатора. Максимальные значения силы Кулона достигаются вблизи стенок акустического резонатора.

Пространственные распределения модуля скорости газовой компоненты газовзвеси при колебаниях электрически нейтральной дисперсной компоненты отличаются от аналогичной величины при колебаниях газовзвеси с электрически заряженной дисперсной компонентой (рис. 3). Вследствие воздействия силы Кулона на движение электрически заряженных дисперсных частиц средняя плотность дисперсной компоненты электрически заряженной газовзвеси отличается от распределения средней плотности электрически нейтральной газовзвеси. Для электрически заряженной газовзвеси средняя плотность уменьшается от стенок к оси симметрии канала (см. рис. 4).

Рис. 2. Пространственное распределение силы Кулона в продольном направлении $y=h/2$ (а) и поперечном направлениях $x=L/2$ (б)

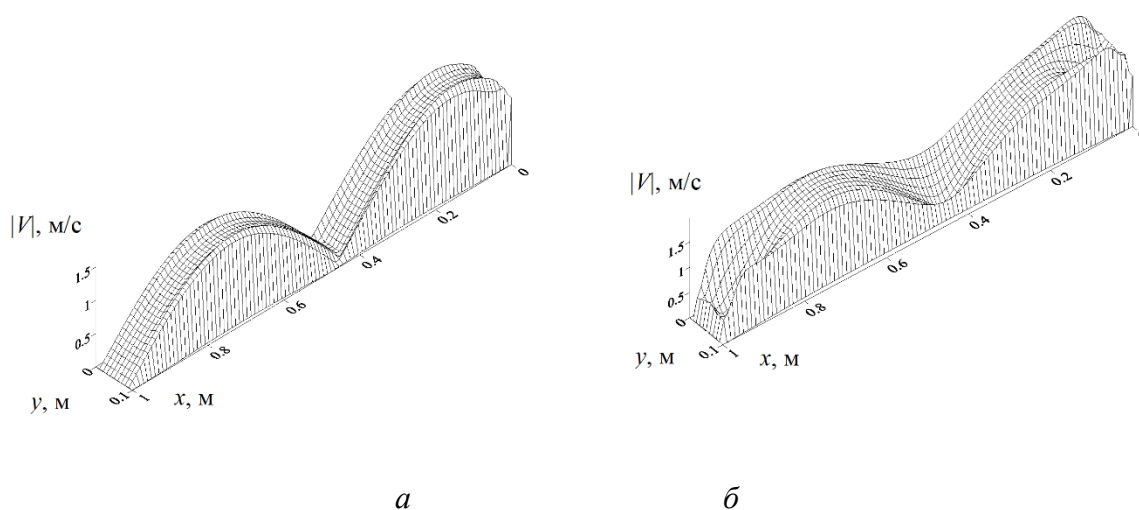


Рис. 3. Пространственные распределения модуля скорости в электрически нейтральной (а) и электрически заряженной газозвеси (б)

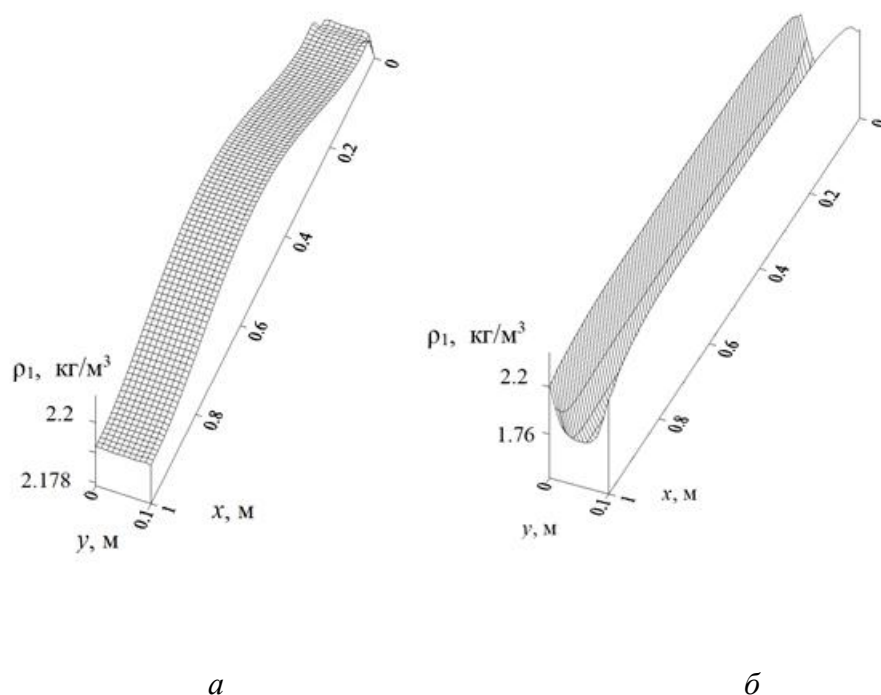


Рис. 4. Пространственные распределения средней плотности дисперсной компоненты в электрически нейтральной (а) и электрически заряженной газозвеси (б)

На рисунке 5, а представлено пространственное распределение средней плотности дисперсной фазы в электрически заряженной и нейтральной газозвеси вблизи точки $x = L/2$, $y = 0$. В электрически заряженной газозвеси при осаждении дисперсных частиц происходит первоначальное увеличение средней плотности дисперсных частиц вблизи стенки, за счет движения дисперсных частиц из внутренней области, после чего средняя плотность монотонно уменьшается. Из рисунка 4, б следует, что для различных дисперсностей наблюдаются отличающиеся закономерности изменения распределения средней

плотности, наиболее интенсивно рост средней плотности наблюдается у дисперсных частиц с размером $d = 20$ мкм, максимальное значение средней плотности для частиц с такой дисперсностью составляет $\rho_1 = 4.51$ кг/м³ для частиц размером $d = 2$ мкм и $d = 200$ мкм максимальные значения средней плотности составляют $\rho_1 = 2.57$ кг/м³ и $\rho_1 = 4.4$ кг/м³ соответственно.

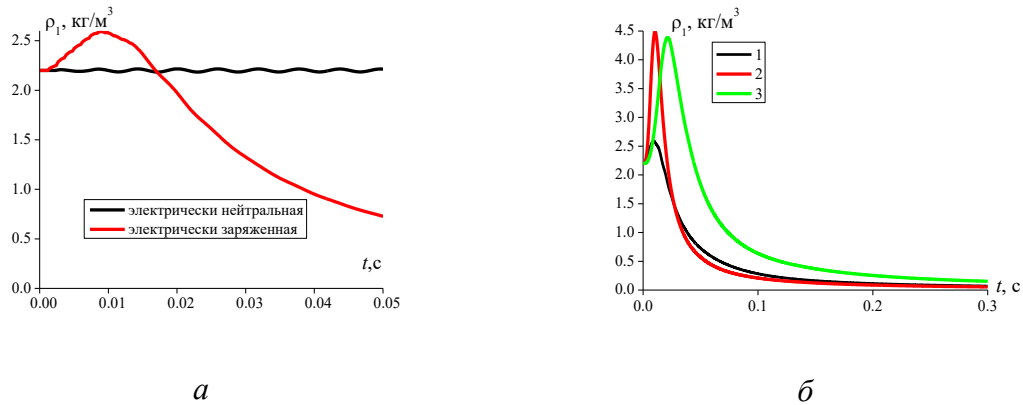


Рис. 5. Временная зависимость величины средней плотности в электрически нейтральной и электрически заряженной газовой взвеси (а) и временная зависимость средней плотности для различных размеров дисперсных включений электрически заряженной газовой взвеси (б)

За счет межфазного взаимодействия величина продольной скорости несущей среды газовой взвеси существенно меньше, чем в однородном газе и для параметров дисперсной компоненты $\alpha = 0.001$, $d = 2$ мкм, размах колебаний продольной составляющей скорости составляет 18% от аналогичной величины в однородном газе (рис. 6).

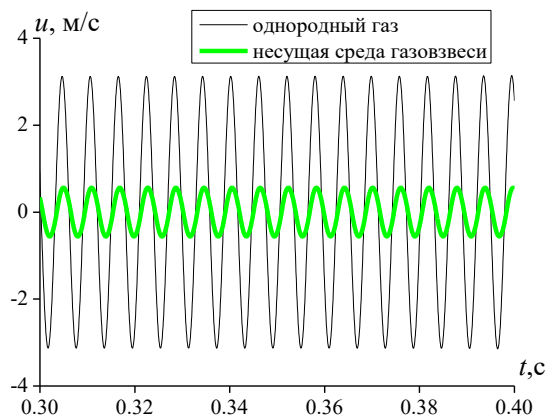


Рис. 6. Временная зависимость колебаний продольной составляющей скорости в электрически нейтральной газовой взвеси и в однородном вязком газе, динамика которого описывается системой уравнений Навье–Стокса

Рассмотрим влияние объемного содержания дисперсной компоненты на интенсивность колебаний несущей среды и дисперсной фазы в электрически заряженной и нейтральной газовой взвеси, для мелкодисперсных частиц $d = 2$ мкм. Здесь кривые 1, 2 –

это значения продольной составляющей скорости для несущей среды и дисперсной компоненты без учета электрического поля; 3, 4 – продольная составляющая скорости несущей среды и дисперсной компоненты с учетом электрического поля и 5 – соответствующая величина колебаний однородного газа. Амплитуды изменения продольной составляющей скорости газовой и дисперсной компонент при таких размерах дисперсных частиц согласуются (рис. 7).

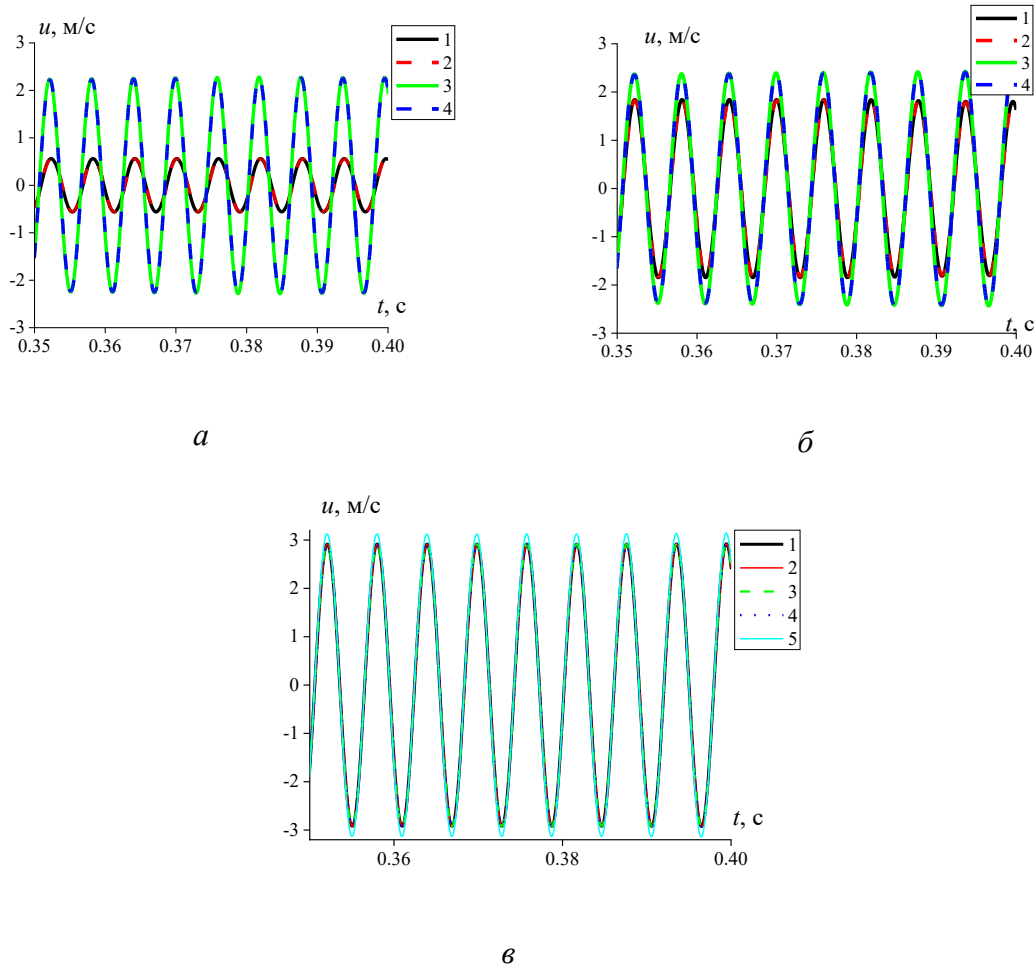


Рис. 7. Временные зависимости изменения продольной составляющей скорости несущей среды и дисперсной компоненты $\alpha = 0.001$ (а), $\alpha = 0.0001$ (б), $\alpha = 0.00001$ (в)

Для объемного содержания $\alpha = 0.001$ при учете и без учета осаждения дисперсной компоненты в электрическом поле размах изменения продольной составляющей скорости несущей и дисперсной фазы составляет $U = 1.16$ м/с и $U = 4.62$ м/с соответственно. При уменьшении объемного содержания частиц до величины $\alpha = 0.0001$, в электрически нейтральной и электрически заряженной газовзвесьях величины размаха продольной скорости несущей и дисперсной фазы составляет $U = 3.65$ м/с и $U = 4.82$ м/с соответственно. При объемном содержании $\alpha = 0.00001$ наличие процесса осаждения дисперсной компоненты в электрическом поле не оказывает существенного влияния на интенсивность колебаний компонент смеси – размах колебаний продольной составляющей скорости обоих компонент смеси составляет $U = 5.85$ м/с, тогда как в однородном газе эта величина имеет значение $U = 6.29$ м/с (рис. 7, в).

На рисунке 8 линии 1, 2 – значения продольной составляющей скорости для несущей среды и дисперсной компоненты без учета электрического поля; 3, 4 – продольная составляющая скорости несущей среды и дисперсной компоненты с учетом электрического поля.

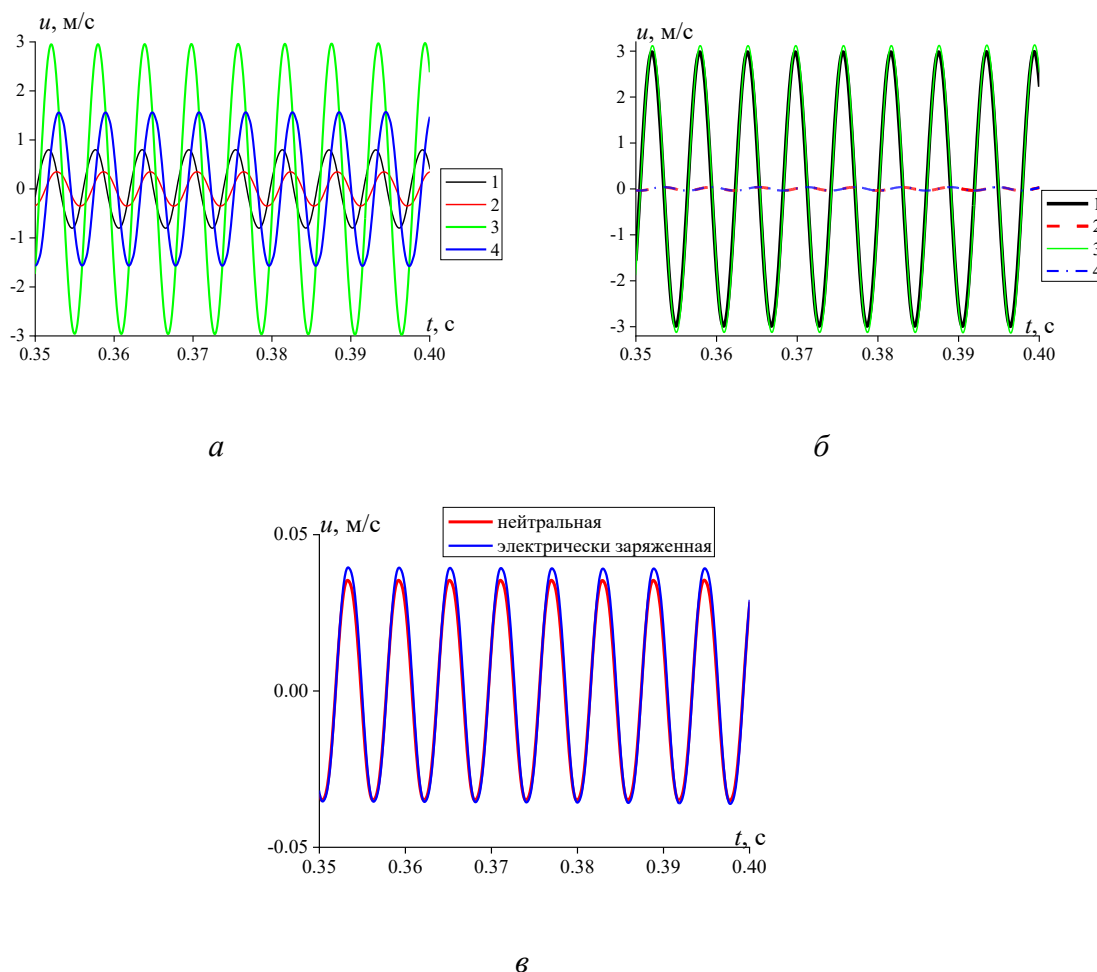


Рис. 8. Временные зависимости изменения продольной составляющей скорости несущей среды и дисперсной компоненты $d = 20$ мкм (а), $d = 200$ мкм (б), колебания скорости дисперсной компоненты $d = 200$ мкм (в)

Для различных размеров дисперсных включений интенсивность колебаний несущей среды и дисперсной фазы в электрически заряженной и нейтральной газозвесах при объемном содержании дисперсной компоненты $\alpha = 0.001$ существенно отличается (рис. 7). Для частиц с диаметром $d = 20$ мкм размах изменения продольной составляющей скорости несущей среды в электрически заряженной и электрически нейтральной газозвеси $U = 5.92$ м/с и $U = 3.07$ м/с для дисперсной компоненты $U_1 = 1.59$ м/с и $U_1 = 0.69$ м/с (рис. 7, а). Для размера частиц $d = 200$ мкм интенсивность колебаний газовой компоненты в электрически заряженной и электрически нейтральной газозвеси составляет $U = 6.26$ м/с и $U = 5.93$ м/с (рис. 7, б). Крупнодисперсные частицы с $d = 200$ мкм за счет инерционности имеют меньшую амплитуду колебаний в электрически заряженной и электрически нейтральной газозвеси, размах изменения продольной скорости частиц составляет $U_1 = 0.074$ м/с и $U_1 = 0.069$ м/с соответственно (рис. 7, в).

Заключение

В работе представлены результаты численных расчетов колебаний газовзвесей в акустическом резонаторе при учете влияния электрического заряда дисперсной компоненты и внешних электрических потенциалов, приложенных к стенкам акустического резонатора. Динамика несущей среды описывалась системой уравнений Навье–Стокса. Расчеты осуществлялись на основе континуальной методики моделирования течений неоднородных сред, позволяющей учесть взаимобратные эффекты динамики газодисперсных потоков. Исследовано влияние объемного содержания и дисперсности частиц на интенсивность колебаний газовзвеси. Для электрически нейтральных газовзвесей выявлено, что при больших объемных содержаниях – за счет большей массовой доли дисперсной компоненты интенсивность колебаний компонент имеет меньшее значение. При фиксированном объемном содержании дисперсных частиц уменьшение размера дисперсных включений приводит к увеличению площади межфазного взаимодействия, тем самым увеличивается интенсивность межфазного взаимодействия, что приводит к уменьшению амплитуды колебаний газодисперсной смеси. При этом скорость мелкодисперсных частиц согласуется со скоростью несущей среды. Для малых объемных содержаний дисперсной компоненты наличие процесса осаждения дисперсных частиц в электрическом поле не оказывает существенного влияния на интенсивность колебаний компонент смеси. Для больших объемных содержаний дисперсной компоненты осаждение дисперсных частиц в электрическом поле оказывает значительное воздействие на интенсивность колебаний несущей среды и дисперсной компоненты в сравнении с электрически нейтральной газовзвесью. В зависимости от размера дисперсных включений влияние осаждения в электрическом поле дисперсных частиц на динамику компонент смеси отличается. Для крупнодисперсных частиц воздействие осаждения в электрическом поле дисперсной компоненты на динамику несущей среды имеет меньшее значение, чем для случая, когда дисперсная фаза газовзвеси состоит из мелкодисперсных частиц. Результаты расчетов могут быть использованы при расчетах аппаратов очистки газодисперсных сред, использующих акустические и электрические поля.

Список источников

1. Красильников В. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.
2. Сорокин Л. Е. Влияние зависимости коэффициента теплопроводности от температуры на жесткую неустойчивость течения бинарной смеси с термодиффузией // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2011. № 1 (5). С. 90–94.
3. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.
4. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 2003. 284 с.
5. Ягодкин И. В., Посаженников А. М., Гришин А. Г., Мельников В. П. Применение метода электрофизического воздействия на дисперсную среду в устройствах высокоэффективной фильтрации газовых сред от аэрозолей различного происхождения // Известия высших учебных заведений. Ядерная энергетика. 2012. № 1. С. 71–79.
6. Теплых А. А., Зайцев Б. Д., Семенов А. П., Бородин И. А. Акустический резонатор с радиальным возбуждающим электрическим полем // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2021. Т. 85, № 6. С. 869–874.
7. Wu M., Ozcelik A., Rufo J., Wang Z., Fang R., Huang T. J. Acoustofluidic separation of cells and particles // Microsystems nanoengineering. 2019. Vol. 5.

8. Lei J., Cheng F., Li K. Numerical simulation of boundary-driven acoustic streaming in microfluidic channels with circular cross-sections // *Micromachines*. 2020. Vol. 11, № 3. Art. 240. DOI: 10.3390/mi11030240.
9. Жуховицкий Д. И. Пылевые ионизационные и пылевые акустические волны в газовом разряде постоянного тока при низком давлении в условиях микрогравитации // *Физика плазмы*. 2022. Т. 48, № 10. С. 910–913.
10. Григорьев А. И., Колбнева Н. Ю., Ширяева С. О. Об акустическом излучении слабо заряженных капель, осциллирующих во внешнем однородном электростатическом поле // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2022. № 5. С. 51–61.
11. Доброклонская М. С., Печеркин В. Я., Владимиров В. И., Василяк Л. М. Траектории заряженных микрочастиц в линейной квадрупольной ловушке с удерживающим напряжением прямоугольной формы // *Прикладная физика*. 2024. № 4. С. 96–100.
12. Тукмаков Д. А. Численное моделирование колебаний вязкого газа с дисперсными включениями с частотой первого линейного резонанса в закрытом канале // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2022. Т. 63, № 3. С. 58–71.
13. Тукмаков Д. А. Численное исследование скоростного скольжения несущей и дисперсной фазы при взаимодействии ударной волны с электрически заряженной газозвезью // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2020. № 1. С. 35–42.
14. Tukmakov D. A. Investigation of the grid convergence of a finite-difference model of the dynamics of an electrically charged gas suspension // 6th International Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE). URL: <https://doi.org/10.1109/REEPE60449.2024.10479689> (дата обращения: 10.05.2026).
15. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
16. Сальянов Ф. А. Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий. М.: Наука, 1997. 240 с.
17. Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Черный С. Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990. 246 с.
18. Музафаров И. Ф., Утюжников С. В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // *Математическое моделирование*. 1993. Т. 5, № 3. С. 74–83.
19. Тукмаков А. Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // *Известия высших учебных заведений. Авиационная техника*. 2006. № 4. С. 33–36.
20. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Т. 2. М.: Наука, 1977. 399 с.

References

1. Krasilnikov, V. A. and Krylov, V. V. (1984), *Introduction to Physical Acoustics* [Vvedenie v fizicheskuyu akustiku], Nauka, Moscow, 400 p.
2. Sorokin, L. E. (2011), "Influence of the Temperature Dependence of Thermal Conductivity on the Rigid Instability of a Binary Mixture Flow with Thermodiffusion" [Vliyanie zavisimosti koeffitsienta teploprovodnosti ot temperatury na zhestkuyu neustoychivost techeniya binarnoy smesi s termodiffuziey], *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika], no 1(5), pp. 90–94.
3. Nigmatulin, R. I. (1987), *Dynamics of Multiphase Media* [Dinamika mnogofaznykh sred], Part 1, Nauka, Moscow, 464 p.

4. Kutushev, A. G. (2003), *Mathematical Modeling of Wave Processes in Aerodispersed and Powdery Media* [Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh], Nedra, Saint Petersburg, 284 p.
5. Yagodkin, I. V., Posazhennikov, A. M., Grishin, A. G. and Melnikov, V. P. (2012), "Application of the Method of Electrophysical Influence on a Dispersed Medium in Devices for High-Efficiency Filtration of Gaseous Media from Aerosols of Various Origins" [Primenenie metoda elektrofizicheskogo vozdeystviya na dispersnuyu sredu v ustroystvakh vysokoeffektivnoy filtratsii gazovykh sred ot aerozoley razlichnogo proiskhozhdeniya], *News of Higher Educational Institutions. Nuclear Power Engineering* [Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Yadernaya energetika], no 1, pp. 71–79.
6. Teplykh, A. A., Zaitsev, B. D., Semenov, A. P. and Borodina, I. A. (2021), "Acoustic Resonator with a Radial Exciting Electric Field" [Akusticheskiy rezonator s radialnym vzbuzhdayushchim elektricheskim polem], *News of the Russian Academy of Sciences. Physics Series* [Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya fizicheskaya], no 85(6), pp. 869–874.
7. Wu, M., Ozcelik, A., Rufo, J., Wang, Z., Fang, R. and Huang, T. J. (2019), "Acoustofluidic separation of cells and particles", *Microsystems & Nanoengineering*, no 5.
8. Lei, J., Cheng, F. and Li, K. (2020), "Numerical simulation of boundary-driven acoustic streaming in microfluidic channels with circular cross-sections", *Micromachines*, no 11(3), Art. no 240, DOI: 10.3390/mi11030240.
9. Zhukhovitskiy, D. I. (2022), "Dust Ionization and Dust Acoustic Waves in a DC Gas Discharge at Low Pressure Under Microgravity Conditions" [Pylevye ionizatsionnye i pylevye akusticheskie volny v gazovom razryade postoyannogo toka pri nizkom davlenii v usloviyakh mikogravitatsii], *Plasma Physics* [Fizika plazmy], no 48(10), pp. 910–913.
10. Grigorev, A. I., Kolbneva, N. Yu. and Shiryaeva, S. O. (2022), "On the Acoustic Emission of Weakly Charged Droplets Oscillating in an External Uniform Electrostatic Field" [Ob akusticheskom izluchenii slabo zaryazhennykh kapel, ostsilliruyushchikh vo vneshnem odnorodnom elektrostaticheskom pole], *News of the Russian Academy of Sciences. Fluid and Gas Mechanics* [Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza], no 5, pp. 51–61.
11. Dobroklonskaya, M. S., Pecherkin, V. Ya., Vladimirov, V. I. and Vasilyak, L. M. (2024), "Trajectories of Charged Microparticles in a Linear Quadrupole Trap with Rectangular Holding Voltage" [Traektorii zaryazhennykh mikropartsiy v lineynoy kvadrupolnoy lovushke s uderzhivayushchim napryazheniem pryamougolnoy formy], *Applied Physics* [Prikladnaya fizika], no 4, pp. 96–100.
12. Tukmakov, D. A. (2022), "Numerical Modeling of Oscillations of a Viscous Gas with Dispersed Inclusions at the Frequency of the First Linear Resonance in a Closed Channel" [Chislennoe modelirovanie kolebaniy vyazkogo gaza s dispersnymi vklyucheniymi s chastotoy pervogo lineynogo rezonansa v zakrytom kanale], *News of Higher Educational Institutions. Volga Region. Physics and Mathematics Sciences* [Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki], no 63(3), pp. 58–71.
13. Tukmakov, D. A. (2020), "Numerical Investigation of Velocity Slip of the Carrier and Dispersed Phase During the Interaction of a Shock Wave with an Electrically Charged Gas Suspension" [Chislennoe issledovanie skorostnogo skolzheniya nesushchey i dispersnoy fazy pri vzaimodeystvii udarnoy volny s elektricheskimi zaryazhennoy gazovoy vzvesyu], *Bulletin of Perm University. Physics* [Vestnik Permskogo universiteta. Fizika], no 1, pp. 35–42.
14. Tukmakov, D. A. (2024), "Investigation of the grid convergence of a finite-difference model of the dynamics of an electrically charged gas suspension", in 6th International

- Youth Conference on Radio Electronics, Electrical and Power Engineering (REEPE), URL: <https://doi.org/10.1109/REEPE60449.2024.10479689> (data accessed: 10.05.2026).
15. Fletcher, K. (1991), *Computational Methods in Fluid Dynamics* [Vychislitelnye metody v dinamike zhidkostey], vol. 2, Mir, Moscow, 552 p.
 16. Salyanov, F. A. (1997), *Fundamentals of Low-Temperature Plasma Physics, Plasma Apparatuses and Technologies* [Osnovy fiziki nizkoterperaturnoy plazmy, plazmennykh apparatov i tekhnologiy], Nauka, Moscow, 240 p.
 17. Kovenya, V. M., Tarnavskiy, G. A. and Chernyy, S. G. (1990), *Application of the Splitting Method in Aerodynamics Problems* [Primenenie metoda rasshchepleniya v zadachakh aerodinamiki], Nauka, Novosibirsk, 246 p.
 18. Muzafarov, I. F. and Utyuzhnikov, S. V. (1993), "Application of Compact Difference Schemes to the Study of Nonstationary Flows of a Compressible Gas" [Primenenie kompaktnykh raznostnykh skhem k issledovaniyu nestatsionarnykh techeniy szhi-maemogo gaza], *Mathematical Modeling* [Matematicheskoe modelirovanie], no 5(3), pp. 74–83.
 19. Tukmakov, A. L. (2006), "Numerical Modeling of Acoustic Flows During Resonant Oscillations of Gas in a Closed Tube" [Chislennoe modelirovanie akusticheskikh techeniy pri rezonansnykh kolebaniyakh gaza v zakrytoy trube], *News of Higher Educational Institutions. Aviation Engineering* [Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatsionnaya tekhnika], no 4, pp. 33–36.
 20. Krylov, V. I., Bobkov, V. V. and Monastyrnyy, P. I. (1977), *Computational Methods* [Vychislitelnye metody], vol. 2, Nauka, Moscow, 399 p.

Информация об авторах:

Д. А. Тукмаков – кандидат физико-математических наук; научный сотрудник ИММ Казанского научного центра Российской академии наук (420111, Россия, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31), eLibrary AuthorID 739648.

Information about the authors:

D. A. Tukmakov – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics); Researcher at the Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Scientific Center of Russian Academy of Sciences (2/31, Lobachevskogo st., Kazan, 420111, Russia), eLibrary AuthorID 739648.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Научная статья

УДК 004.89:621.791

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-87-98

<https://elibrary.ru/ejslbi>



**Использование искусственных нейронных сетей
для оптимизации технологических параметров процессов
наплавки высоколегированных сплавов**

Роман Владиславович Ковальчик¹, Наталья Юрьевна Ротанева²,

Денис Александрович Зареченский³

¹ Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

² Мариупольский государственный университет имени А. И. Куинджи, Мариуполь, Россия

³ Приазовский государственный технический университет (филиал Национального исследовательского Московского государственного строительного университета), Мариуполь, Россия

¹ kovalchyrk@yandex.ru

² n.rotaneva@mgumariupol.ru

³ zarechenskiyda@mail.ru

Аннотация. Разработка эффективных составов высоколегированных сплавов для дуговой наплавки порошковыми лентами представляет собой сложную многопараметрическую задачу, связанную с необходимостью обеспечения максимального перехода легирующих элементов из электрода в наплавленный металл с учетом потерь на угар и разбрызгивание. Актуальность работы обусловлена необходимостью повышения точности прогнозирования химического состава наплавленного слоя и снижения объема экспериментальных исследований. Целью исследования является разработка метода оптимизации технологических параметров процесса наплавки на основе сочетания искусственной нейронной сети и генетического алгоритма. В качестве методов использованы искусственная нейронная сеть для моделирования зависимости коэффициентов перехода от технологических параметров и генетический алгоритм для поиска их оптимальных значений. В результате определены оптимальные параметры процесса: сила тока – 400 А, вылет электрода – 30 мм, фракционный состав ферротитана – 0.4 мм. Применение разработанного подхода позволило увеличить коэффициенты перехода в среднем на 11.2 %, в том числе по титану – на 30.7 %, марганцу – на 7.9 % и углероду – на 12.5 %. Полученные результаты подтверждают эффективность предложенного подхода для оптимизации процессов наплавки.

Ключевые слова: *искусственная нейронная сеть; генетический алгоритм; оптимизация; наплавка; порошковая лента; коэффициент перехода; машинное обучение; сварочное производство.*

Для цитирования: Ковальчик Р. В., Ротанева Н. Ю., Зареченский Д. А. Использование искусственных нейронных сетей для оптимизации технологических параметров процессов наплавки высоколегированных сплавов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 87–98. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-87-98. <https://elibrary.ru/ejslbi>.



© Ковальчик Р. В., Ротанева Н. Ю., Зареченский Д. А., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Благодарности: авторы выражают признательность заведующему кафедрой металлургии и технологии сварочного производства, доктору технических наук, профессору Чигареву Валерию Васильевичу, а также коллективу кафедры, за профессиональный анализ идеи и результатов статьи, определение перспектив развития алгоритмов машинного обучения для разработки составов порошковых лент, применяемых при наплавке высоколегированных и композиционных сплавов.

Статья поступила в редакцию 28.04.2026; одобрена после рецензирования 06.09.2026; принята к публикации 14.10.2026.

COMPUTER SCIENCE

Research article

Use of An Artificial Neural Networks for Optimizing Technological Parameters of High-Alloy Surfacing Processes

Roman V. Kovalchik¹, Natalya Yu. Rotaneva², Denis A. Zarechenskiy³

¹ Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

² Mariupol State University named after A. I. Kuindzhi, Mariupol, Russia

³ Pryazovskyi State Technical University (Branch of National Research Moscow State University of Civil Engineering), Mariupol, Russia

¹ kovalchikrv@yandex.ru

² n.rotaneva@mgumariupol.ru

³ zarechenskiyda@mail.ru

Abstract. The development of high-alloy compositions for arc surfacing using powder strips is a complex multi-parameter problem that involves ensuring the maximum transfer of alloying elements from the electrode to the deposited metal, while accounting for losses due to spattering and evaporation. The relevance of the study stems from the need to improve the accuracy of predicting the chemical composition of the deposited layer and to reduce the amount of experimental work. The study aims to develop a method for optimizing technological parameters of the surfacing process based on a combination of an artificial neural network and a genetic algorithm. Artificial neural networks were used to model the dependence of transfer coefficients on technological parameters, while a genetic algorithm was applied to determine their optimal values. The following parameters were found to be optimal: current – 400 A, electrode extension – 30 mm, and ferrotitanium fraction – 0.4 mm. The proposed approach made it possible to increase the transfer coefficients by an average of 11.2 %, including titanium by 30.7 %, manganese by 7.9 %, and carbon by 12.5 %. The results confirm the effectiveness of the proposed approach for optimizing surfacing processes.

Keywords: *artificial neural network; genetic algorithm; optimization; arc surfacing; powder strip; transfer coefficient; machine learning; welding.*

For citation: Kovalchik, R. V., Rotaneva, N. Yu. and Zarechenskiy, D. A. (2026), "Use of An Artificial Neural Networks for Optimizing Technological Parameters of High-Alloy Surfacing Processes", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 87–98, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-87-98, <https://elibrary.ru/ejslbl>.

Acknowledgments: the authors express their gratitude to the Head of the Department of Metallurgy and Welding Technology, Doctor of Sciences (Engineering), Professor Valery Chigarev, as well as to the Department staff, for their professional analysis of the idea of the article and the results and for identifying machine learning algorithms prospects for the development of powder tape compositions used in the surfacing of high-alloy and composite alloys.

The article was submitted 28 Apr 2026; approved after review 06 Sep.2026; accepted for publication 14 Oct 2026.

Введение

Разработка составов высоколегированных материалов для наплавки специальных сплавов является трудоемкой задачей, состоящей в необходимости обеспечения требуемого химического состава и свойств наплавленного слоя с учетом множества взаимосвязанных факторов. Это обусловлено необходимостью назначения оптимального количества компонентов, которые в зависимости от своей природы, концентрации легирующих элементов и их совместного взаимодействия в процессе плавления и переноса электродного материала определяют содержание химических элементов в наплавленном слое с учетом коэффициентов потерь на разбрызгивание и угар. На величину перехода легирующих элементов из электрода в наплавленный металл также оказывают влияние параметры технологических режимов наплавки, химический состав наплавляемой поверхности, которая в процессе расплавления и перемешивания с электродным материалом формирует состав наплавленного слоя [1–4].

Взаимное влияние множества вышеуказанных факторов обуславливает сложность их точного прогнозирования и приводит к необходимости проведения комплекса экспериментальных работ с накоплением и последующим анализом полученных данных, на основе которых производится корректировка состава наплавочного электродного материала. Одним из современных электродных материалов, позволяющих обеспечить практически любой химический состав и структуру наплавленного слоя, являются порошковые ленточные электроды. Они применяются для высокопроизводительной дуговой наплавки при упрочнении быстроизнашивающихся узлов металлургического, горнорудного и нестандартизированного оборудования [5]. Порошковые ленты состоят из оболочки и порошкового сердечника, в состав которого могут входить легирующие компоненты различного состава, формы и размера.

Эффективность использования легирующих элементов, введенных в сердечник электрода, определяет экономическую и ресурсосберегающую составляющую процесса наплавки и поэтому является актуальной задачей. Перспективным решением данной проблемы представляется применение методов машинного обучения для обработки большого объема данных о технологических параметрах изготовления и наплавки электродным материалом. Основным показателем эффективности легирования служат коэффициенты перехода химических элементов из электрода в наплавленный слой. Обеспечение максимальных значений этих коэффициентов достигается при определенных значениях технологических параметров процессов изготовления электродного материала и его наплавки, которые являются переменными величинами. При заданных параметрах процессов возможно одновременное участие компонентов в металлургическом взаимодействии, что оказывает совместное влияние на их переход из электрода в наплавленный слой.

Постановка задачи

Целью данной работы является разработка генетического алгоритма для поиска оптимальных технологических параметров процесса наплавки, использующего предварительно обученную искусственную нейронную сеть.

Предлагаемая система искусственного интеллекта призвана обеспечить максимально эффективное использование легирующих элементов, выражаемое в коэффициентах их перехода из электрода в наплавленный слой.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать и обучить искусственную нейронную сеть, способную прогнозировать вектор коэффициентов перехода основных легирующих элементов (C, Cr, Si, Ti, Mn, Mo, Ni) в зависимости от технологических параметров наплавки.

2. Реализовать генетический алгоритм, использующий обученную нейронную сеть в качестве функции оценки приспособленности индивидов.
3. Определить оптимальные значения силы тока, вылета электрода и фракционного состава ферротитана в сердечнике порошковой ленты, обеспечивающие максимальные коэффициенты перехода легирующих элементов.
4. Оценить эффективность предложенного гибридного подхода по сравнению с исходными технологическими режимами.

Решение данных задач позволит повысить эффективность легирования наплавленного металла и улучшить технико-экономические показатели процесса дуговой наплавки высоколегированных сплавов порошковой лентой.

Методы

Задача аппроксимации нелинейных зависимостей может быть реализована с использованием различных подходов. К их числу относятся методы регрессионного анализа, байесовская оптимизация, метод поверхности отклика (RSM), а также искусственные нейронные сети (ИНС).

В отличие от параметрических методов, для ИНС не требуется априорного задания вида аппроксимирующей функции. Также с помощью ИНС можно моделировать сложные многомерные зависимости. Это подтверждено в работах по применению ИНС в сварочном производстве [6–8].

С целью поиска оптимальных значений технологических факторов в многомерном пространстве, обуславливающих значение нелинейной целевой функции, выбран генетический алгоритм, поскольку он демонстрирует устойчивые результаты при работе с суррогатными моделями и не требует вычисления градиентов целевой функции [9].

Обучающая выборка сформирована с помощью экспериментально установленных зависимостей коэффициентов перехода легирующих элементов от технологических параметров наплавки, полученные при проведении экспериментов с порошковой лентой сплава типа 290X19C3ГМТН. В ходе выполненных экспериментов по наплавке исследуемыми порошковыми лентами и последующего химического анализа наплавленного металла были установлены значения коэффициентов перехода основных легирующих элементов (C, Cr, Si, Ti, Mn, Mo, Ni), рассчитанные как отношение концентрации элемента в наплавленном слое к его содержанию в электроде [1]. Целевыми переменными служили коэффициенты перехода семи основных легирующих элементов (C, Cr, Si, Ti, Mn, Mo, Ni), рассчитанные на основании результатов химического анализа наплавленного металла. Выборка для обучения включает в себя 1000 значений семи легирующих элементов при соответствующих технологических параметрах режима наплавки. Из этих данных 80% использовалось для обучения модели, а 20% для тестирования ее адекватности.

В качестве зависимых переменных регрессионных зависимостей рассматривались: фракционный состав ферротитана в сердечнике порошковой ленты (в диапазоне 0,1–0,4 мм), сила тока (400–600 А), вылет электрода (30–50 мм). К независимым постоянным параметрам относились: содержание остальных легирующих компонентов в составе порошкового сердечника, технологические параметры изготовления порошковой ленты, напряжение на дуге (30 В) и скорость наплавки (30 м/ч).

Разработка оптимальной архитектуры и обучение искусственной нейронной сети выполнялись с использованием фреймворка "TensorFlow" версии 2.19.0. В результате анализа и подбора гиперпараметров была получена модель искусственной нейронной сети, архитектура которой представлена на рис. 2. Предлагаемая архитектура реализует полносвязную топологию прямого распространения сигнала с применением методов регуляризации, направленных на предотвращение переобучения и повышение обобщающей способности модели.

Предложенная архитектура характеризуется следующими параметрами: на вход модели подается вектор из трех нормализованных технологических параметров, а именно сила тока, вылет электрода и фракционный состав ферротитана. Архитектура включает четыре последовательных полносвязных скрытых слоя: Dense (128 нейронов), Dense (64 нейрона), Dense (64 нейрона) и Dense (32 нейрона), которые чередуются со слоями BatchNormalization и Dropout (с коэффициентами 0.3 и 0.2 соответственно). Во всех скрытых слоях в качестве функции активации использована ReLU. Выходной слой Dense (7 нейронов) без функции активации обеспечивает одновременное прогнозирование семи коэффициентов перехода химических элементов.

Особенностью модели, способствующей повышению точности прогнозирования, является предварительное масштабирование входных данных с использованием метода RobustScaler.

С целью снижения переобучения и повышения устойчивости модели применены следующие методы регуляризации:

- пакетная нормализация (используется после входного слоя и второго скрытого слоя для нормализации промежуточных активаций и ускорения сходимости);
- выбывание (dropout), при котором отключается 30 % и 20 % нейронов после первого и второго скрытых слоев соответственно, что предотвращает их совместную адаптацию;
- ранняя остановка (early stopping), реализованная на основе контроля функции потерь на валидационной выборке с параметром терпения 20 эпох.

Обучение модели выполнялось в течение 100 эпох с размером пакета 32. В качестве оптимизатора использован оптимизатор "Adam" с шагом обучения 0.0001.

В результате обучения получена модель искусственной нейронной сети, позволяющая прогнозировать вектор коэффициентов перехода семи легирующих элементов в процессе наплавки. При этом величина средней абсолютной ошибки (MAE) составила 0.0082, а среднеквадратичной ошибки (MSE) – 0.001. Для оценки относительной точности модели необходимо учесть средние значения коэффициентов перехода по обучающей выборке, которые имеют следующие значения: Ti – 0.461; Mn – 0.660; Ni – 0.870; Cr – 0.890; C – 0.742; Mo – 0.951; Si – 0.531 (среднее по всем выходам – 0.729). Среднеквадратическое отклонение по выходным переменным находится в диапазоне 0.025 – 0.091, что значительно больше значения MAE. Следовательно, относительная погрешность прогнозирования не превышает 1.1 %. Это говорит о высокой точности разработанной модели.

Графики изменения функции потерь в процессе обучения приведены на рис. 1. Как следует из графиков, обучающая и валидационная выборки показывают устойчивую сходимость без признаков переобучения. На это указывает факт того, что величина валидационной ошибки монотонно убывает и не расходится с обучающей на протяжении всех 100 эпох обучения. Наблюдаемое незначительное превышение обучающей ошибки над валидационной является характерным эффектом применения Dropout и BatchNormalization, которые активны только на этапе обучения и снижают эффективную емкость сети при расчете обучающей ошибки. Соотношение числа обучающих образцов (800) к числу обучаемых параметров модели (15 623) составляет примерно 1:20, что при использовании примененных методов регуляризации (Dropout, BatchNormalization, EarlyStopping) является достаточным для получения обобщающей модели в задачах регрессии с непрерывными входными признаками.

Обученная модель использована в составе генетического алгоритма, предназначенного для определения оптимальных технологических параметров процесса наплавки, обеспечивающих максимальные значения коэффициентов перехода легирующих элементов из электродного материала.

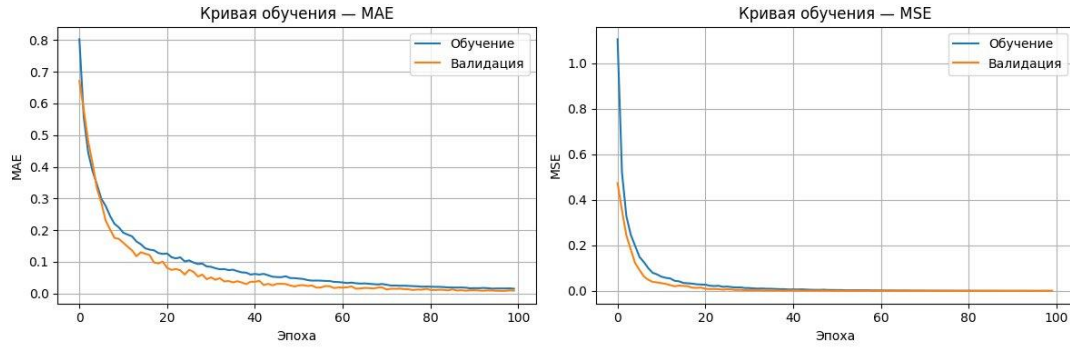


Рис. 1. Кривые обучения искусственной нейронной сети (MAE и MSE на обучающей и валидационной выборках)

В качестве входных параметров модели использованы три нормализованные величины: сила тока $I_{\text{д}}^{\text{norm}}$, вылет электрода $H_{\text{в}}^{\text{norm}}$ и фракционный состав ферротитана $\varphi_{\text{Ti}}^{\text{norm}}$. Целевыми выходными параметрами являются коэффициенты перехода основных легирующих элементов: $\mu_{\text{C}}, \mu_{\text{Cr}}, \mu_{\text{Mn}}, \mu_{\text{Si}}, \mu_{\text{Ti}}, \mu_{\text{Ni}}, \mu_{\text{Mo}}$.

Задача оптимизации была сформулирована как минимизация целевой функции:

$$F(x) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 (\mu_i^{\text{pred}}(x) - \mu_i^{\text{target}})^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

где $x = [I_{\text{д}}^{\text{norm}}, H_{\text{в}}^{\text{norm}}, \varphi_{\text{Ti}}^{\text{norm}}]$ – вектор оптимизируемых нормализованных технологических параметров,

$I_{\text{д}}^{\text{norm}}$ – сила тока;

$H_{\text{в}}^{\text{norm}}$ – вылет электрода;

$\varphi_{\text{Ti}}^{\text{norm}}$ – фракционный состав ферротитана;

$\mu_i^{\text{pred}}(x)$ – предсказанные нейронной сетью коэффициенты перехода семи легирующих элементов;

μ_i^{target} – целевые значения коэффициентов перехода.

Layer (type)	Output Shape	Param #
dense (Dense)	(None, 128)	512
batch_normalization (BatchNormalization)	(None, 128)	512
dense_1 (Dense)	(None, 64)	8,256
dropout (Dropout)	(None, 64)	0
dense_2 (Dense)	(None, 64)	4,160
batch_normalization_1 (BatchNormalization)	(None, 64)	256
dense_3 (Dense)	(None, 32)	2,080
dropout_1 (Dropout)	(None, 32)	0
dense_4 (Dense)	(None, 7)	231

Total params: 16,007 (62.53 KB)

Trainable params: 15,623 (61.03 KB)

Non-trainable params: 384 (1.50 KB)

Рис. 2. Архитектура искусственной нейронной сети для прогнозирования вектора коэффициентов перехода семи основных элементов

В рассматриваемом случае целевой вектор имеет вид:

$$\mu_i^{\text{target}} = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^7. \quad (2)$$

Оптимизация технологических параметров процесса наплавки с целью достижения максимальных коэффициентов перехода легирующих элементов относится к классу задач, эффективно решаемых с использованием генетических алгоритмов в сочетании с предварительно обученными искусственными нейронными сетями, выступающими в роли функции оценки приспособленности [10, 11]. Выбор генетического алгоритма обусловлен тем, что обученная нейронная сеть выступает в данном случае в роли "черного ящика" и ее явный аналитический вид зависимости коэффициентов перехода от технологических параметров неизвестен. При этом вычисление градиента целевой функции через слои нейронной сети сопряжено с риском попадания в локальные минимумы при немономтонном характере зависимостей. Генетический алгоритм, являясь методом нулевого порядка, не требует вычисления производных и обеспечивает более широкий охват пространства поиска за счет стохастических операторов скрещивания и мутации, что снижает вероятность преждевременной сходимости к локальному оптимуму.

Диапазоны поиска задаются в исходных (ненормализованных) единицах измерения, а масштабирование с помощью *RobustScaler* выполняется непосредственно внутри функции оценки приспособленности перед подачей параметров на вход нейронной сети. Такой подход позволяет исключить экстраполяцию за пределы обучающей выборки и обеспечивает достоверность прогнозов нейронной сети. Дополнительно, оператор клипирования в процедуре мутации гарантирует, что все особи популяции на протяжении всего эволюционного процесса остаются в пределах допустимой области.

Реализация генетического алгоритма включала в себя следующие этапы [12]:

- 1) Инициализация популяции;
- 2) Оценка приспособленности;
- 3) Селекция;
- 4) Скрещивание;
- 5) Мутация;
- 6) Элитизм;
- 7) Формирование нового поколения;
- 8) Итерация.

Функция приспособленности определяется как среднеквадратическая ошибка (MSE) между прогнозируемыми нейронной сетью коэффициентами перехода и целевым вектором $\mu_i^{target} = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^7$, соответствующим задаче максимизации всех семи коэффициентов перехода. Параметры алгоритма приведены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры генетического алгоритма

Параметр	Значение
Размер популяции N_{pop}	20
Число поколений N_{gen}	50
Вероятность скрещивания P_c	0.8
Вероятность мутации P_m	0.2
Доля элитных особей	20 % (4 особи)
Размер турнира k	5
Диапазон поиска	Ид: 400–600 А; Нв: 30–50 мм; φTi: 0.1–0.4 мм

Оценка общей точности работы разработанного алгоритма прогнозирования коэффициентов перехода легирующих элементов и степени его соответствия заданному целевому вектору представлена в табл. 2 и на рис. 3. Как следует из графической зависимости (рис. 3), после 10-го поколения наблюдается существенное улучшение приспособленности особей, оцениваемой значением среднеквадратичной ошибки.

Таблица 2. Общая точность алгоритма

Лучшая приспособленность (MSE)	0.053
Средняя абсолютная ошибка	0.1925
Среднеквадратичная ошибка	0.1866
Максимальная абсолютная ошибка	0.3837

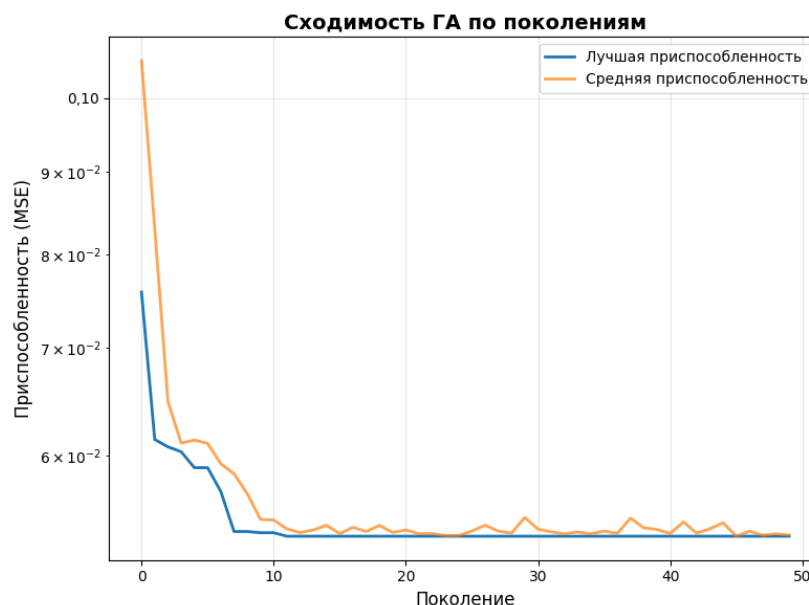


Рис. 3. Сходимость приспособленности алгоритма по поколениям и по показателю среднеквадратичной ошибки (MSE)

Сравнение коэффициентов перехода при базовом и оптимальном режимах приведено в табл. 3.

Таблица 3. Сравнение коэффициентов перехода при базовом и оптимальном режимах наплавки

Элемент	Базовый режим	Оптимальный режим	Прирост, %
Ti	0.456	0.596	+30.7
Mn	0.658	0.710	+7.9
Ni	0.867	0.904	+4.3
Cr	0.884	0.933	+5.5
C	0.744	0.837	+12.5
Mo	0.951	1.00	+5.2
Si	0.528	0.593	+12.3
Среднее	0.727	0.796	+11.2

Результаты

В результате работы алгоритма оптимизации определены технологические режимы, обеспечивающие максимальные значения коэффициентов перехода легирующих элементов. Оптимальные параметры соответствуют следующим значениям: сила тока наплавки – 400 А, вылет электрода – 30 мм, фракционный состав ферротитана в сердечнике порошковой ленты – 0.4 мм. Как следует из полученных результатов, оптимизация входных технологических параметров с применением генетического алгоритма позволила увеличить коэффициенты перехода в среднем на 11.2 % по всем семи легирующим элементам.

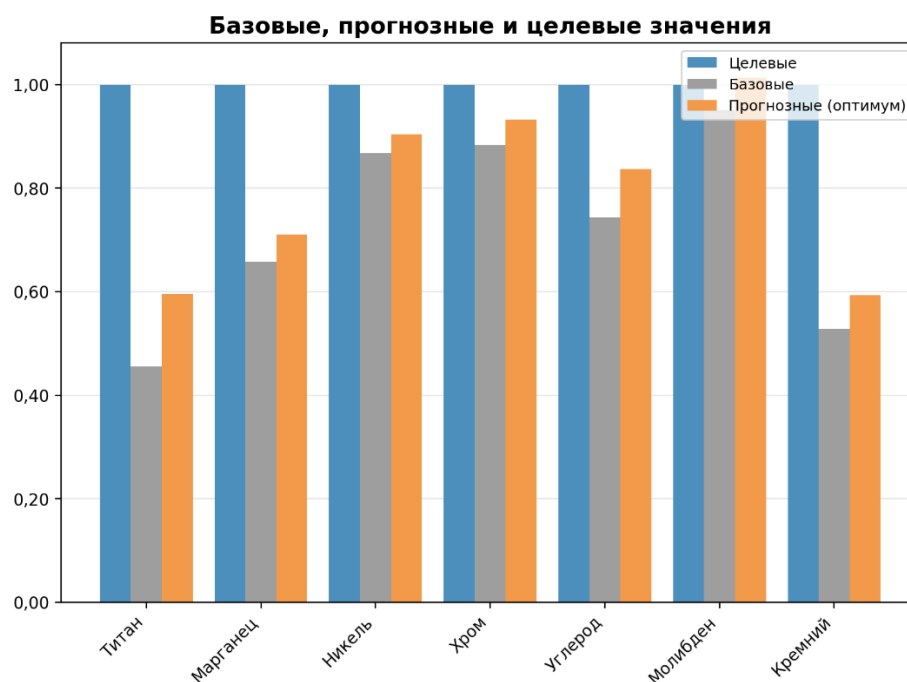


Рис. 4. Коэффициенты перехода легирующих элементов: базовый режим, прогноз при оптимальных параметрах и целевое значение

Базовые, прогнозные (при оптимальных параметрах) и целевые значения коэффициентов перехода представлены на рис. 4. Базовый режим соответствует прогнозу модели при средних значениях технологических параметров (сила тока – 500 А, вылет электрода – 40 мм, фракционный состав ферротитана – 0.25 мм). Из графической зависимости следует, что для всех семи легирующих элементов прогнозные значения превышают базовые, при этом наибольшее относительное приближение к целевому уровню достигается для никеля, хрома и молибдена, тогда как для титана и кремния, несмотря на заметный прирост относительно базового режима, сохраняется наибольший разрыв с целевым значением. Для молибдена прогнозируемое значение коэффициента перехода достигает верхней физической границы, равной 1.00, которая соответствует полному переходу элемента из электрода в наплавленный слой и не может быть превышена.

С целью проверки результатов оптимизации выполнено сравнение прогнозируемых нейронной сетью коэффициентов перехода с фактическими значениями, полученными при наплавке с оптимальными входными параметрами (табл. 4).

Таблица 4. Сравнительная оценка фактических и прогнозируемых коэффициентов перехода при оптимальных входных параметрах

Химический элемент	Коэффициент перехода элемента		
	Фактические	Прогнозируемые	Отклонение, %
Титан	0.58	0.596	+2.8
Марганец	0.56	0.710	+26.8
Никель	0.94	0.904	–3.8
Хром	0.95	0.933	–1.8
Углерод	0.68	0.837	+23.1
Молибден	0.97	1.00	+3.1
Кремний	0.59	0.593	+0.5

Как следует из данных табл. 4, для пяти из семи рассматриваемых элементов (Ni, Cr, Mo, Si, Ti) расхождение между прогнозным и экспериментальным значениями не превышает 4 %, что подтверждает адекватность модели для элементов с низкой химической активностью. Повышенное отклонение для марганца (+26.8 %) и углерода (+23.1 %) связано с их природой как активных раскислителей. Фактический переход этих элементов в значительной степени зависит от окислительного потенциала атмосферы дуги, который не входит в число варьируемых параметров модели. Среднее отклонение прогноза от эксперимента по всем семи элементам составляет 8.8 %, однако без учета марганца и углерода данный показатель снижается до 2.4 %, что свидетельствует о высокой точности модели применительно к элементам, переход которых определяется преимущественно физическими, а не химическими механизмами взаимодействия. Устранение указанного ограничения путем включения дополнительных факторов в число входных параметров является перспективным направлением развития предложенного подхода.

Полученные результаты подтверждают эффективность применения генетического алгоритма в сочетании с искусственной нейронной сетью для прогнозирования состава наплавленного металла и оптимизации технологических параметров процесса наплавки. Предложенный подход позволяет определять такие режимы обработки, при которых достигаются максимальные значения совокупности коэффициентов перехода легирующих элементов, и может быть использован при разработке интеллектуальных систем поддержки принятия решений для сварочного производства.

Заключение

Разработан алгоритм оптимизации технологических параметров, обеспечивающий достижение максимальных значений коэффициентов перехода основных легирующих элементов. В основе подхода лежит применение генетического алгоритма в сочетании с искусственной нейронной сетью, используемой для прогнозирования коэффициентов перехода.

Разработана архитектура искусственной нейронной сети, позволяющая учитывать совместное влияние технологических параметров на коэффициенты перехода легирующих элементов при наплавке и определять рациональные режимы обработки.

С использованием предложенной методологии определены оптимальные значения технологических параметров, обеспечивающие максимальные коэффициенты перехода легирующих элементов из электрода в наплавленный слой. Дальнейшее развитие подхода, связанное с дообучением модели и учетом допустимых технологических отклонений параметров, может повысить эффективность его практического применения и технико-экономические показатели процесса наплавки.

Список источников

1. Chigarev V. V., Zarechenskiy D. A., Belik A. G. Optimisation of the composition and melting parameters of powder strips with the exothermic mixture in the filler // *Welding International*. 2016. Vol. 30, № 7. P. 557–559.
2. Шалимов М. П., Вотинова Е. Б. Расчетно-экспериментальная методика оценки параметров перехода элементов в металл шва при дуговой сварке и совершенствование состава шихты порошковой проволоки // *Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение*. 2019. Т. 21, № 1. С. 28–35.
3. Козырев Н. А., Крюков Р. Е., Усольцев А. А., Кибко Н. В., Бащенко Л. П. Разработка новой порошковой проволоки на основе пыли газоочистки силикомарганца // *Известия вузов. Черная металлургия*. 2021. Т. 64, № 12. С. 863–869.
4. Зареченский Д. А., Ашла А. А., Шпак А. А. Особенности легирования наплавленного металла при наплавке порошковыми лентами // *Наука – общество – технологии –*

- 2025: материалы Всерос. науч.-практ. конф. М.: Московский политехнический университет, 2025. С. 167–171.
5. Чигарев В. В., Белик А. Г. Порошковые ленты для наплавки // Сварочное производство. 2011. № 8. С. 38–44.
 6. Nagesh D. S., Datta G. L. Prediction of weld bead geometry and penetration in shielded metal arc welding using artificial neural networks // Journal of Materials Processing Technology. 2002. Vol. 123, № 2. P. 303–312.
 7. Ates H. Prediction of gas metal arc welding parameters based on artificial neural networks // Materials & Design. 2007. Vol. 28, № 7. P. 2015–2023.
 8. Zhang Y., Chen J., Zhang Y. Application of artificial intelligence in welding process optimization: A review // Journal of Manufacturing Processes. 2020. Vol. 58. P. 1024–1043.
 9. Katherasan D. et al. Simulation and parameter optimization of flux cored arc welding using artificial neural network and particle swarm optimization algorithm // Journal of Intelligent Manufacturing. 2014. Vol. 25. P. 67–76.
 10. Deb K. Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms. New York: John Wiley & Sons, 2001. 518 p.
 11. Rao R. V., Kalyankar V. D. Parameter optimization of welding processes using a new optimization algorithm // Materials and Manufacturing Processes. 2013. Vol. 28, № 8. P. 918–923.
 12. Goldberg D. E. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989. 412 p.

References

1. Chigarev, V. V., Zarechenskiy, D. A. and Belik, A. G. (2016), "Optimisation of the composition and melting parameters of powder strips with the exothermic mixture in the filler", *Welding International*, no 30(7), pp. 557–559.
2. Shalimov, M. P. and Votnova, E. B. (2019), "Calculation-Experimental Method for Estimating Parameters of Element Transfer into Weld Metal During Arc Welding and Improvement of Flux-Cored Wire Composition" [Raschetno-eksperimentalnaya metodika otsenki parametrov perekhoda elementov v metall shva pri dugovoy svarke i sovershenstvovanie sostava shikhty poroshkovoy provoloki], *Vestnik PNRPU. Mechanical Engineering, Materials Science* [Vestnik PNIPU. Mashinostroenie, materialovedenie], no 21(1), pp. 28–35.
3. Kozyrev, N. A., Kryukov, R. E., Usoltsev, A. A., Kibko, N. V. and Bashchenko, L. P. (2021), "Development of a New Flux-Cored Wire Based on Silicomanganese Gas Cleaning Dust" [Razrabotka novoy poroshkovoy provoloki na osnove pyli gazoochistki silikomargantsa], *Izvestiya Vuzov. Ferrous Metallurgy* [Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya], no 64(12), pp. 863–869.
4. Zarechenskiy, D. A., Ashla, A. A. and Shpak, A. A. (2025), "Features of Alloying of Deposited Metal During Surfacing with Powder Strips" [Osobennosti legirovaniya napavlennoogo metalla pri naplavke poroshkovymi lentami], in *Science Society Technologies – 2025: Materials of the All-Russian Scientific and Practical Conference* [Nauka obshchestvo tekhnologii 2025: materialy Vseros. nauch.-prakt. konf.], Moscow: Moscow Polytechnic University [Moskovskiy politekhnicheskii universitet], pp. 167–171.
5. Chigarev, V. V. and Belik, A. G. (2011), "Powder Strips for Surfacing" [Poroshkovye ленты dlya naplavki], *Welding Production* [Svarochnoe proizvodstvo], no 8, pp. 38–44.
6. Nagesh, D. S. and Datta, G. L. (2002), "Prediction of weld bead geometry and penetration in shielded metal arc welding using artificial neural networks", *Journal of Materials Processing Technology*, no 123(2), pp. 303–312.

7. Ates, H. (2007), "Prediction of gas metal arc welding parameters based on artificial neural networks", *Materials & Design*, no 28(7), pp. 2015–2023.
8. Zhang, Y., Chen, J. and Zhang, Y. (2020), "Application of artificial intelligence in welding process optimization: A review", *Journal of Manufacturing Processes*, no 58, pp. 1024–1043.
9. Katherasan, D. et al. (2014), "Simulation and parameter optimization of flux cored arc welding using artificial neural network and particle swarm optimization algorithm", *Journal of Intelligent Manufacturing*, no 25, pp. 67–76.
10. Deb, K. (2001), *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*, New York: John Wiley & Sons, 518 p.
11. Rao, R. V. and Kalyankar, V. D. (2013), "Parameter optimization of welding processes using a new optimization algorithm", *Materials and Manufacturing Processes*, no 28(8), pp. 918–923.
12. Goldberg, D. E. (1989), *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Reading, MA: Addison-Wesley, 412 p.

Информация об авторах:

Р. В. Ковальчик – кандидат технических наук; доцент кафедры кибербезопасности информационных систем Донского государственного технического университета (344003, Россия, г. Ростов-на-Дону, площадь Гагарина, д. 1), ResearcherID: LKJ-9921-2024, ORCID: 0009-0006-5085-804 X;

Н. Ю. Ротанева – кандидат педагогических наук, доцент; заведующий кафедрой системного анализа и информационных технологий Мариупольского государственного университета имени А. И. Куинджи (287537, Россия, Донецкая Народная Республика, г. Мариуполь, пр-т Строителей, д. 129А), Scopus Author ID: 57220205618, ORCID: 0000-0001-8437-7566, eLibrary AuthorID: 1191430;

Д. А. Зареченский – кандидат технических наук; доцент кафедры металлургии и технология сварочного производства Приазовского государственного технического университета (филиал Национального исследовательского Московского государственного строительного университета) (287642, Россия, Донецкая Народная Республика, г. Мариуполь, ул. Университетская, д. 7), ResearcherID: GYD-6717-2022, ORCID: 0009-0002-9518-7586, eLibrary AuthorID: 1281269.

Information about the authors:

R. V. Kovalchik – Candidate of Sciences (Engineering); Associate Professor at the Department of Cybersecurity of Information Systems, Don State Technical University (1, ploshchad Gagarina, Rostov-on-Don, 344003, Russia), ResearcherID: LKJ-9921-2024, ORCID: 0009-0006-5085-804X;

N. Yu. Rotaneva – Candidate of Sciences (Pedagogy), Associate Professor; Head of the Department of Systems Analysis and Information Technologies, Mariupol State University named after A. I. Kuindzhi (129A, prospekt Stroiteley, Mariupol, 287537, Russia), Scopus Author ID: 57220205618, ORCID 0000-0001-8437-7566, AuthorID: 1191430, n.rotaneva@mgumariupol.ru;

D. A. Zarechenskiy – Candidate of Sciences (Engineering); Associate Professor at the Department of Metallurgy and Welding Technology, Pryazovskyi State Technical University (Branch of National Research Moscow State University of Civil Engineering) (7, Universitetskaya st., Mariupol, 287642, Russia), ResearcherID: GYD-6717-2022, ORCID: 0009-0002-9518-7586, eLibrary AuthorID: 1281269.

Научная статья

УДК 004.4'2

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-99-109

<https://elibrary.ru/bxydea>



Сравнительный анализ производительности и архитектурных характеристик фреймворков Spring Boot, ASP.NET Core и Ktor для разработки серверных приложений

Оксана Геннадиевна Старцева¹, Эрик Раилевич Фаттахов²

^{1, 2} Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия

¹ starcevaog@mail.ru

² erik.fattakhov.04@mail.ru

Аннотация. В статье проводится сравнительный анализ трех современных фреймворков для разработки серверных приложений: Spring Boot (Java/Kotlin), ASP.NET Core (C#) и Ktor (Kotlin). Актуальность исследования обусловлена необходимостью обоснованного выбора технологического стека при создании высоконагруженных корпоративных систем. Научная новизна заключается в разработке методики сравнения производительности различных реализаций. В статье представлены качественные критерии сравнения: архитектурные особенности, модульность, экосистема, безопасность, мониторинг и количественные: время сборки проекта, время холодного старта, объем кода, а также метрики производительности под нагрузкой – средняя латентность (p50, p95, p99), пропускная способность и потребление памяти. Эксперимент проведен на идентичных тестовых сценариях (CRUD-микросервис с подключением к одинаковой базе данных) с фиксацией условий окружения (CPU, RAM, OS, инструмент нагрузочного тестирования). Результаты показывают, что Ktor демонстрирует наилучшие показатели скорости сборки и запуска, минимальный объем кода, однако уступает ASP.NET Core по потреблению оперативной памяти, но превосходит по латентности и пропускной способности. На основе полученных данных сформулированы рекомендации по выбору фреймворка в зависимости от приоритетов проекта: скорость разработки, производительность или долгосрочной поддержки.

Ключевые слова: Ktor; Spring Boot; ASP.NET Core; сравнительный анализ; производительность; латентность; p95; p99; нагрузочное тестирование.

Для цитирования: Старцева О. Г., Фаттахов Э. Р. Сравнительный анализ производительности и архитектурных характеристик фреймворков Spring Boot, ASP.NET Core и Ktor для разработки серверных приложений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 3(74). С. 99–109. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-99-109. <https://elibrary.ru/bxydea>.

Статья поступила в редакцию 07.05.2026; одобрена после рецензирования 03.09.2026; принята к публикации 12.10.2026.



© Старцева О. Г., Фаттахов Э. Р., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

Comparative Analysis of Performance and Architectural Characteristics of Spring Boot, ASP.NET Core, and Ktor Frameworks for Developing Server Applications

Oksana G. Startseva¹, Erik R. Fattakhov²^{1,2} Akmulla Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia¹ starcevaog@mail.ru² erik.fattakhov.04@mail.ru

Abstract. The article provides a comparative analysis of three modern frameworks for developing server applications: Spring Boot (Java/Kotlin), ASP.NET Core (C#) and Ktor (Kotlin). The relevance of the research stems from the need for a well-founded choice of the technological stack when creating highly loaded corporate systems. The scientific novelty lies in the development of a methodology for comparing the performance of various implementations. The article presents qualitative comparison criteria (architectural features, modularity, ecosystem, security, monitoring) and quantitative criteria (project build time, cold start time, code volume), as well as performance metrics under load (average latency (p50, p95, p99), bandwidth, and memory consumption). The experiment was conducted on identical test scenarios (CRUD microservice the same database) with environmental conditions (CPU, RAM, OS, load testing tool) held constant. The results show that Ktor demonstrates the best build and startup speeds, the minimal amount of code; it is inferior to ASP.NET Core in terms of RAM usage, but surpasses it in terms of latency and bandwidth. Based on the data obtained, recommendations are formulated for choosing a framework depending on the priorities of the project: speed of development, performance, or long-term support.

Keywords: *Ktor; Spring Boot; ASP.NET Core; comparative analysis; efficiency; latency; p95; p99; load testing.*

For citation: Startseva, O. G. and Fattakhov, E. R. (2026), "Comparative Analysis of Performance and Architectural Characteristics of Spring Boot, ASP.NET Core, and Ktor Frameworks for Developing Server Applications", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 3(74), pp. 99–109, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-3-99-109, <https://elibrary.ru/bxydea>.

The article was submitted 07 May 2026; approved after review 03 Sep 2026; accepted for publication 12 Oct 2026.

Введение

Современная разработка серверных приложений требует от инженерных команд обоснованного выбора технологического стека, обеспечивающего баланс между скоростью разработки, производительностью и долгосрочной поддерживаемостью проекта. В течение последнего десятилетия доминирующие позиции в корпоративном сегменте занимали экосистемы на основе Java (Spring Framework / Spring Boot) [1] и C# (ASP.NET Core) [2]. Эти фреймворки характеризуются зрелой экосистемой, обширной документацией и доказанной способностью обслуживать высоконагруженные системы на протяжении многих лет.

Однако последние годы отмечены ростом популярности языка Kotlin [3], позиционируемого как современная альтернатива Java с улучшенной null-безопасностью, поддержкой функциональных конструкций и полной совместимостью с существующей JVM-экосистемой [4]. Естественным следствием стало появление фреймворка Ktor [5],

разрабатываемого компанией JetBrains и предлагающего альтернативный подход к построению серверных приложений: легкое ядро, модульную архитектуру и асинхронность на основе корутин.

Несмотря на растущее количество публикаций, посвященных отдельным аспектам работы с Ktor на сегодняшний день, отсутствуют комплексные исследования, в которых проводилось бы систематическое сравнение Ktor с устоявшимися корпоративными фреймворками по единой методологии.

Постановка задачи

Целью настоящей работы является проведение сравнительного анализа фреймворков – Spring Boot, ASP.NET Core и Ktor. Для объективного сравнения была предложена методика, включающая несколько групп критериев:

1. Архитектурные особенности и экосистемная зрелость (качественный анализ).
2. Метрики разработки (время сборки, объем кода).
3. Метрики производительности под нагрузкой (латентность, пропускная способность, потребление памяти).

Методы исследования

Для достижения поставленной цели в работе применяется разработанная методика, включающая следующие элементы:

- унифицированный тестовый сценарий (с подключением к базе данных) для всех трех фреймворков;
- расширенный набор метрик, включающий перцентили латентности (p95, p99) наряду со средними значениями;
- детальная фиксация условий эксперимента, обеспечивающая воспроизводимость результатов.

1. Качественное сравнение архитектур и экосистем

1.1. Критерии сравнения

Для сравнительного анализа были выбраны следующие характеристики, значимые с точки зрения долгосрочной поддержки корпоративных систем:

- язык разработки и экосистема;
- модель обработки запросов (синхронная / асинхронная);
- подход к конфигурации и инверсии управления;
- модульность и расширяемость;
- поддержка типовых задач (безопасность, работа с БД, документация API, мониторинг);
- кроссплатформенность и типы сборки.

1.2. Результаты качественного сравнения

Результаты сравнения по выбранным критериям представлены в табл. 1. Как следует из табл. 1, Ktor предоставляет разработчику минималистичное ядро без предустановленного набора решений. В отличие от Spring Boot, где инверсия управления и внедрение зависимостей являются фундаментальной основой фреймворка, Ktor не навязывает конкретную архитектурную парадигму [6]. В ASP.NET Core новые возможности добавляются через цепочку промежуточных обработчиков, а в Ktor – через подключаемые модули.

Таблица 1. Сравнение архитектурных характеристик фреймворков

Критерий	Ktor	Spring Boot	ASP.NET Core
Язык разработки	Kotlin	Java / Kotlin	C#
Разработчик	JetBrains	VMware, сообщество	Microsoft
Год первого релиза	2017	2002 (Spring), 2012 (Spring Boot)	2014 (.NET Core), 2016 (ASP.NET Core)
Модель обработки запросов	Асинхронная (корутины)	Синхронная / Асинхронная (по выбору)	Асинхронная (async/await)
Что входит по умолчанию	Минимум – только сервер	Почти все – готовые инструменты, настройки	Настройки сервера и цепочки обработки
Управление компонентами	Встроенный механизм	Встроенный механизм	Встроенный механизм
Подход к модульности	Плагины Ktor (Gradle/Maven зависимости)	Стартеры Spring Boot	NuGet-пакеты, фреймворк сборки .NET
Поддержка OpenAPI	Отдельный модуль	Встроенный стартер	Отдельный модуль
Работа с БД	Exposed или сторонние библиотеки	Spring Data JPA / JDBC	Entity Framework Core
Тип сборки	JAR	JAR / WAR	DLL / EXE
Кросс-платформенность	Да (JVM)	Да (JVM)	Да (.NET Core / .NET 5+)

Важной особенностью Ktor является то, что разработчик самостоятельно определяет набор необходимых модулей на этапе генерации проекта [7]. Это позволяет создавать предельно легкие приложения, не несущие избыточной функциональности. Однако такая гибкость имеет и обратную сторону: требует от команды более высокой квалификации для принятия архитектурных решений.

Ktor и ASP.NET Core умеют обрабатывать много запросов одновременно без задержек. Spring Boot изначально работает по-другому – запросы обрабатываются по очереди [8]. Это может влиять на производительность при высокой нагрузке, что и проверялось в эксперименте.

Spring Boot дает разработчику почти все необходимое сразу. В нем уже есть инструменты для управления зависимостями, настройка происходит автоматически, и подклю-

чение баз данных, защиты и отслеживания работы приложения не требует дополнительных действий. Низкий порог входа для разработчиков с начальным уровнем квалификации с таким фреймворком. Но у этого подхода есть минусы: приложение дольше запускается и потребляет больше памяти.

ASP.NET Core – быстрый и работает на разных системах. Он дает гибкие настройки и удобные инструменты для работы с базами данных. При этом расходует мало памяти, поэтому подходит для проектов с ограниченными ресурсами.

2. Методология экспериментального сравнения

2.1. Тестируемое приложение

Для обеспечения сопоставимости результатов на каждом из трех фреймворков было реализовано идентичное по функциональности приложение – REST API микросервис для управления сущностью Client. Приложение поддерживает следующие эндпоинты:

- GET /client/all – получение списка всех клиентов;
- GET /client/{id} – получение клиента по идентификатору;
- POST /client – создание нового клиента;
- POST /client/search – поиск клиента по имени;
- PUT /client/{id} – обновление существующего клиента;
- DELETE /client/{id} – удаление клиента.

В качестве базы данных использовалась PostgreSQL. Выбор обусловлен распространенностью данной СУБД в промышленной разработке корпоративных приложений, а также поддержкой всеми тремя рассматриваемыми фреймворками через стандартные драйверы и ORM-решения. Экземпляр базы данных для всех приложений один. Схема базы включает таблицу clients с полями id (первичный ключ) и name (строка).

Для работы с базой данных в Ktor использовалась библиотека Exposed вместе с системой управления соединениями HikariCP. Максимальное количество одновременных подключений было ограничено десятью, время ожидания соединения не превышало 30 секунд, а неактивные подключения закрывались через 10 минут. В Spring Boot аналогичная система HikariCP работает по умолчанию с похожими настройками [9]. В ASP.NET Core использовалась встроенная система управления подключениями NpgsqlDataSource.

Исходный код всех трех реализаций доступен в репозитории [10].

2.2. Характеристики оборудования и программного обеспечения

Эксперименты проводились на следующей конфигурации: процессор: Intel Core i7-1165G7 2.80GHz, оперативная память: 16.0 Гб, операционная система: Windows 11 25H2, версия JDK: JetBrains Runtime 21.0.9, версия .NET SDK: .NET 10, версии фреймворков: Ktor: 3.4.0, Spring Boot: 4.0.3, ASP.NET Core: 10.0.3.

Каждое приложение запускалось в изолированном окружении. Перед каждой серией измерений система перезагружалась для исключения влияния кеширования со стороны операционной системы.

2.3. Инструмент нагрузочного тестирования

Для генерации нагрузки использовался инструмент k6 [11]. Выбор обусловлен следующими характеристиками. Встроенная поддержка измерения перцентилей (p90, p95, p99) без дополнительной обработки результатов. Возможность написания сценариев на JavaScript, что обеспечивает воспроизводимость тестов.

Сценарий нагрузки эмулирует реалистичное распределение запросов к эндпоинтам: 50% операций чтения (GET /client/all, GET /client/{id}, POST /client/search), 30% операций записи (POST /client, PUT /client) и 20% операций удаления (DELETE /client/{id}). Такой профиль нагрузки приближен к типичному сценарию работы CRM-системы.

Параметры нагрузки:

- длительность теста: 60 секунд;
- количество виртуальных пользователей: 50;
- количество прогонов: 5 для каждого фреймворка;
- период прогрева: первые 10 секунд каждого прогона не учитываются в результатах.

Для каждого прогона k6 автоматически фиксирует следующие метрики:

- средняя латентность;
- p90, p95, p99 латентность;
- пропускная способность (RPS);
- процент успешных запросов (HTTP 2xx).

Потребление оперативной памяти серверным приложением измерялось отдельно с помощью команды получения ресурсов по процессу синхронно с прогонами k6.

2.4. Измеряемые метрики

В ходе эксперимента фиксировались следующие метрики.

1. Метрики сборки и запуска:
 - время полной чистой сборки проекта (мс) – от полной очистки сборки до завершения процесса сборки;
 - время холодного старта (мс) – от запуска приложения до момента готовности принять первый HTTP-запрос;
 - объем кода – количество строк и количество символов в исходных файлах (без учета автогенерируемого кода и конфигурационных файлов).
2. Метрики производительности под нагрузкой:
 - средняя латентность (мс) – среднее арифметическое времени ответа на запрос.
 - медиана (p50) – значение, ниже которого находится 50% ответов.
 - перцентили p95 и p99 – значения, ниже которых находятся 95% и 99% ответов соответственно.
 - пропускная способность (RPS) – количество запросов, обработанных за секунду.
 - потребление оперативной памяти (MB) – количество потребляемой памяти экземпляром.

Выбор перцентилей p95 и p99 обусловлен тем, что в высоконагруженных системах средняя латентность может маскировать наличие "медленных" запросов, критически влияющих на пользовательский опыт [12].

2.5. Процедура проведения измерений

Для каждого фреймворка выполнялась следующая последовательность действий:

1. Перезагрузка операционной системы.
2. Чистая сборка проекта. Фиксация времени сборки.
3. Запуск приложения. Фиксация времени холодного старта.
4. Прогрев приложения – выполнение 1000 запросов, не учитываемых в результатах.
5. Прогон нагрузки. Фиксация всех метрик.
6. Остановка приложения.
7. Повтор шагов 3–6 пять раз.

Итоговые значения для каждой метрики вычислялись как среднее арифметическое по всем прогонам.

3. Результаты эксперимента

3.1. Метрики сборки и статического анализа

Результаты измерения времени сборки, времени холодного старта и объема кода представлены в табл. 2.

Таблица 2. Сравнение метрик сборки и объема кода

Метрика	Ktor	Spring Boot	ASP.NET Core
Время сборки (мс)	6558	9484	6700
Время холодного старта (мс)	802	3778	1600
Количество строк кода	224	326	377

Время сборки является важным маркером при выборе фреймворка. Чем быстрее сборка, тем чаще команда может интегрировать изменения и получать обратную связь от автоматических тестов. Ktor собирается за 6.6 секунды, что на 31% быстрее Spring Boot (9.5 сек) и сопоставимо с ASP.NET Core (6.7 сек). В условиях микросервисной архитектуры, где десятки сервисов пересобираются одновременно, эта разница становится критической.

Время холодного старта важно для сценариев автоматического масштабирования (Kubernetes HPA) и частых перезапусков в разработке. Ktor запускается за 0.8 секунды – это в 4.7 раза быстрее Spring Boot (3.8 сек) и в 2 раза быстрее ASP.NET Core (1.6 сек). Если одновременно запускать несколько микросервисов, разница во времени старта может измеряться минутами, в течение которых система будет недоступна.

Количество строк кода – косвенная метрика сложности поддержки. Исследования показывают, что количество дефектов коррелирует с объемом кода [13]. Меньше кода означает:

- меньше мест для потенциальных ошибок;
- быстрее вникает новый разработчик;
- дешевле рефакторинг и добавление функциональности;
- ниже затраты на проверку кода.

Ktor требует 224 строк против 326 у Spring Boot (на 31% меньше) и 377 у ASP.NET Core (на 40% меньше). Это существенное преимущество для долгосрочной поддержки проекта.

3.2. Метрики производительности под нагрузкой

Результаты нагрузочного тестирования представлены в табл. 3. Тестирование проводилось при 50 виртуальных пользователях в течение 60 секунд.

Таблица 3. Сравнение метрик производительности

Метрика	Ktor	Spring Boot	ASP.NET Core
Оперативная память min (MB)	154.66	258.54	79.71
Оперативная память max (MB)	219.51	304.05	148.72
Средняя латентность (мс)	6.23	8.52	10.80
p90 (мс)	10.82	14.47	21.27
p95 (мс)	14.49	17.80	26.67
p99 (мс)	24.31	26.90	39.32
Пропускная способность (RPS)	411.99	400.68	392.50

Средняя латентность отражает типичное время ответа системы. Ktor показывает 6.23 мс – на 27% лучше Spring Boot (8.52 мс) и на 42% лучше ASP.NET Core (10.80 мс). Для пользователя веб-приложения разница в 4–5 миллисекунд незаметна, но при обработке миллионов запросов это перерастает в часы сэкономленного времени и меньшую нагрузку на клиентские приложения.

Перцентили p95 и p99 гораздо важнее среднего значения. Они показывают, как долго ждут ответа самые медленные запросы – именно они создают у пользователя ощущение замедленной работы системы. В высоконагруженных системах стандартом является требование p99 < 100 мс [14].

У Ktor p99 = 24.31 мс – это на 10% лучше Spring Boot (26.90 мс) и на 38% лучше ASP.NET Core (39.32 мс). Это означает, что даже в худшем случае (1% запросов) Ktor отвечает быстрее конкурентов. Для критичных по времени систем (финансовые транзакции, бронирование, голосовые вызовы) такая разница может быть определяющей при выборе фреймворка.

RPS (request per second) показывает, сколько запросов система способна обработать за секунду. Ktor обрабатывает 412 запросов в секунду, незначительно опережая Spring Boot (401) и ASP.NET Core (393). Разница в 3–5% не является решающей, но демонстрирует, что Ktor не уступает популярным зрелым решениям.

Важно отметить: при более высокой латентности у конкурентов (8.5–10.8 мс) их RPS ожидаемо ниже – это логичная взаимосвязь. Ktor выигрывает по обоим параметрам.

Оперативная память – один из основных факторов стоимости хостинга. В облачных провайдерах цена линейно растет с объемом RAM. При масштабе в сотни микросервисов разница становится существенной.

ASP.NET Core демонстрирует наилучшие показатели: 79–149 МБ. Ktor занимает промежуточное положение: 155–220 МБ. Spring Boot потребляет больше всех: 259–304 МБ.

Тем не менее, абсолютные значения Ktor (220 МБ пик) являются приемлемыми для большинства корпоративных проектов и не должны рассматриваться как серьезный недостаток.

3.3. Ключевые выводы эксперимента

1. Ktor – показал лучший результат по скорости разработки и поддержки среди трех сравниваемых фреймворков: самая быстрая сборка, самый быстрый холодный старт, минимальный объем кода. Это снижает затраты на разработку, CI/CD и адаптацию новых разработчиков.
2. Ktor – лидер по производительности под нагрузкой: лучшие показатели латентности (средняя, p90, p95, p99) и пропускной способности. Это означает, что система на Ktor способна обработать больше запросов быстрее, особенно важно для требовательных к скорости приложений.
3. Ktor умерен в потреблении памяти: уступает ASP.NET Core, но превосходит Spring Boot. Разница в памяти с Spring Boot может давать ощутимую экономию при масштабировании.

Обсуждение

В ходе работы и тестирования сложилось несколько наблюдений, которые не отражены в количественных показателях, но важны для практического выбора фреймворка.

Удобство разработки. Разработка приложения на Ktor с языком Kotlin позволяет сократить объем шаблонного кода по сравнению с кодом на Spring с Java или на ASP.NET Core с C#. Язык Kotlin позволяет писать меньше кода и делает его понятнее – в нем уже

есть готовые инструменты для создания классов данных, встроенная защита от null-ошибок и гибкие расширения языка. В ASP.NET Core добавление новой зависимости в систему требует явного объявления интерфейса, реализации соответствующего класса и последующей регистрации этой связи в контейнере внедрения зависимостей. Это правильная архитектура, но она превращается в значительный объем шаблонного кода. Для быстрого прототипирования или стартапа Ktor выигрывает со значительным преимуществом.

Кадровая проблема. Несмотря на преимущества Ktor и его растущую популярность, компании все равно чаще выбирают Spring Boot. Причина не в технологии, а в рынке труда. Java-разработчиков с опытом Spring – значительное число. Найти команду из 10 человек, которые знают Ktor, значительно сложнее и дороже. Пока это не изменится, Spring останется корпоративным стандартом по умолчанию. Ktor – скорее выбор стартапов, внутренних инструментов и Kotlin-команд.

Легкость как архитектурный риск. Ktor намеренно минималистичен и не включает пул соединений с базой данных по умолчанию. В ходе эксперимента было обнаружено, что при отсутствии явной настройки пула (например, HikariCP) средняя латентность составляла 72 мс. После добавления пула соединений латентность снизилась до 6.23 мс – улучшение в 11.6 раза. В отличие от Ktor, Spring Boot и ASP.NET Core предоставляют пул соединений по умолчанию, что снижает риск подобных ошибок. Это требует от разработчиков на Ktor более высокой квалификации при конфигурировании приложения.

Ограничения исследования. В работе не измерялись показатели загрузки процессора и стандартное отклонение результатов, что может быть исправлено в будущих исследованиях. Также тестирование проводилось только при 50 виртуальных пользователях; при более высоких нагрузках (500–1000 виртуальных пользователей) результаты могут отличаться.

Заключение

В ходе выполнения работы была достигнута поставленная цель: проведен сравнительный анализ трех современных фреймворков для разработки серверных приложений – Spring Boot, ASP.NET Core и Ktor – по качественным и количественным критериям.

Предложенная методика, включающая качественные и количественные критерии, показала свою применимость для объективного сравнения фреймворков и позволила выявить сильные и слабые стороны каждого из них. В начале работы были сформулированы три группы критериев сравнения: архитектурные особенности, метрики разработки и метрики производительности под нагрузкой. По каждой из групп гипотеза о преимуществах Ktor подтвердилась частично: фреймворк показал лучшие результаты по скорости сборки, холодному старту, объему кода, латентности и RPS, однако уступил ASP.NET Core по потреблению памяти.

По результатам качественного анализа установлено, что Ktor предоставляет минималистичное ядро с модульной архитектурой, требуя от разработчика самостоятельного выбора компонентов. Spring Boot предлагает готовый набор компонентов с развитым контейнером управления зависимостями. ASP.NET Core в этом смысле занимает среднюю позицию: он имеет встроенный механизм внедрения зависимостей и конвейер обработки запросов.

Количественный эксперимент показал следующие результаты. По метрикам разработки Ktor лидирует: время сборки – 6.6 секунд (на 31% быстрее Spring Boot), время

холодного старта – 0.8 секунды (в 4.7 раза быстрее Spring Boot). По метрикам производительности под нагрузкой при 50 виртуальных пользователях Ktor также показал лучшие результаты: средняя латентность – 6.23 мс (на 27% лучше Spring Boot), р99 – 24.31 мс (на 38% лучше ASP.NET Core), пропускная способность – 412 RPS. По потреблению памяти Ktor занял промежуточное положение (155–220 MB), уступая ASP.NET Core (80–149 MB), но превосходя Spring Boot (259–304 MB).

На основе полученных данных сформулированы следующие рекомендации. Ktor рекомендуется для стартапов и Kotlin-команд, где приоритетами являются скорость разработки, быстрый старт и высокая производительность при условии высокой квалификации разработчиков. Spring Boot остается предпочтительным выбором для крупных корпораций из-за большого числа специалистов, разработчиков и зрелости экосистемы. ASP.NET Core рекомендуется для сценариев с жесткими ограничениями по оперативной памяти, особенно при масштабировании на сотни микросервисов.

Список источников

1. Лёзин И. А. Разработка веб-приложений с использованием Spring Boot: учеб. пособие / И. А. Лёзин, И. В. Лёзина. Самара: Самарский университет, 2023. 96 с.
2. Лок Э. ASP.Net Core в действии: руководство / Э. Лок; перевод с англ. Д. А. Беликова. 3-е изд. М.: ДМК Пресс, 2025. 1046 с.
3. *The RedMonk Programming Language Rankings: January 2025* [Электронный ресурс] // URL: <https://redmonk.com/sogady/2025/06/18/language-rankings-1-25/> (дата обращения: 22.11.2025).
4. Сомон П. И. Волшебство Kotlin: руководство / П. И. Сомон; перевод с англ. А. Н. Киселева. М.: ДМК Пресс, 2020. 536 с.
5. *Ktor Docs* [Электронный ресурс] // URL: <https://ktor.io/docs/welcome.html> (дата обращения: 22.11.2025).
6. *Metanit Ktor Модули* [Электронный ресурс] // URL: <https://metanit.com/kotlin/ktor/1.6.php> (дата обращения: 22.11.2025).
7. *Ktor Project Generator* [Электронный ресурс] // URL: <https://start.ktor.io/settings> (дата обращения: 22.11.2025).
8. Докука О. Практика реактивного программирования в Spring 5 / О. Докука, И. Лозинский. М.: ДМК Пресс, 2019. 508 с.
9. Булискерия Б. Б. Методики оптимизации высоконагруженных приложений на SPRING FRAMEWORK: системный подход / Б. Б. Булискерия, Д. М. Пряшников // Оптические технологии, материалы и системы (Оптотех – 2025): Междунар. науч.-техн. конф., Москва, 08–12 декабря 2025 года. М.: МИРЭА – Российский технологический университет, 2026. С. 1319–1326. EDN IWPHPG.
10. *KtorArticle* [Электронный ресурс] // URL: <https://github.com/alkmanistik/KtorArticle> (дата обращения: 25.04.2026).
11. *K6* [Электронный ресурс] // URL: <https://k6.io/> (дата обращения: 22.11.2025).
12. *Site Reliability Engineering* / ed. By B. Beyer, C. Jones, J. Petoff, N. R. Murphy. Sebastopol, CA: O'Reilly Media, Inc., 2016. 524 с.
13. Макконнелл С. Совершенный код: учеб. пособие/ Стив Макконнелл. М.: Русская Редакция, 2014. 896 с.
14. *The Site Reliability Workbook: Practical Ways to Implement SRE* / B. Beyer [et al.]. Sebastopol: O'Reilly Media, Inc., 2018. 512 p.

References

1. Lyezin, I. A. and Lyezina, I. V. (2023), Development of web applications using Spring Boot, Samara University, Samara, Russia, 96 p.

2. Lock, A. (2025), ASP.Net Core in Action, 3rd ed., DMK Press, Moscow, Russia, 1046 p.
3. RedMonk (2025), "The RedMonk Programming Language Rankings: January 2025", available at: <https://redmonk.com/sograzy/2025/06/18/language-rankings-1-25/> (data accessed: 22.11.2025).
4. Somon, P. I. (2020), The Magic of Kotlin, DMK Press, Moscow, Russia, 536 p.
5. JetBrains (2025), "Ktor Documentation", available at: <https://ktor.io/docs/welcome.html> (data accessed: 22.11.2025).
6. Metanit (2025), "Ktor Modules", available at: <https://metanit.com/kotlin/ktor/1.6.php> (data accessed: 22.11.2025).
7. JetBrains (2025), "Ktor Project Generator", available at: <https://start.ktor.io/settings> (data accessed: 22.11.2025).
8. Dokuka, O. and Lozinsky, I. (2019), Reactive Programming Practice in Spring 5, DMK Press, Moscow, Russia, 508 p.
9. Buliskeria, B. B. and Pryashnikov, D. M. (2026), "Methods for optimizing high-load applications on the Spring Framework: a systematic approach", *Optical technologies, materials and systems (Optotech - 2025)*, MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia, pp. 1319-1326, EDN: IWPHPG.
10. alkmanistik (2026), "KtorArticle — source code repository", available at: <https://github.com/alkmanistik/KtorArticle> (accessed 25.04.2026).
11. Grafana Labs (2025), "k6 — Open source load testing tool", available at: <https://k6.io/> (data accessed: 22.11.2025).
12. Beyer, B., Jones, C., Petoff, J. and Murphy, N. R. (eds.) (2016), Site Reliability Engineering, O'Reilly Media, Inc., Sebastopol, CA, USA, 552 p.
13. McConnell, S. (2014), Code Complete, Russian Edition, Moscow, Russia, 896 p.
14. Beyer, B. et al. (2018), The Site Reliability Workbook: Practical Ways to Implement SRE, O'Reilly Media, Inc., Sebastopol, CA, USA, 512 p.

Информация об авторах:

О. Г. Старцева – кандидат педагогических наук; доцент кафедры информационных технологий Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы (450077, Россия, г. Уфа, ул. Октябрьской революции, д. 3, -а), ORCID: 0000-0001-8198-7086, eLibrary AuthorID: 675876;

Э. Р. Фаттахов – студент направления "Информационные системы и технологии" Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы (450077, Россия, г. Уфа, ул. Октябрьской революции, д. 3-а).

Information about the authors:

O. G. Startseva – Candidate of Sciences (Pedagogic); Associate Professor at the Department of Information Technology, Akmulla Bashkir State Pedagogical University (3-a, Oktyabrskoy Revolyutsii st., Ufa, 450077, Russia), ORCID: 0000-0001-8198-7086, eLibrary AuthorID: 675876;

E. R. Fattakhov – Student ("Information systems and technologies"), Akmulla Bashkir State Pedagogical University (3-a, Oktyabrskoy Revolyutsii st., Ufa, 450077, Russia).

Научный периодический журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" зарегистрирован в 2007 г. как самостоятельное издание, являющееся продолжением серии журнала "Вестник Пермского университета", издаваемого с 1994 г. В каждом номере научного журнала автору разрешается опубликование в любом разделе не более одной статьи, в том числе в соавторстве.

Статьи, оформленные в соответствии с нижеизложенными правилами, должны быть отправлены через **личный кабинет автора на сайте журнала**. Статьи отправляются в двух форматах: текстовый документ и pdf-файл без данных об авторе (для организации слепого рецензирования). Вместе с рукописью отправляются контактные данные авторов в свободной форме в текстовом документе (ФИО, должность, место работы с указанием полного адреса, e-mail, номер телефона), сопроводительное письмо и экспертное заключение о возможности открытого опубликования. Для публикации статьи необходимо заполнить и подписать согласие на обработку персональных данных и лицензионный договор.

Аннотация статьи (на русском и английском языках) должна содержать основные краткие сведения: описание проблемы, включая цели и задачи исследования; методы исследования с указанием новизны, если имеется; полученные результаты и выводы. Объем аннотации примерно 250 слов.

Текст статьи должен содержать разделы: Введение, Постановка задачи, Методы исследования, Результаты, Обсуждения, Заключение, **Благодарности** для русскоязычной статьи; Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgements для англоязычной статьи. Объем рукописи – не менее 6 страниц машинописного текста.

Оформление. Текст статьи необходимо оформить **в редакторе Word**. Формат листа, используемый для написания статьи – А4. Размеры верхнего и нижнего полей – 2.6 см, правого и левого – 2.5 см. Расстояние до верхнего и нижнего колонтитулов 1.25 см. Шрифтом Times New Roman Сур, размер – 12 пт, межстрочный интервал – множитель 1.1. Подписи к рисункам и таблицам набираются курсивом, в конце заголовков и ячеек таблицы точка не ставится. Формулы набираются в редакторе формул.

Структура статьи

Вид статьи (научная, обзорная или др.).

Название раздела (математика, механика, компьютерные науки и информатика).

УДК

DOI:

EDN

Название статьи на русском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

Ф.И.О. автора (-ов) полностью (Times New Roman – 12 pt, полужирный).

Место работы (с указанием подразделения), город и страна (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

Аннотация на русском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Ключевые слова на русском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

Информация для цитирования (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Благодарности (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Даты поступления, одобрения и принятия рукописи (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Название статьи на английском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

На английском языке Ф.И.О. автора (-ов) полностью (шрифт Times New Roman – 12 пт, полужирный).

Место работы (с указанием подразделения), город и страна на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

Аннотация на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Ключевые слова на английском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

Информация для цитирования на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Благодарности на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Даты поступления, одобрения и принятия рукописи на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Основной текст статьи (шрифт Times New Roman – 12 пт) набирается в ширину страницы, абзацный отступ основного текста – 1.0 см (задается автоматически, не пробелами). Другие отступы не допускаются. Выравнивание текста по ширине.

Список источников оформляется в едином формате, в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018, без использования тире. Если в списке литературы используется источник из электронного ресурса, необходимо указать дату обращения. Ссылка на литературный источник указывается в тексте статьи в квадратных скобках после упоминания цитаты. Список использованных литературных источников необходимо представить на русском и английском языках (**References**). **Список литературы на латинице**, называемый References, готовится отдельно от Списка литературы и размещается сразу за указанным списком. Ссылки на зарубежные источники необходимо повторять в Списке литературы и References. В References недопустимо использовать российские ГОСТы. Необходимо следовать требованиям международных стандартов. Инструкция по оформлению списка литературы в латинице – References, стандарт "Harvard" находится по ссылке http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-hurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Все рукописи проходят двойное слепое рецензирование двумя специалистами в научной области исследования. При возникновении спорной ситуации назначается третий рецензент. Окончательное решение о публикации рукописи принимает главный редактор журнала.

Датой поступления статьи считается день ее отправки через личный кабинет на сайте журнала или по электронной почте журнала (главного редактора). Рукописи рассматриваются в порядке их поступления в течение одного месяца в зависимости от сложности ситуации и объема работы. Редакция оставляет за собой право без согласования с автором проводить литературную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла.

Одобрённые статьи публикуются бесплатно. Полнотекстовая версия каждой рукописи выставляется на сайте журнала и в системе РИНЦ (e-library).

Scientific periodical journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" is published since 1994 in the series of the journal "Bulletin of Perm University". Then it was registered as an independent publication in 2007.

An author is allowed to publish no more than one article (also as co-author) in any section for each issue of the journal.

Article's structure should be accordant with the rules below and should be sent through the **author's personal account on the journal's website**. Articles should be sent in two formats: a text document and a pdf-file without information about the author(s) (for review). Authors contact data (name, position and place of work with address, e-mail, phone number in a text document), a cover letter and an expert letter on the open publication possibility should be sent with the manuscript. Author(s) must make and sign consent to the personal data processing and an agreement.

Abstract (in Russian and English) should contain main information of research: a problem including the goals and objectives of the study; research methods with novelty indication, if any; significant results and findings. The abstract size is approximately 250 words.

Text should contain sections: Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgments. The manuscript size is at least 6 typewritten pages.

An article text must be formatted in the editor Word. The sheet format is A4. The top and bottom margins are 2.6 cm, the right and left margins are 2.5 cm. The distances to the header and footer are 1.25 cm. Times New Roman Cyr font, size – 12 pt, single spacing. Legends for figures and tables are typed in italics style. Formulas are typed in the Equation editor.

The structure of the article

Article's type

UDC

DOI

EDN

TITLE in Russian (Times New Roman font – 16 pt, bold).

Name: author (s) name in full (Times New Roman font – 12 pt).

Place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**

Abstract in Russian (Times New Roman font – 11 pt).

Keywords in Russian: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt, italic).

Information for citation in English (Times New Roman font – 11 pt, italic).

Acknowledgments in English (Times New Roman font – 11 pt, italic).

Submitted, approved, accepted dates of receipt in English (Times New Roman font – 11 pt, italic).

TITLE in English (Times New Roman font – 16 pt, bold).

In English author (s) name in full, place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**.

Abstract in English (Times New Roman font – 11 pt).

Keywords in English: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt).

Information for citation in English (Times New Roman font – 11 pt).

Acknowledgments in English (Times New Roman font – 11 pt).

Submitted, approved, accepted dates of receipt in English (Times New Roman font – 11 pt).

The article text (Times New Roman font – 12 pt) is typed the paragraph indent is 1.0 cm (set automatically, not spaces). No other indents are allowed. Justify the text in width (Times New Roman font – 16 pt)..

References are formed in a single format with using GOST R 7.0.100–2018 without a dash. If a source from an electronic resource is used, the author should indicate the request date. To indicate a source in text author uses square brackets after the quotation mention. References must be submitted **in Russian and English**.

The References list in Latin, called References, is prepared separately from the References List in Russian and placed below. Foreign sources references should be repeated in the References Lists in Russian and English. It is inadmissible to use Russian GOSTs in References. It is necessary to follow the requirements of international standards. Instructions on the References in Latin script design – References, Harvard standard can be found at http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc

REVIEW AND PUBLICATION OF ARTICLES

All manuscripts are double-blind peer-reviewed by two research scientists. If a disputable situation arises, a third reviewer is appointed. The final decision on the manuscript publication is made by the editor-in-chief of the journal.

The receipt date of the article is the day of its submission through the personal account on the journal's website or by e-mail of the journal (or editor-in-chief). Manuscripts are reviewed in the order they are received within one month, review period may be changed depending on a situation complexity and a works amount. The journal editors can to edit the article text without basic meaning change.

Approved articles are published free. The full-text version of each manuscript is posted on the journal's website and in the RSCI system (e-library).

Научное издание

ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Математика. Механика. Информатика

Выпуск 3(74)

2026

Адрес учредителя и издателя

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Адрес редакции

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Физико-математический институт

e-mail: vestnik_mmi@psu.ru

Редактор Е. В. Шумилова

Корректор В. Е. Пирожкова

Компьютерная верстка: А. А. Силина

Подписано в печать 20.10.2026. Выход в свет 23.10.2026

Формат 60×84/8. Усл. печ. л. 13,02. Тираж 500 экз. Заказ 119

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Управление издательской деятельности

614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15. Тел. (342) 239-66-36

Отпечатано в типографии ПГНИУ.

Тел. (342) 239-65-47

Подписной индекс журнала

«Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика»

в онлайн-каталоге «Урал-Пресс» –015010

https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase_id=396133

Распространяется бесплатно и по подписке