

Учредитель: Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Научный журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" публикует оригинальные научные статьи, краткие сообщения и обзорные статьи по направлениям журнала на русском и английском языках, ранее не публиковавшиеся и не представленные для публикации в других изданиях. Все статьи проходят рецензирование членами редакционной коллегии журнала и внешними рецензентами.

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

БУЗМАКОВА М. М., к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАЛАНИН В. В., д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

БАРУЛИНА М. А., д. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

НУРБАКОВА Д. М., PhD in Computer Science; Национальный институт прикладных наук Лиона (National Institute of Applied Sciences of Lyon), Лион, Франция.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

БУЗМАКОВА М. М., к.ф.-м.н., доцент, **главный редактор**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

РУСАКОВА О. Л., к.ф.-м.н., доцент, **ответственный секретарь**; Пермь, Россия;

АЛЕКСЕЕВ А. О., д.т.н., доцент; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

АПТУКОВ В. Н., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

АПУШКИНСКАЯ Д. Е., д.ф.-м.н.; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

БАРУЛИНА М. А., д.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

БИРЮКОВ А. Н., д.э.н., доцент; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;

БОРИСОВ В. В., д.т.н., профессор; Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», Смоленск, Россия;

ВЕЧТОМОВ Е. М., д.ф.-м.н., профессор; Вятский государственный университет, Киров, Россия;

ГУСЕВ А. Л., д.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ДЕМИДОВ С. С., д.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

ИВАНОВ Д. В., д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

ИСАЕВ К. П., д.ф.-м.н.; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ИШКИН Х. К., д.ф.-м.н.; доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

КРИВОШЕЕВА О. А., д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

КОССОВИЧ Л. Ю., д.ф.-м.н., профессор; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

КУЗНЕЦОВ А. Г., к.т.н.; Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия;

МАЛАНИН В. В., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАТВЕЕНКО В. П., д.т.н., профессор, академик РАН; Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия;

МАХНЕВ А. А., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

ПАЛКОВА И. В., д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

ПЕСТРЕНИН В. М. к.ф.-м.н., доцент; Пермь, Россия;

ПОЛОСКОВ И. Е., д.ф.-м.н., доцент; Пермь, Россия.

РУСАКОВ С. В., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

САВЧИН В. М., д.ф.-м.н., профессор; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

СЕЛЕТКОВ И. П., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ТРУСОВ П. В., д.ф.-м.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

ХАЧАЙ М. Ю., д.ф.-м.н., профессор РАН, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

ХЕННЕР Е. К., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАО; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ФАЗУЛЛИН З.Ю., д.ф.-м.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ЧЕРНЫХ В. В., д.ф.-м.н., доцент; Сыктывкарский государственный университет имени Питиримы Сорокина, Сыктывкар, Россия;

ЧЕРНИКОВ А. В., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ЧИНЕНОВА В. Н., к.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

ШАХМАМЕТОВА Г. Р., д.т.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ШВАРЦ К. Г., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ЮМАГУЛОВ М. Г., д.ф.-м.н., профессор; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ЯСНИЦКИЙ Л. Н., д.т.н., профессор; Пермский филиал Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики", Пермь, Россия.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ No ФС 77-66787 от 08.08.2016.

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (приказ от 08.07.2024). Научные специальности: Вещественный, комплексный и функциональный анализ; Дифференциальные уравнения и математическая физика; Геометрия и топология; Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика; Вычислительная математика; Теоретическая механика, динамика машин; Механика деформируемого твердого тела; Механика жидкости, газа и плазмы; Искусственный интеллект и машинное обучение; Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; Теоретическая информатика, кибернетика; Системный анализ управления и обработка информации, статистика; Вычислительные системы и их элементы; Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования. Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ, eLIBRARY ID 28484).

Founder: Perm State University

The journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" publishes Full Articles, Short Communications Article and Review paper/perspectives on the journal's directions, which have not been previously published. The papers have been written in Russian and English. The papers are reviewed by the journal editorial board members and external reviewers.

EDITORIAL COUNCIL

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
NURBAKOVA D. M., PhD in Computer Science; National Institute of Applied Sciences of Lyon, France.

EDITORIAL BOARD

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Editor-in-Chief**; Perm State University, Perm, Russia;
RUSAKOVA O. L., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Executive Secretary**; Perm, Russia;
ALEKSEEV A. O., Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
APTUKOV V. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
APUSHKINSKAYA D. E., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;
BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
BIRUKOV A. N., Doctor of Science in Economics, Associate Professor; Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;
BORISOV V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Smolensk Branch of National Research University "MIS", Smolensk, Russia;
VECHTOMOV E. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Vyatka State University, Kirov, Russia;
GUSEV A. L., Doctor of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
DEMIDOV S. S., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
IVANOV D. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
ISAEV K. P., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
ISHKIN H. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
KRIVOSHEEVA O. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
KOSSOVICH L. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
KUZNECOV A. G., Candidate of Science in Engineering; Perm State Humanitarian and Pedagogical University, Perm, Russia;
MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
MATVEENKO V. P., Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician of RAS; Institute of Continuous Media Mechanics, UrD RAS, Perm, Russia;

MAHNEV A. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS;
PAPKOVA I. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
PESTRENNIN V. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm, Russia;
POLOSKOV I. E., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm, Russia;
RUSAKOV S. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
SAVCHIN V. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;
SELETKOV I. P., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
TRUSOV P. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
HACHAI M. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of RAS, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS, Yekaterinburg, Russia;
HENNER E. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAO; Perm State University, Perm, Russia;
FAZULLIN Z. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
CHERMNYH V. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia;
CHERNIKOV A. V., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
CHINENOVA V. N., Candidate of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
SHAHMAMETOVA G. R., Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
SHVARTS K. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
UMAGULOV M. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
YASNICKIY L. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm Branch of the National Research University Higher School of Economics, Perm, Russia.

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor). Certificate of registration of the mass media PI No. FS 7 -66787 dated 08.08.2016.

The journal is included in the peer-reviewed scientific publications list for the main research results should be published (Candidate of Sciences and Doctor of Sciences, order dated 07/08/2024). Scientific specialties: Real, complex and functional analysis; Differential equations and mathematical physics; Geometry and topology; Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics; Computational Mathematics; Theoretical mechanics, dynamics of machines; Mechanics of deformable solids; Mechanics of liquid, gas and plasma; Artificial intelligence and machine learning; Mathematical modeling, numerical methods and software packages; Theoretical Computer science, cybernetics; System analysis, information management and processing, statistics; Computer systems and their elements; Computer modeling and design automation. The journal is included in the national information and analytical system "Russian Science Citation Index" (eLIBRARY ID 28484).

Содержание

МАТЕМАТИКА

Кадырова С. Ш., Мансимов К. Б. К необходимым условиям оптимальности первого и второго порядка в задаче оптимального управления дискретными системами уравнений типа Россера.....	5
Махнев А. А., Исакова М. М. О графах Шилла диаметра 4.....	20
Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Орипов Т. С. Гамильтоновы периодические дифференциальные уравнения с производными четных порядков.....	30

МЕХАНИКА

Агеева М. В., Голдобин Д. С. Маломодовая редукция коллективной динамики ансамбля осцилляторов с асимметричным шумом Коши.....	41
Гаришин О. К., Пелевин А. Г. Моделирование механических свойств элементов надувных космических антенн из эпоксидного препрега.....	59
Привалов Л. Ю., Михайленко К. И. Исследование соответствия системы уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска модели течения в микропробирке при проведении ПЦР.....	75

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Трушкин Е. С. Исследование алгоритмической сложности построения Парето-множества для принятия решения при распределении ресурсов вычислительных систем.....	88
Черкасова Д. А., Черкасова В. А. Формальная модель и метод интеграции API генеративных нейросетей в веб-платформу для автоматизированной обработки текстовых данных	104
Шкерин А. Л., Понаётов Д. И., Пискун Ф. В. Статистический анализ данных поведения сетевого трафика при DDoS-атаках	112
Эберт К. А. Джемминг k^3 -меров разного размера на кубической решетке.....	130
Правила подачи и оформления рукописей.....	142

C o n t e n t s

MATHEMATICS

Gadyrova S. Sh., Mansimov K. B. To the Necessary Conditions of Optimality of the First and Second Order in the Problem of Optimal Control of the Rosser Type Equations Discrete Systems	5
Makhnev A. A., Isakova M. M. On Shilla Graphs of Diameter 4	20
Yumagulov M. G., Ibragimova L. S., Oripov T. S. Hamiltonian Periodic Differential Equations With Even-Order Derivatives	30

MECHANICS

Ageeva M. V., Goldobin D. S. Low-Dimensional Model Reduction of the Collective Dynamics of an Oscillators Ensemble With Asymmetric Cauchy Noise	41
Garishin O. K., Pelevin A. G. Modeling the Mechanical Properties of Inflatable Space Antenna Elements Made of Epoxy Prepreg	59
Privalov L. Yu., Mikhailenko C. I. Study of the Correspondence of the Thermal Convection Equations System in the Boussinesq Approximation to the Flow Model in a Microtube During PCR.....	75

COMPUTER SCIENCE

Trushkin E. S. Study of the Algorithmic Complexity of Constructing a Pareto Set for Decision-Making in Allocating Resources of Computing Systems	88
Cherkasova D. A., Cherkasova V. A. Formal Model and API Integration Method for Generative Neural Networks in a Web-Platform for Automated Text Processing.....	104
Shkerin A. L., Ponayotov D. I., Piskun F. V. Statistical Data Analysis of Network Traffic Behavior Under DDoS-Attack	112
Ebert K. A. Jamming of k^3 -mers of Different Sizes on a Cubic Lattice	130
Rules for submission and structure of manuscripts	143

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 517.977.56

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-5-19

<https://elibrary.ru/tmwqhc>

**К необходимым условиям оптимальности
первого и второго порядка
в задаче оптимального управления
дискретными системами уравнений типа Россера**

Севиндж Шамистан кызы Кадырова¹, Камил Байрамали оглы Мансимов²

¹Институт систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана, Баку, Азербайджан

¹sevinc.qadirova@mail.ru

²Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

²kamilbmansimov@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального управления процессом, описываемая системой нелинейных разностных уравнений типа Россера. Процесс управляется с помощью граничного условия. Граничное условие является решением аналога задачи Коши для нелинейного разностного уравнения типа Вольтерра. Область управления является ограниченной и открытой. Используя специальную классическую вариацию управляющей функции вычислены первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала качества. Учитывая произвольность допустимой вариации управляющей функции, получено необходимое условие оптимальности первого порядка типа аналога уравнения Эйлера из вариационного исчисления. Принимая во внимания неотрицательность второй вариации функционала вдоль оптимального управления, доказано общее необходимое условие оптимальности второго порядка. Из него получен ряд необходимых условий оптимальности, носящие явный характер, т. е. выраженные через параметры рассматриваемой задачи оптимального управления.

Ключевые слова: система уравнений типа Россера; граничное управление; нелинейное разностное уравнение типа Вольтерра; оптимальное управление; аналог уравнения Эйлера; необходимое условие оптимальности второго порядка.

Для цитирования: Кадырова С. Ш., Мансимов К. Б. К необходимым условиям оптимальности первого и второго порядка в задаче оптимального управления дискретными системами уравнений типа Россера // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 5–19. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-5-19. <https://elibrary.ru/tmwqhc>.

Статья поступила в редакцию 30.04.2025; одобрена после рецензирования 30.10.2025; принята к публикации 10.06.2026.



© Кадырова С. Ш., Мансимов К. Б., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MATHEMATICS

Research article

To the Necessary Conditions of Optimality of the First and Second Order in the Problem of Optimal Control of the Rosser Type Equations Discrete Systems

Sevinj Sh. kyzy Gadyrova¹, Kamil B. oglu Mansimov²¹Institute of Control System of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan¹sevinc.qadirova@mail.ru²Baku State University, Baku, Azerbaijan²kamilbmansimov@gmail.com

Abstract. This article considers an optimal process control problem described by a system of nonlinear Rosser-type difference equations. The process is controlled using a boundary condition. This boundary condition is a solution to an analog of the Cauchy problem for a nonlinear Volterra-type difference equation. The control domain is assumed to be bound and open. By introducing a special variation of the control function, the first and second variations (in the classical sense) of the performance functional are calculated. Taking advantage of the arbitrariness of the admissible variation of the control function, a first-order necessary optimality condition is proven in the form of an analog of the Euler equation from the calculus of variations. Considering the non-negativity of the second variation of the functional along the optimal control, a general second-order necessary optimality condition is proved. From this, a few necessary optimality conditions are derived that are explicit, i.e., expressed in terms of the parameters of the optimal control problem under consideration.

Keywords: *system of Rosser-type equations; boundary control; nonlinear Volterra-type difference equation; optimal control; analogue of the Euler equation; second-order necessary condition for optimality.*

For citation: Gadyrova, S. Sh. and Mansimov, K. B. (2026), "To the Necessary Conditions of Optimality of the First and Second Order in the Problem of Optimal Control of the Rosser Type Equations Discrete Systems", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 5–19, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-5-19, <https://elibrary.ru/tmwqhc>.

The article was submitted 30.04.2025; approved after reviewing 30.10.2025; accepted for publication 10.06.2026.

Введение

Ряд процессов из техники описывается дискретными системами уравнений типа Россера (см., например, [1–5]). Заметим, что дискретные двумерные системы уравнений типа Россера представляют собой дискретный аналог канонического гиперболического уравнения первого порядка [6–10]. В работе [11] изучены некоторые задачи оптимального управления процессами, описываемые нелинейными дискретными системами уравнений типа Россера и установлены некоторые необходимые и достаточные условия оптимальности.

В предлагаемой работе исследуется одна задача оптимального управления процессом, описываемая разностным уравнением Россера при предположении, что одно из краевых условий системы уравнений определяется как решение нелинейного разностного уравнения Вольтерра. Применяя один вариант метода приращений, при предположении об ограниченности и открытости области управления, вычислены первая и вторая вариации функционала цели и с их помощью получены непосредственно

выраженные через параметры задачи управления необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Заметим, что ряд необходимых условий оптимальности первого и второго порядка в задаче оптимального управления, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с нетиповым критерием качества, получен также в работе [12].

1. Постановка задачи

Предположим, что управляемый сложный процесс описывается системой нелинейных двумерных разностных уравнений:

$$\begin{aligned} z(t+1, x) &= f(t, x, z(t, x), y(t, x)), t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ y(t, x+1) &= g(t, x, z(t, x), y(t, x)), t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x \in X = \{x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\}, \\ y(t, x_0) &= b(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $f(t, x, z, y)$ ($g(t, x, z, y)$) – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, y) до второго порядка включительно, t_0, x_0, t_1, x_1 – заданные числа, причем, разности $t_1 - t_0$ и $x_1 - x_0$ есть натуральные числа, $b(t)$ – заданная m -мерная дискретная вектор-функция, $a(x)$ – n -мерная вектор-функция, являющаяся решением одномерного нелинейного обыкновенного разностного уравнения типа Вольтерра:

$$a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x F(x, s, a(s), u(s)), x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \quad (3)$$

с начальным условием

$$a(x_0) = a_0. \quad (4)$$

где $F(x, s, a, u)$ – заданная, n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a, u) до второго порядка включительно, a_0 – заданный постоянный вектор, а $u(x)$ – r -мерная, дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(x) \in U \subset R^r, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1. \quad (5)$$

Управляющие функции $u(x)$, с подобными свойствами, назовем *допустимыми управлениями*, а соответствующие им процессы $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$ – *допустимыми процессами*.

На дискретных решениях краевой задачи (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал:

$$S(u) = \varphi(a(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G_1(z(t_1, x)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} G_2(y(t, x_1)). \quad (6)$$

Здесь $\varphi(a)$, $G_1(z)$ и $G_2(y)$ – заданные дважды непрерывно-дифференцируемые, скалярные функции.

Допустимое управление $u(x)$, доставляющее минимальное значение функционалу (6) при ограничениях (1)–(5), назовем *оптимальным управлением*.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала (6) при ограничениях (1)–(5), при предположении, что минимальное значение функционала (6) при ограничениях (1)–(5) существует.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядка в рассматриваемой задаче оптимального управления.

2. Формула приращения функционала критерия качества

Предположим, что $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$ – некоторый допустимый, а $(\bar{u}(x) = u(x) + \Delta u(x), \bar{a}(x) = a(x) + \Delta a(x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{y}(t, x) = y(t, x) + \Delta y(t, x))$ – произвольный допустимые процессы.

Запишем приращение функционала качества (6):

$$S(u + \Delta u) - S(u) = \varphi(\bar{a}(x_1)) - \varphi(a(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [G_1(\bar{z}(t_1, x)) - G_1(z(t_1, x))] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [G_2(\bar{y}(t, x_1)) - G_2(y(t, x_1))]. \quad (7)$$

Ясно, что $\Delta z(t, x)$, $\Delta y(t, x)$ и $\Delta a(x)$ будут решениями задач

$$\begin{aligned} \Delta z(t+1, x) &= f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), y(t, x)), \\ \Delta y(t, x+1) &= g(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x)) - g(t, x, z(t, x), y(t, x)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta z(t_0, x) &= a(x), \\ \Delta y(t, x_0) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x (F(x, s, \bar{a}(s), \bar{u}(s)) - F(x, s, a(s), u(s))), \quad (10)$$

$$a(x_0) = 0. \quad (11)$$

Введем аналоги функции Гамильтона–Понтрягина:

$$H(t, x, z, y, p, q) = p'f(t, x, z, y) + q'g(t, x, z, y),$$

$$M(x, a, u, \psi) = \sum_{s=x}^{x_1} \psi'(s) F(s, x, a(x), u(x)).$$

Здесь $p(t, x)$, $q(t, x)$ и $\psi(x)$ – пока неизвестные дискретные функции соответствующих размерностей.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t, x) \Delta z(t+1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t, x) \Delta y(t, x+1) = \\ &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t-1, x) \Delta z(t, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} q'(t, x-1) \Delta y(t, x) = \\ &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [p'(t_1, x) \Delta z(t_1, x) - p'(t_0, x) \Delta a(x)] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t-1, x) \Delta z(t, x) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} q'(t, x_1) \Delta y(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t_1, x-1) \Delta y(t, x). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая введенные обозначения, тождества (8)–(12), и применяя формулу Тейлора до второго порядка, приращение (7) функционала (6) представляется в виде

$$\begin{aligned} S(\bar{u}) - S(u) &= \frac{\partial \varphi'(a(x_1))}{\partial a} \Delta a(x_1) + \frac{1}{2} \Delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \Delta a(x_1) + o_1(\|\Delta a(x_1)\|^2) + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G_1(z(t_1, x))}{\partial z} \Delta z(t_1, x) + \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_2(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial G_2(y(t, x_1))}{\partial y} \Delta y(t, x_1) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \Delta y(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_3(\|\Delta y(t, x_1)\|^2) + \\
 & + \psi'(x_1 - 1) \Delta a(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(x - 1) \Delta a(x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial a} \Delta a(x) + \right. \\
 & + \frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial u} \Delta u(x) \left. \right] - \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \Delta a(x) + \right. \\
 & + 2 \Delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \Delta a(x) + \Delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \Delta u(x) \left. \right] - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta a(x)\| + \|\Delta u(x)\|)^2 + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t_1 - 1, x) \Delta z(t_1, x) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t_0 - 1, x) \Delta a(x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(t - 1, x) \Delta z(t, x) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} q'(t, x_1 - 1) \Delta y(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} q'(t, x - 1) \Delta y(t, x) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial H[t, x, p, q]}{\partial z} \Delta z(t, x) + \frac{\partial H[t, x, p, q]}{\partial y} \Delta y(t, x) \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \Delta y(t, x) + \right. \\
 & + \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \Delta z(t, x) + \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \Delta y(t, x) \left. \right] - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_5(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|)^2. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Здесь по определению

$$\begin{aligned}
 H[t, x, p, q] & \equiv H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)), \\
 M[x, \psi] & \equiv M(x, a(x), u(x), \psi(t, x)).
 \end{aligned}$$

Учитывая произвольность вектор-функций, $p(t, x), q(t, x)$ и $\psi(x)$, теперь предположим, что вектор-функции $p(t, x), q(t, x)$ и $\psi(x)$ — являются решениями задач (аналоги задач Коши для разностных уравнений):

$$\begin{aligned}
 p(t - 1, x) & = \frac{\partial H[t, x, p, q]}{\partial z}, \\
 p(t_1 - 1, x) & = - \frac{\partial G_1(z(t_1, x))}{\partial z}, \\
 q(t, x - 1) & = \frac{\partial H[t, x, p, q]}{\partial y},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(t, x_1 - 1) &= -\frac{\partial G_2(y(t, x_1))}{\partial y}, \\ \psi(x - 1) &= \frac{\partial M[x, \psi]}{\partial a} + p(t_0 - 1, x), \\ \psi(x_1 - 1) &= -\frac{\partial \varphi(a(x_1))}{\partial a}. \end{aligned}$$

Следуя общепринятым терминам (см. напр., [8, 9, 13–15]), их назовем сопряженными системами или задачами для рассматриваемой задачи оптимального управления.

Тогда формула приращения (13) примет вид:

$$\begin{aligned} S(\bar{u}) - S(u) &= \frac{1}{2} \Delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \Delta a(x_1) + o_1(\|\Delta a(x_1)\|^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_2(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \Delta y(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_3(\|\Delta y(t, x_1)\|^2) - \\ &- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial u} \Delta u(x) - \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \Delta a(x) + \right. \\ &\quad \left. + 2\Delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \Delta a(x) + \Delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \Delta u(x) \right] - \\ &\quad - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta a(x)\| + \|\Delta u(x)\|)^2 + \\ &- \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \Delta z(t, x) + \Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \Delta y(t, x) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \Delta z(t, x) + \Delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \Delta y(t, x) \right] - \\ &\quad - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_5(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из разностных нелинейных задач (8)–(9) и (10)–(11), в силу гладкости правых частей уравнений (1) и (3) применяя формулу Тейлора, получаем, что приращения $\Delta z(t, x)$, $\Delta y(t, x)$ и $\Delta a(x)$ являются решениями следующих неоднородных линеаризованных краевых задач:

$$\begin{aligned} \Delta z(t+1, x) &= f_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) \Delta z(t, x) + f_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) \Delta y(t, x) + \\ &\quad + o_6(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta a(x), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t, x+1) &= g_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) \Delta z(t, x) + g_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) \Delta y(t, x) + \\ &\quad + o_7(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta y(t, x_0) = 0, \quad (18)$$

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x F_a(x, s, a(s), v(s)) \Delta a(s) + F_v(x, s, a(s), v(s)) \Delta u(s) + o_8(\|\Delta a(s)\| + \|\Delta u(s)\|), \quad (19)$$

$$\Delta a(t, x_0) = 0. \quad (20)$$

Учитывая открытости области управления U , специальное приращение допустимого управления $u(x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \varepsilon \delta u(x), x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1. \quad (21)$$

Здесь ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(x) \in R^r, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1$ — произвольная дискретная и ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления $u(x)$).

Через $(\Delta a_\varepsilon(x), \Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\varepsilon(t, x))$, обозначим специальное приращение состояния $(\Delta a(x), \Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$, соответствующее специальному приращению (21) управления $u(x)$.

Учитывая формулу (21) и линеаризованные задачи (15)–(16), (17)–(18) и (19)–(20) доказывается следующее утверждение.

Лемма. При сделанных предположениях имеют место разложения:

$$\Delta z_\varepsilon(t, x) = \varepsilon \delta z(t, x) + o_9(t, x; \varepsilon), \quad (22)$$

$$\Delta y_\varepsilon(t, x) = \varepsilon \delta y(t, x) + o_{10}(t, x; \varepsilon), \quad (23)$$

$$\Delta a_\varepsilon(x) = \varepsilon \delta a(x) + o_{11}(x; \varepsilon), \quad (24)$$

где $o_9(t, x; \varepsilon)$, $o_{10}(t, x; \varepsilon)$ и $o_{11}(x; \varepsilon)$ порядки малости

Здесь $(\delta a(x), \delta z(t, x), \delta y(t, x))$, вариация вектора состояния $(a(x), z(t, x), y(t, x))$, являющаяся решением линейной задачи:

$$\delta z(t+1, x) = f_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) \delta z(t, x) + f_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) \delta y(t, x), \quad (25)$$

$$\delta z(t_0, x) = \delta a(x), \quad (26)$$

$$\delta y(t, x+1) = g_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) \delta z(t, x) + g_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) \delta y(t, x), \quad (27)$$

$$\delta y(t, x_0) = 0, \quad (28)$$

$$\delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x F_a(x, s, a(s), v(s)) \delta a(s) + F_v(x, s, a(s), v(s)) \delta u(s), \quad (29)$$

$$\delta a(t, x_0) = 0. \quad (30)$$

Принимая во внимание формулу (21) и разложения (22), (23), (24) из приращения (14) функционала получаем, что

$$\begin{aligned} S(u + \varepsilon \delta u) - S(u) = & -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial u} \delta u(x) - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \delta a(x) + \right. \\ & \left. + 2\delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \delta a(x) + \delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \delta u(x) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \delta z(t, x) + \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \delta y(t, x) + \right. \\
& \quad \left. + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \delta z(t, x) + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \delta y(t, x) \right] + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) + \\
& \quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \delta y(t, x_1). \tag{31}
\end{aligned}$$

3. Необходимые условия оптимальности

Из доказанного специального приращения (31) функционала (6) получаем, что первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционала имеют соответственно вид:

$$\delta^1 S(u; \delta u) = - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial u} \delta u(x), \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\delta^2 S(u; \delta u) = & \delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) + \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \delta y(t, x_1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \delta a(x) + \right. \\
& \quad \left. + 2\delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \delta a(x) + \delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \delta u(x) \right] - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \delta z(t, x) + \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \delta y(t, x) + \right. \\
& \quad \left. + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \delta z(t, x) + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \delta y(t, x) \right]. \tag{33}
\end{aligned}$$

Ясно, что в силу открытости области управления для оптимального допустимого управления необходимо, чтобы первая вариация функционала равнялась нулю:

$$- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'[x, \psi]}{\partial u} \delta u(x) = 0.$$

Здесь $\frac{\partial M[\xi, \psi]}{\partial u}$ — градиент скалярной функции $M[\xi, \psi]$ по u .

Отсюда, в силу произвольности допустимого управления $\delta u(x)$, следует следующее утверждение

Теорема 1. (необходимое условие оптимальности первого порядка). Для оптимальности, допустимого управления $u(x)$, необходимо, чтобы соотношение

$$\frac{\partial M[\xi, \psi]}{\partial u} = 0 \tag{34}$$

выполнялось для всех $\xi = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1$.

Необходимое условие оптимальности (34) является аналогом уравнения Эйлера из вариационного исчисления (см., например, [13]) для рассматриваемой задачи оптимального управления.

Введем в рассмотрение одно определение.

Определение. Каждое допустимое управление, являющееся решением уравнения Эйлера, назовем *классической экстремалью*.

Для сужения множества классических экстремалей надо иметь новые необходимые условия оптимальности.

Из классического вариационного исчисления известно, что для оптимальности классической экстремали необходимо чтобы вдоль него вторая вариация (33) функционала (6) была неотрицательной.

Следовательно, справедливо следующее необходимое условие оптимальности второго порядка.

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $u(x)$, в рассматриваемой задаче управления необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{aligned} & \delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \delta y(t, x_1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \delta a(x) + \right. \\ & \quad \left. + 2\delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \delta a(x) + \delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \delta u(x) \right] - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \delta z(t, x) + \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \delta y(t, x) + \right. \\ & \quad \left. + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \delta z(t, x) + \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \delta y(t, x) \right] \geq 0 \quad (35) \end{aligned}$$

выполнялось для всех допустимых вариаций $\delta u(x) \in R^r, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1$ управления.

Как видно, неравенство (35) является общим необходимым условием оптимальности второго порядка, носящим неявный характер и поэтому проверка его выполнения – достаточно сложная задача.

Следовательно, возникает необходимость в получении новых необходимых условий оптимальности, носящих явный характер.

Займемся этим вопросом.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_u[s, x] &\equiv F_u(s, x, a(x), u(x)), \\ f_y[t, x] &\equiv f_y(t, x, z(t, x), y(t, x)), \\ f_z[t, x] &\equiv f_z(t, x, z(t, x), y(t, x)). \end{aligned}$$

Заметим, что линейные задачи (25)–(26), (27)–(28) и (29)–(30) являются аналогами уравнений в вариациях (см., например, [13]) для рассматриваемой задачи оптимального управления.

На основе формулы о представлениях линейных неоднородных разностных уравнений типа Вольтерра (см., например, [14]), решение задачи (29)–(30) $\delta a(x)$ представляется в виде

$$\delta a(x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(x, s) \delta u(s). \quad (36)$$

Здесь

$$Q_1(x, s) = \sum_{\tau=s}^{x-1} \Phi(x, \tau) \frac{\partial F[\tau, s]}{\partial u}$$

где $(n \times n)$ – матричная функция $\Phi(x, s)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Phi(x, s-1) &= \sum_{\tau=s}^{x-1} \Phi(x, \tau) \frac{\partial F[\tau, s]}{\partial a}, \\ \Phi(x, x-1) &= E, \end{aligned}$$

где E – $(n \times n)$ – единичная матрица.

Далее через $V_{ij}(t, x; \tau, s)$, $i, j = 1, 2$ – обозначим решения линейных неоднородных разностных матричных задач:

$$\begin{aligned} V_{11}(t, x; \tau-1, s) &= V_{11}(t, x; \tau, s) f_z[\tau, s] + V_{12}(t, x; \tau, s) g_z[\tau, s], \\ V_{12}(t, x; \tau, s-1) &= V_{11}(t, x; \tau, s) f_y[\tau, s] + V_{12}(t, x; \tau, s) g_y[\tau, s] \\ V_{21}(t, x; \tau-1, s) &= V_{21}(t, x; \tau, s) f_z[\tau, s] + V_{22}(t, x; \tau, s) g_z[\tau, s], \\ &= V_{21}(t, x; \tau, s) f_y[\tau, s] + V_{22}(t, x; \tau, s) g_y[\tau, s], \\ V_{11}(t, x; t-1, x-1) &= E_1, \quad V_{22}(t, x; t-1, x-1) = E_2, \\ V_{11}(t, x; t-1, s) &= 0, x_0 \leq s \leq x-1, \quad V_{12}(t, x; \tau, x-1) = 0, t_0 \leq \tau \leq t-1, \\ V_{21}(t, x; t-1, x) &= 0, x_0 \leq s \leq x-1, \quad V_{22}(t, x; \tau, x-1) = 0, t_0 \leq \tau \leq t-1. \end{aligned}$$

Решения $(\delta z(t, x), \delta y(t, x))$ задач (25)–(26) и (27)–(28) могут быть представлены в виде

$$\delta z(t, x) = V_{11}(t, x+1; t_0-1, x) \delta a(x) + \sum_{s=x_0}^{x-1} V_{11}(t, x+1; t_0-1, s) \delta a(s),$$

$$\delta y(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} V_{21}(t+1, x; t_0-1, s) \delta a(s).$$

Отсюда, принимая во внимание представление (36) для решения $\delta a(x)$, получим, что

$$\begin{aligned} \delta z(t, x) &= \sum_{s=x_0}^{x-1} [V_{11}(t, x+1; t_0-1, s) Q_1(x, s) + \\ &+ \sum_{\tau=s}^{x-1} V_{11}(t, x+1; t_0-1, s) Q_1(\tau, s)] \delta u(s), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\delta y(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{21}(t+1, x; t_0-1, \tau) Q_1(\tau, s) \right] \delta u(s). \quad (38)$$

Введя обозначения

$$Q_2(t, x, s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{11}(t, x+1; t_0-1, \tau) G_1(\tau, s) + V_{11}(t, x+1; t_0-1, x) Q_1(x, s),$$

$$Q_3(t, x, s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{11}(t+1, x; t_0-1, \tau) G_1(\tau, s),$$

формулы (37) и (38) записываются в виде

$$\delta z(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_2(t, x, s) \delta u(s), \quad (39)$$

$$\delta y(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_3(t, x, s) \delta u(s). \quad (40)$$

Используя представления (36), (39), (40) займемся преобразованием слагаемых в неравенстве (35).

Следуя схемам, применяемым в работах [15, 16], доказывается, что

$$\delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) Q_1(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} Q_1(x_1, s) \delta u(s), \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} Q_2(t, x, s) \right] \delta u(s), \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta y'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} \delta y(t, x_1) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} Q_3(t, x_1, \tau) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial y^2} Q_3(t, x_1, s) \right] \delta u(s), \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} \delta z(t, x) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} Q_2(t, x, s) \right] \delta u(s), \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} \delta y(t, x) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} Q_3(t, x, s) \right] \delta u(s), \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} \delta z(t, x) = \\
 & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_3(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} Q_4(t, x, s) \right] \delta u(s), \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta y'(t, x) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} \delta y(t, x) = \\
 & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_3(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} Q_3(t, x, s) \right] \delta u(s), \quad (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta a'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} \delta a(x) = \\
 & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) \left[\sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_1(x, \tau) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} Q_1(x, s) \right] \delta u(s), \quad (48)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} \delta a(x) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1} \delta u'(s) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} Q_1(s, x) \delta u(x) \right]. \quad (49)$$

Введем в рассмотрение $(n \times n)$ матричную функцию:

$$\begin{aligned}
 K(\tau, s) = & -Q'_1(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} Q_1(x_1, s) + \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_1(x, \tau) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial a^2} Q_1(x, s) - \\
 & - \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 G_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} Q_2(t, x, s) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} Q_3(t, x_1, \tau) \frac{\partial^2 G_2(y(t, x_1))}{\partial z^2} Q_3(t, x_1, s) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z^2} Q_2(t, x, s) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_2(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial z \partial y} Q_3(t, x, s) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_3(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y \partial z} Q_4(t, x, s) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_3(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H[t, x, p, q]}{\partial y^2} Q_3(t, x, s). \quad (50)
 \end{aligned}$$

Учитывая доказанные тождества (41)–(49) и обозначение (50), неравенство (35) записывается в виде

$$\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) K(\tau, s) \delta u(s) + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1} \delta u'(s) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u \partial a} Q_1(s, x) \delta u(x) \right] + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u'(x) \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \delta u(x) \leq 0. \quad (51)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство (51), выполнялось для всех допустимых вариаций $\delta u(x)$ управления $u(x)$.

Неравенство (51) является необходимым условием оптимальности второго порядка и носит довольно общий характер.

Из него, определяя допустимую вариацию $\delta u(x)$ управления специальным образом, нетрудно получить ряд необходимых условий оптимальности второго порядка, непосредственно выраженных через параметры рассматриваемой задачи оптимального управления.

Приведем одну из них.

Теорема 4. Для оптимальности классической экстремали $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$v' \left(K(\theta, \theta) + \frac{\partial^2 M[x, \psi]}{\partial u^2} \right) v \leq 0 \quad (52)$$

выполнялось для всех $\theta \in X \setminus x_1$ и $v \in R^r$.

Доказательство. Используя произвольность вектор-функции $\delta u(x)$ определим его по формуле

$$\delta u(x) = \begin{cases} v, & x = \xi \in X \setminus x_1, \\ u(t), & x \neq \xi. \end{cases} \quad (53)$$

Здесь $v \in R^r$ – произвольный, ограниченный вектор, а ξ произвольная точка.

Учитывая формулу (53) в неравенстве (51), приходим к необходимому условию оптимальности (52).

Теорема доказана.

Заметим, что необходимое условие оптимальности (52) менее информативно, чем необходимое условие оптимальности (51).

Самым сильным, т.е. информативным, необходимым условием оптимальности второго порядка является неравенство (51).

Заключение

Рассматривается дискретный управляемый процесс, описываемый системой нелинейных разностных уравнений типа Россера. Процесс управляется с помощью начального условия, являющегося решением нелинейного разностного уравнения типа Вольтерра.

При предположении открытости области управления вычислены первая и вторая вариации функционала качества. С их помощью доказано необходимое условие оптимальности первого порядка в форме уравнения Эйлера из теории классического вариационного исчисления и ряд необходимых условий оптимальности второго порядка, выраженных через параметры рассматриваемой дискретной двухпараметрической задачи оптимального управления.

Список источников

1. Барышев В. Г., Блюмин С. Л., Кузнецов Л. А. К управлению системами с многомерным параметром // Автоматика и телемеханика. 1977. № 4. С. 37–42.
2. Блюмин С. Л., Фараджев Р. Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 125–163.
3. Гайшун И. В. Многопараметрические системы управления. Минск: Изд-во ИМ НАН Белоруси, 1996. 199 с.
4. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Берлин: Springer-Verlag, 1985. 399 с.
5. Дымков М. П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Минск: Изд-во БГЭУ, 2005. 363 с.
6. Мансимов К. Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче управления с распределенными параметрами // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 3. С. 546–550.
7. Островский Г. М., Волин Ю. М. Моделирование сложных химико-технологических схем. М.: "Химия", 1975. 311 с.
8. Васильев О. В., Срочко В. А. К оптимизации одного класса управляемых систем с распределенными параметрами // Сиб. матем. журнал. 1978. №2. С. 328–332.
9. Васильев О. В., Срочко В. А., Терлецкий В. А. Методы оптимизации и их приложения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.
10. Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. О представлении решения краевой задачи Гурса для стохастических гиперболических уравнений первого порядка // Изв. Иркутского Унив.-та. Сер. физ. мат. наук. 2023. Т. 45. С. 145–151.
11. Кадырова С. Ш., Мансимов К. Б. Об одной задаче оптимального управления дискретными системами Россера // Изв. НАН Азербайджана, сер. физ.-техн. и мат. наук. 2014. Т. 34, № 3. С. 105–113.
12. Мансимов К. Б., Нагиева И. Ф. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления с нетиповым критерием качества // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, Вычислительная Техника и Информатика. 2023. № 64. С. 11–20.
13. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 256 с.
14. Мансимов К. Б., Керимова А. В. Линеаризованное необходимое условие оптимальности и исследование особых управлений в одной ступенчатой задаче управления // Вестник Томского гос. университета. Сер. управление, выч. техника, информатика. 2024. № 68. С. 14–27.
15. Мансимов К. Б. Дискретные системы. Баку: Изд.-во БГУ, 2013. 151 с.
16. Мансимов К. Б. О квазиособых управлениях в дискретных системах с запаздыванием // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. № 3(54). С. 19–24.

References

1. Baryshev, V. G. (1977), "On the Control of Systems with Multidimensional Parameters", *Automation and Remote Control*, no 4, pp. 34–42.
2. Blumin, S. L. and Faradzhev, R. G. (1982), "Linear Cellular Machines: A State Space Approach", *Automation and Remote Control*, no 2, pp. 125–163.
3. Gaishun, I. V. (1996), *Multiparameter Control Systems*, Publishing House of the Institute of Control Sciences of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 200 p.
4. Kaczorek, T. (1985), *Two-dimensional linear systems*, Springer-Verlag, Berlin, 398 p.

5. Dymkov, M. P. (2005), *Extremal Problems in Multiparameter Control Systems*, BGEU Publishing House, Minsk, 363 p.
6. Mansimov, K. B. (1988), "On the Theory of Necessary Optimality Conditions in a Control Problem with Distributed Parameters", *Dokl. Akad. Ssr.*, Vol. 301, no 3, pp. 546–550.
7. Ostrovsky, G. M. and Volin, Yu. M. (1975), *Modeling Complex Chemical-Engineering Schemes*, Chemistry, Moscow, 311 p.
8. Vasiliev, O. V. and Srochko, V. A. (1978), "On Optimization of a Class of Control Systems with Distributed Parameters", *Siberian Math. Journal*, no 2, pp. 328–332.
9. Vasiliev, O. V., Srochko, V. A. and Terletsky, V. A. (1990), *Optimization Methods and Their Applications*, Nauka, Novosibirsk, 151 p.
10. Mansimov, K. B. and Mastaliev, R. O. (2023), "On the representation of the solution of the Goursat boundary value problem for first-order stochastic hyperbolic equations", *Bulletin of Irkutsk University, Series of Phys. and Mathematical Sciences*, vol. 45, pp. 145–151.
11. Gadirova, S. Sh. and Mansimov, K. B. (2014), "On one control problem of discrete Roesser systems", *Bulletin of the NAS of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences*, vol. 34, no 3, pp. 105–113.
12. Mansimov, K. B. and Nagieva, I. F. (2023), "Necessary optimality conditions of the first and second orders in one optimal control problem with a non-standard quality criterion", *Bulletin of Tomsk State University. Management, Computer Engineering and Informatics*, no 64, pp. 11–20.
13. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (2011), *Special optimal controls*, Librokom, Moscow, 256 p.
14. Mansimov, K. B. and Kerimova, A. V. (2024), "Linearized necessary optimality condition and study of special controls in one-step control problem", *Bulletin of Tomsk State University. Series: Control, Comput. Engineering, Informatics*, no 68, pp. 14–27.
15. Mansimov, K. B. (2013), *Discrete systems*, BSU Publishing House, Baku, 151 p.
16. Mansimov, K. B. (2021), "On quasi-singular controls in discrete systems with delay", *Bulletin of Perm State University. Matem. mekh. Informatics*, issue 3(54), pp. 19–24.

Информация об авторах:

С. Ш. Кадырова – преподаватель кафедры математической кибернетики Бакинского Государственного Университета Министерства образования и науки Азербайджана (AZ1148, Азербайджан, г. Баку, ул. Захида Халилова, д. 33);

К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор; AuthorID 247352.

Information about the authors:

S. Sh. Gadyrova – Lecturer of the Mathematical Cybernetics Department at Baku State University of the Ministry of Education and Science of Azerbaijan (33 Zahid Khalilov St., Baku, Azerbaijan, AZ1148);

K. B. Mansimov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; AuthorID 247352.

Научная статья

УДК 519.17

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-20-29

<https://elibrary.ru/xxbfyj>



О графах Шилла диаметра 4

Александр Алексеевич Махнев¹, Мариана Малиловна Исакова²

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

¹makhnev@imm.uran.ru

²Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия

²isakova2206@mail.ru

Аннотация. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и θ_1 – второе собственное значение графа. Тогда θ_1 не меньше $\min \left\{ \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}, a_3 \right\}$, причем $\theta_1 \geq$

$\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$, если $d \geq 4$. Кулен и Пак назвали графом Шилла дистанционно регуляр-

ный граф диаметра 3 с $\theta_1 = a_3$. В этом случае $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ и a_3 делит k . Дистанционно регулярный граф назовем графом Шилла диаметра d , если $d \geq 4$ и $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$. В случае $a_1 = 0$ имеем $\theta_1 = \sqrt{k}$. Заметим, что для дистанционно регуляр-

ных графов Шилла диаметра 5 и примитивных графов Шилла диаметра 4 с числом вершин, не большим 4096, допустимых массивов пересечений нет. В настоящей работе рассматриваются антиподальные графы Шилла диаметра 4. Доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$ и $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ не существуют.

Ключевые слова: граф Шилла; дистанционно регулярный граф.

Для цитирования: Махнев А. А., Исакова М. М. О графах Шилла диаметра 4 // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 20–29. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-20-29. <https://elibrary.ru/xxbfyj>.

Благодарности: исследование выполнено при поддержке Естественного научного фонда Китая (проект № 12171126).

Статья поступила в редакцию 29.04.2026; одобрена после рецензирования 10.06.2026; принята к публикации 25.06.2026.



© Махнев А. А., Исакова М. М., 2026
 Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

On Shilla Graphs of Diameter 4

Alexander A. Makhnev¹, Mariana M. Isakova²

¹N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia

¹makhnev@imm.uran.ru

²Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russia

²isakova2206@mail.ru

Abstract. Let Γ be a distance-regular graph with diameter $d \geq 3$ and θ_1 is the second eigenvalue of the graph. Then $\theta_1 \geq \min \left\{ \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}, a_3 \right\}$ and $\theta_1 \geq \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ if $d \geq 4$.

Koolen and Park called Shilla graph a distance-regular graph with diameter 3 and $\theta_1 = a_3$.

In this case $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ and a_3 divides k . Distance-regular graph with diameter $d \geq 4$

and $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ we call Shilla graph of diameter d . In the case $a_1 = 0$ we have $\theta_1 = \sqrt{k}$. Note that Shilla graphs of diameter 5 and primitive Shilla graphs of diameter 4 with at most 4096 vertices do not exist. In the paper it is considered Shilla graphs of diameter 4. It is proved that distance-regular graphs with intersection arrays $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$ and $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ do not exist.

Keywords: Shilla graph; distance-regular graph.

For citation: Makhnev, A. A. and Isakova, M. M. (2026), "On Shilla Graphs of Diameter 4", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 20–29, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-20-29, <https://elibrary.ru/xxbfyj>.

Acknowledgments: the study was supported by the Natural Science Foundation of China (project No 12171126).

The article was submitted 29.04.2026; approved after reviewing 10.06.2026; accepted for publication 25.06.2026.

Введение

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и θ_1 — второе собственное значение графа. Тогда θ_1 не меньше $\min \left\{ \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}, a_3 \right\}$, причем $\theta_1 \geq \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$, если $d \geq 4$. Дж. Кулен и Дж. Пак назвали графом Шилла дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\theta_1 = a_3$. В этом случае $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ и a_3 делит k [1, теорема 7].

Дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 4$ назовем графом Шилла диаметра d , если $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$. В случае $a_1 = 0$ имеем $\theta_1 = \sqrt{k}$.

По предложению 3.5 [2] $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ тогда и только тогда, когда Γ является графом Шилла или антиподальным графом диаметра 4.

В работе рассмотрены антиподальные графы Шилла диаметра 4.

Перечислим допустимые массивы пересечений антиподальных графов Шилла Γ диаметра 4 из [3, стр. 421 – 422]. Через Γ' обозначим антиподальное частное (свернутый граф) Γ .

1. $\{5, 4, 1, 1; 1, 1, 4, 5\}$ граф Уэлса, число вершин $v = 1 + 5 + 20 + 5 + 1 = 32$, спектр $5^1, \sqrt{5}^8, 1^{10}, -\sqrt{5}^8, -3^5$.

2. $\{6, 4, 2, 1; 1, 1, 4, 6\}$ граф 3. $Sut_6.2$, число вершин $v = 1 + 6 + 24 + 12 + 2 = 45$, спектр $6^1, 3^{12}, 1^9, -2^{18}, -3^5$.

3. $\{10, 6, 4, 1; 1, 2, 6, 10\}$ локально Петерсеновский граф, число вершин $v = 1 + 10 + 30 + 20 + 2 = 63$, спектр $10^1, 5^{12}, 1^{14}, -2^{30}, -4^6$, Γ' имеет параметры $(21, 10, 1, 4)$.

4. $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$ число вершин $v = 1 + 20 + 120 + 20 + 1 = 162$, спектр $20^1, 5^{36}, 2^{60}, -4^{45}, -7^{20}$, граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(162, 21, 0, 3)$, Γ' имеет параметры $(81, 20, 1, 6)$.

5. $\{20, 18, 4, 1; 1, 2, 18, 20\}$ граф смежных классов укороченного тернарного кода Голя, число вершин $v = 1 + 20 + 180 + 40 + 2 = 243$, спектр $20^1, 5^{72}, 2^{20}, -4^{90}, -7^{20}$.

6. $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$, число вершин $v = 1 + 20 + 360 + 100 + 5 = 486$, спектр $20^1, 5^{180}, 2^{60}, -4^{225}, -7^{20}$, Γ' имеет параметры $(81, 20, 1, 6)$.

7. $\{21, 20, 2, 1; 1, 1, 20, 21\}$ число вершин $v = 1 + 21 + 420 + 42 + 2 = 486$, спектр $21^1, \sqrt{21}^{162}, 3^{105}, -\sqrt{21}^{162}, -6^{56}$, Γ' имеет параметры $(162, 21, 0, 3)$.

8. $\{22, 21, 3, 1; 1, 3, 21, 22\}$ число вершин $v = 1 + 22 + 154 + 22 + 1 = 200$, спектр $22^1, \sqrt{22}^{50}, 2^{77}, -\sqrt{22}^{50}, -8^{22}$, Γ' имеет параметры $(100, 22, 0, 6)$.

9. $\{22, 21, 4, 1; 1, 2, 21, 22\}$ число вершин $v = 1 + 22 + 231 + 44 + 2 = 300$, спектр $22^1, \sqrt{22}^{100}, 2^{77}, -\sqrt{22}^{100}, -8^{22}$.

10. $\{22, 21, 5, 1; 1, 1, 21, 22\}$ число вершин $v = 1 + 22 + 462 + 110 + 5 = 600$, спектр $22^1, \sqrt{22}^{250}, 2^{77}, -\sqrt{22}^{250}, -8^{22}$.

Графы под номерами 8 – 10 являются антиподальными расширениями графа Хигмена–Симса.

11. $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ число вершин $v = 1 + 25 + 300 + 25 + 1 = 352$, спектр $25^1, 5^{88}, 3^{120}, -5^{88}, -7^{55}$, граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(352, 26, 0, 2)$, Γ' имеет параметры $(176, 25, 0, 4)$.

12. $\{25, 24, 3, 1; 1, 1, 24, 25\}$ число вершин $v = 1 + 25 + 600 + 75 + 3 = 704$, спектр $25^1, 5^{264}, 3^{120}, -5^{264}, -7^{55}$.

13. $\{26, 25, 1, 1; 1, 1, 25, 26\}$ число вершин $v = 1 + 26 + 1050 + 26 + 1 = 704$, спектр $26^1, \sqrt{26}^{176}, 4^{208}, -\sqrt{26}^{176}, -6^{143}$, Γ' имеет параметры $(352, 26, 0, 2)$.

14. $\{27, 20, 6, 1; 1, 3, 20, 27\}$ число вершин $v = 1 + 27 + 180 + 54 + 2 = 264$, спектр $27^1, 9^{44}, 3^{55}, -3^{132}, -6^{32}$, Γ' имеет параметры $(88, 27, 6, 9)$.

15. $\{28, 15, 6, 1; 1, 6, 15, 28\}$ половинный 8-куб, число вершин $v = 1 + 28 + 70 + 28 + 1 = 128$, спектр $28^1, 14^8, 4^{28}, -2^{56}, -4^{35}$, Γ' имеет параметры $(64, 28, 12, 12)$.

16. $\{32, 27, 6, 1; 1, 6, 27, 32\}$ число вершин $v = 1 + 32 + 144 + 32 + 1 = 210$, спектр $32^1, 8^{35}, 2^{84}, -4^{70}, -10^{20}$, граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(210, 33, 0, 6)$, Γ' имеет параметры $(105, 32, 4, 12)$.

17. $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ граф Сойчера, число вершин $v = 1 + 32 + 216 + 64 + 2 = 315$, спектр $32^1, 8^{70}, 2^{84}, -4^{140}, -10^{20}$.

18. $\{32, 27, 9, 1; 1, 3, 27, 32\}$ число вершин $v = 1 + 32 + 288 + 96 + 3 = 420$, спектр $32^1, 8^{105}, 2^{84}, -4^{210}, -10^{20}$.

19. $\{32, 27, 10, 1; 1, 2, 27, 32\}$ число вершин $v = 1 + 32 + 432 + 32 + 1 = 630$, спектр $32^1, 8^{175}, 2^{84}, -4^{350}, -10^{20}$.

Графы под номерами 16 и 18 не существуют по [4].

20. $\{33, 32, 3, 1; 1, 3, 32, 33\}$ число вершин $v = 1 + 33 + 352 + 33 + 1 = 420$, спектр $26^1, \sqrt{33}^{105}, 3^{154}, -\sqrt{33}^{105}, -9^{55}$, Γ' имеет параметры $(210, 33, 0, 6)$.

21. $\{33, 32, 5, 1; 1, 1, 32, 33\}$ число вершин $v = 1 + 33 + 1056 + 165 + 5 = 1260$, спектр $26^1, \sqrt{33}^{525}, 3^{154}, -\sqrt{33}^{525}, -9^{55}$.

22. $\{36, 35, 2, 1; 1, 2, 35, 36\}$ число вершин $v = 1 + 36 + 630 + 36 + 1 = 704$, спектр $36^1, 6^{176}, 4^{231}, -6^{176}, -8^{120}$, граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(704, 37, 0, 2)$, Γ' имеет параметры $(352, 36, 0, 4)$.

23. $\{36, 35, 3, 1; 1, 1, 35, 36\}$ число вершин $v = 1 + 36 + 1260 + 108 + 3 = 1408$, спектр $36^1, 6^{528}, 4^{231}, -6^{528}, -8^{120}$.

24. $\{37, 36, 1, 1; 1, 1, 36, 37\}$ число вершин $v = 1 + 37 + 1332 + 37 + 1 = 1408$, спектр $37^1, \sqrt{37}^{352}, 5^{407}, -\sqrt{37}^{352}, -7^{296}$.

25. $\{45, 32, 12, 1; 1, 6, 32, 45\}$ $AT4(3, 3, 3)$ -граф $3.O_6^-(3)$, число вершин $v = 1 + 45 + 240 + 90 + 2 = 378$, спектр $45^1, 15^{42}, 3^{90}, -3^{210}, -9^{45}$, Γ' имеет параметры $(126, 45, 12, 18)$.

Для $AT4(3, 3, r)$ -графа параметр r равен 2, 3, 6. Но в случаях $r = 2, 6$ граф не существует [5].

26. $\{45, 40, 6, 1; 1, 6, 40, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 300 + 45 + 1 = 392$, спектр $45^1, 9^{70}, 3^{150}, -5^{126}, -11^{45}$, граф Q -полиномиальный, $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(392, 46, 0, 6)$, Γ' имеет параметры $(196, 45, 4, 12)$.

27. $\{45, 40, 8, 1; 1, 4, 40, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 450 + 90 + 2 = 588$, спектр $45^1, 9^{140}, 3^{150}, -5^{252}, -11^{45}$.

28. $\{45, 40, 9, 1; 1, 3, 40, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 600 + 135 + 3 = 784$, спектр $45^1, 9^{210}, 3^{150}, -5^{378}, -11^{45}$.

29. $\{45, 40, 10, 1; 1, 2, 40, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 900 + 135 + 3 = 1176$, спектр $45^1, 9^{350}, 3^{150}, -5^{630}, -11^{45}$.

30. $\{45, 40, 11, 1; 1, 1, 40, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 1800 + 495 + 11 = 2352$, спектр $45^1, 9^{770}, 3^{150}, -5^{1386}, -11^{45}$.

31. $\{45, 44, 6, 1; 1, 3, 44, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 660 + 90 + 2 = 798$, спектр $45^1, 3\sqrt{5}^{266}, 3^{209}, -3\sqrt{5}^{266}, -12^{56}$, Γ' имеет параметры $(266, 45, 0, 9)$.

32. $\{45, 44, 8, 1; 1, 1, 44, 45\}$ число вершин $v = 1 + 45 + 1980 + 360 + 8 = 2394$, спектр $45^1, 3\sqrt{5}^{1064}, 3^{209}, -3\sqrt{5}^{1064}, -12^{56}$.

33. $\{46, 45, 3, 1; 1, 3, 45, 46\}$ число вершин $v = 1 + 46 + 690 + 46 + 1 = 784$, спектр $46^1, \sqrt{46}^{266}, 4^{276}, -\sqrt{46}^{266}, -10^{115}$, Γ' имеет параметры $(392, 46, 0, 6)$.

34. $\{46, 45, 4, 1; 1, 2, 45, 46\}$ число вершин $v = 1 + 46 + 1035 + 92 + 2 = 1176$, спектр $46^1, \sqrt{46}^{392}, 4^{276}, -\sqrt{46}^{392}, -10^{115}$.

35. $\{46, 45, 5, 1; 1, 5, 45, 46\}$ число вершин $v = 1 + 46 + 2070 + 46 + 1 = 2352$, спектр $46^1, \sqrt{46}^{980}, 4^{276}, -\sqrt{46}^{980}, -10^{115}$.

36. $\{49, 48, 2, 1; 1, 2, 48, 49\}$ число вершин $v = 1 + 49 + 1176 + 49 + 1 = 1276$, спектр $49^1, 7^{319}, 5^{406}, -7^{319}, -9^{231}$, граф Q -полиномиальный, $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(1276, 50, 0, 2)$, Γ' имеет параметры $(638, 49, 0, 4)$.

37. $\{49, 48, 3, 1; 1, 1, 48, 49\}$ число вершин $v = 1 + 49 + 2352 + 147 + 3 = 2552$, спектр $49^1, 7^{957}, 5^{406}, -7^{957}, -9^{231}$.

В настоящей работе доказывается несуществование графов с некоторыми массивами пересечений из нашего списка.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$ не существует.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ не существует.*

1. Тройные числа пересечений

В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений [6].

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d . Если u_1, u_2, u_3 – вершины графа Γ , r_1, r_2, r_3 – неотрицательные целые числа, не большие d . Через $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\}$ обозначим множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, а через $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ – число вершин в $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\}$. Числа $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1 r_2 r_3]$ нет общих формул. Однако, в [7] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $W = d(u, v), U = d(v, w), V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jw} \delta_{hv}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iw} \delta_{hu}$ и $[ij0] = \delta_{iu} \delta_{jv}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей:

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^d [ljh] = p_{jh}^u - [0jh] \\ \sum_{l=0}^d [ilh] = p_{ih}^v - [i0h] \\ \sum_{l=0}^d [ijl] = p_{ij}^w - [ij0] \end{cases} \quad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p_{ij}^w = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix},$$

где Q_{ij} – элементы дуальной матрицы собственных значений Q .

Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$, $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$, $[ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}$, $[ijh]^* = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}$ и $[ijh]^\sim = \begin{bmatrix} uvw \\ hji \end{bmatrix}$. Вычисление параметров $[ijh]'$, $[ijh]^*$ и $[ijh]^\sim$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. Граф с массивом пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$ имеет спектр $20^1, 5^{180}, 2^{60}, -4^{225}, -7^{20}, 1 + 20 + 360 + 100 + 5 = 486$ вершин и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 180 & 60 & 225 & 20 \\ 1 & 45 & 6 & -45 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -9 & 6 & 9 & -7 \\ 1 & -36 & 60 & -45 & 20 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Числа пересечений графа Γ равны

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 1, p_{12}^1 = 18, p_{23}^1 = 90, p_{22}^1 = 252, p_{33}^1 = 5, p_{34}^1 = 5, \\ p_{11}^2 &= 1, p_{12}^2 = 14, p_{13}^2 = 5, p_{22}^2 = 270, p_{23}^2 = 70, p_{24}^2 = 5, p_{33}^2 = 25; \\ p_{12}^3 &= 18, p_{22}^3 = 252, p_{13}^3 = 1, p_{14}^3 = 1, p_{23}^3 = 90, p_{33}^3 = p_{34}^3 = 4; \\ p_{13}^4 &= 20, p_{22}^4 = 360, p_{24}^4 = 1, p_{33}^4 = 80. \end{aligned}$$

Доказательство. Прямые вычисления по [2, лемма 4.1.7].

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $[ihl] = \begin{bmatrix} uvw \\ ihl \end{bmatrix}$, $\Delta = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Gamma_2(\Delta)$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p_{22}^2 = 270$ на $k_2 = 360$ вершинах. Заметим, что для нашего графа $\Lambda = \Delta_2$.

Лемма 2. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 1$. Тогда верны равенства:

$$[111] = r_1, [112] = [121] = -r_1 + 1, [122] = r_1 + r_2 + 8, [123] = [132] = -r_2 + 5, [133] = r_2;$$

$$[211] = -r_1 - r_2 + 1, [212] = [221] = r_1 + r_2 + 12, [222] = -6r_1 - 6r_2 + 198, [223] = [232] = 5r_1 + 5r_2 + 60, [233] = -5r_1 - 5r_2 + 5, [234] = [243] = 5;$$

$$[311] = r_2, [312] = [321] = -r_2 + 5, [322] = 5r_1 + 5r_2 + 40, [323] = [332] = -5r_1 - 4r_2 + 25, [333] = 5r_1 + 4r_2;$$

$$[422] = 5,$$

где $r_1 + r_2 \leq 1$.

Доказательство. Решая систему линейных уравнений, заданных формулами (+), и вводя независимые переменные $[111] = r_1, [133] = r_2$, получим равенства из заключения леммы. Учитывая неотрицательность тройных чисел пересечений, получим неравенство $r_1 + r_2 \leq 1$.

По лемме 2 имеем $192 \leq [222] = -6r_1 - 6r_2 + 198 \leq 198$.

Лемма 3. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$. Тогда верны равенства:

$$[112] = r_{10}/4 + r_{11}, [113] = -r_{10}/4 - r_{11} + 1, [121] = -r_{10} + r_9 - 20, [122] = -r_{10}/4 + 9, [123] = 5r_{10}/4 - r_9 + 25, [131] = r_{10} - r_9 + 21, [132] = -r_{11} + 5, [133] = -r_{10} + r_{11} + r_9 - 21;$$

$$[212] = [221] = -r_{10}/4 + 13, [213] = [231] = r_{10}/4, [214] = [241] = 1, [222] = 3r_{10}/2 + 192, [223] = [232] = -5r_{10}/4 + 65, [233] = r_{10}, [234] = [243] = 4;$$

$$[312] = -r_{11} + 5, [313] = r_{11}, [321] = 5r_{10}/4 - r_9 + 25, [322] = -5r_{10}/4 + 25, [323] = r_9, [331] = -5r_{10}/4 + r_9 - 20, [332] = 5r_{10}/4 + r_{11} + 20, [333] = -r_{11} - r_9 + 25;$$

$$[422] = 5,$$

где $20 \leq r_9 \leq 25, r_{10}/4 + r_{11} \leq 1, r_{10}$ делится на 4.

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 2.

По лемме 3 имеем $192 \leq [222] = 3r_{10}/2 + 192 \leq 198$.

Лемма 4. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 4$. Тогда верны равенства:

$$[113] = [131] = 1, [122] = 14;$$

$$[213] = [231] = 14, [222] = 270, [244] = 4;$$

$$[313] = [331] = 5, [322] = 70, [333] = 20;$$

$$[422] = 5.$$

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 2.

Напомним, что $p_{12}^2 = 14, p_{22}^2 = 270, p_{23}^2 = 70, p_{24}^2 = 5$. Для числа ребер e между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$ в графе Λ выполняются неравенства $17478 = 84 \cdot 192 + 1350 \leq e \leq 84 \cdot 198 + 1350 = 17982$. С другой стороны, имеем $e = 270(269 - \lambda)$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$, следовательно, $64.73 \leq (269 - \lambda) \leq 66.6$ и $202.4 \leq \lambda \leq 204.27$.

Лемма 5. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда верны равенства:

$$[111] = r_5, [112] = -r_4 + r_6 + r_8 + 9, [113] = r_4 - r_5 - r_6 - r_8 - 8, [121] = -r_5 - r_6 + r_7 - r_8 + 1, [122] = r_4, [123] = -r_4 + r_5 + r_6 - r_7 + r_8 + 13, [131] = r_6 - r_7 + r_8, [132] = -r_6 - r_8 + 5, [133] = r_7;$$

$$[211] = -r_5 - r_6 + 1, [212] = [221] = r_4, [213] = [231] = -r_4 + r_5 + r_6 + 13, [222] = -6r_4 + 264, [223] = [232] = 5r_4, [224] = [242] = 5, [233] = -4r_4 - r_5 - r_6 + 57;$$

$$[311] = r_6, [312] = -r_6 - r_8 + 5, [313] = r_8, [321] = -r_4 + r_5 + r_6 - r_7 + r_8 + 13, [322] = 5r_4, [323] = -4r_4 - r_5 - r_6 + r_7 - r_8 + 57, [331] = r_4 - r_5 - 2r_6 + r_7 - r_8 - 8, [332] = -5r_4 + r_6 + r_8 + 65, [333] = 4r_4 + r_5 + r_6 - r_7 - 32;$$

$$[422] = 5$$

где $r_5 + r_6 \leq 1, r_6 + r_8 \leq 5, 8 \leq r_4 \leq 14, 0 \leq r_7 \leq 5$.

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 2.

Если $r_4 = 8$, то равенство $[113] = r_4 - r_5 - r_6 - r_8 - 8$ влечет $r_5 = r_6 = r_8 = 0$, $[131] = r_6 - r_7 + r_8$ влечет $r_7 = 0$.

Если $r_5 = 1$, то равенство $[113] = r_4 - r_5 - r_6 - r_8 - 8$ влечет $r_4 = r_6 + r_8 + 9$, $[211] = -r_5 - r_6 + 1$ влечет $r_6 = 0$, $[121] = -r_5 - r_6 + r_7 - r_8 + 1$ влечет $r_7 = r_8$. Далее, $[132] = [312]^* = -r_8^* + 5, r_8^* = r_7$ $[132] = [123]' = -r_4' + 14$, поэтому $-r_4 + 14 = -r_7 + 5$ и $r_4 = r_7 + 9$.

По лемме 5 имеем $180 \leq [222] \leq 216$.

Если $d(u, v) = 2, \{z\} = [u] \cap [v]$, то число вершин w с $[111] = 1$ равно 16.

Пусть $d(u, v) = 2$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин u, z на расстоянии 1 в графе Δ , где $u \in \begin{Bmatrix} uv \\ 21 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 22 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $[221] = r_1 + r_2 + 12$, где $r_1 + r_2 \leq 1$, поэтому $168 = 14 \cdot 12 \leq f_1 \leq 14 \cdot 13 = 182$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[211] = -r_5 - r_6 + 1$, поэтому $168 \leq -\sum_i (r_5^i + r_6^i) + 270 \leq 182$, $88 \leq \sum_i (r_5^i + r_6^i) \leq 102$ и $0.3259 \leq \sum_i (r_5^i + r_6^i)/270 \leq 0.378$.

Подсчитаем число f_2 пар вершин u, z на расстоянии 2 в графе Δ , где $u \in \begin{Bmatrix} uv \\ 21 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 22 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 3 имеем $192 \leq [222] \leq 198$, поэтому $2688 = 14 \cdot 192 \leq f_2 \leq 14 \cdot 198 = 2772$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[212] = r_4$, поэтому $2688 \leq \sum_i r_4^i \leq 2772$ и $9.955 \leq \sum_i r_4^i/270 \leq 10.267$.

Подсчитаем число g_1 пар вершин u, z на расстоянии 1 в графе Δ , где $u \in \begin{Bmatrix} uv \\ 23 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 22 \end{Bmatrix}$. С одной стороны, по лемме 3 имеем $[221] = -r_{10}/4 + 13$, где $r_{10}/4 \leq 1$, поэтому $840 = 70 \cdot 12 \leq g_1 \leq 70 \cdot 13 = 910$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[233] = -4r_4 - r_5 - r_6 + 57$, поэтому $840 \leq -\sum_i (4r_4^i + r_5^i + r_6^i) + 15390 \leq 910$, $14480 \leq \sum_i (4r_4^i + r_5^i + r_6^i) \leq 14550$ и $53.629 \leq \sum_i (4r_4^i + r_5^i + r_6^i)/270 \leq 53.889$.

Таким образом, $9.955 \leq \sum_i r_4^i/270 \leq 10.267$, $0.3259 \leq \sum_i (r_5^i + r_6^i)/270 \leq 0.378$ и $40.1459 \leq \sum_i (4r_4^i + r_5^i + r_6^i)/270 \leq 41.446$, противоречие.

Теорема 1 доказана.

3. Граф с массивом пересечений {25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25}

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений {25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25} имеет спектр $25^1, 5^{88}, 3^{120}, -5^{88}, -7^{55}$, $1 + 25 + 300 + 25 + 1 = 352$ вершин и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 88 & 120 & 88 & 55 \\ 1 & \frac{88}{5} & 72/5 & -\frac{88}{5} & -77/5 \\ 1 & 0 & -16/5 & 0 & 11/5 \\ 1 & -\frac{88}{5} & 72/5 & \frac{88}{5} & -77/5 \\ 1 & -88 & 120 & -88 & 55 \end{pmatrix}.$$

Лемма 6. Числа пересечений графа Γ равны

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 0, p_{12}^1 = 24, p_{23}^1 = 24, p_{22}^1 = 252, p_{33}^1 = 0, p_{34}^1 = 1, \\ p_{11}^2 &= 2, p_{12}^2 = 21, p_{13}^2 = 2, p_{22}^2 = 258, p_{23}^2 = 21, p_{24}^2 = 1, p_{33}^2 = 2; \\ p_{12}^3 &= 24, p_{22}^3 = 252, p_{13}^3 = 0, p_{14}^3 = 1, p_{23}^3 = 24; \\ p_{13}^4 &= 25, p_{22}^4 = 300. \end{aligned}$$

Доказательство. Прямые вычисления по [2, лемма 4.1.7].

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $[ihl] = \begin{Bmatrix} uvw \\ ihl \end{Bmatrix}$, $\Delta = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Gamma_2(\Delta)$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p_{22}^2 = 258$ на $k_2 = 300$ вершинах. Заметим, что для нашего графа $\Lambda = \Delta_2$.

Лемма 7. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 1$. Тогда верны равенства:

$$\begin{aligned} [112] &= [121] = 2, [122] = 17, [123] = [132] = 2; \\ [212] &= [221] = 20, [222] = 216, [223] = [232] = 20, [234] = [243] = 1; \\ [312] &= [321] = 2, [322] = 17, [323] = [332] = 2; \\ [422] &= 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Решая систему линейных уравнений, заданных формулами (+), получим равенства из заключения леммы.

По лемме 7 имеем $[222] = 216$.

Лемма 8. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$. Тогда верны равенства:

$$[112] = [121] = 2, [122] = 17, [123] = [132] = 2;$$

$$[212] = [221] = 20, [214] = [241] = 1, [222] = 216, [223] = [232] = 20;$$

$$[312] = [321] = 2, [322] = 17, [323] = [332] = 4;$$

$$[422] = 1.$$

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 7.

По лемме 8 имеем $[222] = 216$.

Лемма 9. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 4$. Тогда верны равенства:

$$[113] = [131] = 1, [122] = 21;$$

$$[213] = [231] = 21, [222] = 256;$$

$$[313] = [331] = 2, [322] = 21;$$

$$[422] = 10$$

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 7.

Напомним, что $p_{12}^2 = 21, p_{22}^2 = 258, p_{23}^2 = 21, p_{24}^2 = 1$. Для числа ребер e между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$ в графе Λ выполняются равенства $e = 42 \cdot 216 + 256 = 9328$.

С другой стороны, имеем $e = 258(257 - \lambda)$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$, следовательно, $257 - \lambda = 36.155$ и $\lambda = 220.845$.

Лемма 10. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда верны равенства:

$$[111] = r_2, [112] = -r_2 - r_3 + 2, [113] = r_3, [121] = -r_2 - r_4 + 2, [122] = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 17, [123] = -r_1 - r_3 + 2, [131] = r_4, [132] = -r_1 - r_4 + 2, [133] = r_1;$$

$$[211] = -r_1 - r_2 + 2, [212] = [221] = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 17, [213] = [231] = -r_3 - r_4 + 2, [222] = -2r_1 - 2r_2 - 2r_3 - 2r_4 + 220, [223] = [232] = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 17, [224] = [242] = 1, [233] = -r_1 - r_2 + 2;$$

$$[311] = r_1, [312] = -r_1 - r_4 + 2, [313] = r_4, [321] = -r_1 - r_3 + 2, [322] = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 17, [323] = -r_2 - r_4 + 2, [331] = r_3, [332] = -r_2 - r_3 + 2, [333] = r_2;$$

$$[422] = 1,$$

$$\text{где } r_2 + r_4 \leq 2, r_2 + r_3 \leq 2, r_1 + r_3 \leq 2, r_1 + r_4 \leq 2, r_1 + r_2 \leq 2, r_3 + r_4 \leq 2.$$

Доказательство. Упрощение формул (+) как в доказательстве леммы 7.

По лемме 10 имеем $212 \leq [222] \leq 220$. Противоречие с тем, что $\lambda = 220.845$.

Теорема 2 доказана.

Список источников

1. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs // European Journal of Combinatorics. 2010. Vol. 31, № 8. P. 2064–2073.
2. Koolen J., Park J., Yu H. An inequality involving the second largest and smallest eigenvalue of a distance-regular graph // Linear Algebra and Appl. 2011. Vol. 434:12, P. 2404–2412.
3. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
4. Soicher L. The uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related results // Des. Codes Cryptogr. 2012. Vol. 84. P. 101–108.
5. Jurishich A., Koolen J. Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4 // Discrete Mathematics. 2002. Vol. 244. P. 181–202.

6. Coolsaet K., Jurishich A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // *J. Comb. Theory, Series A*. 2008. Vol. 115. P. 1086–1095.
7. Jurishich A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // *Des. Codes Cryptogr.* 2012. Vol. 65. P. 29–47.

References

1. Koolen, J.H. and Park, J. (2010), "Shilla distance-regular graphs", *European Journal of Combinatorics*, vol. 31, no 8, p. 2064–2073.
2. Brouwer, A.E., Cohen, A.M. and Neumaier, A. (1989), *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 495 p.
3. Koolen, J., Park, J. and Yu, H. (2011), "An inequality involving the second largest and smallest eigenvalue of a distance-regular graph", *Linear Algebra and Appl.*, vol. 434:12, p. 2404–2412.
4. Soicher, L. (2012), "The uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related results", *Des. Codes Cryptogr.*, vol. 84, p. 101–108.
5. Jurishich, A. and Koolen, J. (2002), "Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4", *Discrete Mathematics*, vol. 244, p. 181–202.
6. Coolsaet, K. and Jurishich, A. (2008), "Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs", *J. Comb. Theory, Series A*, vol. 115, p. 1086–1095.
7. Jurishich, A. and Vidali, J. (2012), "Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3", *Des. Codes Cryptogr.*, vol. 65, p. 29–47.

Информация об авторах:

А. А. Махнев – член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН (620077, Россия, г. Екатеринбург, Бокс № 82, ул. С. Ковалевской, 16), AuthorID: 2970;

М. М. Исакова – кандидат физико-математических наук; доцент Кабардино-Балкарского университета им. Х. М. Бербекова (360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173), AuthorID: 885233.

Information about the authors:

A. A. Makhnev – Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Chief Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (16 S. Kovalevskaya Street, P.O. Box 82, Yekaterinburg, Russia, 620077), AuthorID: 2970;

M. M. Isakova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor, Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov (173 Chernyshevskogo Street, Nalchik, Russia, 360004), AuthorID: 885233.

Научная статья

УДК 517.938

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-30-40

<https://elibrary.ru/xetuxd>

Гамильтоновы периодические дифференциальные уравнения с производными четных порядков

Марат Гаязович Юмагулов¹, Лилия Сунагатовна Ибрагимова²,
Турдикул Сафарович Орипов³

^{1, 2} Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

³ Денауский институт предпринимательства и педагогики, Денау, Узбекистан

¹ yum_mg@mail.ru

² lilibr@mail.ru

³ oripovt@mail.ru

Аннотация. В статье изучается задача о конструировании эквивалентной гамильтоновой системы для линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, содержащего производные только четных порядков. Предлагается подход, основанный на методах теории нормальных форм и теории Флоке, позволяющий переходить к равносильной гамильтоновой системе. Предложены формулы соответствующих линейных невырожденных преобразований для решения указанной задачи. Полученные результаты распространены и на аналогичную задачу для линейной периодической системы с малым параметром, невозмущенная система которой определяется гамильтоновой постоянной матрицей.

Ключевые слова: Гамильтонова система; дифференциальные уравнения четных порядков; периодические коэффициенты; эквивалентность.

Для цитирования: Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Орипов Т. С. Гамильтоновы периодические дифференциальные уравнения с производными четных порядков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 30–40. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-30-40. <https://elibrary.ru/xetuxd>.

Статья поступила в редакцию 17.05.2025; одобрена после рецензирования 20.10.2025; принята к публикации 10.06.2026.

Research article

Hamiltonian Periodic Differential Equations With Even-Order Derivatives

Marat G. Yumagulov¹, Liliya S. Ibragimova², Turdikul S. Oripov³

^{1, 2} Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

³ Denau Institute of Entrepreneurship and Pedagogy, Denau, Uzbekistan

¹ yum_mg@mail.ru

² lilibr@mail.ru

³ oripovt@mail.ru



© Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Орипов Т. С., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. The article studies the problem of constructing an equivalent Hamiltonian system for a linear differential equation with periodic coefficients containing derivatives of only even orders. An approach based on the methods of the theory of normal forms and the Floquet theory is proposed, which allows one to pass to an equivalent Hamiltonian system. Formulas for the corresponding linear nondegenerate transformations for solving the problem are proposed. The results obtained are extended to a similar problem for a linear periodic system with a small parameter, the unperturbed system of which is determined by a Hamiltonian constant matrix.

Keywords: *Hamiltonian system; differential equations of even orders; periodic coefficients; equivalence.*

For citation: Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S. and Oripov, T. S. (2026), "Hamiltonian Periodic Differential Equations With Even-Order Derivatives", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 30–40, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-30-40, <https://elibrary.ru/xetuxd>.

The article was submitted 17.05.2025; approved after reviewing 20.10.2025; accepted for publication 10.06.2026.

1. Введение

Рассматривается динамическая система, описываемая неавтономным дифференциальным уравнением:

$$L\left(\frac{d}{dt}, t\right)y = 0. \quad (1)$$

Здесь L – операторный многочлен:

$$L(p, t) = p^{2n} + a_1(t)p^{2n-2} + a_2(t)p^{2n-4} + \dots + a_{n-1}(t)p^2 + a_n(t),$$

коэффициенты $a_j(t)$ которого – это вещественные непрерывные и T – периодические функции.

Многочлен $L(p, t)$ содержит степени только четных порядков. К дифференциальным уравнениям четных порядков приводят многие задачи теории управления, теории гамильтоновых систем, теории интегрируемых уравнений, спектральной теории и др. Важным направлением исследования таких уравнений является задача о введении на них гамильтоновой структуры. Наличие такой структуры и, как следствие, существование первых интегралов и различных типов симметрий позволяет существенно продвинуться в задаче изучения динамики системы. Вопросы о наличии гамильтоновой структуры для многих типов дифференциальных уравнений и соответственно вопросы конструирования эквивалентной гамильтоновой системы в различных постановках обсуждались в ряде работ (см., например, [1]–[7]).

Большинство исследований направлено на изучение указанных вопросов для автономных дифференциальных уравнений. Существенно меньше изучены задачи для неавтономных и, в частности, для уравнений с периодическими коэффициентами, хотя и здесь получен ряд важных результатов (см., например, [8, 9]).

В настоящей работе изучаются вопросы о введении гамильтоновой структуры для периодических дифференциальных уравнений вида (1). Предлагается подход, позволяющий переходить от уравнения (1) к эквивалентной гамильтоновой системе. В качестве основного приложения рассматривается зависящая от малого параметра ε динамическая

система, описываемая неавтономным дифференциальным уравнением с производными четного порядка:

$$L\left(\frac{d}{dt}, t, \varepsilon\right)y = 0, \quad (2)$$

в котором L – операторный многочлен:

$L(p, t, \varepsilon) = p^{2n} + a_1(t, \varepsilon)p^{2n-2} + a_2(t, \varepsilon)p^{2n-4} + \dots + a_{n-1}(t, \varepsilon)p^2 + a_n(t, \varepsilon)$, коэффициенты $a_j(t, \varepsilon)$ которого – это вещественные непрерывные функции, представимые в виде $a_j(t, \varepsilon) = a_{j,0} + \varepsilon\varphi_j(t)$; $a_{j,0}$ – константы, функции $\varphi_j(t)$ предполагаются непрерывными и T – периодическими. Предлагаются новые подходы в вопросе конструирования для неавтономного уравнения (2) эквивалентной квазигамильтоновой системы:

$$\frac{dx}{dt} = (JA_0 + \varepsilon S_0(t))x, \quad x \in R^{2n}; \quad (3)$$

здесь матрица J определена равенством: $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, в котором I – единичная $(n \times n)$ матрица; A_0 – постоянная симметрическая матрица, $S_0(t)$ – непрерывная и T -периодическая матрица. Предлагаемые подходы приводят к новым достаточным признакам устойчивости уравнения (2) в критических случаях. Статья развивает исследования, начатые в [10]–[13].

2. Вспомогательные сведения

2.1. Об эквивалентности и наблюдаемости систем. Приведем сначала необходимые сведения из теории систем и теории управления (см., например, [3]–[5]).

Уравнение (1) различными способами может быть преобразовано к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Наиболее простым является переход от (1) к системе

$$z' = A(t)z, \quad y = (z, c_0), \quad (4)$$

в которой $z, c_0 \in R^{2n}$, символ (z, c_0) обозначает скалярное произведение векторов, $A(t)$ и c_0 – это, соответственно, матрица и вектор:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & 0 & -a_{n-1}(t) & 0 & \dots & -a_1(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

Переход от уравнения (1) к системе (4) осуществляет замена $z = \tilde{y}$, в которой $\tilde{y}$ – это вектор:

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(2n-1)} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

В этих формулах производные $y^{(k)}$ вычисляются по t от заданной функции $y = y(t)$. Решения уравнения (1) и системы (4) связаны равенством $y(t) = (z(t), c_0)$.

Наряду с (1) будем рассматривать систему

$$x' = B(t)x, \quad y = (x, c), \quad (7)$$

в которой $x, c \in R^{2n}$, а $B(t)$ – непрерывная и T -периодическая по t матрица. Системы (4) и (7) будем называть *эквивалентными*, если существует невырожденная матрица Q такая, что замена $x = Qz$ преобразует систему (7) в систему (4). Другими словами, существует невырожденная матрица Q такая, что выполнены равенства

$$A(t) = Q^{-1}B(t)Q, \quad Q^*c = c_0;$$

здесь Q^* обозначает транспонированную матрицу.

Уравнение (1) и систему (7) будем называть *эквивалентными*, если система (7) эквивалентна системе (4). В этом случае решения $y = y(t)$ и $x = x(t)$ уравнения (1) и системы (7) соответственно связаны равенствами $y(t) = (x(t), c)$, $x(t) = Q\tilde{y}(t)$.

Рассмотрим теперь линейную систему

$$x' = Bx, \quad y = (x, c), \quad (8)$$

в которой B – постоянная матрица, $c \in R^{2n}$. Определим квадратную матрицу

$$D(c) = \begin{bmatrix} c^* \\ c^*B \\ c^*B^2 \\ \vdots \\ c^*B^{2n-1} \end{bmatrix}; \quad (9)$$

здесь вектор c^* , а также результаты произведений c^*B^j рассматриваются как вектор-строки. Матрица $D(c)$ называется *матрицей наблюдаемости* системы (8). Система (8) называется *наблюдаемой*, если $\det D(c) \neq 0$.

2.2. О гамильтоновых системах. Приведем теперь некоторые необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории гамильтоновых систем (см., например, [1, 2, 8, 14, 15]). *Гамильтоновой системой* называют динамическую систему, описываемую уравнением

$$x' = J\nabla H(x, t), \quad x \in R^{2n},$$

в котором матрица J и вектор $\nabla H(x, t)$ определяются равенствами

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla H(x, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}} \right)^T;$$

здесь 0 и I – это, соответственно, нулевая и единичная (порядка n) матрицы, $H(x, t)$ – скалярная вещественная гладкая (по x) и непрерывная (по t) функция, называемая *гамильтонианом* системы.

Линейной автономной гамильтоновой системой (ЛАГС) называют систему вида

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad x \in R^{2n}, \quad (10)$$

в которой A – вещественная квадратная симметрическая (порядка $2n$) матрица. Ниже участвующую в системе (10) матрицу JA будем называть *гамильтоновой матрицей*.

Отметим следующие свойства гамильтоновой матрицы JA :

G1 если матрица JA имеет собственное значение λ , то числа $-\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$ также являются собственными значениями этой матрицы, причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса;

G2 если матрица JA имеет собственное значение $\lambda = 0$, то алгебраическая кратность этого собственного значения является четным числом;

G3 характеристический многочлен матрицы JA содержат степени только четных порядков.

Отметим также, что каждая постоянная гамильтонова матрица JA входит в один и только один класс эквивалентности симплектически подобных матриц. При этом в каждом таком классе выделяют один представитель, называемый *нормальной формой*. Более

детально с базовыми понятиями теории нормальных форм гамильтоновых систем и, в частности, со списками нормальных форм можно познакомиться, например, в [1, 2, 7, 8]. Одной из специфик нормальных форм является тот факт, что данному набору собственных значений с данными кратностями могут соответствовать различные нормальные формы. Указанный факт может приводить к тому, что задача конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1) может иметь качественно различные решения, а именно, приводить к гамильтоновым системам с различными нормальными формами.

Линейной периодической гамильтоновой системой (ЛПГС) называют систему вида

$$\frac{dx}{dt} = JA(t)x, \quad x \in R^{2n}, \quad (11)$$

в которой $A(t)$ – вещественная квадратная симметрическая (порядка $2n$) и T -периодическая матрица. Обозначим через V матрицу монодромии системы (11). Отметим, что характеристический многочлен матрицы монодромии V содержит степени только четных порядков и является возвратным. В частности, если λ – это мультипликатор системы (11), то $\lambda \neq 0$, при этом числа $1/\lambda, \bar{\lambda}, -1/\bar{\lambda}$ также являются ее мультипликаторами, причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса.

Динамические системы, зависящие от малого параметра ε и описываемые уравнениями вида

$$x' = J\nabla H(x, t) + \varepsilon f(x, t), \quad x \in R^{2n},$$

будем называть квазигамильтоновыми системами; здесь $f(x, t)$ – вещественная гладкая (по x) и непрерывная (по t) вектор – функция.

3. Основные результаты

3.1. О конструировании гамильтоновой системы для уравнения (1). Предлагается следующая схема конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1).

На первом этапе от уравнения (1) стандартной заменой перейдем к эквивалентной системе (4). Из общих свойств линейных периодических дифференциальных уравнений и с учетом специфики системы (4) следует, что верна

Теорема 1. *Характеристическое уравнение для матрицы монодромии системы (4) содержит степени только четных порядков и является возвратным.*

На втором этапе методами теории Флоке (см., например, [14]) перейдем от периодической линейной системы (4) к эквивалентной автономной системе

$$w' = Fw, \quad y = (P(t)w, c_0), \quad (12)$$

в которой F – некоторая постоянная матрица. Этот переход осуществляет замена $x = P(t)w$, в которой $P(t)$ – невырожденная периодическая матрица, конструируемая по фундаментальной системе решений системы (4). В силу теоремы 1 характеристический многочлен $L(p)$ матрицы F содержит степени только четных порядков, а корни уравнения $L(p) = 0$ обладают свойствами, аналогичными свойствам $G1$ и $G2$ гамильтоновых матриц. Многочлену $L(p)$ с данным набором корней можно поставить в соответствие одну или несколько нормальных форм гамильтоновых матриц с тем же набором собственных значений. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA .

На третьем этапе задается ненулевой вектор $c \in R^{2n}$ и гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JAx, \quad y = (x(t), c). \quad (13)$$

Теорема 2. Пусть гамильтонова система (13) наблюдаема. Тогда невырожденная замена $x = Dw$ осуществляет переход от системы (12) к системе (13).

Ниже приводятся аналогичные утверждения – теоремы 3 и 4 и их доказательства. Справедливость теоремы 2 может быть установлена по той же схеме и поэтому здесь не приводится.

Следствие 1. Пусть гамильтонова система (13) наблюдаема. Тогда уравнение (1) эквивалентно гамильтоновой системе (13).

Реализация предлагаемой схемы конструирования эквивалентной гамильтоновой системы для уравнения (1) сопряжена с теми трудностями, что, во-первых, требует изучить вопрос о существовании ненулевого вектора $c \in R^{2n}$, для которого гамильтонова система (13) была бы наблюдаема. Во-вторых, построить систему (12) в явном виде можно лишь в очень специальных случаях. Ниже обсуждается реализация этой схемы для периодических уравнений (2) с малым параметром, когда невозмущенное уравнение является автономным.

3.2. О конструировании квазигамильтоновой системы для уравнения (2). В качестве приложения рассмотрим уравнение (2). Это уравнение стандартной заменой сводится к системе

$$z' = A(t, \varepsilon)z, \quad y = (z, c_0), \quad (14)$$

в которой $z, c_0 \in R^{2n}$, символ (z, c_0) обозначает скалярное произведение векторов, $A(t, \varepsilon)$ и c_0 – это, соответственно, матрица и вектор:

$$A(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(t, \varepsilon) & 0 & -a_{n-1}(t, \varepsilon) & 0 & \dots & -a_1(t, \varepsilon) & 0 \end{bmatrix}, \quad c_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Эту систему представим в виде

$$z' = [A_0 + \varepsilon S(t)]z, \quad y = (z, c_0), \quad (15)$$

где матрица $A_0 = A(t, 0)$ от t не зависит:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_{n,0} & 0 & -a_{n-1,0} & 0 & \dots & -a_{1,0} & 0 \end{bmatrix},$$

а матрица $S(t)$ имеет вид

$$S(t) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varphi_n(t) & 0 & \varphi_{n-1}(t) & 0 & \dots & \varphi_1(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (2) является автономным:

$$L_0\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0; \quad (16)$$

здесь $L_0(p)$ – многочлен:

$$L_0(p) = p^{2n} + a_{1,0}p^{2n-2} + \dots + a_{n-1,0}p^2 + a_{n,0}. \quad (17)$$

Соответственно, и система (15) при $\varepsilon = 0$ является автономной:

$$z' = A_0 z, \quad y = (z, c_0).$$

Так как многочлен $L_0(p)$ содержит степени только четных порядков, то корни уравнения $L_0(p) = 0$ обладают свойствами, аналогичными указанными свойствам G1 и G2 гамильтоновых матриц. Поэтому многочлену $L_0(p)$ с данным набором корней можно поставить в соответствие одну или несколько нормальных форм гамильтоновых матриц с тем же набором собственных значений.

Предлагается следующая схема конструирования для уравнения (1) эквивалентной квазигамильтоновой системы. На первом этапе по корням уравнения $L_0(p) = 0$ определяются возможные варианты нормальных форм искомой гамильтоновой системы. Выбирается одна из соответствующих гамильтоновых матриц JA .

На втором этапе задается ненулевой вектор $c \in R^{2n}$ и гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = JA x, \quad y = (x(t), c). \quad (18)$$

Теорема 3. Пусть гамильтонова система (18) наблюдаема. Тогда уравнение (2) эквивалентно квазигамильтоновой системе:

$$\frac{dx}{dt} = (JA + \varepsilon S_0(t))x, \quad y = (x(t), c) \quad (19)$$

здесь $S_0(t) = D^{-1}S(t)D$, а $D = D(c)$ – матрица наблюдаемости системы (18).

Следствие 2. Пусть гамильтонова система (18) наблюдаема. Тогда система (15) приводима к квазигамильтоновой системе (19) невырожденной заменой переменных $z = Dx$. При этом матрицы A_0 и JA связаны равенством $A_0 = D \cdot JA \cdot D^{-1}$.

Теорема 3 может быть дополнена следующим утверждением.

Теорема 4. Пусть гамильтонова система (18) наблюдаема. Тогда замена $x = D^{-1}\tilde{y}$ (здесь $D = D(c)$ – матрица наблюдаемости системы (18), а $\tilde{y}$ – это вектор (6)) приводит уравнение (2) к эквивалентной квазигамильтоновой системе (19).

Доказательство теоремы 3. В соответствии с определением эквивалентности систем достаточно показать, что в условиях теоремы 3 выполнены равенства

$$A_0 + \varepsilon S(t) = D(JA + \varepsilon D^{-1}S(t)D)D^{-1}, \quad D^*c_0 = c.$$

Справедливость же этих соотношений следует из равенств $A_0 = D \cdot JA \cdot D^{-1}$ и $D^*c_0 = c$, установленных в [12, 13].

Доказательство теоремы 4. Условия теорем 3 и 4 совпадают. В силу теоремы 3 и следствия 2 система (15) приводима к квазигамильтоновой системе (19) невырожденной заменой переменных $z = Dx$. Но по построению решения $y(t)$ уравнения (2) и $z(t)$ системы (15) связаны равенством $z = \tilde{y}$, где $\tilde{y}$ – вектор (6). Отсюда получим, что замена $x = D^{-1}\tilde{y}$ приводит уравнение (2) к системе (19).

Для разрешимости задачи о конструировании для уравнения (2) эквивалентной квазигамильтоновой системы требуется подобрать вектор c таким образом, чтобы система (18) была наблюдаема. Естественен вопрос об условиях, когда это возможно.

В этой связи приведем вспомогательное утверждение в более общей постановке. Рассмотрим $2n$ -мерную линейную систему:

$$\frac{dx}{dt} = Bx, \quad y = (x(t), c), \quad (20)$$

в которой B – постоянная квадратная (порядка $2n$) матрица, а $c \in R^{2n}$ – ненулевой вектор. Задачей L будем называть задачу о существовании ненулевого вектора c такого, чтобы система (20) была наблюдаемой.

Лемма 1. *Задача L разрешима тогда и только тогда, когда геометрические кратности всех собственных значений матрицы B равны единице.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задача L разрешима, т.е. существует ненулевой вектор c_0 такой, что система (20) является наблюдаемой, т.е. соответствующая матрица наблюдаемости $D(c_0)$ (см. (9)) обратима. Требуется показать, что тогда геометрические кратности всех собственных значений матрицы B равны единице. Допустим противное, т.е. пусть геометрическая кратность некоторого собственного значения λ_0 матрицы B больше единицы. Тогда и у транспонированной матрицы B^* геометрическая кратность собственного значения $\bar{\lambda}_0$ больше единицы. Для простоты пусть указанная геометрическая кратность равна двум, т.е. существуют два линейно независимых вектора e_1 и e_2 так, что $B^*e_1 = \bar{\lambda}_0 e_1$ и $B^*e_2 = \bar{\lambda}_0 e_2$.

Вектор c_0 единственным образом представляется в виде $c_0 = k_1 e_1 + k_2 e_2 + g$, где k_1 и k_2 – некоторые коэффициенты, а g – вектор, являющийся линейной комбинацией остальных собственных и присоединенных векторов матрицы B^* . Нетрудно видеть, что тогда векторы $c_0, B^*c_0, (B^*)^2 c_0, \dots, (B^*)^{2n-1} c_0$ линейно зависимы, т.е. матрица $D(c_0)$ вырождена. Получили противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть геометрические кратности всех собственных значений матрицы B равны единице. Требуется показать, что тогда задача L разрешима. У транспонированной матрицы B^* геометрические кратности всех собственных значений также равны единице. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ – базис в R^{2n} , образованный собственными и присоединенными векторами матрицы B^* . Положим $c_0 = e_1 + e_2 + \dots + e_{2n}$. Нетрудно видеть, что тогда векторы $c_0, B^*c_0, (B^*)^2 c_0, \dots, (B^*)^{2n-1} c_0$ линейно независимы, т.е. матрица наблюдаемости $D(c_0)$ невырождена. Достаточность доказана.

Одновременно была предложена схема конструирования вектора c , для которого задача L разрешима.

Из леммы 1 следует, что верно

Следствие 3. Задача L для системы (18) разрешима тогда и только тогда, когда геометрические кратности всех собственных значений гамильтоновой матрицы $J A$ равны единице.

3.3. Пример. Рассмотрим зависящее от малого параметра ε дифференциальное уравнение

$$y'''' + (5 + \varepsilon\varphi(t))y'' + (4 + \varepsilon\psi(t))y = 0, \quad (21)$$

в котором $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывные T -периодические функции. При $\varepsilon = 0$ уравнение является автономным:

$$y'''' + 5y'' + 4y = 0,$$

т.е. уравнением вида (16), в котором $L_0(p) = p^4 + 5p^2 + 4$. Отметим, что все четыре корня многочлена $L_0(p)$ являются чисто мнимыми: $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$, где $\omega_1 = 2$ и $\omega_2 = 1$.

Обсудим вопрос о конструировании для уравнения (21) эквивалентной квазигамильтоновой системы вида (19). Воспользуемся теоремами 3 и 4.

Многочлену $L_0(p)$ соответствуют две различные нормальные формы JA , а именно, матрицы

$$JA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ здесь } \sigma = 1 \text{ или } \sigma = -1. \quad (22)$$

В качестве вектора c будем рассматривать вектор вида $c^* = (c_1, c_2, 0, 0)$ при $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$. В этом случае матрица наблюдаемости (9) имеет вид:

$$D(c) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 c_1 & \sigma\omega_2 c_2 \\ -\omega_1^2 c_1 & -\sigma\omega_2^2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^3 c_1 & -\sigma\omega_2^3 c_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

При $c_1 = 1, c_2 = 2, \omega_1 = 2$ и $\omega_2 = 1$ имеем $\det D(c) \neq 0$. Таким образом, матрица $D(c)$ обратима и, следовательно, соответствующая гамильтонова система (18) наблюдаема.

Пусть для определенности $\sigma = 1$, т.е. в нормальной форме (22) положим $\sigma = 1$. Тогда по теореме 2 замена $x = D^{-1}\tilde{y}$ (в которой $D(c)$ – матрица (23)) приводит уравнение (21) к эквивалентной квазигамильтоновой системе (19), в которой JA – матрица (22) при $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1$ и $\sigma = 1$, а матрица $D^{-1}S(t)D$ равна

$$D^{-1}S(t)D = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi(t) - 4\varphi(t) & 2\psi(t) - 2\varphi(t) & 0 & 0 \\ -\psi(t) + 4\varphi(t) & -2\psi(t) + 2\varphi(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Заключение

В статье изучалась задача о построении эквивалентной гамильтоновой системы для линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, содержащего производные только четных порядков. Для решения указанной задачи предложен подход, основанный на методах теории нормальных форм и теории Флоке. Этот подход позволяет переходить к равносильной автономной гамильтоновой системе в нормальной форме. В качестве основного приложения рассмотрена задача о конструировании эквивалентной квазигамильтоновой системы для содержащего малый параметр дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, невозмущенное уравнение которой является автономным. Для указанного уравнения предложены аналитические формулы соответствующих линейных невырожденных преобразований, приводящие уравнение к равносильной квазигамильтоновой системе.

Список источников

1. Журавлев В. Ф., Петров Ф. Г., Шундерюк М. М. Избранные задачи гамильтоновой механики. М.: ЛЕНАНД, 2015.
2. Meyer K., Hall G., Offin D. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. New York: Springer, 2009.
3. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.
4. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.

5. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. Метод пространства состояний. М.: Наука, 1970.
6. Красносельский А. М., Рачинский Д. И. Существование континуумов циклов в гамильтоновых системах управления // *АиТ*. 2001. № 2. С. 65–74.
7. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш. Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005.
8. Брюно А. Д. Нормальные формы систем Гамильтона с периодическим возмущением // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2019. № 56. 27 с.
9. Красносельский А. М., Рачинский Д. И. О гамильтоновости систем Лурье // *АиТ*. 2000. № 8. С. 25–29.
10. Yumagulov M. G., Ibragimova L. S., Belova A. S. Investigation of the problem on a parametric resonance in Lurie systems with weakly oscillating coefficients // *Autom. Remote Control*. 2022. Vol. 83, № 2. P. 252–263.
11. Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Белова А. С. Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* 2019. Т. 163. С. 113–126.
12. Yumagulov M. G., Ibragimova L. S. Equivalent differential equations in problems of control theory and the theory of Hamiltonian systems // *Differential Equations*. 2024. Vol. 60, № 1. P. 23–40.
13. Yumagulov M. G., Ibragimova L. S. Equivalent Hamiltonian systems for differential equations with even order derivatives // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 45, № 6. P. 2792–2801.
14. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
15. Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2009.

References

1. Zhuravlev, V. F., Petrov, F. G. and Shunderuk, M. M. (2015), *Izbranye zadachi gamiltonovoy mekhaniki* [Selected problems in Hamiltonian mechanics], Lenand, Moscow, Russia.
2. Meyer, K. R., Hall, G. R. and Offin, D. (2009), *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, 2nd ed., Springer, New York, USA.
3. Krasnosel'skii, M.A., Lifshits, E.A. and Sobolev, A.V. (1985), *Pozitivnye lineinye sistemy: metod polozhitel'nykh operatorov* [Positive linear systems: The method of positive operators], Nauka, Moscow, Russia.
4. Polyak, B. T., Khlebnikov, M. V. and Rapoport, L. B. (2019), *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Mathematical theory of automatic control], Lenand, Moscow, Russia.
5. Zadeh, L. A. and Desoer, C. A. (1970), *Teoriya lineinykh sistem. Metod prostranstva sostoyaniy* [Theory of linear systems. The state space method], Nauka, Moscow, Russia.
6. Krasnosel'skii, A. M. and Rachinskii, D. I. (2001), "Existence of continua of cycles in Hamiltonian control systems", *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], vol. 62, no 2, pp. 65–74.
7. Wang, D., Li, C. and Chow, S.-N. (2005), *Normal'nye formy i bifurkatsii vektornykh poley na ploskosti* [Normal forms and bifurcations of vector fields on the plane], MCCME, Moscow, Russia.
8. Bruno, A. D. (2019), "Normal forms of Hamiltonian systems with periodic perturbation", *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Keldysh Institute Preprints], no 56, 27 p.

9. Krasnosel'skii, A. M. and Rachinskii, D. I. (2000), "On Hamiltonian nature of Lurie systems", *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], vol. 61, no 8, pp. 25–29.
10. Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S. and Belova, A. S. (2022), "Investigation of the problem on a parametric resonance in Lurie systems with weakly oscillating coefficients", *Automation and Remote Control*, vol. 83, no 2, pp. 252–263.
11. Yumagulov, M. G., Ibragimova, L. S. and Belova, A. S. (2019), "Methods for studying stability of linear periodic systems depending on a small parameter", *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya* [Advances in Science and Technology. Ser. Contemporary Mathematics and Its Applications], vol. 163, pp. 113–126.
12. Yumagulov, M. G. and Ibragimova, L. S. (2024), "Equivalent differential equations in problems of control theory and the theory of Hamiltonian systems", *Differential Equations*, vol. 60, no 1, pp. 23–40.
13. Yumagulov, M. G. and Ibragimova, L. S. (2024), "Equivalent Hamiltonian systems for differential equations with even order derivatives", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 45, no 6, pp. 2792–2801.
14. Yakubovich, V. A. and Starzhinskii, V. M. (1972), *Lineinye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear differential equations with periodic coefficients and their applications], Nauka, Moscow, Russia.
15. Markeev, A. P. (2009), *Lineinye gamiltonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoichivosti dvizheniya sputnika otnositel'no tsentra mass* [Linear Hamiltonian systems and some problems of satellite motion stability about the center of mass], Institute of Computer Science, Moscow-Izhevsk, Russia.

Информация об авторах:

М. Г. Юмагулов – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, Уфимский университет науки и технологий (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32а);

Л. С. Ибрагимова – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Уфимский университет науки и технологий (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32а);

Т. С. Оripов – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры высшей математики Денауского института предпринимательства и педагогики (190503, Узбекистан, г. Денау, ул. Ш.Рашидова, д. 78).

Information about the authors:

M. G. Yumagulov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Head of the Department of Differential Equations and Control Theory, Ufa University of Science and Technology (32a Zaki Validi St., Ufa, Russia, 450076);

L. S. Ibragimova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor, Department of Differential Equations and Control Theory, Ufa University of Science and Technology (32a Zaki Validi St., Ufa, Russia, 450076);

T. S. Oripov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor of the Department of Higher Mathematics at the Denau Institute of Entrepreneurship and Pedagogy (78 Sh. Rashidova st., Denau, Uzbekistan, 190503).

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 534.18, 534.015, 517.925.42, 621.37

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-41-58

<https://elibrary.ru/ppzuzx>



Маломодовая редукция коллективной динамики ансамбля осцилляторов с асимметричным шумом Коши

Мария Викторовна Агеева¹, Денис Сергеевич Голдобин²

^{1,2} Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

² Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

¹ ageeva_mv00@mail.ru

² denis.goldobin@gmail.com

Аннотация. В работе исследуется влияние, оказываемое индивидуальными асимметричными шумами Коши на ансамбль синусоидально-связанных осцилляторов (как, например, ансамбль Курамото и ансамбль Курамото–Сакагучи). Для построения модели используется разложение по круговым кумулянтам. В рамках маломодовой редуцированной модели выявлен эффект смещения частоты коллективных колебаний, вызванный асимметрией шума. Помимо асимметрии в формирование эффекта вносят вклад более тяжелые "хвосты" распределения шума. Точность теоретических результатов, полученных в рамках маломодовой редукции представления круговых кумулянтов, подтверждается "точным" решением, полученным с помощью метода цепных дробей.

Ключевые слова: асимметричный шум Коши; круговые кумулянты; коллективные колебания; ансамбль Курамото; метод цепных дробей.

Для цитирования: Агеева М. В., Голдобин Д. С. Маломодовая редукция коллективной динамики ансамбля осцилляторов с асимметричным шумом Коши // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 41–58. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-41-58. <https://elibrary.ru/ppzuzx>.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы № 124021600038-9.

Статья поступила в редакцию 28.01.2026; одобрена после рецензирования 10.03.2026; принята к публикации 10.06.2026.



© Агеева М. В., Голдобин Д. С., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MECHANICS

Research article

Low-Dimensional Model Reduction of the Collective Dynamics of an Oscillators Ensemble With Asymmetric Cauchy Noise

Maria V. Ageeva¹, Denis S. Goldobin²^{1, 2} Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia² Perm State University, Perm, Russia¹ ageeva_mv00@mail.ru² denis.goldobin@gmail.com

Abstract. In this work, the effect of individual asymmetric Cauchy noises on an ensemble of sin-coupled oscillators (such as, for example, ensemble Kuramoto and ensemble Kuramoto-Sakaguchi) is studied. Circular cumulant expansion is used to build a mathematical model. Within the framework of the low-dimensional model reduction the effect of frequency shift of collective oscillations, produced by the noise asymmetry, is identified. In addition to asymmetry, the heavier "tails" of the noise distribution also contribute to the formation of the effect. The accuracy of theoretical results of the low-dimensional reduction of the circular cumulant representation is validated by the "exact" solution, calculated with the continued fraction method.

Keywords: *asymmetric Cauchy noise; circular cumulant; collective oscillations; Kuramoto ensemble; continued fraction method.*

For citation: Ageeva, M. V. and Goldobin, D. S. (2026), "Low-Dimensional Model Reduction of the Collective Dynamics of an Oscillators Ensemble With Asymmetric Cauchy Noise", Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science, no 2(73), pp. 41–58, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-41-58, <https://elibrary.ru/ppzux>.

Acknowledgments: the work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No 124021600038-9).

The article was submitted 28.01.2026; approved after reviewing 10.03.2026; accepted for publication 10.06.2026.

Введение

Теория Отта–Антонсена (ОА) [1] позволяет точно описывать динамику ансамбля нелинейных осцилляторов под воздействием симметричного шума Коши. Асимметрия же шума, широко встречающаяся в природе, нарушает применимость теории и вынуждает разрабатывать альтернативные подходы к решению задачи. Возможно, наиболее важным из всех является случай индивидуального шума. Например, эндогенный шум является причиной возникновения коллективных колебаний в гамма-диапазоне в сбалансированных сетях синаптически связанных нейронов [2]. Также эффект наблюдался для модели квадратичных нейронов накопления-сброса ("quadratic integrate-and-fire neurons", QIFs [3]), для которой теория ОА верна в случае отсутствия шума. Однако, при наличии шума, в рамках теории ОА, невозможно получить макроскопические автоколебания, что мотивирует разработку расширения теории на случаи слабого отклонения от базового многообразия.

Ранее уже были рассмотрены некоторые задачи в рамках так называемого формализма "круговых кумулянтов" (КК) [4, 5], маломодовые редукции которого уже позволяют включить в модель внешние и внутренние шумы [6–10]. Однако в тех теориях было использовано "диффузионное приближение", для которого шум считался белым и гауссовым [11, 12].

Известно, что гауссов шум обладает уникальным свойством – он не может быть асимметричным, поскольку микроскопические флуктуации лишь сдвигают его среднее значение. Напротив, для негауссова альфа-устойчивого шума микроскопические флуктуации приводят не только к утяжелению хвостов, но и к появлению асимметрии распределения. При этом асимметричный шум оказывается не просто возможным, но и естественным для многих физически и биологически значимых приложений [13–17].

В работе приведена математическая основа, построенная на формализме "круговых кумулянтов", пригодная для теоретического описания макроскопической динамики популяций осцилляторов, подверженных асимметричному шуму Коши. Ключевыми наблюдаемыми для макроскопического описания коллективного поведения являются частота коллективных колебаний и параметр порядка Курамото, модуль которого принимает значение 1 при идеальной синхронизации и 0 – в режимах максимального разупорядочения. В работе представлено описание явления нелинейного смещения частоты коллективных колебаний, которое полностью теряется при подстановке Отта–Антонсена для ансамбля типа Курамото [18] с асимметричным шумом.

1. Редуцированные модели представления круговых кумулянтов для асимметричного шума Коши

Рассмотрим ансамбль синусоидально связанных осцилляторов, подверженных индивидуальным δ -коррелированным шумам:

$$\dot{\phi}_j = \omega(t) + \text{Im}(2h(t)e^{-i\phi_j}) + \sigma\zeta_j(t), \quad (1)$$

где ϕ_j – фаза колебаний j -го осциллятора, $\zeta_j(t)$ – асимметричный шум Коши. В такой форме уравнение (1) охватывает широкий спектр моделей из теории коллективных явлений; ниже будет подробнее рассмотрен случай ансамбля Курамото, при котором $h = \varepsilon Z_1/2$ и

$$Z_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j}.$$

Тем же уравнением (1) может быть описано и множество других парадигматических моделей, поскольку их вид задается в том числе формой среднего поля $h(t)$. К примеру, для шунтированной цепочки джозефсоновских контактов $h = \text{const}$ [19]. Шум Коши является частным случаем α -устойчивого шума, и в силу того, что плотность вероятности для таких шумов не представима в виде элементарных функций, его распределение часто задается через характеристическую функцию F :

$$F_x(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \exp[ik\mu - |ck|^\alpha (1 + i\beta \text{sign}(k)\Theta)].$$

где $\alpha \in (0; 2]$. Параметр β отвечает за асимметрию распределения, μ – за сдвиг, c – параметр масштабирования ($c > 0$), задающий ширину распределения, и при $\alpha = 1$ (шум Коши):

$$\Theta = -\frac{2}{\pi} \ln|k|.$$

Для анализа временной динамики системы запишем дробную версию уравнения Фоккера–Планка (см. [20]) для плотности вероятности $w(\phi, t)$ в Фурье-пространстве:

$$\dot{a}_m = im\omega a_m + mha_{m-1} - mh^* a_{m+1} + \sigma\dot{\Phi}^{(\varepsilon)}(m)a_m, \quad (2)$$

где

$$w(\varphi, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(t) e^{-im\varphi} \quad \text{и} \quad \dot{\Phi}^{(\xi)} = \frac{\Phi_{\xi\Delta}(m, c = \Delta t)}{\Delta t}.$$

Последнее "шумовое" слагаемое является логарифмом характеристической функции $\Phi_{\xi\Delta}(k, c) \equiv \ln F_{\xi\Delta}(k, c)$ и для асимметричного Коши шума принимает форму:

$$\dot{\Phi}^{(\xi)} = -|m| + i \frac{2\beta}{\pi} m \ln |m|.$$

Цепочка уравнений (2) может быть обобщена на случай гетерогенной популяции с лоренцевым распределением собственных частот:

$$G(\omega) = \frac{\pi^{-1} \gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2},$$

где γ – полуширина распределения Лоренца, ω_0 – медианная частота. Интегрируя (2) по собственным частотам, можно воспользоваться Основной теоремой о вычетах. Замыкать контур интегрирования следует через верхнюю полуплоскость комплексного ω , поскольку на нижней полуплоскости уравнение (2) дает бесконечно быстрый экспоненциальный рост аналитического продолжения. Тогда для Фурье-мод получим $Z_m(t) = \int G(\omega) a_m(\omega, t) d\omega = a_m(\omega_0 + i\gamma, t)$ и перейдем от (2) к уравнению динамики параметров порядка Курамото–Дайдо Z_m :

$$\dot{Z}_m = m((i\omega_0 - \gamma)Z_m + hZ_{m-1} - h^*Z_{m+1}) + \sigma \dot{\Phi}^{(\xi)}(m)Z_m. \quad (3)$$

Ряд параметров порядка Z_m определяет степень синхронизации системы: Z_1 отвечает за глобальную синхронизацию (случай $Z_1 = 1$ возникает при полной синхронизации), в то время как старшие порядки описывают систему осцилляторов с точки зрения образования кластеров.

Характеристическая функция, записанная для циклической переменной, аналогична производящей моменты функции и связана с параметрами порядка рядом вида:

$$F(k, t) = \langle e^{ke^{i\varphi}} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(t) \frac{k^m}{m!}. \quad (4)$$

И, далее, введем в рассмотрение так называемые "круговые кумулянты" (КК), связанные с параметрами порядка через логарифм характеристической функции:

$$\Psi(k, t) = k \frac{\partial}{\partial k} \ln F(k, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \kappa_m k^m. \quad (5)$$

Связь параметров порядка и круговых кумулянтов произвольного порядка задается рекуррентным соотношением вида:

$$\kappa_m = \frac{Z_m}{(m-1)!} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\kappa_n Z_{m-n}}{(m-n)!}. \quad (6)$$

В частности, для первых трех элементов получаем следующие соотношения:

$$\kappa_1 = Z_1, \quad \kappa_2 = Z_2 - Z_1^2, \quad \kappa_3 = \frac{Z_3 - 3Z_2Z_1 + 2Z_1^3}{2}; \quad (7)$$

$$Z_1 = \kappa_1, \quad Z_2 = \kappa_2 + \kappa_1^2, \quad Z_3 = 2\kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3. \quad (8)$$

Дифференцируя (7) по времени, получим:

$$\dot{\kappa}_1 = \dot{Z}_1, \quad \dot{\kappa}_2 = \dot{Z}_2 - 2\dot{Z}_1 Z_1, \quad \dot{\kappa}_3 = \frac{\dot{Z}_3 - 3(\dot{Z}_2 Z_1 + Z_2 \dot{Z}_1) + 6Z_1^2 \dot{Z}_1}{2}.$$

Подставляя (3) в правую часть выражений для $\dot{\kappa}_n$ и выражая параметры порядка Z_n через κ_n , получим уравнения динамики первых трех КК:

$$\dot{\kappa}_1 = (i\omega_0 - \gamma - \sigma)Z_1 + h - h^*(\kappa_2 + Z_1^2), \quad (9)$$

$$\dot{\kappa}_2 = 2(i\omega_0 - \gamma - \sigma)\kappa_2 - 4h^*(\kappa_3 + Z_1\kappa_2) + i\frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln 4(\kappa_2 + Z_1^2), \quad (10)$$

$$\dot{\kappa}_3 = 3(i\omega_0 - \gamma - \sigma)\kappa_3 - h^*(9\kappa_4 + 3\kappa_2^2 + 6Z_1\kappa_3) + i\frac{3\beta\sigma}{\pi} \left(\ln 9\kappa_3 + \ln \frac{27}{4} \kappa_2 Z_1 + \ln \frac{3}{4} Z_1^3 \right). \quad (11)$$

В отсутствие шума ($\sigma = 0$) или в случае, когда шум симметричен ($\beta = 0$), цепочка уравнений (9)–(11) пропускает решение в виде подстановки Отта–Антонсена (КК второго порядка и старше равны нулю: $\kappa_{m \geq 2} = 0$), а динамика Z_1 регулируется исключительно уравнением (9). Более того, это решение оказывается притягивающим для всех $\gamma + \sigma > 0$ [21–23]. Малое, но конечное $\beta\sigma$ отклоняет притягивающее многообразие от многообразия Отта–Антонсена. С учетом этого, представление круговых кумулянтов может стать полезной основой для неидеальных ситуаций, где кумулянты старших порядков малы, но не равны нулю. Для $\beta\sigma > 0$ справедливым оказывается

$$\kappa_2 \propto \beta\sigma Z_1^2 \ln 4,$$

$$\kappa_3 \propto \beta\sigma \left(Z_1^3 \ln \frac{3}{4} + \kappa_2 Z_1 \ln \frac{27}{4} \right) + O(\kappa_2^2).$$

В рамках задачи выделяется два варианта иерархии малости:

- I. В случае слабой коллективной моды, для которой $|Z_1| \ll 1$, кумулянтный ряд образует простую геометрическую прогрессию $\kappa_m \sim (Z_1)^m$.
- II. В случае слабого шума $\sigma \ll 1$ или слабой его асимметрии $\beta \ll 1$ порядок величины κ_3/κ_2 оказывается приблизительно равным $\kappa_3/\kappa_2 \approx -0.2Z_1$, то есть κ_3 имеет тот же порядок малости, что и κ_2 . Однако, поскольку κ_3 оказывает лишь косвенное влияние на динамику параметра порядка Z_1 , а само $Z_1 \ll 1$, κ_3 все же будет иметь второстепенное влияние на динамику уравнения (9), и задачу можно замкнуть, положив $\kappa_3 = 0$. В некоторых ситуациях это приближение может быть принято в качестве результата строгого асимптотического разложения, в других является грубым приближением, однако в любом из этих случаев использование двухкумулянтной редукции для решения задачи имеет смысл.

2. Цепочка уравнений для круговых кумулянтов

Помимо маломодовой редукции, оказывается возможным вывести и бесконечную цепочку уравнений для динамики круговых кумулянтов. Производная характеристической функции имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(k, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{Z}_m(t) \frac{k^m}{m!} = (i\omega_0 - \gamma)k \frac{\partial}{\partial k} F + h k F - h^* k \frac{\partial^2}{\partial k^2} F + \sigma \Phi^{(\xi)} \left(k \frac{\partial}{\partial k} \right) F.$$

Поскольку $\Psi(k, t) = \frac{k}{F} \frac{\partial F}{\partial k} = k \frac{\partial}{\partial k} \ln F(k, t)$, получим $\dot{\Psi} = k \frac{\partial}{\partial k} \frac{\dot{F}}{F}$, и динамика производящей кумулянты функции описывается уравнением:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (i\omega_0 - \gamma - \sigma) k \frac{\partial}{\partial k} \Psi + h k - h^* k \frac{\partial}{\partial k} \left(k \frac{\partial}{\partial k} \frac{\Psi}{k} + \frac{\Psi^2}{k} \right) + i \frac{2\beta\sigma}{\pi} k \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{F} k \frac{\partial}{\partial k} \ln \left(k \frac{\partial}{\partial k} \right) F \right).$$

Собирая слагаемые при степени k^m , и с учетом определения Ψ через кумулянтный ряд (4), получим важное рекуррентное соотношение для динамики произвольного κ_m :

$$\dot{\kappa}_m = m(i\omega_0 - \gamma - \sigma) \kappa_m + h \delta_{m1} - h^* \left(m^2 \kappa_{m+1} + m \sum_{n=1}^m \kappa_{m-n+1} \kappa_n \right) + i m \frac{2\beta\sigma}{\pi} \lambda_m^{(\beta)}, \quad (12)$$

где

$$\lambda^{(\beta)} \equiv \frac{1}{F} k \frac{\partial}{\partial k} \ln \left(k \frac{\partial}{\partial k} \right) F \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{(\beta)} k^m.$$

С учетом вида характеристической функции (4), заметим, что коэффициент $k \frac{\partial}{\partial k} \ln \left(k \frac{\partial}{\partial k} \right)$ не влияет на показатель степени в k^m , а лишь добавляет множитель $m \ln(m)$ к слагаемому k^m . Тогда для определения коэффициентов степенного ряда $\lambda_m^{(\beta)}$ получим производную рекуррентного соотношения (6):

$$\dot{\kappa}_m = \frac{\dot{Z}_m}{(m-1)!} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\kappa_n \dot{Z}_{m-n} + \dot{\kappa}_n Z_{m-n}}{(m-n)!}.$$

Подставляя слагаемые при $\beta\sigma$ из уравнений динамики (3) и (12), получим рекуррентное соотношение для коэффициентов $\lambda_m^{(\beta)}$:

$$m \lambda_m^{(\beta)} = \frac{m \ln m Z_m}{(m-1)!} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(\kappa_n (m-n) \ln(m-n) + n \lambda_n^{(\beta)}) Z_{m-n}}{(m-n)!}.$$

Для построения строгой асимптотической теории достаточно ограничиться вычислением κ_1^m -вкладов в $\lambda_m^{(\beta)}$:

$$\lambda_m^{(\beta)} = C_m \kappa_1^m + \dots, \quad \text{где } C_m = \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(-1)^n \ln(m-n)}{n!(m-n-1)!}. \quad (13)$$

Изначально вид коэффициентов разложения C_m проще угадать по виду первых нескольких $\lambda_m^{(\beta)}$, нежели строго получить. Однако и вывод формулы (13) вполне возможен. Приведем его ниже.

Пусть $d^+ Z_m = i \frac{2\beta\sigma}{\pi} m \ln m Z_m$ – шумовая часть уравнения (3). В таком случае, для характеристической функции и Ψ -функции имеем:

$$d^+ F = \sum i \frac{2\beta\sigma}{\pi} m \ln m Z_m,$$

$$d^+\Psi = k \frac{\partial}{\partial k} \frac{d^+F}{F} = k \frac{\partial}{\partial k} \frac{\sum \frac{k^m}{m!} i \frac{2\beta\sigma}{\pi} m \ln m Z_1^m}{e^{kZ_1}}. \quad (14)$$

Уравнение (14) написано для случая Отта–Антонсена, где $Z_m = (Z_1)^m$, поскольку вклады κ_1^m -слагаемых в производную $\dot{\kappa}_m$ (или в приращение $d\kappa_m$) не зависят от старших кумулянтов κ_n , $n \geq 2$. То есть, для всех состояний ансамбля с одним и тем же значением κ_1 вклады старших кумулянтов будут идентичными. Следовательно, достаточно вычислить эти вклады для состояний $\kappa_m = \kappa_1 \delta_{m1}$, то есть на множестве ОА. После несложных преобразований уравнения (14), получим

$$d^+\Psi = e^{-kZ_1} \sum_m i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \frac{k^m Z_1^m}{(m-1)!} [m \ln m - (m-1) \ln(m-1)].$$

Далее разложим экспоненту в ряд, и для большей ясности последующих действий, перейдем к новому индексу суммирования $m \rightarrow n$:

$$d^+\Psi = \sum_{m'} \frac{(-kZ_1)^{m'}}{m'!} \sum_n i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \frac{k^n Z_1^n}{(n-1)!} [n \ln n - (n-1) \ln(n-1)]. \quad (15)$$

Группировкой слагаемых при k^m ранее уже было получено уравнение динамики круговых кумулянтов (12). Соответственно, из всех слагаемых суммы (15) необходимо вычленить такие, для которых справедливо $m' + n = m$, и тогда, сопоставляя полученное с "шумовым" слагаемым уравнения (12), получим:

$$m C_m \kappa_1^m = \sum_{n=m-m'} \frac{(-Z_1)^{m'}}{m'!} \frac{Z_1^n [n \ln n - (n-1) \ln(n-1)]}{(n-1)!}.$$

После замены индексов, с учетом $\kappa_1 = Z_1$, получим промежуточный результат:

$$C_m = \frac{1}{m} \sum_{n=2}^m \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!} \frac{[n \ln n - (n-1) \ln(n-1)]}{(n-1)!}. \quad (16)$$

Суммирование ряда (16) производится при $n \geq 2$, поскольку меньшие n дают ноль и не вносят вклад в сумму. Далее заметим, что в (16) натуральный логарифм $\ln n$ некоторого числа n повторяется дважды. Перепишем ряд в виде суммы логарифмов одного аргумента, также сместив точку начала суммирования:

$$C_m = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-2} (-1)^n \left(\frac{(n+2) \ln(n+2)}{(m-n-2)!(n+1)!} + \frac{(n+2) \ln(n+2)}{(m-n-3)!(n+2)!} \right).$$

Приводя к общему знаменателю, окончательно получим:

$$C_m = \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(-1)^n \ln(n+2)}{(m-n-2)!(n+1)!} = \sum_{n=0}^{m-2} \frac{(-1)^n \ln(m-n)}{(m-n-1)!n!}.$$

Результат вычисления C_m обнаруживает чередование знака и уменьшение пропорционально $1/m!$. Произведение вида $(-1)^m C_m m!$ оказывается зависящим от m медленнее, чем любая степенная функция. Регрессия с дополнительным логарифмическим фактором

$$C_{m \geq 2} \approx \frac{(-1)^m}{m! \ln m} \quad (17)$$

обнаруживает высокую точность (на фоне множителя $m!$, который изменяется быстрее экспоненциальной функции), что можно видеть на рис. 1.

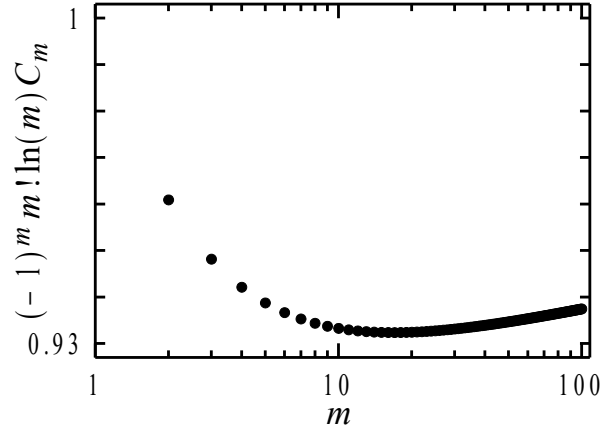


Рис. 1. График зависимости отношения C_m от m

3. Строгая асимптотическая теория для стационарных состояний ансамбля

Далее выведем строгие уравнения возмущений для малого $\beta\sigma$. Если $\gamma + \sigma > 0$ известно, что многообразие ОА является притягивающим. Малое, но конечное $\beta\sigma$ отклоняет решение от многообразия Отта–Антонсена, и это отклонение задается всеми старшими кумулянтами $\kappa_{m \geq 2} \sim \beta\sigma(Z_1)^m$. В уравнении динамики κ_m важно отметить, что порядок малости $\beta\sigma$ идентичен для κ_m и κ_{m+1} , из чего можно сделать вывод о невозможности строгого исключения кумулянта старшего порядка из (12). Тогда, с точностью до первой поправки, динамику системы можно описать следующими уравнениями:

$$\dot{Z}_1 = (i\omega_0 - \gamma - \sigma)Z_1 + h - h^*(\kappa_2 + Z_1^2), \quad (18)$$

$$\dot{\kappa}_m = m(i\omega_0 - \gamma - \sigma - 2h^*Z_1)\kappa_m - h^*m^2\kappa_{m+1} + im\frac{2\beta\sigma}{\pi}C_mZ_1^m, \text{ при } m = 2, 3, 4, \dots \quad (19)$$

Рассмотрим стационарное состояние. Зачастую фазовые системы оказываются инвариантны к сдвигу всех фаз на одну и ту же величину (таким свойством, например, обладают ансамбли Курамoto и Курамoto–Сакагучи). В таком случае, через систему (18)–(19) проходит "вращающееся" решение, которое будет стационарным во вращающейся системе отчета. Чтобы включить такие ситуации в рассмотрение, примем $\dot{\kappa}_m = im\Omega\kappa_m$, где постоянная частота Ω определяется самосогласованно (для систем без инвариантности к повороту, $\Omega = 0$). Тогда сдвиг частоты коллективных колебаний $\tilde{\omega} = \Omega - \omega_0$, возникающий в результате асимметрии шума β , приводит систему (18)–(19) к виду:

$$(i\tilde{\omega} + \gamma + \sigma + h^*Z_1)Z_1 - h = -h^*\kappa_2, \quad (20)$$

$$(i\tilde{\omega} + \gamma + \sigma + 2h^*Z_1)\kappa_m = -h^*m\kappa_{m+1} + i\frac{2\beta\sigma}{\pi}C_mZ_1^m, \text{ при } m = 2, 3, 4, \dots \quad (21)$$

Последнее уравнение, очевидно, представляет собой рекуррентное соотношение, которое в общем виде может быть записано как $\kappa_m = ic_mZ_1^m - mb\kappa_{m+1}$, где

$$c_m = \frac{2\beta\sigma\pi^{-1}C_m}{\gamma + \sigma + 2h^*Z_1 + i\tilde{\omega}}, \quad b = \frac{h^*}{\gamma + \sigma + 2h^*Z_1 + i\tilde{\omega}}.$$

В асимптотической теории оказывается возможным дать общую формулу для кумулянта любого порядка, благодаря этому рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned}\kappa_m &= ic_m Z_1^m - mb\kappa_{m+1} = ic_m Z_1^m - mb(ic_{m+1} Z_1^{m+1} - (m+1)b\kappa_{m+2}) = \dots = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} ic_{m+l} Z_1^{m+l} (-b)^l \frac{(m+l-1)!}{(m-1)!},\end{aligned}$$

справедливую для всех кумулянтов старших порядков ($m \geq 2$). Конкретно для двухкумулянтной редукции получаем:

$$\kappa_2 = i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \frac{Z_1}{h^*} \sum_{l=1}^{\infty} C_{l+1} (-1)^{l+1} (bZ_1)^l l! \approx i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \frac{Z_1}{h^*} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l+1) \ln(l+1)} \frac{1}{\left(\frac{\gamma + \sigma + i\tilde{\omega}}{h^* Z_1} + 2 \right)^l}, \quad (22)$$

где была использована аппроксимация (17). Подставляя κ_2 из уравнения (20), получим самосогласованное уравнение для определения Z_1 :

$$\gamma + \sigma + i\tilde{\omega} + h^* Z_1 - \frac{h}{Z_1} = i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l C_{l+1} l! (bZ_1)^l. \quad (23)$$

Сходимость ряда (22) важна в силу того, что: l -ое слагаемое входит в выражение для κ_{l+1} ; обрывание разложения КК после κ_l эквивалентно обрыванию ряда (22), но после $(l-1)$ -го члена. Ряд (22), с другой стороны, можно рассматривать как геометрическую прогрессию со знаменателем bZ_1 , который можно оценить из (21) с точностью до ведущего порядка по $\beta\sigma \ll 1$. Для этого, выразим из (16):

$$i\tilde{\omega} + \gamma + \sigma = \frac{h}{Z_1} - h^* Z_1 - \frac{h^* \kappa_2}{Z_1} = \frac{h}{Z_1} - h^* Z_1 + O(\beta\sigma),$$

и подставляя это в определение b , получим окончательно:

$$bZ_1 \approx \frac{1}{1 + \frac{hZ_1^*}{h^* Z_1} \frac{1}{|Z_1|^2}}.$$

Можно показать, что абсолютное значение второго слагаемого в знаменателе ≥ 1 , и 1 достигается только для состояний полной синхронности $|Z_1| = 1$. Для состояний низкой синхронизации ($|Z_1| \ll 1$) ряд (22) быстро затухает.

Далее, рассмотрим поведение знаменателя прогрессии подробнее на примере типичного случая – глобальной связи Курамото–Сакагучи:

$$h = \frac{\varepsilon}{2} e^{-i\theta} Z_1,$$

где ε – сила связи, θ – фазовый сдвиг связи ($\theta = 0$: чисто диссипативная связь, $\theta = \pm\pi/2$: чисто консервативная связь, $\cos \theta < 0$: отталкивающая связь (1)). Как для $\beta\sigma \rightarrow 0$ (Иерархия малости), так и вблизи порога синхронизации, где $|\kappa_2| \propto |Z_1|^2 \ll |Z_1|$ (I иерархия малости), κ_2 -слагаемое в уравнении (20) оказывается мало, и им можно пренебречь. В таком случае действительная часть уравнения (20), отнесенного к Z_1 , дает

$$\gamma + \sigma = \frac{\varepsilon}{2} \cos \theta (1 - |Z_1|^2),$$

и коллективный режим, очевидно, существует только при $|Z_1|^2 > 0$, что позволяет найти порог перехода для ансамбля Курамoto: синхронизация возможна при $\varepsilon > \varepsilon_{кр}$, где $\varepsilon_{кр} = 2(\gamma + \sigma)/\cos \theta$, который оказывается не зависящим от асимметрии шума β . Выражая параметр порядка через пороговое значение $\varepsilon_{кр}$, получим

$$|Z_1|^2 \Big|_{\beta\sigma \rightarrow 0} = 1 - \frac{\varepsilon_{кр}}{\varepsilon}.$$

В таком случае, нетрудно получить выражение для знаменателя прогрессии bZ_1 :

$$|bZ_1| \approx \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{кр})}{\sqrt{(\varepsilon - \varepsilon_{кр})^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_{кр})\cos 2\theta}},$$

который меньше 1 при $\cos(2\theta) > -\varepsilon_{кр}/(2(\varepsilon_{кр} - \varepsilon_{кр}))$. Последнее условие оказывается справедливым при $\varepsilon < 2\varepsilon_{кр}$; в случае более сильной связи (при приближении к $\theta = \pi/2$, т.е. для преимущественно консервативной связи со слабой диссипацией) это условие нарушается. Такой случай имеет значение, поскольку может быть связан с первым аналитически разрешимым примером состояний-"химер" (решенным подстановкой Отта–Антонсена), где связь была слабо неконсервативной [24].

В общем случае можно сделать вывод, что случай быстрой сходимости ряда (20) является типичным, но не обязательным. Множитель $(l+1)\ln(l+1)$ в знаменателе улучшает сходимость ряда при $|bZ_1| \leq 1$, но не способен обеспечить сходимость при $|bZ_1| > 1$.

4. Коллективная динамика ансамбля Курамoto с учетом внутреннего асимметричного шума Коши

Запишем уравнение динамики фазовой переменной для ансамбля Курамoto с шумом:

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{m=1}^N \sin(\varphi_m - \varphi_j) + \sigma \xi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

Связь между коэффициентом ε и $h(t)$ становится очевидной при рассмотрении уравнения (24) вкупе с (1):

$$h(t) = \frac{\varepsilon Z_1}{2}.$$

В термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$, справедливо равномерно вращающееся решение: $\dot{Z}_m = im\Omega Z_m$ или эквивалентное ему $\dot{\kappa}_m = im\Omega \kappa_m$, где $\tilde{\omega} = \Omega - \omega_0$ ненулевое в силу асимметричности шума $\beta \neq 0$. Тогда, уравнение (10) с учетом $\kappa_3 = 0$ переходит к виду:

$$\kappa_2 = \frac{i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln 2}{i\tilde{\omega} + \gamma + \sigma + \varepsilon |Z_1|^2 - i \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln 2} Z_1^2,$$

и после подстановки κ_2 в (9), уравнение для первого параметра порядка приобретает вид:

$$|Z_1|^4 + \left(\frac{3\varepsilon_{кр}}{2\varepsilon} - 1 + i \frac{3\tilde{\omega}}{\varepsilon} \right) |Z_1|^2 + \left(\frac{\varepsilon_{кр}}{\varepsilon} - 1 + i \frac{2\tilde{\omega}}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\varepsilon_{кр}}{2\varepsilon} + i \left[\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} - 2 \frac{\beta\sigma}{\pi\varepsilon} \ln 2 \right] \right) = 0. \quad (25)$$

Для симметричного шума $\beta = 0$ и $\tilde{\omega} = 0$, уравнение (25) представляет собой квадратный трехчлен по $|Z_1|^2$, однако при $\beta \neq 0$ считать (25) просто квадратным уже будет неверно,

поскольку $|Z_1|$ действительно, в то время как коэффициенты уравнения комплексны и значение $\tilde{\omega} \neq 0$ определяется из условия самосогласованности.

Распишем уравнение (25) на действительную и мнимую часть:

$$|Z_1|^4 + \left(\frac{3\varepsilon_{кр}}{2\varepsilon} - 1 \right) |Z_1|^2 - \frac{\varepsilon_{кр}}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon_{кр}}{\varepsilon} \right) - \frac{2\tilde{\omega}}{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} - 2 \frac{\beta\sigma}{\pi\varepsilon} \ln 2 \right) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\tilde{\omega}}{\varepsilon} \left(|Z_1|^2 + \frac{2\varepsilon_{кр}}{3\varepsilon} - \frac{1}{3} \right) + \frac{\ln 2}{3} \frac{2\beta\sigma}{\pi\varepsilon} \frac{\varepsilon_{кр} - \varepsilon}{\varepsilon} = 0. \quad (27)$$

Системой (26)–(27) задаются значения действительных ($|Z_1|$, $\tilde{\omega}$). Нетривиальное решение системы единственно для любого надкритического $\varepsilon > \varepsilon_{кр}$ значения силы связи; бифуркация всегда прямая, а решений ниже порога не существует.

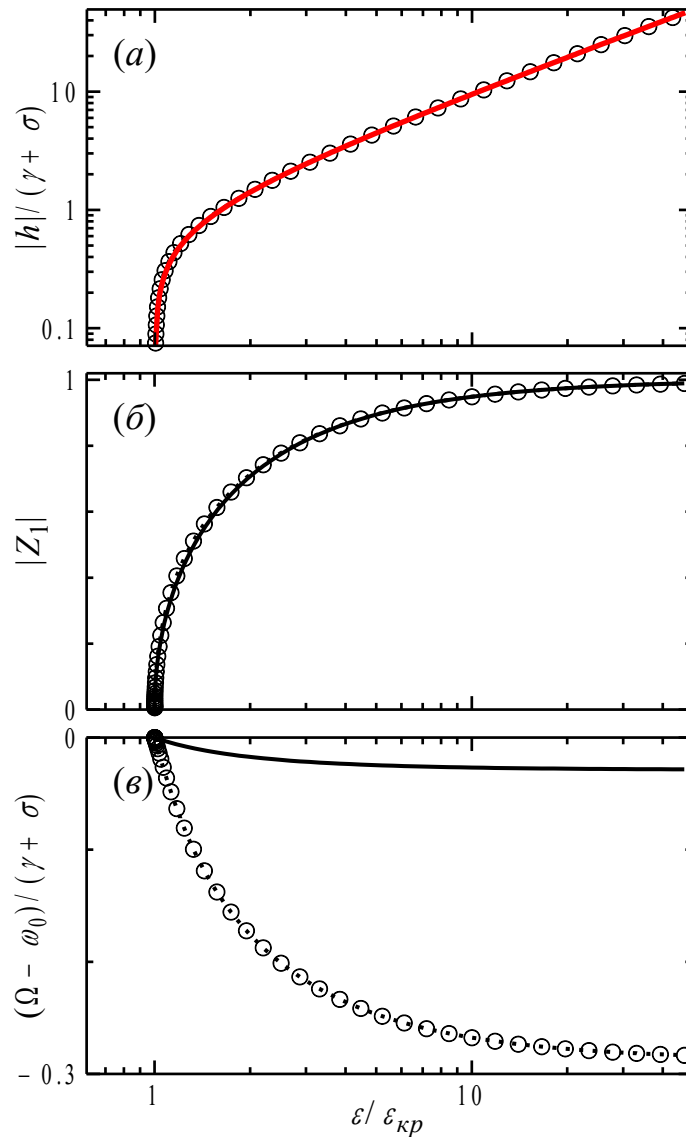


Рис. 2. Зависимость характеристик стационарного решения от силы связи: (а) среднее поле $|h|$ при $\beta = 1$ (круги) и аппроксимация (28) (сплошная линия); параметр порядка Курамото $|Z_1|$ (б) и сдвиг частоты коллективной моды (в) при $\beta = 0.1$ (сплошные линии) и $\beta = 1$ (круги). Пары зависимостей, построенные на графиках (а) и (б), неидентичны, хотя мало отличимы визуально

На рисунке 2 представлены зависимости среднего поля $|h|$ (а), параметра порядка Курамто $|Z_1|$ (б) и сдвига частоты коллективной моды колебаний $\tilde{\omega}$ (в) от силы связи ε , рассчитанные "точно" методом цепных дробей с $M = 2000$ мод Z_m . Захватом частоты отдельных осцилляторов управляет среднее поле h ; асимптотический вид зависимости $\varepsilon(h)$ может быть получен аналитически:

$$|h|_{\infty} = \sqrt{\varepsilon^2 / 4 - \varepsilon(\gamma + \sigma) / 2}, \quad (28)$$

что справедливо при $\varepsilon/\varepsilon_{кр} \gg 1$.

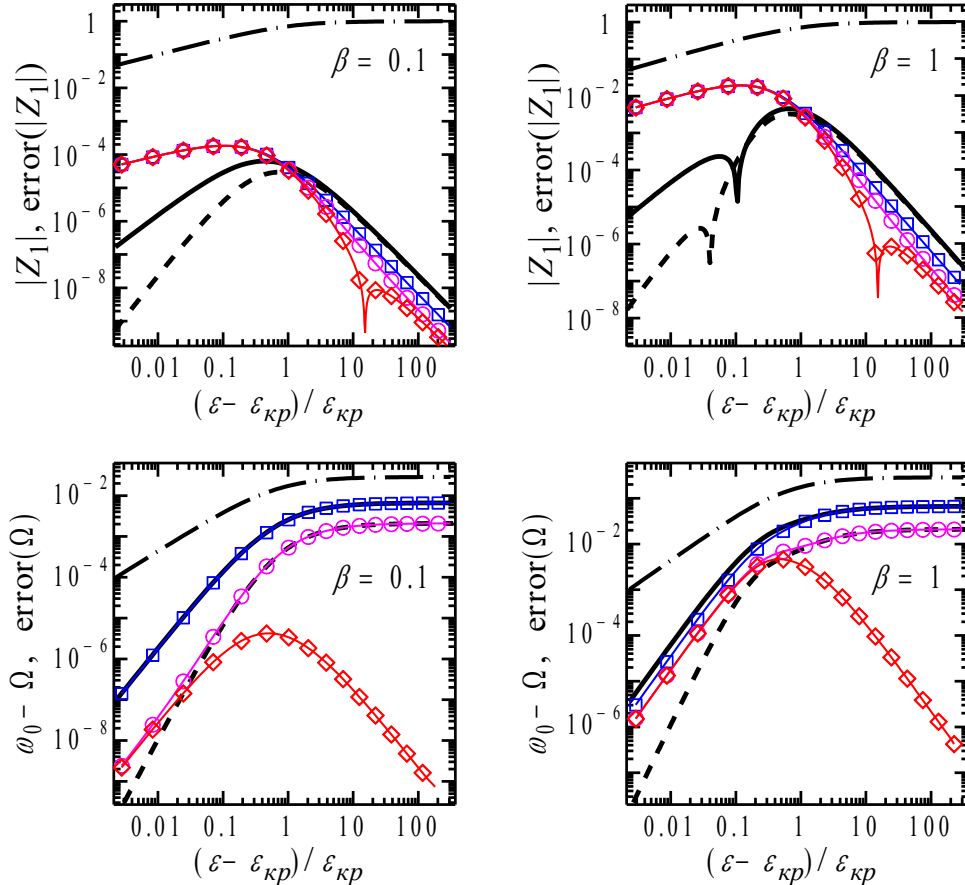


Рис. 3. "Точное" решение, представленное значением параметра порядка Курамто $|Z_1|$ и сдвигом частоты коллективных колебаний, вычислено методом цепных дробей с использованием $M = 2000$ мод и показано штрихпунктирными линиями. Погрешность 2КК и 3КК моделей показана сплошными и штриховыми линиями соответственно; погрешность линейного по $\beta\sigma$ приближения (23) представлена для случаев обрывания суммы после $l = 2$ (квадраты), 3 (круги) и 50 (ромбы). Значения параметра асимметрии шума β указаны на графиках

В верхнем ряду рис. 3 представлены двух- и трехкумулянтные (2КК и 3КК) модели, обеспечивающие хорошую точность вблизи точки перехода Курамто, где иерархия малости принимает вид $|\kappa_m| \sim |Z_1|^m$, в соответствии со случаем I, ранее подробно рассмотренным. Однако для случая сильной глобальной связи, где тип иерархии малости меняется с I на II, наиболее точное решение дает асимптотическое соотношение (23), учитывающее только линейный по $\beta\sigma$ вклад. Точность же 2КК и 3КК моделей не только оказывается ниже асимптотического, но и слабо различается между собой. Двух- и трехкумулянтные модели демонстрируют хорошую точность равномерно по всему пространству параметров, в то

время как асимптотическое решение имеет высокую точность только в случае сильной связи – его погрешность больше при $\beta \sim 1$ и $\varepsilon < 2\varepsilon_{кр}$, где малый параметр $\beta\sigma$ перестает быть малым, а его место занимает другой: $|Z_1| \ll 1$. Тем не менее, даже в этой области параметров точность всех представленных моделей достаточно высока.

5. Метод цепных дробей для решения стационарной задачи

Высокоточное численное решение для стационарных состояний может быть получено с помощью метода цепных дробей [25]. Как уже отмечалось ранее, через уравнения типа (3) проходит не зависящее от времени решение вида $\dot{Z}_m = im\Omega Z_m$, в результате подстановки которого получим:

$$0 = -(i\tilde{\omega} + \gamma + \sigma)Z_m + hZ_{m-1} - h^*Z_{m+1} + i\frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln m Z_m. \quad (29)$$

Уравнение (29) имеет рекуррентный вид: оно объединяет три соседних параметра порядка, что затрудняет вычисления. Для уменьшения количества "соседей", перейдем от переменной Z_m к $B_m = Z_m/Z_{m-1}$:

$$0 = i\left(\frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln m - \tilde{\omega}\right) - \gamma - \sigma + \frac{h}{B_m} - h^*B_{m+1}. \quad (30)$$

Преимущество такой замены очевидно: вместо трех последовательных Z_m в (29), уравнение (30) охватывает только два соседних элемента B_m . Однако теперь зависимость между ними не прямая, а обратная. Перепишем (30) в рекуррентном виде:

$$B_m = \frac{h}{\gamma + \sigma + i\left(\tilde{\omega} - \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln m\right) + h^*B_{m+1}}.$$

Поскольку $Z_0 = 1$, справедливой оказывается связь $Z_1 = B_1$, что позволяет выразить Z_1 через бесконечную дробь вида:

$$Z_1 = \frac{h}{\gamma + \sigma + i\tilde{\omega} + \frac{|h|^2}{\gamma + \sigma + i\left(\tilde{\omega} - \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln 2\right) + \frac{|h|^2}{\gamma + \sigma + i\left(\tilde{\omega} - \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln 3\right) + \frac{|h|^2}{\dots}}}. \quad (31)$$

На практике цепь (31) необходимо оборвать на некотором достаточно большом $m_\infty \gg 1$, для которого справедливо "приближение самоподобия" $B_{m_\infty+1} \approx B_{m_\infty}$ и

$$h^*B_{m_\infty} = \frac{|h|^2}{\gamma + \sigma + i\left(\tilde{\omega} - \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln m_\infty\right) + h^*B_{m_\infty}}. \quad (32)$$

Решая последнее уравнение, получим приближенно:

$$B_{m_\infty} \approx \frac{2h}{\gamma + \sigma + i\left(\tilde{\omega} - \frac{2\beta\sigma}{\pi} \ln m_\infty\right)}. \quad (33)$$

Также существует и другой корень уравнения (32), однако он соответствует расходимости ряда Z_m при большом значении m_∞ : для него $|Z_m|/|Z_{m-1}| = |B_m| > 1$.

Для системы Курамото можно вычислить точное решение в параметрической форме следующим образом. При известных параметрах $(\gamma, \sigma, \beta\sigma)$ фиксируем величину среднего поля $|h|^2$, и, далее, поднимаясь от "последнего" (33) к первому (31) элементу Z_1 , получим выражение для величины (h^*Z_1) как функции $\tilde{\omega}$. Поскольку $\text{Im}(h^*Z_1) = 0$, возможным оказывается найти частоту $\tilde{\omega}$. И, таким образом, для фиксированного значения $|h|^2 = \varepsilon^2|Z_1|^2/4$, находим значение $h^*Z_1 = \varepsilon|Z_1|^2/2$, в конце концов приходя к искомым $\varepsilon = 2|h|^2/(h^*Z_1)$ и $|Z_1|^2 = (h^*Z_1)^2/|h|^2$.

Заключение

Были выведены маломодовые редуцированные модели для макроскопической динамики термодинамически больших популяций синусоидально-связанных фазовых осцилляторов, подверженных асимметричному шуму Коши. В отличие от случая симметричного шума, теория Отта–Антонсена оказывается неприменима в чистом виде, поскольку асимметрия приводит к отклонению от многообразия $Z_m = (Z_1)^m$. Было предложено использование разложения по круговым кумулянтам, которое в большинстве случаев затухает достаточно быстро, чтобы удовлетворительно описывать макроскопическую динамику первыми двумя-тремя кумулянтами.

В общем случае разложения вблизи точек бифуркации отличаются худшей сходимостью в силу сингулярности задачи (а именно, линейного оператора). Например, для гауссова шума вопрос о скорости сходимости разложения по круговым кумулянтам и точности 2КК приближения в окрестности точки бифуркации исследован в [26]. Точкой бифуркации выступает граница на оси параметра ω между осцилляторами, синхронизированными со средним полем, и несинхронизированными. Однако в работе [26] рассматривается равномерное распределение собственных частот, тогда как в настоящей работе для лоренцева распределения частот сингулярность снимается точно – интегрирование по частотам проводится с использованием Основной теоремы о вычетах. Далее разложение строится уже для системы уравнений свободной от сингулярностей. Анализ сходимости для точек бифуркаций является большой самостоятельной задачей, требующей отдельного изучения, а свойства скейлинга результатов и погрешностей будут различны для сингулярностей различного типа.

В рамках редукции модели круговых кумулянтов был выявлен и изучен эффект смещения частоты коллективных колебаний, обусловленный асимметрией шума. За формирование этого эффекта отвечают два неразделимых фактора: асимметрия шума и тяжелые хвосты в его распределении. Роль этих факторов нельзя разделить, поскольку асимметрия с одной стороны усиливает утяжеление хвостов, но с другой – не может существовать в их отсутствие. Данный эффект был подробно количественно охарактеризован для ансамбля Курамото. Для случая сильной связи был аналитически выведен асимптотический закон. Точность двух- и трехкумулянтных редукций сравнивались с асимптотическим решением и высокоточным методом цепных дробей. Оказалось, что точность всех приведенных редуцированных моделей достаточно велика, чтобы их использование было оправданным. Однако, в области сильной связи для ансамбля Курамото наибольшей точностью выделяется асимптотическое решение, учитывающее только линейный по асимметрии шума вклад. Величина смещения коллективных колебаний зависит от амплитуды коллективной моды и исчезает вблизи точки перехода Курамото. Изученный эффект оказывается существенно нелинейным.

Список источников

1. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // *Chaos*. 2008. Vol. 18, № 3. P. 037113. URL: <https://doi.org/10.1063/1.2930766> (дата обращения: 04.03.2026).
2. Di Volo M., Torcini A. Transition from asynchronous to oscillatory dynamics in balanced spiking networks with instantaneous synapses // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 121, № 12. P. 128301. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.128301> (дата обращения: 04.03.2026).
3. Ermentrout G. B., Kopell N. Parabolic Bursting in an Excitable System Coupled with a Slow Oscillation // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1986. Vol. 46, № 2. P. 233–253. URL: <https://doi.org/10.1137/0146017> (дата обращения: 04.03.2026).
4. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Pikovsky A. Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott Antonsen ansatz // *Physical Review Letters*. 2018. Vol. 120, № 26. P. 264101. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.264101> (дата обращения: 04.03.2026).
5. Goldobin D. S., Dolmatova A. V. Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series // *Physical Review Research*. 2019. Vol. 1, № 3. P. 033139. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033139> (дата обращения: 04.03.2026).
6. Ratas I., Pyragas K. Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons // *Physical Review E*. 2019. Vol. 100, № 5. P. 052211. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.052211> (дата обращения: 04.03.2026).
7. Di Volo M., Segneri M., Goldobin D. S., Politi A., Torcini A. Coherent oscillations in balanced neural networks driven by endogenous fluctuations // *Chaos*. 2022. Vol. 32, № 2. P. 023120. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0075751> (дата обращения: 04.03.2026).
8. Голдобин Д. С., Долматова А. В. Редуцированные кумулянтные модели макроскопической динамики ансамбля Курамото с мультипликативным внутренним шумом // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2021. Т. 29, № 2. С. 288–301. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301> (дата обращения: 04.03.2026).
9. Долматова А. В., Тюлькина И. В., Голдобин Д. С. Описание макроскопической динамики популяций фазовых элементов с белым негауссовым шумом на основе подхода круговых кумулянтов // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2021. № 3. С. 5–12. URL: <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2021-3-05-12> (дата обращения: 04.03.2026).
10. Тюлькина И. В., Голдобин Д. С. Влияние шума на синхронность колебаний конвективных течений // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 67, № 4. С. 65–77. URL: <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-4-65-77> (дата обращения: 04.03.2026).
11. Capocelli R., Ricciardi L. Diffusion approximation and first passage time problem for a model neuron // *Kybernetik*. 1971. Vol. 8. P. 214–223. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00288750> (дата обращения: 04.03.2026).
12. *Introduction to theoretical neurobiology*. Vol. 2: Nonlinear and stochastic theories / Tuckwell H. C. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 265 p.
13. Klafter J., Blumen A., Shlesinger M. F. Stochastic pathway to anomalous diffusion // *Physical Review A*. 1987. Vol. 35, № 7. P. 3081–3085. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.35.3081> (дата обращения: 04.03.2026).

14. Голдобин Д. С., Долматова А. В. Эффект расхождения частот в ансамблях автоколебательных систем с отталкивающей глобальной связью при синхронизации общим шумом // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, № 3. С. 33–60. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60> (дата обращения: 04.03.2026).
15. Petrovskii S., Morozov A. Dispersal in a statistically structured population: fat tails revisited // American Naturalist. 2009. Vol. 173, no 2. P. 278–289. URL: <https://doi.org/10.1086/595755> (дата обращения: 04.03.2026)
16. Mandelbrot B. New methods in statistical economics // Journal of Political Economy. 1963. Vol. 71, № 5. P. 421–440. URL: <https://doi.org/10.1086/258792> (дата обращения: 04.03.2026).
17. Simkowitz M. A., Beedles W. L. Asymmetric Stable Distributed Security Returns // Journal of the American Statistical Association. 1980. Vol. 75, no 370. P. 306–312. URL: <https://doi.org/10.2307/2287449> (дата обращения: 04.03.2026).
18. Голдобин Д. С., Долматова А. В., Розенблюм М., Пиковский А. Синхронизация в ансамблях Курамото–Сакагучи при конкурирующем влиянии общего шума и глобальной связи // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 6. С. 5–37. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37> (дата обращения: 04.03.2026).
19. Watanabe S., Strogatz S. H. Constants of motion for superconducting Josephson arrays // Physica D (Nonlinear Phenomena). 1994. Vol. 74, № 3–4. P. 197–253. URL: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(94\)90196-1](https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)90196-1) (дата обращения: 04.03.2026).
20. Ageeva M. V., Goldobin D. S. Nonlinear bias of collective oscillation frequency induced by asymmetric Cauchy noise // Chaos. 2025. Vol. 35, № 2. P. 023126. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0239363> (дата обращения: 04.03.2026).
21. Ott E., Antonsen T. M. Long time evolution of phase oscillator systems // Chaos. 2009. Vol. 19, № 2. P. 023117. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3136851> (дата обращения: 04.03.2026).
22. Mirollo R. E. The asymptotic behavior of the order parameter for the infinite-N Kuramoto model // Chaos. 2012. Vol. 22, № 4. P. 043118. URL: <https://doi.org/10.1063/1.4766596> (дата обращения: 04.03.2026).
23. Pietras B., Daffertshofer A. Ott-Antonsen attractiveness for parameter-dependent oscillatory systems // Chaos. 2016. Vol. 26, № 10. P. 103101. URL: <https://doi.org/10.1063/1.4963371> (дата обращения: 04.03.2026).
24. Abrams D. M., Mirollo R., Strogatz S. H., Wiley D. A. Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators // Physical Review Letters. 2008. Vol. 101, № 8. P. 084103. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.084103> (дата обращения: 04.03.2026).
25. Continued Fractions / Khinchin A. Ya. Chicago and London: University of Chicago Press, 1964. 95 p.
26. Klinshov V. V., Zlobin D. A., Maryshev B. S., Goldobin D. S. Effect of noise on the collective dynamics of a heterogeneous population of active rotators // Chaos. 2021. Vol. 31, № 4. P. 043101. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0030266> (дата обращения: 04.03.2026).

References

1. Ott, E. and Antonsen, T. M. (2008), "Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators", *Chaos*, vol. 18, no 3, pp. 037113, URL: <https://doi.org/10.1063/1.2930766>.

2. Di Volo, M. and Torcini, A. (2018), "Transition from asynchronous to oscillatory dynamics in balanced spiking networks with instantaneous synapses", *Physical Review Letters*, vol. 121, no 12, pp. 128301, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.128301>.
3. Ermentrout, G. B. and Kopell, N. (1986), "Parabolic Bursting in an Excitable System Coupled with a Slow Oscillation", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 46, no 2, pp. 233–253, URL: <https://doi.org/10.1137/0146017>.
4. Tyulkina, I. V., Goldobin, D. S., Klimenko, L. S. and Pikovsky, A. (2018), "Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott Antonsen ansatz", *Physical Review Letters*, vol. 120, no 26, pp. 264101, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.264101>.
5. Goldobin, D. S. and Dolmatova, A. V. (2019), "Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series", *Physical Review Research*, vol. 1, no 3, pp. 033139, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033139>.
6. Ratas, I. and Pyragas, K. (2019), "Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons", *Physical Review E*, vol. 100, no 5, pp. 052211, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.052211>.
7. Di Volo, M., Segneri, M., Goldobin, D. S., Politi, A. and Torcini, A. (2022), "Coherent oscillations in balanced neural networks driven by endogenous fluctuations", *Chaos*, vol. 32, no 2, pp. 023120, URL: <https://doi.org/10.1063/5.0075751>.
8. Goldobin, D. S. and Dolmatova, A. V. (2021), "Reduced cumulant models for macroscopic dynamics of Kuramoto ensemble with multiplicative intrinsic noise". *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 29, no 2, pp. 288–301, URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-2-288-301>.
9. Dolmatova, A. V., Tyulkina, I. V. and Goldobin, D. S. (2021), "Description of the macroscopic dynamics of populations of phase elements with white non-Gaussian noise based on the circular cumulant approach", *Bulletin of Perm University. Physics*, no 3, pp. 05–12, URL: <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2021-3-05-12>.
10. Tyulkina, I. V. and Goldobin, D. S. (2024), "The Influence of Noise on the Synchronization of Oscillations of Convective Currents", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, vol. 67, no 4, pp. 65–77, URL: <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-4-65-77>.
11. Capocelli, R. and Ricciardi, L. (1971), "Diffusion approximation and first passage time problem for a model neuron", *Kybernetik*, vol. 8, pp. 214–223, URL: <https://doi.org/10.1007/BF00288750>.
12. Tuckwell, H. C. (1988), *Introduction to theoretical neurobiology. Vol. 2: Nonlinear and stochastic theories*, Cambridge University Press, UK, 265 p.
13. Klafter, J., Blumen, A. and Shlesinger, M. F. (1987), "Stochastic pathway to anomalous diffusion", *Physical Review A*, vol. 35, no 7, pp. 3081–3085, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.35.3081>.
14. Goldobin, D. S. and Dolmatova, A. V. (2019), "Frequency repulsion in ensembles of general limit-cycle oscillators synchronized by common noise in the presence of global desynchronizing coupling", *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 27, no 3, pp. 33–60, URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-3-33-60>.
15. Petrovskii, S. and Morozov, A. (2009), "Dispersal in a statistically structured population: fat tails revisited", *American Naturalist*, vol. 173, no 2, pp. 278–289. URL: <https://doi.org/10.1086/595755>.
16. Mandelbrot, B. (1963), "New methods in statistical economics", *Journal of Political Economy*, vol. 71, no 5, pp. 421–440, URL: <https://doi.org/10.1086/258792>.
17. Simkowitz, M. A. and Beedles, W. L. (1980), "Asymmetric Stable Distributed Security Returns", *Journal of the American Statistical Association*, vol. 75, no 370, pp. 306–312, URL: <https://doi.org/10.2307/2287449>.

18. Goldobin, D. S. and Dolmatova, A. V., Rosenblum, M. and Pikovsky, A. (2017), "Synchronization in Kuramoto–Sakaguchi ensembles with competing influence of common noise and global coupling", *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 25, no 6, pp. 5–37, URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37>.
19. Watanabe, S. and Strogatz S. H. (1994), "Constants of motion for superconducting Josephson arrays", *Physica D (Nonlinear Phenomena)*, vol. 74, no 3–4, pp. 197–253, URL: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(94\)90196-1](https://doi.org/10.1016/0167-2789(94)90196-1).
20. Ageeva, M. V. and Goldobin, D. S. (2025), "Nonlinear bias of collective oscillation frequency induced by asymmetric Cauchy noise", *Chaos*, vol. 35, no 2, pp. 023126, URL: <https://doi.org/10.1063/5.0239363>.
21. Ott, E. and Antonsen, T. M. (2009), "Long time evolution of phase oscillator systems", *Chaos*, vol. 19, no 2, pp. 023117, URL: <https://doi.org/10.1063/1.3136851>.
22. Mirollo, R. E. (2012), "The asymptotic behavior of the order parameter for the infinite-N Kuramoto model", *Chaos*, vol. 22, no 4, pp. 043118, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4766596>.
23. Pietras, B. and Daffertshofer, A. (2016), "Ott-Antonsen attractiveness for parameter-dependent oscillatory systems", *Chaos*, vol. 26, no 10, pp. 103101, URL: <https://doi.org/10.1063/1.4963371>.
24. Abrams, D. M., Mirollo, R., Strogatz, S. H. and Wiley, D. A. (2008), "Solvable Model for Chimera States of Coupled Oscillators", *Physical Review Letters*, vol. 101, no 8, pp. 084103, URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.084103>.
25. Khinchin, A. Ya. (1964), *Continued Fractions*, University of Chicago Press, Chicago, USA and London, UK, 95 p.
26. Klinshov, V. V., Zlobin, D. A., Maryshev, B. S. and Goldobin, D. S. (2021), "Effect of noise on the collective dynamics of a heterogeneous population of active rotators", *Chaos*, vol. 31, no 4, pp. 043101, URL: <https://doi.org/10.1063/5.0030266>.

Информация об авторах:

М. В. Агеева – инженер-исследователь, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, д. 1), Author ID: 58119373600, ORCID: 0009-0008-6671-2787;

Д. С. Голдобин – кандидат физико-математических наук; заведующий Лабораторией подземной утилизации углерода Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, д. 1), доцент кафедры теоретической физики Пермского государственного национального исследовательского университета (614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), Author ID: 8368187600, ORCID: 0000-0002-4746-8386.

Information about the authors:

M. V. Ageeva – engineer-researcher in the Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS (1 Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), Author ID: 58119373600, ORCID: 0009-0008-6671-2787;

D. S. Goldobin – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Head of Laboratory of underground sequestration of carbon in the Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS (1 Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), Associated Professor at Theoretical Physics Department at the Perm State University (15 Bukirev St., Perm, Russia, 614990), Author ID: 8368187600, ORCID: 0000-0002-4746-8386.

Научная статья

УДК 539.3:678

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-59-74

<https://elibrary.ru/mmrbqo>

Моделирование механических свойств элементов надувных космических антенн из эпоксидного препрега

Олег Константинович Гаришин¹, Александр Геннадьевич Пелевин²¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия¹gar@icmm.ru²Пермский государственный научный исследовательский университет, Пермь, Россия²smile3k@yandex.ru

Аннотация. Предложена методика вычисления эффективных упругих свойств тканевых композитов из отвержденных эпоксидных препрегов с комплексным учетом особенностей неоднородности структуры таких композитных систем (механические свойства нитей ткани и эпоксидного связующего, геометрия нитей, тип плетения ткани, концентрация связующего). Она основана на использовании конечно-элементного пакета ANSYS и специализированного программного модуля "ANSYS material designer". Этот модуль позволяет строить сложные трехмерные конечно-элементные сетки для задаваемых расчетчиком различных тканевых плетений, используя комбинации из простых блоков и автоматически вычислять соответствующие эффективные механические константы таких материалов (линейно упругие). Надежность данного подхода проверена на решении трех тестовых краевых задач об изгибе консольной балки в виде тонкой пластины: 1) 3D балка из препрега как композитного материала со всеми особенностями его внутреннего строения; 2) 3D балка из однородного анизотропного материала с эффективными механическими характеристиками, рассчитанными для препрега предлагаемой методике материала; 3) 2D балка в виде анизотропной оболочки с теми же упругими характеристиками, что и для второго варианта. Расхождение по изгибу для всех вариантов составило меньше одного процента. Также проведен расчет изгиба трубчатой стойки надувной антенны эпоксидного препрега, предназначенной для искусственного наноспутника Земли из эпоксидного препрега и проведено сравнение ее массы относительно аналогичной трубы из алюминия, обладающей такими же "изгибными" характеристиками. Сравнение показало, что выигрыш по массе при использовании препрега может составлять примерно 20%.

Ключевые слова: эпоксидные препреги; структура препрегов; эффективные механические характеристики препрега; изгиб трубы из препрега; надувные космические антенны; механическая анизотропия, упругость; метод конечных элементов.

Для цитирования: Гаришин О. К., Пелевин А. Г. Моделирование механических свойств элементов надувных космических антенн из эпоксидного препрега // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 59–74. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-59-74. <https://elibrary.ru/mmrbqo>.



© Гаришин О. К., Пелевин А. Г., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 126020916885-8).

Статья поступила в редакцию 02.03.2026; одобрена после рецензирования 30.05.2026; принята к публикации 10.06.2026.

Research article

Modeling the Mechanical Properties of Inflatable Space Antenna Elements Made of Epoxy Prepreg

Oleg K. Garishin¹, Alexander G. Pelevin²

¹Institute of Continuous Media Mechanics, Perm, Russia

¹gar@icmm.ru

²Perm State University, Perm, Russia

²smile3k@yandex.ru

Abstract. A method for calculating the epoxy prepregs effective elastic properties, taking into account the inner structure of such composite systems (mechanical properties of fabric threads and epoxy binder, thread geometry, fabric weaving type, binder concentration) is proposed. It is based on the use of ANSYS finite element package and the specialized software module "ANSYS Material Designer." This module allows for the creation of complex 3D finite element meshes for various fabric weaves, using a combination of some simple standard blocks and automatically calculates the corresponding mechanical constants of such materials (linear elasticity). The reliability of this approach was verified by solving three test boundary value problems on the bending of a cantilever beam in the form of a thin plate: 1) 3D beam made of prepreg as a composite material with all the features of its internal structure; 2) a 3D beam made of a homogeneous anisotropic material with effective mechanical characteristics calculated for the prepreg using the proposed material method; 3) 2D beam in the form of an anisotropic shell with the same elastic characteristics as for the second case. The boundary value problem of bending of a tubular strut for inflatable antenna made of epoxy prepreg, intended for an artificial Earth nanosatellite was also solved, and prepreg strut mass was compared with a similar aluminum tube having the same bending characteristics. The comparison showed that the mass reduction could be approximately 20% in case of prepreg using.

Keywords: *epoxy prepregs; prepreg structure; effective mechanical properties of prepreg; bending of prepreg tube; inflatable space antennas; mechanical anisotropy, elasticity; finite element method.*

For citation: Garishin, O. K. and Pelevin, A. G. (2026), "Modeling the Mechanical Properties of Inflatable Space Antenna Elements Made of Epoxy Prepreg", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 59–74, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-59-74, <https://elibrary.ru/mmrbqo>.

Acknowledgments: the work was carried out within the framework of the state task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (no 126020916885-8).

The article was submitted 02.03.2026; approved after reviewing 30.05.2026; accepted for publication 10.06.2026.

Введение

Одной из основных проблем, связанных с работой орбитальных космических аппаратов, является связь с Землей, то есть возможность обмениваться информацией с наземными приемно-передающими устройствами по надежным устойчивым каналам и с минимальными возможными искажениями. Антенны, способные удовлетворить этим усло-

виям, должны быть хотя и легкими, но достаточно крупными конструкциями, которые могут значительно превышать габаритные размеры полезного объема космического корабля. Поэтому при запуске на орбиту они должны находиться в сложенном компактном состоянии и разворачиваться до своих рабочих размеров уже в космосе.

На сегодняшний день разработано огромное количество самых разнообразных вариантов таких складных антенн [1, 2]. Чаще всего они имеют вид каркасов из шарнирно соединенных стержней и вант (иногда с натянутыми между ними тонкими и гибкими отражающими металлизированными пленками – зонтичные конструкции [3–7]. Раскрываться они могут как под действием механических сил (предварительно сжатые пружины, инерциальные силы от вращения конструкции, и т.д.) [8–10], так и за счет наддува (то есть избыточного давления внутри полых конструктивных элементов) [11–13].

Если для пилотируемых кораблей и обычных космических спутников земли (ИСЗ) вполне подходят все эти варианты, то в случае наноспутников наиболее приемлемым решением является использование надувных антенн, так как для их развертывания требуется наименьшая масса сопутствующего оборудования. Наноспутники (кубсаты) это сверхмалые ИСЗ (предельная масса редко превышает десятки килограмм), летающие, как правило, на низких околоземных орбитах. В настоящее время это одно из самых быстро развивающихся направлений беспилотной космонавтики. Они обходятся намного проще и дешевле обычных полноразмерных спутников, как по конструкции, так и по способу запуска. Одна ракета может доставить на низкую земную орбиту (от 100 км и выше) контейнер, содержащий десятки таких спутников. Также их можно запускать в космос в качестве попутного груза на традиционных больших космических кораблях.

Первые работы по созданию надувных антенн для наноспутников начали разрабатывать еще в начале нашего века, и с тех пор в этом направлении были достигнуты значительные успехи [14–20]. Кроме того, в настоящее время ведутся интенсивные исследования по разработке не только антенн, но и других габаритных надувных конструкций, которые доставляются на орбиту в сложенном компактном виде и затем разворачиваются до своего рабочего состояния в космосе за счет внутреннего наддува [21, 22, 23], то есть направление космонавтики имеет большие и многообещающие перспективы.

Одной из главных проблем надувных систем является сложность в обеспечении герметичности системы при столкновении с пылевыми космическими частицами, а также отходами от человеческой деятельности [24] особенно на низких околоземных орбитах. Так, по данным NASA, на всех высотах околоземного пространства (сфера до 380 000 км) находится около 130 миллионов объектов размером от 1 до 10 мм, причем на низких околоземных орбитах (от 160 до 2000 км) их количество оценивается до 20 миллионов. Кроме того, так как оболочки надувных конструкций из-за ограничений по весу не могут иметь достаточную толщину, то через них неизбежно происходит (пусть и медленная) диффузия газа и соответственно падает внутреннее давление.

Одним из возможных вариантов решения этой проблемы может служить использование эпоксидных препрегов (тканевый материал, пропитанный эпоксидной смолой) в качестве оболочки [22, 25, 26]. В этом случае надувная оболочка антенны после развертывания в космосе в дальнейшем сохраняет свою форму за счет отверждения эпоксидной смолы в препреге, после чего вероятность потери работоспособности такой конструкции от повреждения мелкими космическими частицами станет намного ниже. Основная проблема в этом случае состоит в сохранении баланса между массой изготовленных из препрега элементов антенны и ее общей прочностью. Эти элементы, по сути, являются тонкостенными конструкциями, в которых толщина стенки во много раз меньше, чем габариты изделия – иначе будет невозможно произвести их развертывание на орбите. Проведение соответствующих натурных экспериментов в космосе слишком дорого и нерационально. В данном исследовании сделана попытка теоретически оценить зависимости

между габаритными размерами элементов антенны для наноспутника с учетом механических свойств препрега и их несущей способностью в сравнении с аналогичными деталями из металла (алюминий).

Материалы и эффективные механические свойства препрега

Эпоксидные препреги, используемые при изготовлении элементов конструкции антенн для космических летательных аппаратов, относятся к классу тканевых композитов, которые в настоящее время широко применяются в современной промышленности (и не только в космической). Поэтому теоретические и экспериментальные исследования их физико-механических свойств – это важная и актуальная задача [27–31]. Рассматриваемые в данном исследовании композиты состоят тканевого материала (наполнитель), пропитанного эпоксидной смолой (связующее). Эти материалы приобретают необходимую эксплуатационную жесткость только после отверждения эпоксиды. Таким образом изделия из них можно выводить в космос в компактном сложенном виде и разворачивать до рабочего отвержденного состояния уже на орбите [32]. Далее при расчетах под препрегом мы будем понимать тканевый композит с уже отвержденной эпоксидной смолой.

С точки зрения механики это анизотропные композитные материалы, свойства которых в плоскости тканевой основы и перпендикулярно к ней могут различаться в десятки и более раз.

В данной работе было принято, что ткань препрега имеет полотняное плетение и состоит из углеродных волокон, свойства которых соответствуют нитям из ткани Twill 2/2 (производство ООО Препрег-СКМ, Дубна). Это наиболее простой тип плетения, когда нити перекрывают друг друга через одну [33], в результате чего механические характеристики ткани наиболее близки к трансверсально изотропному случаю.

Сами углеродные нити имеют уплощенный эллиптический профиль в поперечном сечении с размерами примерно $(1.3–1.6) \times (0.08–1.2)$ мм. Это трансверсально изотропный линейно упругий материал, причем жесткость вдоль оси нити (x_1) на порядок выше, чем в поперечном сечении (оси x_2 и x_3). Значения их механических характеристик представлены в табл. 1 (E_i – модули Юнга, ν_{ij} – коэффициенты Пуассона, G_{ij} – модули сдвига, $i=1, 2, 3$).

Таблица 1. Механические свойства анизотропной углеродной нити препрега

Механические характеристики	Размерность	Углеродная нить
Плотность тканевой нити ρ_t	кг/м ³	1800
E_1 (в направлении оси нити)	МПа	$230 \cdot 10^3$
$E_2=E_3$ (в поперечных направлениях)	МПа	$23 \cdot 10^3$
$\nu_{12} = \nu_{13}$	-	0.20
ν_{23}	-	0.40
$G_{12}=G_{13}$	МПа	$9 \cdot 10^3$
G_{23}	МПа	$8 \cdot 10^3$

При описании свойств связующего использовали механические характеристики эпоксидной смолы ВСТ-1208 (производство НИЦ "Курчатовский институт" – ВИАМ). Его механические свойства представлены в табл. 2.

Таблица 2. Механические свойства эпоксиды ВСТ-1208 в отвержденном состоянии

Механические характеристики	Размерность	Эпоксид
Плотность эпоксиды ρ_ε	кг/м ³	1160.00
Модуль Юнга E_ε	МПа	3780.00
Коэффициент Пуассона ν_ε	-	0.35

Она имеет однокомпонентный состав (то есть отвердитель добавлен в материал) и отличается стабильностью своих физико-механических характеристик при низких температурах, то есть в охлажденном состоянии способна длительное время находиться в мягком, неотвержденном состоянии (до нескольких месяцев) [34]. Реакция отверждения происходит уже на околоземной орбите по действием солнечного облучения [35]. В отвержденном состоянии это изотропный линейно упругий материал.

Если (как в нашем случае) одним из основных требований к препрегу является повышенная эксплуатационная жесткость в отвержденном состоянии, то оптимальными являются наиболее простые двумерные плетения (полотняное, саржевое и т.д.). В этих тканях нити имеют наименьшие локальные изгибы при взаимном переплетении и, соответственно, при деформировании такого материала они практически сразу начинают работать на собственное растяжение, минимизируя деформацию, связанную с их выпрямлением (то есть "выбиранием слабины от изгиба"). Поэтому расчет эффективных механических свойств эпоксидного препрега проводили на ячейке периодичности, состоящей из 4×4 углеродных нитей (полотняное плетение), помещенных в эпоксидную смолу (рис. 1).

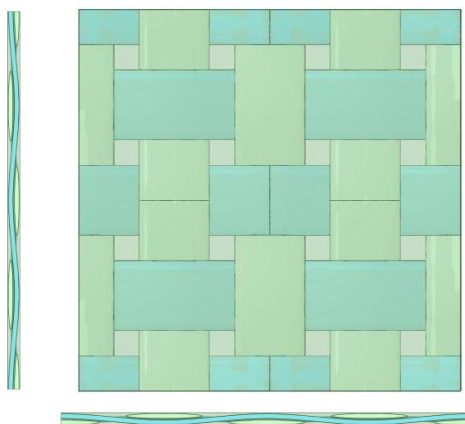


Рис. 1. Расчетная схема ячейки периодичности эпоксидного препрега (4×4 углеродных нитей)

Ячейка имела габариты $8 \text{ мм} \times 8 \text{ мм} \times 0.26 \text{ мм}$. Размеры поперечного сечения нитей брали равными $1.410 \times 0.092 \text{ мм}$, толщина прослоек между ними составляла 0.04 мм . Объемная концентрация эпоксидного связующего (матрицы) φ_3 для такой конструкции получилась равной 60.7% (соответственно, для ткани $\varphi_T = 1 - \varphi_3 = 39.3\%$). Плотность препрега (ρ) вычисляли по формуле $\rho = \rho_T \varphi_T + \rho_3 \varphi_3$.

Все краевые задачи в данной работе решали численно в трехмерной постановке с использованием конечно-элементного пакета ANSYS (License No 1064623 ANSYS Academic Research Mechanical and CFD for ICM UB RAS), причем расчет эффективных упругих свойств эпоксидного препрега проводился с помощью специализированного программного модуля "ANSYS material designer". Этот модуль позволяет строить сложные трехмерные конечно-элементные сетки для задаваемых расчетчиком различных тканевых плетений, используя комбинации из простых блоков и автоматически вычислять соответствующие эффективные механические константы таких материалов (линейно упругие). При этом нет ограничений на количество слоев ткани в композите, то есть с его помощью можно рассчитывать и однослойные конструкции (как в нашем случае).

Значения эффективных механических характеристик препрега даны в табл. 3 (x – направление вдоль оси нитей основы тканевого плетения, y – в поперечном направлении в плоскости ткани (вдоль нитей утка), z – перпендикулярно к плоскости ткани). E_x , E_y , E_z – модули Юнга; ν_{xy} , ν_{xz} , ν_{yz} – коэффициенты Пуассона; G_x , G_y , G_z – модули сдвига.

Кроме того, аналогичные расчеты были проведены на уменьшенной ячейке периодичности размером 2×2 углеродных нитей. Результаты различались в диапазоне примерно от 1 до 3%, что говорит об их достаточно высокой достоверности.

Для плотняного плетения (из-за его симметрии) свойства ткани вдоль основы и вдоль утка должны быть одинаковы, что и показали полученные результаты – $E_x = E_y \neq E_z$. Так как приведенные в статье исследования носят оценочный приближенный характер, то было принято что допущение, что такой препрег можно описать как трансверсально изотропный материал ($E_x = E_y \neq E_z$).

Таблица 3. Механические свойства эпоксидного препрега в отвержденном состоянии

Механические характеристики	Размерность	Эпоксидный препрег
Плотность ρ	кг/м ³	1411
$E_x = E_y$	МПа	45283
E_z	МПа	5645
$\nu_{xz} = \nu_{yz}$	-	0.421
ν_{xy}	-	0.141
$G_{xz} = G_{yz}$	МПа	965
G_{xy}	МПа	3658

Для того чтобы выбрать оптимальную модель для расчетов по деформированию трубчатых элементов надувной антенны из эпоксидного препрега были проведены следующие тестовые расчеты. Исследовалось несколько различных конечно-элементных решений краевой задачи по изгибу линейно упругой консольной балки (жесткая заделка с левой стороны и сосредоточенная вертикальная сила F на свободном правом конце). Балка представляла собой горизонтально расположенную пластину длиной $l = 16$ мм, шириной $b = 4$ мм и толщиной (высотой) $h = 0.26$ мм. Величину изгиба пластины определяли в виде смещения крайней точки свободного конца как в абсолютном (u , мм), так и в относительном (u/l , %) выражении. В итоге были получены решения для трех следующих вариантов, наиболее приемлемых по точности совпадения результатов:

1) Трехмерная балка из препрега рассматривалась как структурно неоднородный композитный материал с учетом всех особенностей плетения ткани (она показана на рис. 2). Она состояла из четырех последовательно расположенных квадратных ячеек периодичности: то есть это две нити вдоль (полная и две половинки) и 8 поперек (7 полных и 2 половинки). Для нитей ткани использовались конечные элементы в виде анизотропных параллелепипедов (с механическими характеристиками из табл. 1), а для эпоксидного связующего – изотропные тетраэдры типа solid, свойства которых задавались в соответствии с табл. 2.

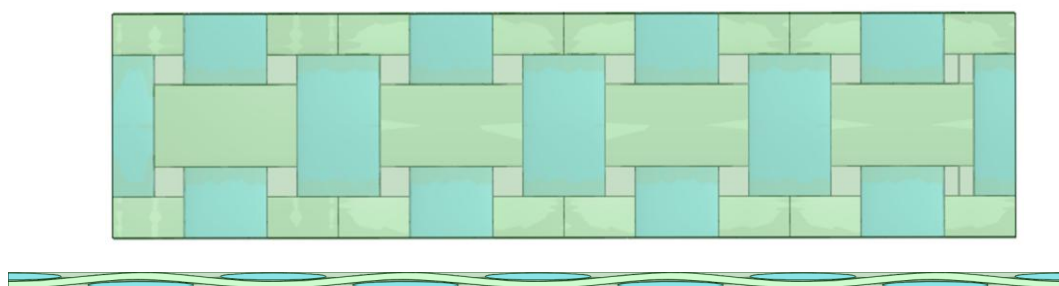


Рис. 2. Балка из эпоксидного препрега на основе углеродной ткани плотняного плетения

2) Трехмерная балка из однородного трансверсально изотропного (в плоскости ткани) материала. Конечно-элементная сетка состояла только из анизотропных паралле-

лепипедов со свойствами, которые соответствовали эффективным механическим характеристикам препрега (см. табл. 3).

3) Двумерная балка из анизотропных четырехугольных оболочных конечных элементов типа *surface* (анизотропные механические характеристики также брали из табл. 3).

Полученные результаты представлены в табл. 4. Сосредоточенная сила F на свободном конце балки равнялась 1 ньютону.

Таблица 4. Сравнение изгибов для консольной плоской балки из эпоксидного препрега

	Тип балки	u , мм	u/l , %	Количество конечных элементов
1	3D пластина из эпоксидного препрега (учет структуры в явном виде)	4.81	30.06%	196746
2	3D балка из однородного анизотропного материала	4.91	30.69%	256
3	2D балка из однородной анизотропной оболочки	4.91	30.69%	256

Расчеты показали, что для этих вариантов относительное расхождение по прогибу свободного конца балки было меньше одного процента (примерно 0.6%), что можно считать вполне удовлетворительным результатом. В дальнейших исследованиях при моделировании изгиба трубы из препрега (стойка надувной антенны наноспутника) использовали 2D сетку из оболочечных анизотропных элементов как наиболее скоростной и наименее затратный с точки зрения компьютерных ресурсов вариант.

Расчет элемента конструкции надувной космической антенны (стойки)

На сегодняшний день на практике разработано огромное количество самых разнообразных видов антенн для космических аппаратов, которые разворачиваются в свое рабочее состояние после их вывода на земную орбиту (см., например, [14–23] из введения). В нашем случае основная цель расчетов состояла в том, чтобы на основе описанной выше методики определения эффективных механических свойств эпоксидных препрегов провести сравнительную оценку жесткости изготовленных из них элементов конструкции надувной такой антенны. Поэтому в качестве объекта исследований была выбрана наиболее простая деталь космической антенны в виде полый трубчатой стойки из эпоксидного препрега, соединяющей зеркало рефлектора с наноспутником. Одна из наиболее типичных схем такой антенны для наноспутника описана в работе [20]. Она показана на рис. 3.

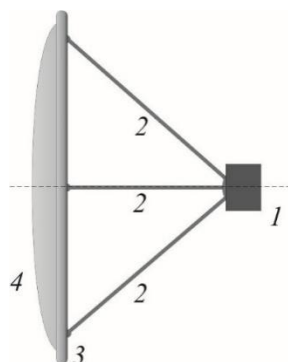


Рис. 3. Типичная схема надувной антенны для наноспутника: 1 – наноспутник; 2 – три трубчатые стойки, расположенные на надувном кольце рефлектора с шагом 120° по окружности; 3 – торообразное надувное кольцо рефлектора; 4 – рефлектор антенны

В работе [22] приводятся типичные геометрические размеры стойки для рефлектора антенны космического спутника, которые и были взяты за основу: длина L_s варьировалась от 1000 до 3000 мм; диаметр $D_s=150$ мм; толщина трубы $H_s = 0.26$ мм (D_s и H_s неварьируемые размеры).

Для сравнительной оценки изгибной жесткости такой стойки было решено несколько вариантов краевой конечно-элементной задачи о деформировании такой трубчатой стойки в виде анизотропной оболочки с механическими характеристиками из табл. 3, соответствующими эпоксидному препрегу в отвержденном состоянии. Труба располагалась горизонтально. Слева была консольная заделка, а справа на торце трубы имела заглушка в виде абсолютно жесткого диска, к центру которого прикладывалась вертикальная сосредоточенная сила F_s . Изгиб трубы определяли по вертикальному смещению центра торцевого диска заглушки как в абсолютном (u_s , мм), так и в относительном (u_s/L_s , %) выражении. Расчетная схема показана на рис. 4.

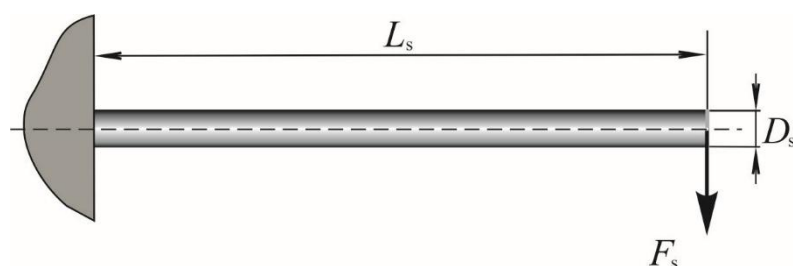


Рис. 3. Расчетная схема для краевой задачи об изгибе трубчатой стойки надувной антенны из эпоксидного препрега

Кроме того, была просчитана аналогичная краевая задача, но для трубы из авиационного алюминия марки 6061-Т6. Этот (изотропный по своим механическим свойствам) материал широко применяется в авиационной и космической промышленности. Его основные характеристики представлены в табл. 5.

Таблица 5. Механические свойства алюминиевого сплава 6061-Т6

Механические свойства	Размерность	Алюминий
Плотность ρ_{al}	кг/м ³	2770
Модуль Юнга E_{al}	МПа	71000
Модуль сдвига G_{al}	МПа	26692
Коэффициент Пуассона ν_{al}		0.33

На базе этих решение было приведено сравнение масс равных по длине и внешнему диаметру труб из эпоксидного препрега и алюминия, которые давали бы один и тот же изгиб u_s при одинаковой внешней нагрузке. Выполнение этого условия достигалось за счет соответствующего подбора толщины стенки алюминиевой трубы H_{al} . Итоговые результаты представлены в табл. 6 ($M_{эп}$ и M_{al} – массы труб из эпоксидного препрега и алюминия).

Таблица 6. Сравнение изгиба трубчатых стоек из эпоксидного препрега и алюминия

L_s , мм	u_s , мм	u_s/L_s , %	F , Н	H_{al} , мм	H_{al}/H_s	$M_{эп}$, кг	M_{al} , кг	$M_{эп}/M_{al}$, %
1000	50	5	1750	0.140	0.560	0.172	0.189	91.00
1500	75	5	900	0.148	0.592	0.255	0.297	85.86
2000	100	5	525	0.154	0.616	0.338	0.409	82.64
2500	125	5	345	0.155	0.620	0.421	0.513	82.07
3000	150	5	240	0.156	0.624	0.504	0.618	81.56

Зависимость $M_{\text{эп}}/M_{\text{ал}}$, характеризующая относительный выигрыш в массе при использовании эпоксидного препрега, показана на рис. 5. На графике видно, что при достаточной большой относительной длине (в нашем случае, когда L_s больше D_s в 10 и более раз) он составляет примерно 20 %.

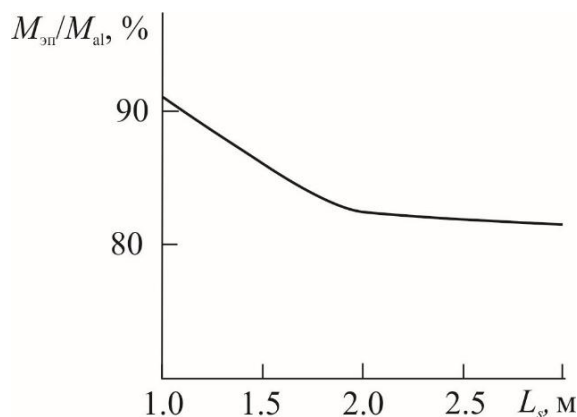


Рис. 5. Зависимость отношения масс, дающих одинаковый изгиб труб из эпоксидного препрега и алюминия от длины трубы

Заключение

Представленный в работе подход позволяет провести оценку механических свойств эпоксидных препрегов с комплексным учетом особенностей неоднородности структуры таких композитных систем (механические свойства нитей ткани и эпоксидного связующего, геометрия нитей, тип плетения ткани, концентрация связующего и т.д.). Полученные характеристики можно использовать в дальнейшем для расчетов механического поведения изделий из таких композитов, представляя их как однородные анизотропные материалы с соответствующими эффективными свойствами.

Одним из наиболее перспективных вариантов применения эпоксидных препрегов является их использование для производства разворачивающихся в космосе конструкций (ранее компактно уложенных в запускаемом на орбиту космическом аппарате). Поэтому, для проверки возможностей предлагаемой методики был проведен расчет изгиба стойки надувной антенны для искусственного наноспутника Земли из эпоксидного препрега и проведено сравнение ее массы относительно аналогичной конструкции из алюминия, обладающей такими же "изгибными" характеристиками. Сравнение показало, что выигрыш по массе в этом случае может составлять примерно 20%.

На сегодняшний день алюминиевые детали в антеннах именно для наноспутников практически не применяются, так как, в отличие от надувных изделий, развертывание в космосе таких металлических конструкций связано с гораздо большими техническими трудностями. Проведенные численные исследования свидетельствуют о том, что эксплуатационные свойства антенн из эпоксидного препрега могут быть как минимум не хуже чем у аналогичных металлических. В том числе и с учетом весовых характеристик, что для космических аппаратов является одним из важнейших факторов.

Таким образом, можно сделать вывод, что данный подход дает достаточно надежные результаты и его вполне можно использовать для оценочных расчетов по механическому нагружению надувных конструкций из эпоксидных препрегов.

Авторы не претендуют на фундаментальность полученных результатов. Данные расчеты носят оценочный приближенный характер. Главное, что они показывают, состоит в том, что использование эпоксидных тканевых композитов в космических аппаратах вполне оправдано и перспективно.

Список источников

1. Лопатин А. В., Рутковская М. А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн (часть 1) // Вестник СГАУ имени академика М. Ф. Решетнева. 2007. Т. 15. С. 15–51.
2. Лопатин А. В., Рутковская М. А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн (часть 2) // Вестник СГАУ имени академика М. Ф. Решетнева. 2007. Т. 16. С. 78–81.
3. Tibert A. G. Optimal design no tension truss antennas // AIAA Papers. 2003. Vol. 1. P. 1629–1638. URL: <http://doi.org/10.2514/6.2003-1629> (дата обращения: 28.02.2026).
4. Buhl T., Jensen F. V., Pellegrino S. Shape optimization of cover plates for retractable roof structures // Computers and Structures. 2004. Vol. 82. P. 1227–1236. URL: <http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.02.021> (дата обращения: 28.02.2026).
5. Зимин В. Н. Моделирование динамики раскрытия космических конструкций ферменного типа // Полет. 2008. № 10. С. 42–48.
6. Зимин В. Н., Крылов А. В., Мешковский В. Е., Сдобников А. Н., Файзуллин Ф. Р., Чурилин С. А. Особенности расчета раскрытия крупногабаритных трансформируемых конструкций различных конфигураций // Наука и Образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электронный журнал. 2014. № 10. С. 179–191. URL: <http://doi.org/10.7463/1014.0728802> (дата обращения: 28.02.2026).
7. Ляшевский А. В., Прокопенко Е. А., Гинзбург Т. В., Головчинская Н. В. Исследование процесса раскрытия трансформируемой зонтичной антенны космического аппарата ретранслятора с учетом колебаний механической системы // Труды МАИ. 2023. № 133. С. 1–22. URL: <http://doi.org/trudymai.ru/published.php?ID=177655> (дата обращения: 28.02.2026).
8. Guest S. D., Pellegrino S. A new concept for solid surface deployable antennas // Acta Astronautica. 1996. Vol. 38. P. 103–113. URL: [http://doi.org/10.1016/0094-5765\(96\)00009-4](http://doi.org/10.1016/0094-5765(96)00009-4) (дата обращения: 28.02.2026).
9. Jensen F., Pellegrino S. Expandable structures formed by hinged plates // Fifth International Conference on Space Structures: University of Surrey, UK. 2002. P. 1–10. URL: <http://doi.org/10.1680/ss5v1.31739.0028> (дата обращения: 28.02.2026).
10. Keller P. N., Lake M. S., Codell M., Barrett D., Taylor R., Schultz R. M. Development of elastic memory composite stiffeners for a flexible precision reflector // 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Newport, USA. 2006. P. 1–14. URL: <http://doi.org/10.2514/6.2006-2179> (дата обращения: 28.02.2026).
11. Пономарев С. В. Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // Вестник ТГУ. 2011. Т. 16, № 4. С. 110–119. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:0004575022> (дата обращения: 28.02.2026).
12. Vertegaal C., Bantum M. Feasibility study of inflatable antennas as observational antenna for ultra-low frequency cubesat applications // IEEE Aerospace Conference, USA. 2020. P. 1–13. URL: <http://doi.org/10.1109/AERO47225.2020.9172668> (дата обращения: 28.02.2026).
13. Eliseeva A. Yu., Komar L. A., Kondyurin A. V. Computational modeling of the curing of a frame of an inflatable satellite antenna in near-earth orbit // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol. 62, № 7. P. 1234–1242. URL: <http://doi.org/10.1134/S0021894421070087> (дата обращения: 28.02.2026).

14. Salama M., Kuo C. P., Lou M. Simulation of deployment dynamics of inflatable structures // *AIAA Journal*. 2000. Vol. 38, № 12. P. 2277–2283. URL: <http://doi.org/10.2514/2.896> (дата обращения: 28.02.2026).
15. Mathers N., Thompson L. Using inflatable antennas for portable satellite-based personal, communications systems // *Acta Astronautica*. 2007. Vol. 61. P. 659–663. URL: <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2006.11.016> (дата обращения: 28.02.2026).
16. Xu Y., Guan F. Structure design and mechanical measurement of inflatable antenna // *Acta Astronautica*. 2012. Vol. 76. P. 13–25. URL: <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.02.005> (дата обращения: 28.02.2026).
17. Schenk M., Viquerat A. D., Keith A., Seffen K. A., Simon D., Guest S. D. Review of inflatable booms for deployable space structures: packing and rigidization // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2014. Vol. 51, № 3. P. 762–778. URL: <http://doi.org/10.2514/1.A32598> (дата обращения: 28.02.2026).
18. Babuscia A., Corbin B., Knapp M., Jensen-Clem R., VandeLoo M., Seager S. Inflatable antenna for cubesats: Motivation for development and antenna design // *Acta Astronautica*. 2013. Vol. 91. P. 322–332. URL: <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.06.005> (дата обращения: 28.02.2026).
19. Babuscia A., Choi T., Cheung K.-M., Thangavelautham J., Ravichandran M., Chandra A. Inflatable antenna for cubesat: extension of the previously developed S-band design to the X-band // *AIAA SPACE 2015 Conference and Exposition*. 2015. P. 1–13. URL: <http://doi.org/10.2514/6.2015-4654> (дата обращения: 28.02.2026).
20. San B., Yang Q., Yin L. Stochastic and sensitivity analysis of shape error of inflatable antenna reflectors // *Acta Astronautica*. 2017. Vol. 132. P. 170–176. URL: <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.12.015> (дата обращения: 28.02.2026).
21. Финченко В. С., Пичхадзе К. М., Ефанов В. В. Надувные элементы в конструкциях космических аппаратов – прорывная технология в ракетно-космической технике / Под ред. В. А. Колмыкова, Х. Ж. Карчаева. Химки. АО "НПО Лавочкина". 2019. 488 с.
22. Демин Д. С., Кононенко П. И., Лебеденко В. И., Прилуцкий А. А., Резниченко В. И., Сидорчук Е. А., Сысоев В. К., Хмель Д. С. Концепция бортового радиолокатора на основе АФАР с использованием рефлектора с отверждаемым пневмокаркасом // *Труды МАИ*. 2021. Выпуск № 119. С. 1–31. URL: <http://doi.org/10.34759/trd-2021-119-1> (дата обращения: 28.02.2026).
23. Berthet M., Schalkwyk J., Çelik O., Sengupta D., Hein A. M., Tenorio L., Cardoso dos Santos J., Worden S. P., Mauskopf P. D., Miyazaki Y., Funaki I., Tsuji S., Piotr F., Suzuki K. Space sails for achieving major space exploration goals: Historical review and future outlook // *Progress in Aerospace Sciences*. 2024. Vol. 150. Article 101047. P. 1–52. URL: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2024.101047> (дата обращения: 28.02.2026).
24. Shareefdeen Z., Al-Najjar H. Pollution effects and management of orbital space debris // *ACS omega*. 2024. Vol. 9, № 5. P. 5127–5141. URL: <http://doi.org/10.1021/acsomega.3c06887> (дата обращения: 28.02.2026).
25. Garishin O. K., Svistkov A. L., Belyaev A. Yu., Gilev V. G. On the possibility of using epoxy preregs for carcass-inflatable nanosatellite antennas // *Materials Science Forum*. 2018. Vol. 938. P. 156–163. URL: <http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.938.156> (дата обращения: 28.02.2026).
26. Ma X., Ning An. N., Cong Q., Bai J.-B., Wu M., Xu Y., Zhou J., Zhang D., Zhang T., Guo R., Li H., Wang Y., Zhou X., Zhu J., Jin X., Feng Y., Wu D., Liu T.-W., Yan Z., Tong W. T., Haotian Xi. H., Qilong Jia Q. Design, modeling, and manufacturing of high strain composites for space deployable structures // *Communications Engineering*. 2024.

- Vol. 3, № 1. P. 78–96. URL: <http://doi.org/10.1038/s44172-024-00223-2> (дата обращения: 28.02.2026).
27. Dixit A., Mali H. S. Modeling techniques for predicting the mechanical properties of woven-fabric textile composites: a review // *Mechanics of Composite Materials*. 2013. Vol. 49, № 1. P. 1–20. URL: <https://doi.org/10.1007/s11029-013-9316-8> (дата обращения: 28.02.2026).
28. Aisyah H. A., Paridah M. T., Sapuan S. M., Ilyas R. A., Khalina A., Nurazzi N. M., Lee S. H., Lee C. H. A comprehensive review on advanced sustainable woven natural fibre polymer composites // *Polymers*. 2021. Vol. 13, 471. P. 1–45. URL: <https://doi.org/10.3390/polym13030471> (дата обращения: 28.02.2026).
29. Пирогов Д. А., Мирошниченко Д. А., Маслов Л. Б., Карева Т. Ю., Долунц Г. В. Разработка структуры многослойной ткани и экспериментальное исследование упругих свойств композиционного материала на ее основе при разных технологиях его производства // *Технология текстильной промышленности*. 2024. Т. 409, № 1. С. 224–231. URL: http://doi.org/10.47367/0021-3497_2024_1_224 (дата обращения: 28.02.2026).
30. Chowdhury I. R., Summerscales J. Woven fabrics for composite reinforcement: a review // *J. Compos. Sci.* 2024. Vol. 280, № 8. P. 1–19. URL: <https://doi.org/10.3390/jcs8070280> (дата обращения: 28.02.2026).
31. Фарух М. А. Анализ подходов к моделированию структуры ткани для проектирования тканых гибких преград для средств индивидуальной бронезащиты // *Технологии и качество*. 2025. Т. 69, № 3. С. 12–19. URL: <https://doi.org/10.34216/2587-6147-2025-3-69-12-19> (дата обращения: 28.02.2026).
32. Елисеева А. Ю., Свистков А. Л., Кондюрин А. В. Математическая модель реакции горячего отверждения препрега // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2017. Вып. 38 (4). С. 19–25. URL: <http://doi.org/10.17072/1994-3598-2017-4-19-25> (дата обращения: 28.02.2026).
33. Ефремов Д. Е., Толубеева Г. И. Теория переплетений. Часть 1. Главные и производные переплетения. Иваново: Ивановская государственная текстильная академия. 2007. 33 с.
34. Железняк В. Г., Чурсова Л. В. Модификация связующих и матриц на их основе с целью повышения вязкости разрушения // *Авиационные материалы и технологии*. 2014. №1. С. 47–50. URL: <http://doi.org/10.18577/2071-9140-2014-0-1-47-50> (дата обращения: 28.02.2026).
35. Фагалов А. Р., Беляев А. Ю. Моделирование стационарного теплового режима цилиндрического элемента каркаса на орбите // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2024. № 4 (67). С. 78–94. URL: <http://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-4-78-94> (дата обращения: 28.02.2026).

References

1. Lopatin, A. V. and Rutkovskaya, M. A. (2007), "Obzor konstruktsey sovremennykh transformiruemykh kosmicheskikh antenn (chast' 1)" [Review of designs of modern transformable space antennas (part 1)], *Vestnik SGAU imeni akademika M. F. Reshetneva* [Bulletin of the Reshetnev Siberian State Aerospace University], vol. 15, pp. 15–51.
2. Lopatin, A. V. and Rutkovskaya, M. A. (2007), "Obzor konstruktsey sovremennykh transformiruemykh kosmicheskikh antenn (chast' 2)" [Review of designs of modern transformable space antennas (part 2)], *Vestnik SGAU imeni akademika M. F. Reshetneva* [Bulletin of the Reshetnev Siberian State Aerospace University], vol. 16, pp. 78–81.

3. Tibert, A. G. (2003), "Optimal design of tension truss antennas", *AIAA Papers*, vol. 1, pp. 1629–1638, URL: <http://doi.org/10.2514/6.2003-1629> (accessed: 28.02.2026).
4. Buhl, T., Jensen, F. V. and Pellegrino, S. (2004), "Shape optimization of cover plates for retractable roof structures", *Computers and Structures*, vol. 82, pp. 1227–1236, URL: <http://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.02.021> (accessed: 28.02.2026).
5. Zimin, V. N. (2008), "Modelirovanie dinamiki raskrytiya kosmicheskikh konstruktsiy fermennogo tipa" [Modeling the dynamics of deployment of truss type space structures], *Polet* [Flight], no 10, pp. 42–48.
6. Zimin, V. N., Krylov, A. V., Meshkovsky, V. E., Sdobnikov, A. N., Faizullin, F. R. and Churilin, S. A. (2014), "Osobennosti rascheta raskrytiya krupnogabaritnykh transformiruemyykh konstruktsiy razlichnykh konfiguratsiy" [Features of calculating the deployment of large transformable structures of various configurations], *Nauka i Obrazovanie. MGTU im. N. E. Bauman* [Science and Education. Bauman Moscow State Technical University], no 10, pp. 179–191, URL: <http://doi.org/10.7463/1014.0728802> (accessed: 28.02.2026).
7. Lyashevsky, A. V., Prokopenko, E. A., Ginzburg, T. V. and Golovchinskaya, N. V. (2023), "Issledovanie protsessa raskrytiya transformiruемой zontichnoy antennoy kosmicheskogo apparata retranslyatora s uchetom kolebaniy mekhanicheskoy sistemy" [Study of the deployment process of a transformable umbrella antenna of a relay spacecraft considering mechanical system vibrations], *Trudy MAI* [Proceedings of the Moscow Aviation Institute], no 133, pp. 1–22, URL: <http://doi.org/trudymai.ru/published.php?ID=177655> (accessed: 28.02.2026).
8. Guest, S. D. and Pellegrino, S. (1996), "A new concept for solid surface deployable antennas", *Acta Astronautica*, vol. 38, pp. 103–113, URL: [http://doi.org/10.1016/0094-5765\(96\)00009-4](http://doi.org/10.1016/0094-5765(96)00009-4) (accessed: 28.02.2026).
9. Jensen, F. and Pellegrino, S. (2002), "Expandable structures formed by hinged plates", in *Fifth International Conference on Space Structures*. University of Surrey, UK, pp. 1–10, URL: <http://doi.org/10.1680/ss5v1.31739.0028> (accessed: 28.02.2026).
10. Keller, P. N., Lake, M. S., Codell, M., Barrett, D., Taylor, R. and Schultz, R. M. (2006), "Development of elastic memory composite stiffeners for a flexible precision reflector", in *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Newport, USA, pp. 1–14, URL: <http://doi.org/10.2514/6.2006-2179> (accessed: 28.02.2026).
11. Ponomarev, S. V. (2011), "Transformiruemye reflektory anten kosmicheskikh apparatov" [Transformable reflectors of spacecraft antennas], *Vestnik TGU* [Tomsk State University Journal], vol. 16, no 4, pp. 110–119, URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:0004575022> (accessed: 28.02.2026).
12. Vertegaal, C. and Bantum, M. (2020), "Feasibility study of inflatable antennas as observational antenna for ultra low frequency cubesat applications", in *IEEE Aerospace Conference*, USA, pp. 1–13, URL: <http://doi.org/10.1109/AERO47225.2020.9172668> (accessed: 28.02.2026).
13. Eliseeva, A. Yu., Komar, L. A. and Kondyurin, A. V. (2021), "Computational modeling of the curing of a frame of an inflatable satellite antenna in near earth orbit", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 62, no 7, pp. 1234–1242, URL: <http://doi.org/10.1134/S0021894421070087> (accessed: 28.02.2026).
14. Salama, M., Kuo, C. P. and Lou, M. (2000), "Simulation of deployment dynamics of inflatable structures", *AIAA Journal*, vol. 38, no 12, pp. 2277–2283, URL: <http://doi.org/10.2514/2.896> (accessed: 28.02.2026).

15. Mathers, N. and Thompson, L. (2007), "Using inflatable antennas for portable satellite based personal communications systems", *Acta Astronautica*, vol. 61, pp. 659–663, URL: <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2006.11.016> (accessed: 28.02.2026).
16. Xu, Y. and Guan, F. (2012), "Structure design and mechanical measurement of inflatable antenna", *Acta Astronautica*, vol. 76, pp. 13–25, URL: <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.02.005> (accessed: 28.02.2026).
17. Schenk, M., Viquerat, A. D., Keith, A., Seffen, K. A., Simon, D. and Guest, S. D. (2014), "Review of inflatable booms for deployable space structures: packing and rigidization", *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 51, no 3, pp. 762–778, URL: <http://doi.org/10.2514/1.A32598> (accessed: 28.02.2026).
18. Babuscia, A., Corbin, B., Knapp, M., Jensen-Clem, R., VandeLoo, M. and Seager, S. (2013), "Inflatable antenna for cubesats: motivation for development and antenna design", *Acta Astronautica*, vol. 91, pp. 322–332, URL: <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.06.005> (accessed: 28.02.2026).
19. Babuscia, A., Choi, T., Cheung, K.-M., Thangavelautham, J., Ravichandran, M. and Chandra, A. (2015), "Inflatable antenna for cubesat: extension of the previously developed S-band design to the X-band", in *AIAA SPACE 2015 Conference and Exposition*, 2015, pp. 1–13, URL: <http://doi.org/10.2514/6.2015-4654> (accessed: 28.02.2026).
20. San, B., Yang, Q. and Yin, L. (2017), "Stochastic and sensitivity analysis of shape error of inflatable antenna reflectors", *Acta Astronautica*, vol. 132, pp. 170–176, URL: <http://doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.12.015> (accessed: 28.02.2026).
21. Finchenko, V. S., Pichkhadze, K. M. and Efanov, V. V. (2019), *Naduynnye elementy v konstruksiyakh kosmicheskikh apparatov – proryvnaya tekhnologiya v raketno-kosmicheskoy tekhnike* [Inflatable elements in spacecraft structures – a breakthrough technology in rocket and space engineering], ed. by V. A. Kolmykov, Kh. Zh. Karchaev, AO "NPO Lavochkina", Khimki, 488 p.
22. Demin, D. S., Kononenko, P. I., Lebedenko, V. I., Prilutsky, A. A., Reznichenko, V. I., Sidorchuk, E. A., Sysoev, V. K. and Khmel, D. S. (2021), "Kontseptsiya bortovogo radiolokatora na osnove AFAR s ispol'zovaniem reflektora s otverzhdaemym pnevmokarkasom" [Concept of an onboard radar based on AFAR using a reflector with a curable pneumatic frame], *Trudy MAI* [Proceedings of the Moscow Aviation Institute], no 119, pp. 1–31, URL: <http://doi.org/10.34759/trd-2021-119-1> (accessed: 28.02.2026).
23. Berthet, M., Schalkwyk, J., Çelik, O., Sengupta, D., Hein, A. M., Tenorio, L., Cardoso dos Santos, J., Worden, S. P., Mauskopf, P. D., Miyazaki, Y., Funaki, I., Tsuji, S., Piotr, F. and Suzuki, K. (2024), "Space sails for achieving major space exploration goals: historical review and future outlook", *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 150, article 101047, pp. 1–52, URL: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2024.101047> (accessed: 28.02.2026).
24. Shareefdeen, Z. and Al-Najjar, H. (2024), "Pollution effects and management of orbital space debris", *ACS Omega*, vol. 9, no 5, pp. 5127–5141, URL: <http://doi.org/10.1021/acsomega.3c06887> (accessed: 28.02.2026).
25. Garishin, O. K., Svistkov, A. L., Belyaev, A. Yu. and Gilev, V. G. (2018), "On the possibility of using epoxy prepregs for carcass-inflatable nanosatellite antennas", *Materials Science Forum*, vol. 938, pp. 156–163, URL: <http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.938.156> (accessed: 28.02.2026).
26. Ma, X., Ning, An N., Cong, Q., Bai, J.-B., Wu, M., Xu, Y., Zhou, J., Zhang, D., Zhang, T., Guo, R., Li, H., Wang, Y., Zhou, X., Zhu, J., Jin, X., Feng, Y., Wu, D., Liu, T.-W., Yan, Z., Tong, W. T., Haotian, Xi H., Qilong, Jia Q. (2024), "Design, modeling, and manufacturing of high strain composites for space deployable structures", *Communica-*

- tions Engineering, vol. 3, no 1, pp. 78–96, URL: <http://doi.org/10.1038/s44172-024-00223-2> (accessed: 28.02.2026).
27. Dixit, A. and Mali, H. S. (2013), "Modeling techniques for predicting the mechanical properties of woven-fabric textile composites: a review", *Mechanics of Composite Materials*, vol. 49, no 1, pp. 1–20, URL: <https://doi.org/10.1007/s11029-013-9316-8> (accessed: 28.02.2026).
28. Aisyah, H. A., Paridah, M. T., Sapuan, S. M., Ilyas, R. A., Khalina, A., Nurazzi, N. M., Lee, S. H. and Lee, C. H. (2021), "A comprehensive review on advanced sustainable woven natural fibre polymer composites", *Polymers*, vol. 13, article 471, pp. 1–45, URL: <https://doi.org/10.3390/polym13030471> (accessed: 28.02.2026).
29. Pirogov, D. A., Miroshnichenko, D. A., Maslov, L. B., Kareva, T. Yu. and Dolunts, G. V. (2024), "Razrabotka struktury mnogosloynnoy tkani i eksperimental'noe issledovanie uprugikh svoystv kompozitsionnogo materiala na ee osnove pri raznykh tekhnologiyakh ego proizvodstva" [Development of the structure of multilayer fabric and experimental study of the elastic properties of the composite material based on it under different production technologies], *Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti* [Technology of Textile Industry], vol. 409, no 1, pp. 224–231, URL: http://doi.org/10.47367/0021-3497_2024_1_224 (accessed: 28.02.2026).
30. Chowdhury, I. R. and Summerscales, J. (2024), "Woven fabrics for composite reinforcement: a review", *Journal of Composite Science*, vol. 280, no 8, pp. 1–19, URL: <https://doi.org/10.3390/jcs8070280> (accessed: 28.02.2026).
31. Farukh, M. A. (2025), "Analiz podkhodov k modelirovaniyu struktury tkani dlya proektirovaniya tkanykh gibkikh pregrad dlya sredstv individual'noy bronezashchity" [Analysis of approaches to modeling fabric structure for designing woven flexible barriers for personal protective equipment], *Tekhnologii i kachestvo* [Technologies and Quality], vol. 69, no 3, pp. 12–19, URL: <https://doi.org/10.34216/2587-6147-2025-3-69-12-19> (accessed: 28.02.2026).
32. Eliseeva, A. Yu., Svistkov, A. L. and Kondyurin, A. V. (2017), "Matematicheskaya model' reaktsii goryachego otverzhdeniya preprega" [Mathematical model of the hot curing reaction of prepreg], *Vestnik Permskogo universiteta. Fizika* [Bulletin of Perm University. Physics], issue 38 (4), pp. 19–25, URL: <http://doi.org/10.17072/1994-3598-2017-4-19-25> (accessed: 28.02.2026).
33. Efremov, D. E. and Tolubeeva, G. I. (2007), *Teoriya perepleteniy. Chast' 1: Glavnye i proizvodnye perepleteniya* [Theory of weaves. Part 1: Primary and derivative weaves], Ivanovskaya gosudarstvennaya tekstil'naya akademiya, Ivanovo, 33 p.
34. Zheleznyak, V. G. and Chursova, L. V. (2014), "Modifikatsiya svyazuyushchikh i matrits na ikh osnove s tsel'yu povysheniya vyazkosti razrusheniya" [Modification of binders and matrices based on them to increase fracture toughness], *Aviatsionnye materialy i tekhnologii* [Aviation Materials and Technologies], no 1, pp. 47–50, URL: <http://doi.org/10.18577/2071-9140-2014-0-1-47-50> (accessed: 28.02.2026).
35. Fagalov, A. R. and Belyaev, A. Yu. (2024), "Modelirovanie statsionarnogo teplovogo rezhima tsilindricheskogo elementa karkasa na orbite" [Modeling of the steady-state thermal regime of a cylindrical frame element in orbit], *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], no 4 (67), pp. 78–94, URL: <http://doi.org/10.17072/1993-0550-2024-4-78-94> (accessed: 28.02.2026).

Информация об авторах:

О. К. Гаришин – доктор физико-математических наук; старший научный сотрудник лаборатории микромеханики структурно-неоднородных сред Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1), AuthorID: 5880;

А. Г. Пелевин – инженер и преподаватель Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь Букирева, д. 15), AuthorID: 598774.

Information about the authors:

O. K. Garishin – Doctor of Sciences in Physics and Mathematics; senior researcher of the Laboratory of micromechanics of structurally inhomogeneous media, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1 Academic Korolev St., Perm, Russia, 614013), AuthorID: 5880;

A. G. Pelevin – engineer and lecturer at Perm State University (15 Bukirev St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 598774.

Научная статья

УДК 532.4;519.63

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-75-87

<https://elibrary.ru/ncyare>



Исследование соответствия системы уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска модели течения в микропробирке при проведении ПЦР

Лаврентий Юрьевич Привалов¹, Константин Иванович Михайленко²

^{1, 2} Институт механики имени Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия

¹ lavrenty.privalov@gmail.com

² const@uimech.org

Аннотация. В работе рассматривается конвективное течение в стандартной полипропиленовой микропробирке, используемой при проведении полимеразной цепной реакции. Недавние исследования показывают, что проведение реакции возможно в самой пробирке без использования специализированных устройств поддержания температуры, однако при этом условии в пробирке будет формироваться конвективное течение с широким диапазоном изменения температур. Данная особенность ставит под сомнение адекватность использования приближения Буссинеска из-за возможного значительного изменения теплофизических свойств жидкости в пробирке. В ходе проведения серии вычислительных экспериментов с использованием программного пакета OpenFOAM получены идентичные решения при использовании решателей как основанных на модели Буссинеска, так и использующих уравнение состояния, учитывающее изменение плотности, теплопроводности и вязкости жидкости. При более детальном анализе получено, что решения совпадают даже для незначительных компонент при сингулярном разложении. Сделан вывод о том, что для рассматриваемого процесса использование модели, основанной на приближении Буссинеска, является достаточным.

Ключевые слова: система уравнений тепловой конвекции; приближение Буссинеска; OpenFOAM; микропробирка.

Для цитирования: Привалов Л. Ю., Михайленко К. И. Исследование соответствия системы уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска модели течения в микропробирке при проведении ПЦР // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 75–87. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-75-87. <https://elibrary.ru/ncyare>.

Статья поступила в редакцию 09.05.2025; одобрена после рецензирования 07.05.2026; принята к публикации 10.06.2026.



© Привалов Л. Ю., Михайленко К. И., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

Study of the Correspondence of the Thermal Convection Equations System in the Boussinesq Approximation to the Flow Model in a Microtube During PCR

Lavrentiy Yu. Privalov¹, Constantin I. Mikhailenko²^{1,2} R. R. Mavlyutov Institute of Mechanics of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia¹ lavrenty.privalov@gmail.com² const@uimech.org

Abstract. This paper addresses convective flow in a standard polypropylene microtube used for polymerase chain reaction. Recent studies show that the reaction can be performed in the tube itself without the use of specialized temperature maintenance devices, however this will result in a convective flow with a wide range of temperature ranges in the tube. This characteristic poses concerns about the suitability of using the Boussinesq approximation because of the possible significant variation of the thermophysical properties of the liquid. In the course of a series of computational experiments using the OpenFOAM software package, identical solutions were obtained using solvers for both the Boussinesq model and the equation of state that takes into account the variation of liquid density, thermal conductivity and viscosity. A closer analysis shows that the solutions match even for insignificant components of the singular value decomposition. It is concluded that the use of a model based on the Boussinesq approximation is sufficient for the given case.

Keywords: *system of thermal convection equations; Boussinesq approximation; OpenFOAM; microtube.*

For citation: Privalov, L. Yu. and Mikhailenko, C. I. (2026), "Study of the Correspondence of the Thermal Convection Equations System in the Boussinesq Approximation to the Flow Model in a Microtube During PCR", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 75–87, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-75-87, <https://elibrary.ru/ncyare>.

The article was submitted 09.05.2025; approved after reviewing 07.05.2026; accepted for publication 10.06.2026.

Введение

Конвективные течения играют ключевую роль в различных природных и технологических процессах, определяя распределение тепла и массы в атмосфере, океанах и технических системах. Понимание механизмов возникновения и развития конвективных течений имеет фундаментальное значение для прогнозирования климатических изменений, оптимизации систем отопления и охлаждения, перемешивания, а также для решения других прикладных задач.

Изучение явления конвекции подробно описано в классической литературе [1] для конвекции в различных простых и сложных системах, а также особых режимов, возникающих при определенных условиях. При небольших изменениях плотности среды достаточно использования распространенного приближения Буссинеска [2], что позволяет значительно упростить как аналитическую, так и счетную задачу. Однако у всех приближений существуют условия, при которых их решение незначительно отклоняется от истинного, при этом даже при соблюдении этих условий ошибочные значения могут возникнуть у величин, не связанных с ограничениями напрямую, что, например, в работе [3] потребовало внесения дополнительных модификаций в систему уравнений. Согласно [4], приближение Обербека–Буссинеска подразумевает малость изменения температур, вязкостной диссипации, гидростатического давления, а также линейность изменения

плотности и постоянность теплофизических свойств. Значимость отклонения теплофизических свойств для воздуха приведена в работе [5].

Одной из задач, в которой может быть применено приближение Буссинеска, является задача конвекционной полимеразной цепной реакции (ПЦР) [6]. Классически, конвективная ПЦР подразумевает использование специального оборудования, некоторые из которых описаны в работе [7]. Однако в работе [8] представлен вариант установки с использованием только трех компонентов: микропробирки, нагревательного и охлаждающего элементов. Основной идеей такого подхода является снижение трудоемкости и стоимости ПЦР реакции за счет отказа от сложного специализированного оборудования. По данному направлению проводятся исследования, в числе которых следует отметить постановку численной задачи в программном пакете OpenFOAM, первичная оценка качества сетки [9], и анализ влияния наклона на скорость конвективного течения [10]. В последнем приведенном исследовании сказано, что градиент температур полагается малым, хотя речь идет о перепаде в почти в 100 К на расстоянии меньше сантиметра между нагревательным и охлаждающим элементами. Возвращаясь к [4], [5], можно отметить, что при таком изменении температур изменение теплофизических свойств может быть значительным и нелинейным, так, например, температуропроводность воды изменяется приблизительно на 15%, а ее динамическая вязкость почти в 10 раз.

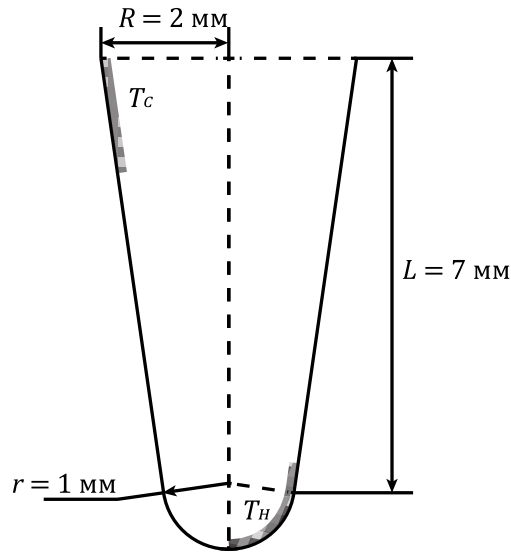
В направлении конвективной ПЦР в микропробирке на данный момент имеется небольшое количество работ. Кроме кинематики течения исследуется также возможность применения реакционной смеси для оценки реакции в работе [11]. При этом в качестве модели движения используется наиболее полное описание течения, что требует значительных затрат вычислительного времени.

В данной работе рассматривается задача численного моделирования конвективного течения жидкости в стандартной полипропиленовой микропробирке, используемой для проведения ПЦР, для оценки влияния погрешности приближения Буссинеска на результат вычислительного эксперимента при учете изменения теплофизических свойств в заданном диапазоне температур. Сравнение производится за счет схожести значимых компонент сингулярного разложения.

1. Постановка общей задачи численного исследования

Используется стандартная полипропиленовая микропробирка 50 мкл, широко применяемая как емкость для проведения реакций на выявление ДНК маркеров [7]. Предполагается использование такой же микропробирки для проведения ускоренной ПЦР реакции при организации подвода тепла снизу, и охлаждения сверху. Такой подход требует минимального оборудования при практически той же или большей эффективности [8]. В работе [9] сетка для моделирования динамики жидкости в микропробирке уже определена, также в работе приведена детальная информация о ее свойствах и качестве (согласно отчету утилиты checkMesh).

Схема расчетной области микропробирки показана на рис. 1. Здесь, как и в ранних работах, за основу берется нижняя треть пробирки, высота сужающейся части которой составляет 7 мм. Сужающаяся часть представляет собой усеченный конус, узкая часть которого плавно переходит в сферическую поверхность. Полагается, что нагрев снизу происходит при температуре $T_H = 375$ К, а охлаждение сверху при температуре $T_C = 280$ К. Важным отличием от предыдущих граничных условий модели является использование границы с условием проскальзывания в верхней части пробирки, так как на практике она представляет собой границу раздела фаз жидкость-воздух (пунктирная линия на рис. 1). Хотя и имеет место явление колебания границы при конвекции [12], для простоты системы этим можно пренебречь. Более того, деформации в сетке конечных объемов нетривиальны.



е

Рис. 1. Схема конструкции микропробирки, используемой для построения сетки конечных объемов

Согласно рекомендациям [13], наилучшей конфигурацией сетки, обеспечивающей качественную сходимость, является сетка, наиболее приближенная к ортогонализированной. Для минимизации искажений была использована методика, включающая размещение кубовидной структуры в центральной части, которая плавно интегрируется с границами области, что представляет собой вариацию подхода с использованием скругленного кубического элемента. Это практически полностью повторяет построение сетки в ранних работах.

На рисунке 2 представлен боковой и горизонтальный срез получившейся сетки пробирки. Так же, как и в [9], конечная сетка состоит из прямых внутренних блоков, состыкованных с искривленными внешними блоками, описывающими границу пробирки. Согласно выводу утилиты оценки сетки checkMesh, коэффициент искажения ячейки не превышает трехкратного в худшем случае.

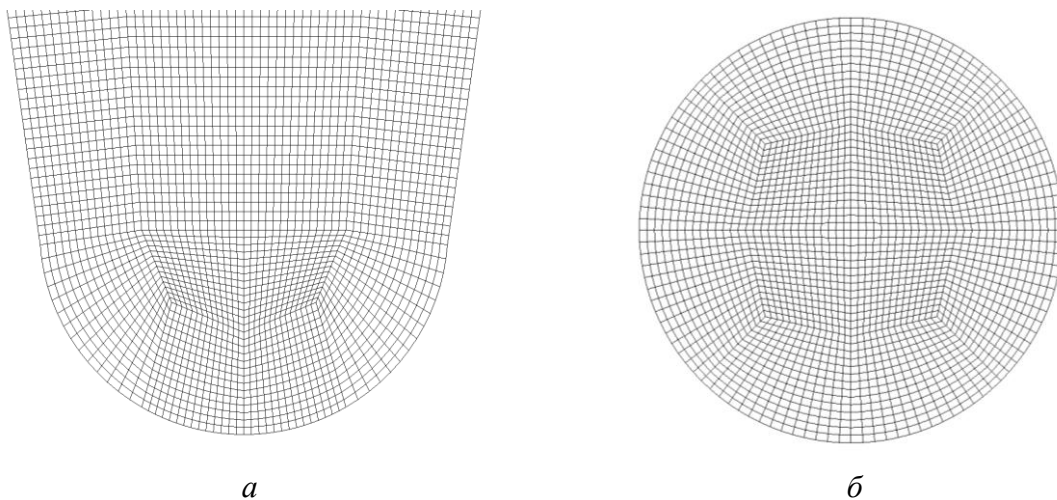


Рис. 2. Боковой срез нижней части (а) и горизонтальный срез верхней части (б) получившейся сетки

Задачей данной работы является сравнение решений задачи конвекции с использованием как общей системы уравнений гидродинамики, так и модели в приближении Буссинеска, принимая во внимание термодинамические свойства среды. Согласно [1], ключевая система уравнений гидродинамики, из которой в дальнейшем получается приближение, определяется следующей системой:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.2)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla s \right) = \kappa \Delta T + D, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{u}$ – скорость, p – давление, ρ – плотность, T – абсолютная температура, s – энтропия единицы массы жидкости, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, η и ζ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, κ – коэффициент теплопроводности, D – диссипативная функция.

Система уравнений в приближении Буссинеска, полученной из (1.1)–(1.3) в предположении о малости отклонения плотности от исходного значения, определяется следующей системой:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \beta (T - T_0) \mathbf{g}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T, \quad (2.3)$$

где ν – кинематическая вязкость, β – коэффициент теплового расширения, ρ_0 – эталонная плотность, T_0 – эталонная температура, α – коэффициент температуропроводности.

Программный пакет OpenFOAM включает в себя реализации систем тепловой конвекции со сдвиговой вязкостью μ без учета объемной (в OpenFOAM принято обозначать сдвиговую вязкость через μ , тогда как в классической литературе через η , однако их смысл эквивалентен). На примере системы уравнений гидродинамики уравнение сохранения импульса (1.2) заменяется на более общее:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \epsilon_{\mathbf{u}}) + \nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) + \rho \mathbf{g}, \quad (3)$$

где $\epsilon_{\mathbf{u}}$ — тензор скоростей деформации. В общем случае уравнение сохранения энергии (1.3) может быть выбрано на основании других свойств среды, при этом для всех реализаций коэффициенты тепло- и температуропроводности выбираются на основании эффективных значений. Так, в данной реализации вместо энтропии была использована энтальпия с температуропроводностью α :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} h) + \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} K) - \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla h) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}, \quad (4)$$

где $K \equiv |\mathbf{u}|^2/2$, $h \equiv e + p/\rho$, e — удельная энергия. Величины вязкости, теплопроводности, Прандтля и удельной теплоемкости между системами уравнений (1), (2) с учетом

(3) и (4) связаны соотношениями $\alpha = \mu/Pr = \kappa/C_p$. Для системы уравнений приближения Буссинеска положения о значении вязкостей аналогичны указанным выше. Таким образом, при помощи программного пакета OpenFOAM реализуются системы уравнений гидродинамики (1.1), (3), (4) в решателе buoyantPimpleFoam и (2.1), (2.2), (2.3) в решателе buoyantBoussinesqPimpleFoam.

Обе описанные версии моделей используют разные множества параметров, определяющих свойства среды. За рабочую среду в данном случае была принята вода. Очень важно понимать, что помимо плотности среда обладает и другими переменными свойствами, такими как вязкость и теплоемкость. Для наиболее точного задания свойств среды была использована полиномиальная (и, вообще говоря, нелинейная) аппроксимация [14], согласно данным из справочника [15]. В случае же параметров среды для решателя уравнений приближения Буссинеска были взяты постоянные значения, пригодные для достижения наибольшей точности в диапазоне температур около 40–50 °С. Окончательные значения всех необходимых параметров среды представлены в табл. 1.

Таблица 1. Параметры среды для полной системы уравнений теплопроводности и приближения Буссинеска, требуемых в реализации программного пакета OpenFOAM

Приближение Буссинеска	Полная система уравнений
$\nu = 3.9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$	$C_p(t) = (9850.69t^0 - 48.6714t^1 + 0.13736t^2 - 1.27063 \cdot 10^{-4}t^3) \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
$\beta = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг}/(\text{м}^3\text{К})$	$\rho(t) = (746.025t^0 + 1.93017t^1 - 0.00365471t^2) \text{ кг} \cdot \text{м}^3$
$T_0 = 350.15 \text{ К}$	$\mu(t) = (0.116947t^0 - 0.00100532t^1 + 2.90283 \cdot 10^{-6}t^2 - 2.80572 \cdot 10^{-9}t^3) \text{ Па} \cdot \text{с}$
$Pr = 2.4$	$\kappa(t) = (-0.710696t^0 + 0.0071857t^1 - 9.29827 \cdot 10^{-6}t^2) \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$

Следует отметить, что условие горячей области пробирки $T_H = 375 \text{ К}$ подразумевает температуру немного большую, чем температура кипения воды, что допускает возможность кипения. Однако данным явлением можно пренебречь. Температура задана лишь на границе области, которая непрерывно омывается холодным потоком, поэтому доля объема при температуре кипения крайне мала. Более того, во время столь небольшого и кратковременного перегрева дистиллированная вода с легкостью может пребывать в метастабильном состоянии без кипения.

Для осуществления численного расчета исходная сетка была разбита на 4 части, содержащие приблизительно равное число ячеек. OpenFOAM позволяет производить вычисления с использованием пространственной декомпозиции расчетной области, когда каждая из подобластей может использоваться отдельным процессом в программной среде MPI, что позволяет добиться ускорения за счет распараллеливания задачи. Данный подход может оказывать небольшое влияние на решение, так как в месте разрыва между подобластями производится слияние решений, однако, для обоих решателей используется одно и то же разбиение, что не оказывает существенного влияния.

При идентичных конфигурациях параллельного запуска вычислительных задач для двух различных решателей – buoyantPimpleFoam для системы уравнений Навье–Стокса и buoyantBoussinesqPimpleFoam для приближения Буссинеска – время завершения расчета различается значительно. Для вычисления одной секунды (при $t \in [11, 12] \text{ с}$) у решателя buoyantPimpleFoam требуется около 250 секунд, тогда как у buoyantBoussinesqPimpleFoam – лишь 150 секунд реального времени, что соответствует ускорению в 1.7 раза.

2. Анализ численного решения

В численном эксперименте проводится расчет до момента времени $t_1 = 25.7$ с, используется шаг по времени $\Delta t_B = 0.002$ с для решателя системы в приближении Буссинеска и $\Delta t_{N-S} = 0.001$ с для полной системы. Далее будет также показано, что шаг по времени Δt_B достаточно мал и дальнейшее измельчение шага по времени не требуется. Результаты расчетов сохраняются с шагом записи каждые 0.1 с. В предыдущих работах [9,10] было отмечено, что к моменту времени 11 с достигается установление, но процесс конвекции не является стационарным, поэтому могут возникнуть колебания.

Наиболее простым способом сравнения полученных решений является оценка одинаковых "стандартных величин". Так, например, максимальные значения модуля скорости для двух рассмотренных моделей очень близки: максимальная скорость $u_{max}^B = 8.5$ см/с в случае приближения Буссинеска; и $u_{max}^{N-S} = 8.2$ см/с для полной системы уравнений. Однако можно оценить одновременно и схожесть решений, и их близость к установившемуся решению, используя сингулярное разложение [15, 16]. Оно позволяет вычислить наиболее существенные сингулярные значения (не "собственные") и сингулярные вектора заданной матрицы. Обычно оно используется для отсека слабых компонент и сохранения значимых (сжатие данных с потерями), а также может показывать преобладание одной или более компонент. Формально, сингулярное разложение определяется равенством

$$M = U\Sigma V^*, \quad (5)$$

где M – исходная матрица произвольного размера, U и V^* – сингулярные матрицы преобразования, Σ – диагональная матрица сингулярных чисел, расположенных в порядке возрастания.

Составляющая U уравнения (5) также является частью метода ортогонального разложения, известного в англоязычной литературе как "Proper Orthogonal Decomposition", которое, например, может быть использовано для анализа турбулентных потоков [17], вихревых токов [18], или даже частотного анализа на предмет наличия выраженных колебаний определенной частоты [19]. В данном случае поток не является турбулентным, так как число Рейнольдса $Re \leq 8$, однако он может иметь колебания за счет конвективного течения.

Для применения метода ортогонального разложения к данной задаче необходимо в качестве матрицы M взять такую, в каждом столбце которой в каждой колонке выписаны все значения всех компонент скоростей во всем объеме (~921 000 значений в рамках данной задачи) для каждого шага по времени в некотором интервале, т.е.:

$$M = |m_{ik}| = |\vec{u}_i^k|, \quad \text{где } \mathbf{u}_j^k = (\vec{u}_{3j+0}^k, \vec{u}_{3j+1}^k, \vec{u}_{3j+2}^k). \quad (6)$$

Компоненты $\vec{u}_j^k$ подразумевают одну из координатных значений x , y или z векторов скоростей на временном шаге k . В общем случае не имеет значения как именно компоненты векторов скоростей распределены в одном столбце. В данном примере каждый вектор скорости занимает по 3 позиции для каждой из своих координат. Иными словами, один столбец представляет собой набор значений $v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, v_{x2}, v_{y2}, v_{z2}, v_{x3}$ и так далее.

Так как полагается, что после 11 секунд течение уже является близким к установившемуся, то можно использовать интервал от 13 с до 25.7 с, при котором число шагов с учетом частоты записи равно 128. Для осуществления ортогонального разложения был

разработан небольшой скрипт, написанный на языке Python, который использует скорости в конечных объемах в заданном диапазоне времен для создания новых векторных полей наиболее значимых компонент из столбцов матрицы U уравнения (3). Матрицы U , Σ и V^* находятся однозначно при помощи встроенной в библиотеку numpy функцию `linalg.svd`. В результате сингулярного разложения – и ортогонального разложения в частности – векторное поле полагаемого стационарного состояния раскладывается на компоненты различной степени значимости подобно дискретному преобразованию Фурье, где самая первая по порядку компонента не изменяется во времени (постоянное среднее значение). В таблице 2 приведены первые четыре сингулярные значения компонент.

Таблица 2. Значимые величины сингулярных чисел диагональной матрицы Σ и их процентные доли при сингулярном разложении всего объема скоростей

k	Приближение Буссинеска		Полная система уравнений	
	$\sqrt{\lambda_k}$	доля, %	$\sqrt{\lambda_k}$	доля, %
1	4.45897668	99.98366386	3.43120718	99.96114623
2	0.00072836	0.01633218	0.00133229	0.03883595
3	0.00000017	0.00003945	0.00000136	0.00003985
4	<0.00000001	0.00000001	<0.00000001	0.00000024

Очевидно, что только первая компонента является значимой. Это говорит о том, что в интервале времени от 13 с до 25.7 с практически отсутствуют изменения или колебания.

Кроме оценки стационарности или наличия особых режимов течения, разложение на компоненты можно использовать для оценки схожести между двумя вариантами решения [18]. На рисунке 3 представлены 6 состояний, по 3 для каждого из решателей, где рисунки 3(а) и 3(б) представляют собой линии тока в исходном поле скоростей на фоне поля температур, а рисунки 3(а1)/3(б1) и 3(а2)/3(б2) – первый и второй компоненты разложения соответственно. Стоит отметить, что первая компонента имеет противоположное направление, которое затем инвертируется правой сингулярной матрицей V^* , но линии тока при этом практически полностью повторяют исходное поле скоростей.

На представленных на рис. 3 линиях тока можно видеть, что нет визуального отличия между решениями, полученными по модели с приближением Буссинеска и с полной системой уравнений, а также, что вторая компонента имеет схожую структуру в обоих случаях.

В эксперименте шаг по времени постановки в приближении Δt_B отличен от шага полной системы Δt_{N-S} . Этому предшествовало то, что Δt_B был подобран на основании получаемого числа Куранта, тогда как Δt_{N-S} был взят с некоторым запасом. Тем не менее, величина $\Delta t_B = 0.002$ с достаточно мала. В этом легко убедиться, если сравнить данное решение с результатом при $\Delta t_B^* = 0.001$ с, используя "слабые" вторые компоненты. На рисунке 4 представлены вторые компоненты сингулярного разложения поля скоростей исходной задачи для Δt_B (а) и с измененным шагом по времени Δt_B^* . Можно видеть, что нет практически никакого визуального отличия между линиями тока при тех же самых начальных позициях этих линий, кроме отдельно взятых малых участков, например, в левом углу пробирки.

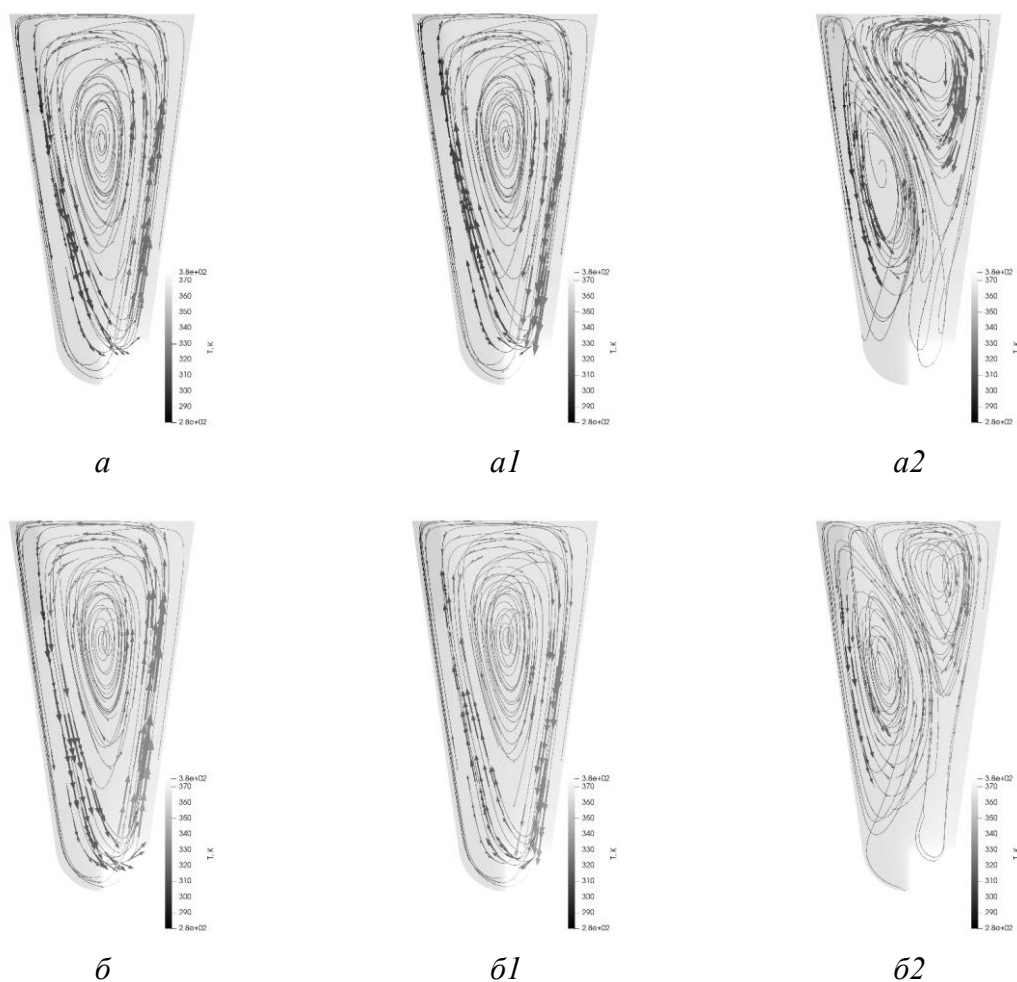


Рис. 3. Линии тока внутри объема микропробирки в исходном поле скоростей, и их 1-ой и 2-ой компоненты сингулярного разложения решения с использованием приближения Буссинеска (а, а1, а2) и полной системы уравнений (б, б1, б2)

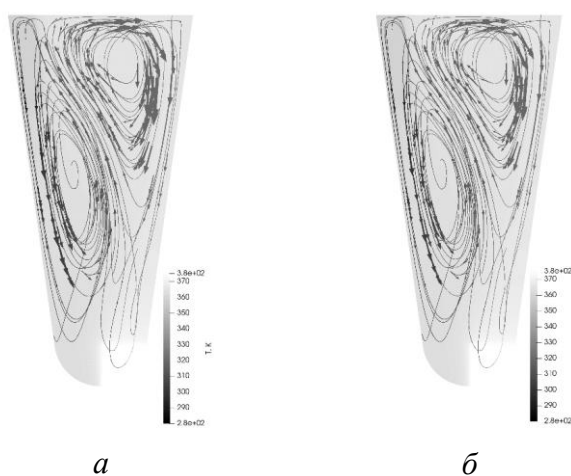


Рис. 4. Линии тока внутри объема микропробирки для второй компоненты скорости при исходном шаге по времени Δt_B (а) и вдвое меньшем шаге Δt_B^* (б)

3. Обсуждение результатов

Основной целью анализа результатов является оценка оправданности использования модели, основанной на приближении Буссинеска вместо полной системы уравнений. Использование модели Буссинеска позволяет как упростить систему уравнений, так и ускорить проведение вычислительного эксперимента так как, во-первых, упрощенная модель требует знания меньшего числа параметров или экспериментальных данных, а во-вторых, расчет занимает меньше времени. Как можно видеть из табл. 1, описание свойств среды для приближения Буссинеска намного проще, так как предполагается, что изменения некоторых из них малы, и могут быть описаны простым линейным соотношением. Но из этого также вытекает дополнительная сложность, связанная с необходимостью сделать дополнительные допущения о некотором среднем (эталонном) значении. Ввиду большого температурного различия между холодной и горячей областью, свойства среды могут изменяться значительно, однако существенные значения температуры будут достигаться лишь в небольшом объеме. Среднее значение температуры, относительно которого заданы свойства среды в приближении Буссинеска, было подобрано на основании предположения, что наиболее "значимая" температура в области будет находиться в диапазоне 40–50 °С, а изменение свойств среды с изменением температуры не более чем линейно.

Результаты расчета показывают, что максимальные модули скоростей практически совпадают при использовании различных подходов. Визуально получаемые потоки неотличимы, вплоть до локальных особенностей. Для окончательного подтверждения схожести поле скоростей было проанализировано при помощи сингулярного разложения с последующим сравнением значимых компонент. Сингулярное разложение позволяет оценить сразу несколько факторов: стационарность получаемого поля скоростей и схожесть сравниваемых решений. Из проведения данного сравнения получено, что, во-первых, в силу преобладания первой – стационарной – компоненты поле скоростей является практически стационарным, и, во-вторых, решения, полученные как при помощи системы уравнений в приближении Буссинеска, так и полной системы уравнений тепловой конвекции, идентичны, в том числе и во второй компоненте, которая является незначительной.

Таким образом, несмотря на значительный температурный перепад в 95 К на расстоянии в несколько миллиметров, система уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска сохраняет схожесть с полной системой, учитывающей уравнение состояния. Однако, стоит иметь в виду, что рабочей средой в тестовом примере выбрана вода, изменение свойств в рассматриваемом диапазоне температур невелико и их нелинейностью можно пренебречь. В действительности, смесь реагентов может значительно отличаться по свойствам. Таким образом, сделанные выводы могут быть неверны при моделировании динамики существенно неньютоновских жидкостей.

Заключение

В представленной данной работе проведено сравнение численного решения двух математических моделей тепловой конвекции жидкости в полипропиленовой микропробирке. Указанные модели: полная модель, учитывающая уравнения неразрывности, импульсов, энергии и уравнение состояния; модель на основе приближения Буссинеска, включающая уравнения неразрывности, импульсов и теплопроводности. В обоих случаях решение проводилось на одной и той же конечно-объемной сетке, ранее разработанной для моделирования процессов в микропробирке.

Проведенный анализ результатов моделирования показал практически полную качественную схожесть между результатами, полученными для двух математических моделей процесса. Указанная схожесть определяется не только общей картиной динамики

жидкости, но и значительным совпадением в динамической картине при разложении на значимые компоненты при помощи сингулярного разложения. Кроме того, анализ решения также показал, что на рассматриваемых временах при неизменных внешних параметрах обе модели приводят к установившемуся решению. Также следует отметить, что идентичность сингулярных чисел диагональной матрицы Σ для обеих моделей вплоть до незначимой компоненты подтверждает правильность выбора параметров.

Таким образом показано, что для дальнейшего исследования процессов тепловой конвекции в микропробирке в ходе реакции ПЦР использование математической модели, основанной на приближении Буссинеска, допустимо и обосновано.

Список источников

1. *Гериуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. *Зубова Н. А., Любимов Д. В., Любимова Т. П.* Слабонадкритические режимы трехмерной конвекции в кубической полости // Вестник ПГУ. Физика. 2011. № 1. С. 21–26.
3. *Винниченко Н. А., Уваров А. В.* Модернизация приближения Обербека–Буссинеска для решения нестационарных задач конвекции в замкнутой полости // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2010. № 6. С. 28–32.
4. *Mayeli P., Sheard G. J.* Buoyancy-driven flows beyond the Boussinesq approximation: A brief review // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2021. Vol. 125. 105316. DOI:10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105316.
5. *Cimarelli A., Fenzi A., Angeli D., Stalio E.* Assessment of the Oberbeck–Boussinesq approximation for buoyancy-driven turbulence in air // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2025. Vol. 243. P. 126851. DOI:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2025.126851.
6. *Mullis K. B., Faloona F. A.* Specific Synthesis of DNA in Vitro via a Polymerase_Catalyzed Chain Reaction // Methods in enzymology. 1987. Vol. 155. P. 335–350.
7. *Чемерис Д. А., Гарафутдинов Р. Р., Сахабутдинова А. Р., Малеев Г. В., Чемерис А. В.* Конвекционная ПЦР в конвективных ячейках разных типов // Биомика. 2018. Т. 10(4). С. 410–443. DOI:10.31301/2221-6197.bmcs.2018-52.
8. *Garafutdinov R. R., Chemeris D. A., Sakhabutdinova A. R., Moiseev K. V., Urmancheev S. F., Mikhaylenko K. I., Privalov L. Yu., Chemeris A. V.* Convective polymerase chain reaction in standard microtubes // Analytical Biochemistry. 2022 Vol. 641. P. 114565. DOI: 10.1016/j.ab.2022.114565.
9. *Исламов А. И., Набиуллина К. Р.* Моделирование термоконвекции в микропробирке при точечном нагреве: подготовка вычислительной сетки и выбор методов // Многофазные системы. 2024. Т. 19, № 2. С. 64–72. DOI:10.21662/mfs2024.2.010.
10. *Исламов А. И., Набиуллина К. Р.* Моделирование температурной конвекции в микропробирках при точечном нагреве: зависимость скорости конвекции от угла наклона // Многофазные системы. 2024. Т. 19, № 3. С. 94–102. DOI:10.21662/mfs2024.3.014.
11. *Михайленко К. И., Васильев Т. А., Ахметзянова Л. У.* К вычислительному моделированию химических взаимодействий в условиях температурной микроконвекции // Вестник Башкирского университета. 2024. Т. 29, № 4. С. 230–235. 10.35184/bulletin-bsu2024.4.9.
12. *Самойлова А. Е.* О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной поверхностью. Слабонелинейный анализ // Вестник ПГУ. Физика. 2011. №1. С. 3–8.

13. *Mikhaylenko C. I.* Building a finite-difference mesh and selecting a turbulence model for numerical simulations of a vortex tube in OpenFOAM software // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Vol. 1677. P. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1677/1/012021.
14. Temperature-Dependent Thermophysical Properties for Pure Water // Tobias Holzmänn & Holzmänn CFD. URL: <https://holzmänn-cfd.com/community/blog-and-tools/cae-blog/thermophysical-properties-water>. (дата обращения: 24.04.2025).
15. VDI e. V. VDI Heat Atlas. Springer. 2010. 1551 p. DOI: 10.1007/978-3-540-77877-6.
16. *Trefethen L. N., Bau D.* III Numerical Linear Algebra. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. 361 p.
17. *Lumley J. L.* The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1993. Vol. 25. P. 539–575.
18. *Joyner M. L.* Comparison of Two Techniques for Implementing the Proper Orthogonal Decomposition Method in Damage Detection Problems // *Mathematical and Computer Modelling*. 2004. Vol. 40. P. 553–571. DOI:10.1016/j.mcm.2003.10.050.
19. *Zarepour M., Bergstrom D. J., Spiteri R. J.* Identifying dominant flow structures in a bubbling gas-particle fluidized bed using the spectral proper orthogonal decomposition // *Chemical Engineering Science*. 2024. Vol. 293 (2). P. 120048. DOI:10.1016/j.ces.2024.120048

References

1. Gershuni, G. Z. and Zhuhovitskii, E. M. (1972), *Konvektivnaya ustoychivost neszhimaemoy zhidkosti* [Convective stability of incompressible fluid], Moscow, Russia, 392 p.
2. Zybova, N. A., Lyubimov, D. V. and Lyubimova T. P., (2011), "Slabonadkriticheskiye reszhimi tryokhmernoy konvekcii v kubicheskoi polosti", *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, no 1, pp. 21–26.
3. Vinnichenko, N.A. and Uvarov, A.V., (2010), "Improvement of Oberbek-Boussinesq approximation for solving unstationary convection problems in a closed cavity", *Moscow University Physics Bulletin*, no 6, pp. 28–32.
4. Mayeli, P. and Sheard, G. J., (2021), "Buoyancy-driven flows beyond the Boussinesq approximation: A brief review", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, V. 125, P. 105316.
5. Cimarrelli, A., Fenzi, A., Angeli, D. and Stalio, E., (2025), "Assessment of the Oberbeck–Boussinesq approximation for buoyancy-driven turbulence in air", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, V. 243, P. 126851.
6. Mullis, K. B. and Faloona, F. A., (1987), "Specific Synthesis of DNA in Vitro via a Polymerase_Catalyzed Chain Reaction", *Methods in enzymology*, V. 155. pp. 335–350.
7. Chemeris, D. A., Garafutdinov, R. R., Sakhabutdinova, A. R., Maleev, G. V. and Chemeris, A. V., (2018), "Convection PCR in different types of convective cells", *Biomics*, V.10(4), pp. 410-443.
8. Garafutdinov, R. R., Chemeris, D. A., Sakhabutdinova, A. R., Moiseev, K. V., Urmancheev, S. F., Mikhaylenko, K. I., Privalov, L. Yu. and Chemeris, A. V., (2022), "Convective polymerase chain reaction in standard microtubes", *Analytical Biochemistry*, V. 641, P. 114565.
9. Islamov, A. I. and Nabiullina K. R., (2024), "Modeling of thermoconvection in a microtube under point heating: computational grid preparation and choice of method", *Multiphase systems*, V. 19, no 2, pp. 64–72.

10. Islamov, A. I. and Nabiullina K. R., (2024), "Modeling of temperature convection in microtubes under point heating: dependence of convection velocity on tilt angle", *Multiphase systems*, V. 19, no 3. pp. 94–102.
11. Mikhaylenko, C. I., Vasilev, T. A. and Ahmetzianova, L. U., (2024), "To numerical simulation of chemical interactions during temperature microconvection", *Bulletin of Bashkir University*, V. 29. no 4. pp. 230–235.
12. Samoilova, A. E., (2011), "O vozniknovenii konvekcii v sloe zhidkosti so svobodnoj poverhnost'yu. Slabonelinejnyj analiz", *Bulletin of Perm University. Series: Physics*, no 1, pp. 3–8.
13. Mikhaylenko, C.I., (2020), "Building a finite-difference mesh and selecting a turbulence model for numerical simulations of a vortex tube in OpenFOAM software", *Journal of Physics: Conference Series*, V. 1677. P. 012021.
14. Temperature-Dependent Thermophysical Properties for Pure Water // Tobias Holzmam & Holzmam CFD. URL: <https://holzmam-cfd.com/community/blog-and-tools/cae-blog/thermophysical-properties-water> (accessed 24.04.2025).
15. VDI e. V., (2010), *VDI Heat Atlas*, 2nd ed., Springer, Dusseldorf, Germany.
16. Lloyd N. Trefethen and David Bau, III, (1997), *Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
17. Lumley, J. L., (1993), "The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows", *Annual Review of Fluid Mechanics*, V. 25, pp. 539–575.
18. Joyner, M. L., (2004), "Comparison of Two Techniques for Implementing the Proper Orthogonal Decomposition Method in Damage Detection Problems", *Mathematical and Computer Modelling*, V. 40, pp. 553–571.
19. Zarepour, M., Bergstrom, D. J. and Spiteri, R. J., (2024), "Identifying dominant flow structures in a bubbling gas-particle fluidized bed using the spectral proper orthogonal decomposition", *Chemical Engineering Science*, V. 293, P. 120048.

Информация об авторах:

Л. Ю. Привалов – аспирант Института механики имени Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН (450054, Россия, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71), AuthorID: 1229668, ORCID: 0000-0002-3555-376X;

К. И. Михайленко – кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник лаборатории дифференциальных уравнений механики Институт механики имени Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН (450054, Россия, г. Уфа, Проспект Октября, д. 71), AuthorID: 125228, ORCID: 0000-0001-8703-442X, ScopusAuthorID: 57208104708.

Information about the authors:

L. Yu. Privalov – postgraduate of R. R. Mavlyutov Institute of Mechanics of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (71 Oktyabrya Avenue, Ufa, Russia, 450054), AuthorID: 1229668, ORCID: 0000-0002-3555-376X;

C. I. Mikhailenko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor; Senior Researcher of mechanics differential equations laboratorie of R. R. Mavlyutov Institute of Mechanics of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (71 Oktyabrya Avenue, Ufa, Russia, 450054), AuthorID: 125228, ORCID: 0000-0001-8703-442X, ScopusAuthorID: 57208104708.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Научная статья

УДК 004.021:004.94

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-88-103

<https://elibrary.ru/ddcbii>



**Исследование алгоритмической сложности построения
Парето-множества для принятия решения
при распределении ресурсов вычислительных систем**

Егор Сергеевич Трушкин

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
egor.s.trushkin@gmail.com

Аннотация. Современные вычислительные системы функционируют в условиях гетерогенности узлов и переменной нагрузки, что обуславливает необходимость применения многокритериальных методов при распределении вычислительных ресурсов. Одним из таких методов является предсказательный метод распределения ресурсов на основе многокритериальной модели принятия решений, ключевым этапом которого служит построение множества Парето-оптимальных решений. Вместе с тем вычислительная сложность данного этапа и возможности ее снижения ранее не исследовались. Объектом исследования являются алгоритмы построения Парето-множества в задаче предсказательного распределения ресурсов в гетерогенных вычислительных системах. Цель работы состоит в анализе вычислительной сложности базового алгоритма оптимизации и исследовании методов ее снижения применительно к задачам многокритериального распределения ресурсов. Методология: в работе формализована постановка задачи построения Парето-множества, установлена теоретическая оценка сложности базового алгоритма. Рассмотрены и проанализированы три метода снижения вычислительной сложности: предварительная фильтрация альтернатив по ключевому критерию, ранняя остановка при попарном сравнении и инкрементальное построение Парето-множества. Экспериментальная часть: для экспериментального подтверждения теоретических оценок разработана программа моделирования, с помощью которой проведены три серии экспериментов: исследование зависимости от числа узлов n , от числа критериев k и от порогового параметра θ метода фильтрации. Полученные результаты позволяют обоснованно выбирать алгоритм построения Парето-множества в зависимости от масштаба системы, числа критериев и требований к полноте решения, что способствует повышению эффективности планировщика в многокритериальных системах распределения ресурсов реального времени.

Ключевые слова: *вычислительная система; распределение ресурсов; Парето-оптимальность; многокритериальная оптимизация; ранняя остановка; инкрементальный алгоритм; предварительная фильтрация; прогнозирование нагрузки.*

Для цитирования: Трушкин Е. С. Исследование алгоритмической сложности построения Парето-множества для принятия решения при распределении ресурсов вычислительных систем //



© Трушкин Е. С., 2026
Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 88–103. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-88-103. <https://elibrary.ru/ddcbii>.

Статья поступила в редакцию 21.04.2026; одобрена после рецензирования 20.05.2026; принята к публикации 10.06.2026.

COMPUTER SCIENCE

Research article

Study of the Algorithmic Complexity of Constructing a Pareto Set for Decision-Making in Allocating Resources of Computing Systems

Egor S. Trushkin

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia
egor.s.trushkin@gmail.com

Abstract. Modern computing systems operate in conditions of heterogeneity of nodes and variable load, which necessitates the use of multi-criteria methods in the allocation of computing resources. One of these methods is the predictive method of resource allocation based on a multi-criteria decision-making model, the key stage of which is the construction of a set of Pareto-optimal solutions. However, the computational complexity of this stage and the possibility of reducing it have not been previously investigated. The object of the research is algorithms for constructing a Pareto set in the problem of predictive resource allocation in heterogeneous computing systems. The purpose of the work is to analyze the computational complexity of the basic optimization algorithm and to study methods for reducing it in relation to multi-criteria resource allocation tasks. Methodology: the paper formalizes the problem of constructing a Pareto set, establishes a theoretical estimate of the complexity of the basic algorithm. Three methods of reducing computational complexity are considered and analyzed: preliminary filtering of alternatives by a key criterion, early stopping in pairwise comparison, and incremental construction of a Pareto set. Experimental part: to experimentally confirm the theoretical estimates, a simulation program has been developed, with the help of which three series of experiments have been conducted: a study of the dependence on the number of nodes n , on the number of criteria k , and on the threshold parameter θ of the filtration method. The results obtained make it possible to reasonably choose an algorithm for constructing a Pareto set depending on the scale of the system, the number of criteria and the requirements for completeness of the solution, which helps to increase the efficiency of the scheduler in multi-criteria real-time resource allocation systems.

Keywords: *computing systems; resource allocation; Pareto optimality; multi-criteria optimization; early shutdown; incremental algorithm; pre-filtering; load forecasting.*

For citation: Trushkin, E. S. (2026), "Study of the Algorithmic Complexity of Constructing a Pareto Set for Decision-Making in Allocating Resources of Computing Systems", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 88–103, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-88-103, <https://elibrary.ru/ddcbii>.

The article was submitted 21.04.2026; approved after reviewing 20.05.2026; accepted for publication 10.06.2026.

Введение

Задача распределения ресурсов является одной из фундаментальных в области управления вычислительными системами и облачной инфраструктурой. Стремительный

рост масштабов облачных платформ, увеличение числа конкурирующих задач и гетерогенность доступных вычислительных ресурсов обуславливают необходимость разработки эффективных механизмов, способных принимать обоснованные решения в условиях неопределенности. При этом классические подходы к оптимизации, основанные на максимизации или минимизации единственной целевой функции, оказываются недостаточными, поскольку реальные системы распределения ресурсов характеризуются множеством конфликтующих показателей качества, таких как время выполнения задач, балансировка нагрузки, стоимость использования ресурсов, энергопотребление и т.п.

В данном контексте многокритериальная оптимизация и, в частности, концепция оптимальности по Парето, приобретает особую практическую значимость. Понятие Парето-оптимальности, введенное итальянским экономистом и социологом Вильфредо Парето в конце XIX века [1], позволяет формализовать компромисс между несовместимыми критериями без введения субъективных весовых коэффициентов. Решение называется Парето-оптимальным, если не существует другого допустимого решения, которое было бы не хуже по всем критериям и строго лучше хотя бы по одному. Совокупность таких решений образует Парето-множество (Парето-фронт), предоставляя лицу, принимающему решения, полный спектр компромиссных альтернатив.

Предсказательное распределение ресурсов представляет собой подход, при котором решения о назначении вычислительных ресурсов принимаются на основе прогнозирования показателей обработки задачи, построенного по историческим данным о загрузке системы [2]. Такой подход позволяет проактивно реагировать на изменения нагрузки, снижать задержки при выделении ресурсов и повышать общую эффективность использования инфраструктуры. Интеграция многокритериальной Парето-оптимизации в механизм предсказательного распределения ресурсов обеспечивает возможность одновременного учета нескольких показателей качества при формировании множества кандидатов на выделение ресурсов, что существенно повышает гибкость и обоснованность принимаемых решений.

Вместе с тем применение Парето-оптимизации в системах реального времени сопряжено с серьезной вычислительной проблемой. Базовый алгоритм построения Парето-множества основан на попарном сравнении всех кандидатов по каждому из рассматриваемых критериев. При увеличении числа кандидатов, характерном для крупных облачных платформ, данная зависимость становится узким местом системы, ограничивая применимость Парето-оптимизации в условиях жестких временных ограничений. Указанная проблема обуславливает необходимость исследования и применения методов снижения вычислительной сложности данного этапа.

Вопросы повышения эффективности алгоритмов Парето-оптимизации нашли отражение в ряде научных работ. Алгоритм Кунга [3], основанный на стратегии "разделяй и властвуй", позволил снизить сложность нахождения максимальных векторов до $O(n \log n)$ для двухкритериального случая. Широко применяемый алгоритм NSGA-II [4, 5] ввел эффективную процедуру недоминируемой сортировки с применением операции сравнения рангов, ставшую основой для последующих разработок. В работе [6] предложен алгоритм ENS (Efficient Non-dominated Sorting), достигающий существенного ускорения за счет сокращения числа выполняемых сравнений. Такие алгоритмы, как ENS и другие методы недоминируемой сортировки, подробно рассмотрены в обзорных работах [7], где они классифицированы по принципам построения. Алгоритмы Rank Sort [8, 9] используют битовый параллелизм и пересечения множеств, обеспечивая дополнительное ускорение по сравнению с предшествующими методами. С. Е. Кривобокова и В. А. Родин в своей статье [10] затрагивают алгоритмические сложности построения множества Парето, связанные с конфигурацией массива точек, и предлагают авторский алгоритм для

их решения. Тем не менее применение указанных подходов в контексте предсказательного распределения ресурсов в облачных системах остается недостаточно исследованным.

Целью настоящей статьи является исследование вычислительной сложности построения Парето-множества в задаче многокритериального предсказательного распределения ресурсов и анализ методов ее снижения. Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

- 1) построить и исследовать зависимости алгоритмической сложности базового алгоритма построения Парето-множества от основных параметров: количества узлов-кандидатов и числа критериев;
- 2) проанализировать известные подходы к снижению алгоритмической сложности построения Парето-множества, оценить вычислительную сложность построения Парето-множества с их применением;
- 3) провести экспериментальное исследование на программной имитационной модели для сравнения ранее рассмотренных подходов между собой и с базовым алгоритмом;
- 4) предложить условия эффективного применения рассмотренных подходов к снижению алгоритмической сложности построения Парето-множества в задачах распределения ресурсов вычислительных систем. Решение поставленных задач позволит обоснованно выбирать алгоритм построения Парето-множества в зависимости от масштаба системы и требований к времени отклика планировщика.

Метод предсказательного распределения ресурсов в вычислительных системах

Настоящая статья является продолжением работы [11], в которой был предложен предсказательный метод распределения ресурсов в вычислительных системах на основе многокритериальной модели принятия решений. В указанной работе один из ключевых этапов метода – построение множества Парето-оптимальных решений (P), однако вычислительная сложность данного этапа и возможности ее снижения не исследовались. Настоящая статья восполняет этот пробел. Для обеспечения преемственности на рис. 1 приводится формализации системы в объеме, необходимом для дальнейшего анализа.

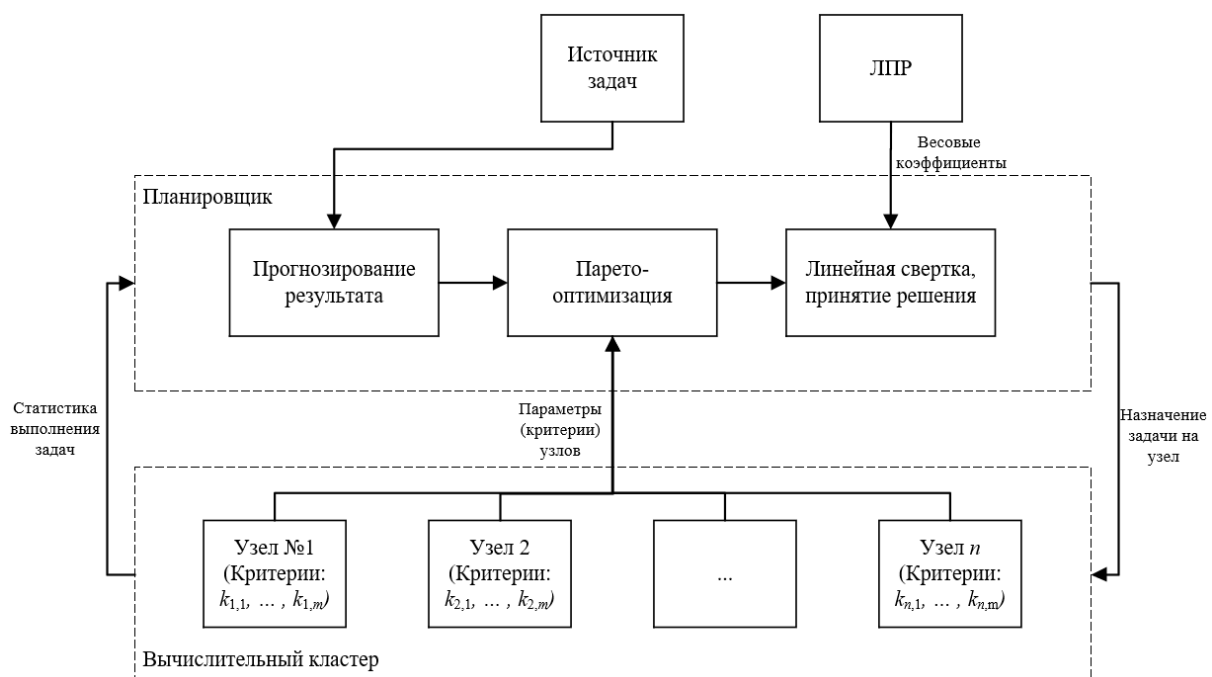


Рис. 1. Система распределения ресурсов

Построение множества P реализовано методом полного попарного сравнения. Вычислительная сложность такого алгоритма определяется следующим образом. Число пар узлов, подлежащих сравнению, составляет $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$, где n – размер множества кандидатов. Для каждой пары выполняется сравнение по m критериям. Тогда, общее число элементарных операций сравнения равно:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot m \rightarrow O(n^2 \cdot m).$$

При небольшом числе узлов данная сложность не является критичной. Однако в реальных вычислительных системах число кандидатов n может быть существенно больше: в крупных облачных кластерах количество доступных узлов достигает сотен и тысяч. В таких условиях квадратичная зависимость от n становится узким местом алгоритма, ограничивая применимость Парето-оптимизации в системах реального времени.

Кроме того, в задачах предсказательного распределения ресурсов построение Парето-множества выполняется при поступлении каждой новой задачи Z . При высокой интенсивности входящего потока задач суммарные затраты на этап Парето-оптимизации могут стать доминирующей составляющей общей вычислительной нагрузки планировщика.

Базовый алгоритм построения Парето-множества

Базовый алгоритм построения Парето-множества основан на методе полного попарного сравнения всех узлов-кандидатов. Он принимает на вход множество узлов $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ с вычисленными кортежами критериев $C(u_j, Z)$ и возвращает подмножество $P \subseteq U$, содержащее все недоминируемые узлы:

$$D_{\text{базовый}}(n, m) = O(n^2 \cdot m).$$

Алгоритм 1. Первоначально все узлы считаются кандидатами в Парето-множество. Для каждой упорядоченной пары (u_i, u_j) выполняется проверка: доминирует ли u_i узел u_j . Если по результатам сравнения всех m критериев u_i не хуже u_j по всем критериям и строго лучше хотя бы по одному, узел u_j исключается из P . По завершении двойного цикла в P остаются только недоминируемые узлы.

Зависимость от параметров. При фиксированном числе критериев m сложность алгоритма растет квадратично по числу узлов n . При фиксированном n сложность растет линейно по m . На практике m , как правило, невелико (в рассматриваемой задаче $m = 3$), поэтому определяющим параметром является n . В таблице 1 приведены оценки числа операций сравнения для разных значений n при $m = 3$.

Таблица 1. Число операций сравнения базового алгоритма при $m = 3$

n узлов	$O(n^2 \cdot m)$
10	270
50	7 350
100	29 700
500	747 000
1000	2 997 000
5000	74 970 000

Как видно из табл.1, уже при $n = 500$ число операций превышает 700 тысяч, а при $n = 5\,000$ достигает порядка 75 миллионов. При высокой интенсивности входящего потока задач, когда Парето-множество строится при поступлении каждой новой задачи, суммарные затраты могут стать критичными.

Оценка времени выполнения. Пусть τ – среднее время выполнения одной элементарной операции сравнения на целевой вычислительной платформе. Тогда ожидаемое время построения Парето-множества базовым алгоритмом:

$$T_{\text{базовый}}(n, m) = \tau \cdot n(n - 1) \cdot m.$$

При известной интенсивности входящего потока задач λ (задач в единицу времени) среднее процессорное время, затрачиваемое на этап Парето-оптимизации в единицу времени:

$$L = \lambda \cdot \tau \cdot n(n - 1) \cdot m.$$

Условие применимости базового алгоритма в системе реального времени: $L < 1$, то есть суммарная нагрузка от этапа Парето-оптимизации не должна превышать пропускную способность одного процессорного ядра. При нарушении этого условия требуется применение методов снижения вычислительной сложности.

Методы ускорения построения Парето-множества

Снижение вычислительной сложности при построении Парето-фронта является актуальной задачей. Один из подходов, называемый "прореживанием" (pruning), предполагает сокращение множества решений еще до или в процессе сравнения. Обзор таких методов представлен в работе [12], где они классифицированы по способу отбора репрезентативных точек.

Предварительная фильтрация альтернатив по ключевому критерию

Идея метода состоит в том, чтобы до начала попарного сравнения сократить размер множества кандидатов за счет удаления узлов, заведомо не способных войти в Парето-множество. Для этого выбирается один ключевой критерий $S_{\text{ключ}}$ наиболее значимый с точки зрения задачи распределения – и по нему вводится пороговый фильтр.

В контексте предсказательного распределения ресурсов в качестве ключевого критерия естественно выбрать $S_{\text{ключ}}$ прогнозное время выполнения задачи, поскольку именно оно непосредственно определяет быстродействие системы. Фильтрация выполняется следующим образом: вычисляется минимальное значение ключевого критерия по всем узлам, после чего из рассмотрения исключаются узлы, значение $S_{\text{ключ}}$ которых превышает заданный порог $\theta \cdot \min(S_{\text{ключ}})$.

Здесь параметр θ регулирует жесткость фильтрации: при $\theta = 1$ сохраняются только узлы с минимальным значением $S_{\text{ключ}}$, при $\theta \rightarrow \infty$ фильтрация вырождается в базовый алгоритм. На практике θ выбирается в зависимости от допустимой потери качества решения.

Алгоритм 2. Предварительная фильтрация по ключевому критерию.

Вход: множество узлов U , кортежи критериев $C(u_j)$, ключевой критерий $S_{\text{ключ}}$, порог $\theta \geq 1$.

Выход: отфильтрованное множество $U^* \subseteq U$, Парето-множество P .

Здесь базовый алгоритм, применяемый к отфильтрованному множеству U^* .

Анализ вычислительной сложности. Пусть после фильтрации в U^* остается n' узлов, где $n' = \alpha \cdot n$, $\alpha \in (0, 1]$ – коэффициент сохранения. Тогда сложность метода:

$$D_{\text{фильтр}}(n, m) = O(n) + O(n'^2 \cdot m) = O(n) + O(\alpha^2 n^2 \cdot m).$$

Первое слагаемое – однократный проход по U для вычисления минимума и формирования U^* . Второе слагаемое – базовый алгоритм на U^* .

При $\alpha < 1$ достигается ускорение относительно базового алгоритма:

$$S_{\text{фильтр}} = \frac{D_{\text{базовый}}}{D_{\text{фильтр}}} \approx \frac{n^2}{n'^2} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Например, если фильтрация отсеивает половину узлов ($\alpha = 0,5$), ускорение составляет приблизительно в 4 раза. Если отсеивается 80% узлов ($\alpha = 0,2$), ускорение достигает 25 раз.

Корректность метода. Метод гарантирует включение в P всех истинно Парето-оптимальных узлов при условии, что ни один из них не был отфильтрован. Это условие выполняется, если θ выбрано достаточно большим. При слишком жестком пороге (малом θ) возможно исключение некоторых Парето-оптимальных узлов, поэтому выбор θ является компромиссом между скоростью и полнотой результата.

Ранняя остановка при попарном сравнении

В базовом алгоритме для каждой пары (u_i, u_j) сравнение всегда выполняется по всем m критериям, даже если факт отсутствия доминирования может быть установлен раньше. Метод ранней остановки модифицирует внутренний цикл по критериям: как только в процессе проверки обнаруживается, что доминирование невозможно, сравнение пары прекращается досрочно.

Условие досрочного завершения: если при проверке критерия C_k обнаружено, что $C_k(u_i) > C_k(u_j)$, то узел u_i не может доминировать u_j (поскольку нарушено условие – не хуже по всем критериям). Дальнейшая проверка оставшихся критериев для данной пары не имеет смысла.

Алгоритм 3. Построение Парето-множества с ранней остановкой.

Вход: множество узлов U , кортежи критериев $C(u_j)$, число критериев m .

Выход: Парето-множество P .

Отличие от базового состоит исключительно в определении условий доминирования. При обнаружении первого нарушения данных условий, цикл проверки по критериям прерывается.

Анализ вычислительной сложности. Худший случай остается прежним: $O(n^2 \cdot m)$. Он реализуется, когда все узлы несравнимы (никто не доминирует никого) и нарушение условия доминирования обнаруживается лишь на последнем критерии.

Средний случай. Пусть критерии проверяются в некотором порядке. Если значения критериев распределены независимо и равномерно, то вероятность того, что узел u_i не хуже u_j по первому критерию, равна приблизительно 0.5. Ожидаемое число проверяемых критериев до обнаружения нарушения:

$$E[k_{\text{стоп}}] = \sum_{k=1}^m k \cdot 0,5^{k-1} \cdot 0,5 \approx 2.$$

В среднем для каждой пары проверяется около 2 критериев вместо m . Ожидаемое число операций:

$$T_{\text{ранний выход}}(n, m) \approx n(n-1) \cdot E[k_{\text{стоп}}] = O(n^2),$$

при $m \gg 2$, что дает преимущество в $m/2$ раз по сравнению с базовым алгоритмом.

Влияние порядка критериев. Эффективность ранней остановки существенно зависит от порядка проверки критериев. Наибольшее ускорение достигается, если первым проверяется критерий с наибольшей дискриминирующей силой – то есть тот, по которому узлы чаще всего различаются. В задаче предсказательного распределения ресурсов таким критерием может являться текущая загрузка узла (занимаемое процессорное время в данный момент) или прогнозное время выполнения задачи, поскольку производительность узлов существенно варьируется в гетерогенных системах.

Корректность метода. Ранняя остановка не изменяет результат алгоритма: множество P , возвращаемое алгоритмом 3, идентично множеству P алгоритма 1. Метод является точным и не вносит никакого приближения.

Инкрементальное построение Парето-множества

В предыдущих двух методах Парето-множество строится заново при каждом вызове алгоритма. Инкрементальный подход применим в ситуации, когда множество кандидатов U пополняется поэлементно – например, когда характеристики узлов обновляются последовательно по мере поступления данных о текущей загрузке.

Идея метода: поддерживать актуальное Парето-множество P , добавляя в него новые узлы по одному. При поступлении нового узла $u_{\text{нов}}$ выполняется его проверка относительно текущего P :

- если $u_{\text{нов}}$ доминируется хотя бы одним элементом P , он не включается в P ;
- если $u_{\text{нов}}$ доминирует некоторые элементы P , они исключаются из P , а $u_{\text{нов}}$ добавляется;
- если $u_{\text{нов}}$ несравним со всеми элементами P , он добавляется в P без исключений.

Алгоритм 4. Инкрементальное построение Парето-множества.

Вход: новый узел $u_{\text{нов}}$, текущее Парето-множество P , число критериев m .

Выход: обновленное Парето-множество P .

Полное построение Парето-множества с нуля выполняется последовательным применением алгоритма 4 ко всем n узлам:

Анализ вычислительной сложности:

Однократное добавление узла. При добавлении $u_{\text{нов}}$ в P размером $|P| = p$ выполняется не более p сравнений (по одному на каждый элемент P), каждое из которых включает не более m проверок критериев. Сложность одного шага:

$$T_{\text{инк.шаг}} = O(p \cdot m).$$

Полное построение с нуля. При последовательном добавлении n узлов размер P в общем случае изменяется. В лучшем случае $|P| = 1$ на каждом шаге (один узел доминирует всех предыдущих) – сложность: $O(n \cdot m)$.

В худшем случае $|P|$ растет до n (все узлы несравнимы) – сложность:

$$T_{\text{инк}} = \sum_{i=1}^n i \cdot m = m \cdot \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2 \cdot m),$$

что совпадает с базовым алгоритмом. При этом асимптотика в худшем случае не улучшается, однако на практике $|P| \ll n$, и метод значительно эффективнее.

Главное преимущество инкрементального подхода проявляется при динамическом обновлении множества узлов. Если в уже построенное Парето-множество P добавляется один новый узел (например, после обновления загрузки узла), стоимость обновления составляет $O(|P| \cdot m)$, а не $O(n^2 \cdot m)$. В задаче предсказательного распределения ресурсов это особенно актуально: при поступлении новой задачи Z изменяется загрузка одного узла (того, на который была назначена предыдущая задача), и Парето-множество требует лишь локального обновления.

Инкрементальные принципы построения Парето-множества также исследуются в контексте иерархических методов сортировки, например, в работе [13], где авторы анализируют и улучшают алгоритм HNDS, обеспечивающий предсказуемую сложность в худшем случае.

Экспериментальное исследование

Для экспериментального подтверждения теоретических оценок вычислительной сложности и сравнения рассматриваемых алгоритмов была разработана программа моделирования на языке Python. Эксперименты проводились на вычислительной платформе со следующими характеристиками: процессор Ryzen 5 5600, ОЗУ 32 Gb, Windows 11.

Генерация тестовых данных осуществлялась следующим образом. Для каждого эксперимента формировалось множество узлов U размером n , для каждого узла u_j случайным образом генерировался кортеж критериев $C(u_j) = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$. Значения каждого критерия выбирались из логнормального распределения на отрезке $[c_{\min}, c_{\max}]$.

Измерялось время выполнения каждого алгоритма в миллисекундах. Для устранения случайных флуктуаций каждый эксперимент повторялся $R = 30$ раз, после чего вычислялось среднее значение времени выполнения. Корректность всех алгоритмов проверялась сравнением возвращаемого ими множества P с эталонным результатом базового алгоритма.

Сравнение алгоритмов в зависимости от числа узлов n

В первой серии экспериментов исследовалось поведение алгоритмов от числа узлов-кандидатов n при фиксированном $k = 3$ и параметре фильтрации $\theta = 3.0$. Значение n варьировалось в диапазоне от 10 до 1000.

Результаты первой серии экспериментов представлены на рис. 2 и 3, где показана зависимость среднего времени выполнения и среднего количества операций алгоритмов от n .

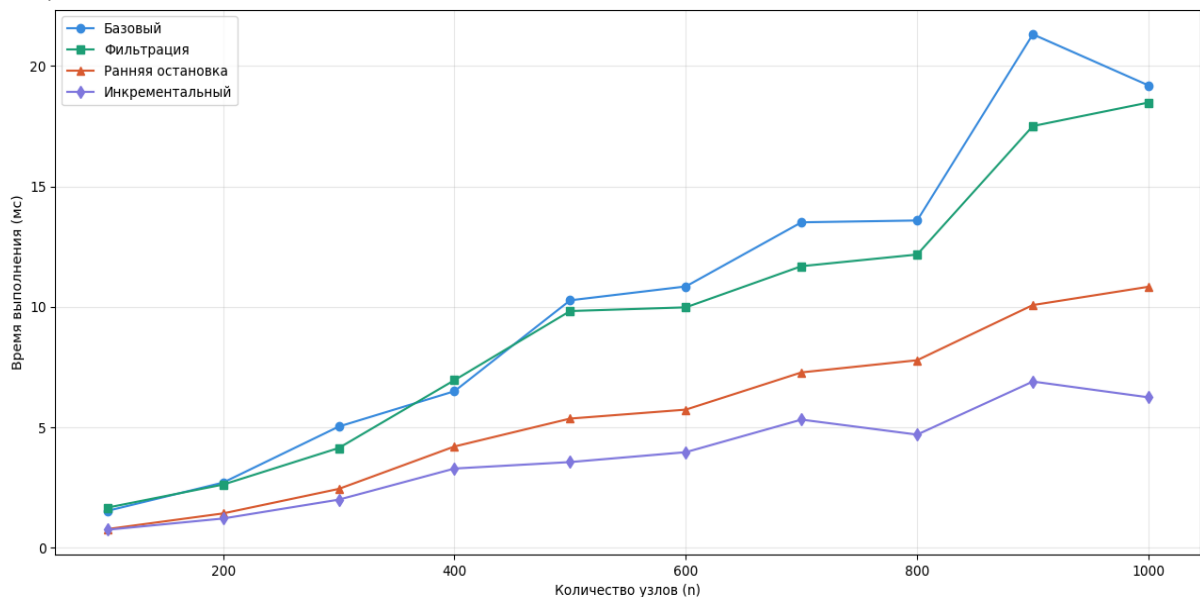


Рис. 2. Среднее время выполнения алгоритмов (мс) при $k = 3$

Как видно из рисунка 2, все четыре алгоритма демонстрируют квадратичный рост времени выполнения при увеличении n , что соответствует теоретическим оценкам $O(n^2 \cdot m)$. Однако абсолютные значения времени и темп роста существенно различаются.

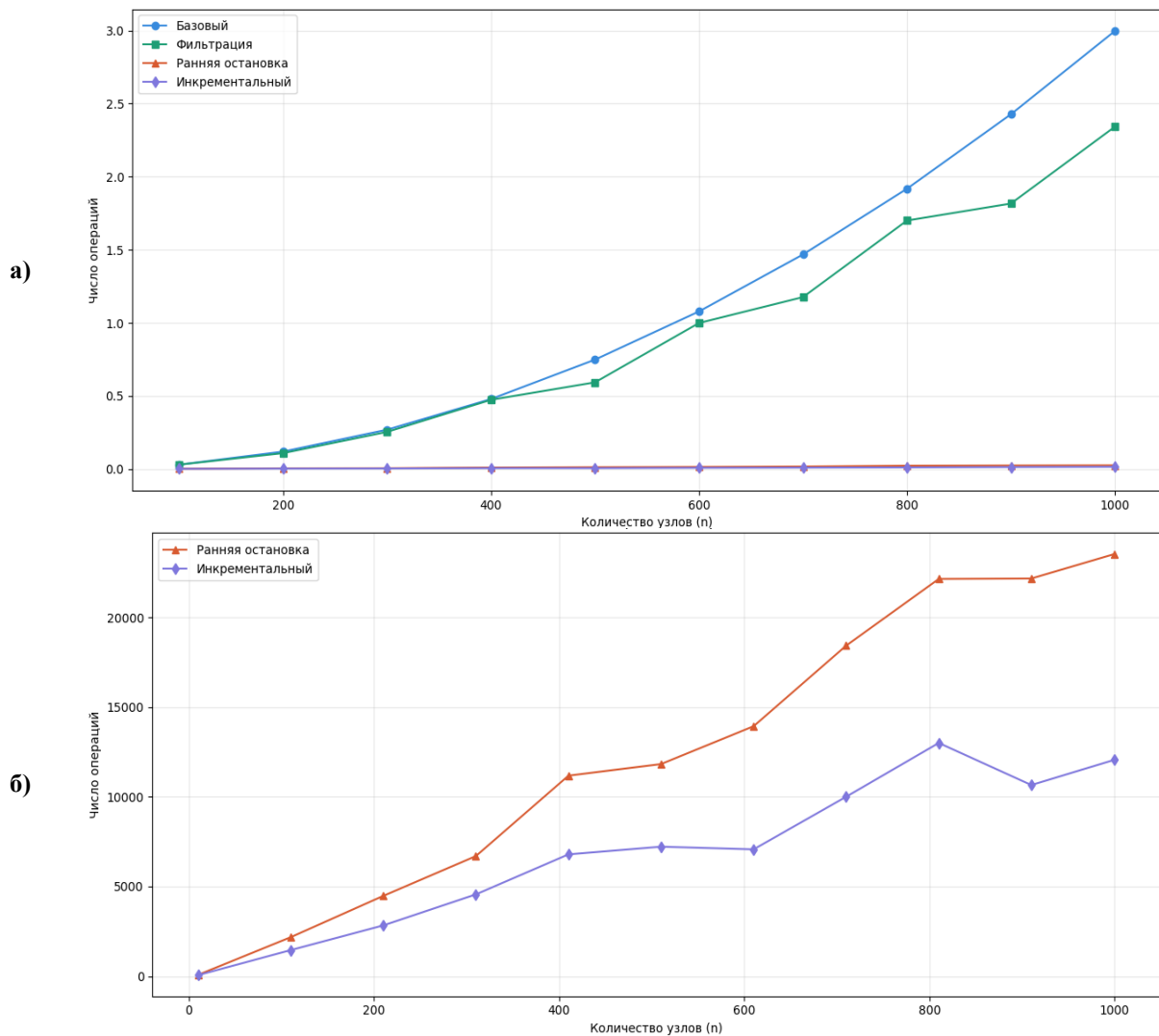


Рис. 3. Среднее количество операций при $k = 3$, а) график со всеми алгоритмами, б) график без предварительной фильтрации и базового алгоритмов

Результаты эксперимента демонстрируют следующее. Базовый алгоритм показывает выраженный квадратичный рост времени выполнения: от 0.05 мс при $n = 10$ до 21.79 мс при $n = 1000$, что соответствует теоретической оценке $O(n^2 \cdot k)$.

Метод ранней остановки обеспечивает стабильное ускорение относительно базового на всем исследованном диапазоне — в среднем в $1.84\times$ с незначительными отклонениями от точки к точке. При $n = 1000$ время выполнения составляет 13.58 мс. Стабильность ускорения обусловлена тем, что при логнормальном распределении значений критериев ожидаемое число проверяемых критериев до досрочного завершения остается постоянным и не зависит от n .

Инкрементальный алгоритм демонстрирует наибольшее ускорение среди рассматриваемых подходов и, в отличие от метода ранней остановки, это преимущество возрастает с увеличением n : от $\times 1.4$ – 1.8 при малых n до $\times 2.9$ – 3.9 при $n \geq 900$. При $n = 1000$ время выполнения составляет 7.58 мс — более чем в 2.9 раза быстрее базового. Рост ускорения объясняется тем, что с увеличением n размер Парето-множества $|P|$ растет медленнее, чем n , что снижает среднее число сравнений на каждом шаге инкрементального добавления.

Метод предварительной фильтрации в данном эксперименте не обеспечивает за-

метного ускорения: среднее ускорение составляет лишь $\times 1.07$, а в ряде точек метод незначительно уступает базовому алгоритму по времени. Причина состоит в характере генерируемых данных: первый критерий c_1 имеет логнормальное распределение с выраженной правосторонней асимметрией, поэтому при $\theta = 3.0$ порог фильтрации захватывает значительную часть узлов, и размер отфильтрованного множества U^* лишь незначительно меньше исходного, 90–97% от U (рис. 4).

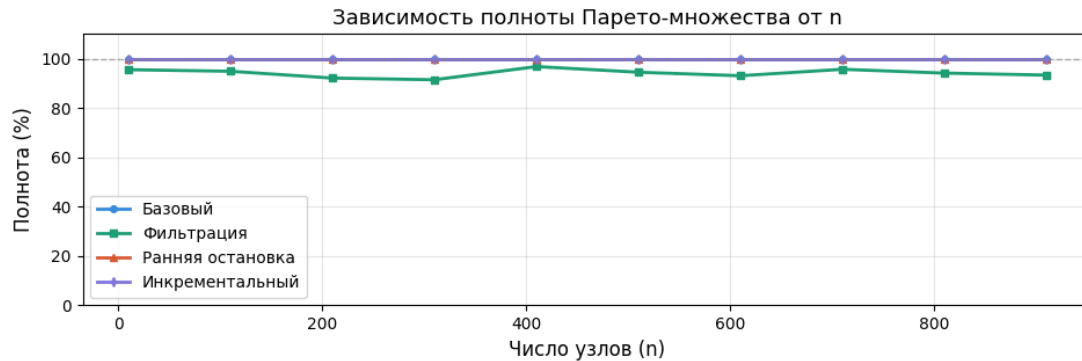


Рис. 4. Зависимость полноты Парето-множества от количества узлов

Таким образом, в условиях логнормального распределения критериев и при $\theta = 3.0$ наиболее эффективным методом является инкрементальный алгоритм, обеспечивающий ускорение до $\times 3.9$ без потери полноты P . Метод ранней остановки гарантирует стабильное двукратное ускорение при 100% полноте и применим без каких-либо ограничений на характер данных. Метод предварительной фильтрации требует тщательной настройки параметра θ с учетом распределения значений ключевого критерия – при неудачном выборе θ он не дает преимуществ ни по скорости, ни по полноте.

Сравнение алгоритмов в зависимости от числа критериев k

Во второй серии экспериментов исследовалась зависимость времени выполнения от числа критериев k при фиксированном $n = 200$. Значение k варьировалось от 2 до 10. Результаты экспериментов продемонстрированы на рис. 5.

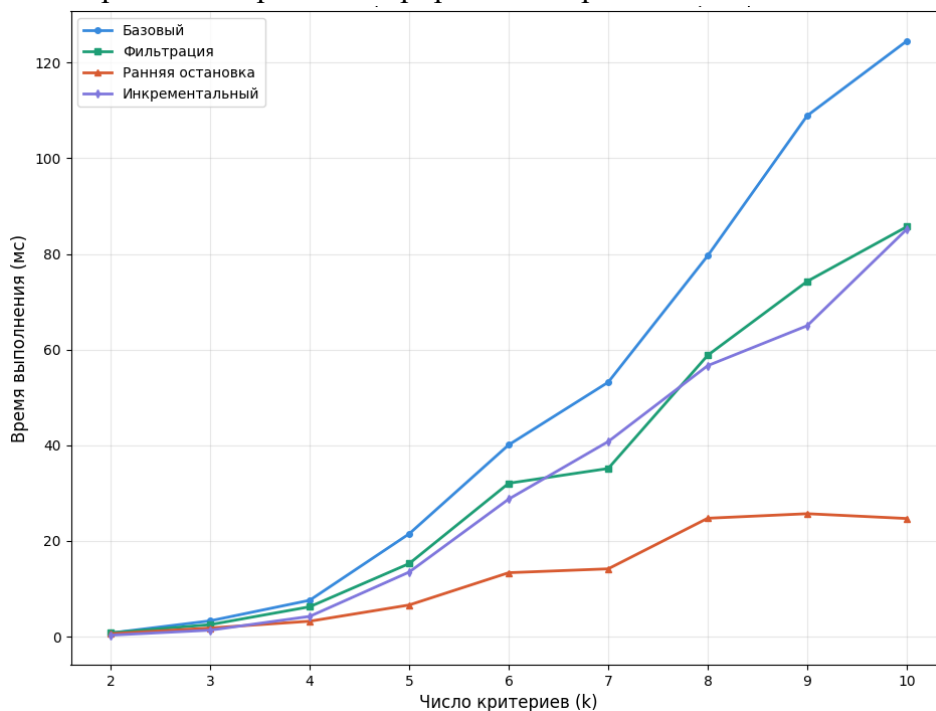


Рис. 5. Среднее время выполнения алгоритмов (мс) при $n = 200$

При увеличении числа критериев k наиболее эффективным методом становится ранняя остановка, преимущество которой монотонно возрастает. Инкрементальный метод целесообразно применять при малых k ($k \leq 4$), причина состоит в том, что с увеличением k размер Парето-множества $|P|$ растет – при большем числе критериев доминирование устанавливается реже, и в Парето-фронт попадает большая доля узлов. Это увеличивает число сравнений при каждом инкрементальном шаге, сильно снижая преимущество метода.

Влияние параметра θ на эффективность фильтрации

В третьей серии экспериментов исследовалось влияние порогового параметра θ на эффективность метода предварительной фильтрации. Фиксировались $n = 500$, $k = 3$; параметр θ варьировался от 1.0 до 5.0 с шагом 0.1.

Результаты эксперимента наглядно демонстрируют компромисс между вычислительной эффективностью и полнотой Парето-множества, характерный для метода предварительной фильтрации (рис. 6).

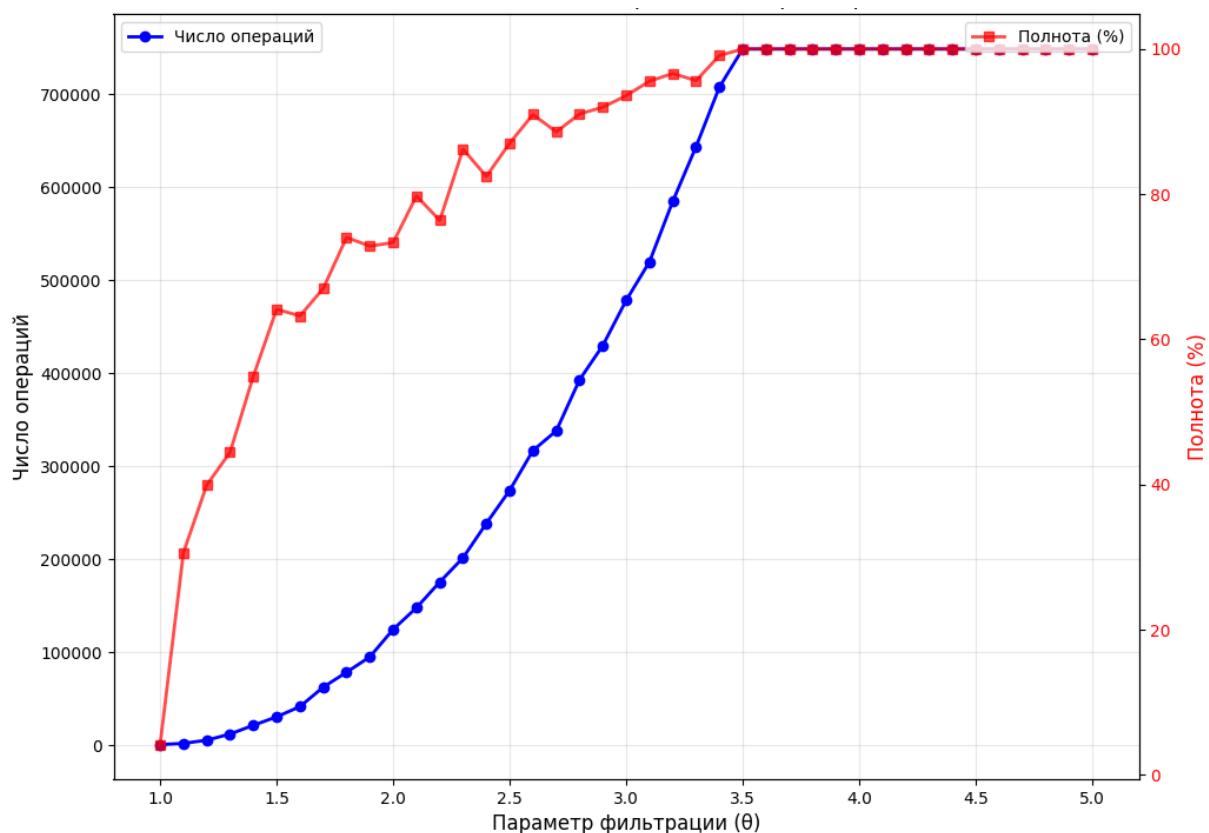


Рис. 6. Влияние параметра θ на эффективность алгоритма фильтрации

При $\theta = 1.0$ метод обеспечивает максимальное ускорение по числу операций ($\times 1497$ относительно базового), однако полнота P составляет лишь 1.8% – подавляющее большинство Парето-оптимальных узлов отсекается. С увеличением θ размер отфильтрованного подмножества U^* и число операций монотонно возрастают, а полнота в целом улучшается, хотя и с заметными флуктуациями, обусловленными случайным характером генерируемых данных.

Можно выделить три характерных диапазона θ . При $\theta \in [1.0, 2.0]$ полнота остается низкой (до 76%), ускорение высокое (от $\times 6$ до $\times 1497$), однако результат нельзя считать практически применимым из-за значительных потерь Парето-оптимальных решений.

При $\theta \in [2.0, 3.3]$ полнота достигает приемлемого уровня: значение 90% впервые достигается при $\theta = 2.7$, а 97% – при $\theta = 3.1$, при этом ускорение по операциям составляет $\times 2.2$ и $\times 1.2$ соответственно. Начиная с $\theta = 3.4$ полнота стабилизируется на уровне 100% – фильтр перестает отсекал какие-либо Парето-оптимальные узлы. При $\theta \geq 3.5$ в отфильтрованное множество попадают все 500 узлов, и метод вырождается в базовый алгоритм, не давая никакого преимущества.

Таким образом, выбор параметра θ определяет баланс между точностью и эффективностью. Эта дилемма – "точность против эффективности" – является общей для многих методов аппроксимации в многокритериальной оптимизации. Детальный обзор таких подходов представлен в работе [14].

Заключение

В настоящей работе проведено исследование алгоритмической сложности построения Парето-множества применительно к задаче распределения ресурсов в вычислительных системах.

По результатам работы сформулированы следующие выводы:

1. Установлено, что базовый алгоритм полного попарного сравнения имеет вычислительную сложность $O(n^2 \cdot k)$, что при большом числе узлов-кандидатов и высокой интенсивности входящего потока задач может стать доминирующей составляющей нагрузки планировщика. Введено условие применимости базового алгоритма в системе реального времени через параметр загрузки $L < 1$.

2. Рассмотрены три подхода снижения алгоритмической сложности. Метод предварительной фильтрации сокращает размер множества кандидатов до начала попарного сравнения, достигая ускорения порядка $1/\alpha^2$ при коэффициенте сохранения α , однако сопряжен с возможными потерями полноты Парето-множества. Метод ранней остановки не изменяет результат алгоритма, снижая среднее число проверяемых критериев до ~ 2 при любом k . Инкрементальный метод обеспечивает ускорение при динамическом обновлении множества узлов, сводя стоимость локального обновления к $O(|P| \cdot k)$.

3. Экспериментально подтверждено, что при увеличении числа узлов n наибольшее и возрастающее ускорение обеспечивает инкрементальный алгоритм при гарантированной полноте P . При увеличении числа критериев k наиболее эффективной оказывается ранняя остановка, ускорение которой монотонно возрастает. Инкрементальный метод предпочтителен при малых k , когда размер Парето-фронта невелик.

4. Для метода предварительной фильтрации экспериментально определен практически целесообразный диапазон порогового параметра для заданной конфигурации имитационной модели, при котором полнота Парето-множества составляет не менее 90% при сохранении умеренного ускорения. При $\theta \geq 3.5$ метод вырождается в базовый алгоритм, не давая никакого преимущества.

Практическая значимость полученных результатов состоит в том, что они позволяют обоснованно выбирать алгоритм построения Парето-множества в зависимости от масштаба системы, числа критериев и допустимого уровня полноты полученного множества. В частности, для задач предсказательного распределения ресурсов с динамически обновляемой загрузкой узлов рекомендуется инкрементальный алгоритм; при необходимости гарантированной точности и произвольном характере данных – метод ранней остановки; при возможности предварительной оценки ключевого критерия и допустимости частичных потерь полноты – метод фильтрации с предварительно откалиброванным значением θ .

Направлениями дальнейших исследований являются: анализ вычислительной сложности при использовании комбинаций рассмотренных методов; исследование поведения алгоритмов при числе критериев $k > 10$ и большом числе Парето-оптимальных решений; экспериментальная проверка на реальных данных о загрузке вычислительных

кластеров. Также перспективным направлением является комбинирование разработанных методов с современными алгоритмами недоминируемой сортировки, например, с SETNDS [15], что может дополнительно повлиять на производительность.

Список источников

1. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач: 2-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 256 с. ISBN 978-5-9221-0812-6.
2. Трушкин Е. С., Фрейман В. И. Предсказательный метод распределения ресурсов в вычислительных системах // Информационные технологии и вычислительные системы. № 1. С. 133–144. 2026. DOI 10.14357/20718632260112. EDN TTXDFB.
3. Kung H. T., Luccio F., Preparata F. P. On Finding the Maxima of a Set of Vectors // Journal of the Association for Computing Machinery. 1975. Vol. 22, № 4. P. 469–476. URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/321906.321910> (дата обращения: 13.04.2026).
4. Deb K., Pratap A., Agarwal S., Meyarivan T. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2002. Vol. 6, № 2. P. 182–197. URL: <https://doi.org/10.1109/4235.996017> (дата обращения: 13.06.2026).
5. Biscani F., Izzo D. A parallel global multiobjective framework for optimization: pagmo // Journal of Open Source Software. 2020. Vol. 5, Iss. 53. P. 2338. URL: <https://doi.org/10.21105/joss.02338> (дата обращения: 13.04.2026).
6. Zhang X., Tian Y., Cheng R., Jin Y. An Efficient Approach to Nondominated Sorting for Evolutionary Multiobjective Optimization // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2015. Vol. 19, № 2. P. 201–213. URL: <https://doi.org/10.1109/TEVC.2014.2308305> (дата обращения: 13.04.2026).
7. Kong L., Pan J.S., Snášel V. A Review of Non-dominating Sorting Algorithms // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2024. Vol. 394. P. 173–183. URL: https://doi.org/10.1007/978-981-97-3980-6_15 (дата обращения 14.04.2026).
8. Zhou Y., Chen Z., Zhang J. Ranking Vectors by Means of the Dominance Degree Matrix // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2017. Vol. 21, № 1. P. 34–51. URL: <https://doi.org/10.1109/TEVC.2016.2567648> (дата обращения: 13.04.2026).
9. Martyniuk T. B., Krukivskyi B. I. Advanced Model of Parallel Sorting Algorithm with Ranking // Cybernetics and Systems Analysis. 2024. Vol. 60. P. 45–49. URL: <https://doi.org/10.1007/s10559-024-00645-y> (дата обращения: 19.05.2026).
10. Кривобокова С. Е., Родин В. А. Алгоритм и программа для графического выделения множества Парето в точечном массиве // Прикладная математика & Физика. 2021. Т. 53, № 2. С. 125–131. DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-2-125–131. URL: <https://maths-physics-journal.ru/index.php/journal/article/view/59> (дата обращения 14.04.2026).
11. Трушкин Е. С., Фрейман В. И. Предсказательный метод распределения ресурсов в вычислительных системах на основе многокритериальной модели принятия решений // Информатика и автоматизация. Т. 25, № 2. С. 568–601. 2026. URL: <https://doi.org/10.15622/ia.25.2.10> (дата обращения 12.04.2026).
12. Petchrompo S., Coit D. W., Brintrup A., et al. A review of Pareto pruning methods for multi-objective optimization // Computers & Industrial Engineering. 2022. Vol. 167, Iss. 1. P. 108022. URL: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108022> (дата обращения 14.04.26).
13. Prakash V., Mishra S. Hierarchical non-dominated sort: analysis and improvement // Genetic Programming and Evolvable Machines. 2024. Vol. 25, № 1. Art. no 14. URL: <https://doi.org/10.1007/s10710-024-09487-1> (дата обращения 14.04.2026).

14. Herzel A., Ruzika S., Thielen C. Approximation Methods for Multiobjective Optimization Problems: A Survey // *INFORMS Journal on Computing*. 2021. Vol. 33, № 4. P. 1280–1299. URL: <https://doi.org/10.1287/ijoc.2020.1028> (дата обращения 14.04.2026).
15. Zhou Y., et al. SETNDS: A SET-Based Non-Dominated Sorting Algorithm for Multi-Objective Optimization Problems // *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10, № 19. Art. No 6820. URL: <https://doi.org/10.3390/app10196858> (дата обращения 14.04.2026).

References

1. Podinovsky, V. V. and Nogin, V. D. (2007), *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal solutions of multicriteria problems], 2nd ed., revised and enlarged, FIZMATLIT, Moscow, 256 p. ISBN 978-5-9221-0812-6.
2. Trushkin, E. S. and Freiman, V. I. (2026), "Predskazatel'nyy metod raspredeleniya resursov v vychislitel'nykh sistemakh" [Predictive method of resource allocation in computing systems], *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy* [Information Technologies and Computing Systems], no 1, pp. 133–144, DOI 10.14357/20718632260112, EDN TTXDFB.
3. Kung, H. T., Luccio, F. and Preparata, F. P. (1975), "On finding the maxima of a set of vectors", *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 22, no 4, pp. 469–476, URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/321906.321910> (accessed: 13.04.2026).
4. Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S. and Meyarivan, T. (2002), "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6, no 2, pp. 182–197, URL: <https://doi.org/10.1109/4235.996017> (accessed: 13.06.2026).
5. Biscani, F. and Izzo, D. (2020), "A parallel global multiobjective framework for optimization: pagmo", *Journal of Open Source Software*, vol. 5, iss. 53, pp. 2338, URL: <https://doi.org/10.21105/joss.02338> (accessed: 13.04.2026).
6. Zhang, X., Tian, Y., Cheng, R. and Jin, Y. (2015), "An efficient approach to nondominated sorting for evolutionary multiobjective optimization", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 19, no 2, pp. 201–213, URL: <https://doi.org/10.1109/TEVC.2014.2308305> (accessed: 13.04.2026).
7. Kong, L., Pan, J. S. and Snášel, V. (2024), "A review of non-dominating sorting algorithms", *Smart Innovation, Systems and Technologies*, vol. 394, pp. 173–183, URL: https://doi.org/10.1007/978-981-97-3980-6_15 (accessed: 14.04.2026).
8. Zhou, Y., Chen, Z. and Zhang, J. (2017), "Ranking vectors by means of the dominance degree matrix", *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 21, no 1, pp. 34–51, URL: <https://doi.org/10.1109/TEVC.2016.2567648> (accessed: 13.04.2026).
9. Martyniuk, T. B. and Krukivskyi, B. I. (2024), "Advanced model of parallel sorting algorithm with ranking", *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 60, pp. 45–49, URL: <https://doi.org/10.1007/s10559-024-00645-y> (accessed: 19.05.2026).
10. Krivobokova, S. E. and Rodin, V. A. (2021), "Algoritm i programma dlya graficheskogo vydeleniya mnozhestva Pareto v tochechnom massive" [Algorithm and program for graphical highlighting of the Pareto set in a point array], *Prikladnaya matematika & Fizika* [Applied Mathematics & Physics], vol. 53, no 2, pp. 125–131, URL: <https://maths-physics-journal.ru/index.php/journal/article/view/59> (accessed: 14.04.2026).
11. Trushkin, E. S. and Freiman, V. I. (2026), "Predskazatel'nyy metod raspredeleniya resursov v vychislitel'nykh sistemakh na osnove mnogokriterial'noy modeli prinyatiya resheniy" [Predictive method of resource allocation in computing systems based on a multi-criteria decision-making model], *Informatika i avtomatizatsiya* [Informatics and

- Automation], vol. 25, no 2, pp. 568–601, URL: <https://doi.org/10.15622/ia.25.2.10> (accessed: 12.04.2026).
12. Petchrompo, S., Coit, D. W., Brintrup, A. et al. (2022), "A review of Pareto pruning methods for multi-objective optimization", *Computers & Industrial Engineering*, vol. 167, iss. C, URL: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108022> (accessed: 14.04.2026).
 13. Prakash, V. and Mishra, S. (2024), "Hierarchical non-dominated sort: analysis and improvement", *Genetic Programming and Evolvable Machines*, vol. 25, no 1, art. no 14, URL: <https://doi.org/10.1007/s10710-024-09487-1> (accessed: 14.04.2026).
 14. Herzel, A., Ruzika, S. and Thielen, C. (2021), "Approximation methods for multiobjective optimization problems: a survey", *INFORMS Journal on Computing*, vol. 33, no 4, pp. 1280–1299, URL: <https://doi.org/10.1287/ijoc.2020.1028> (accessed: 14.04.2026).
 15. Zhou, Y. et al. (2020), "SETNDS: a SET-based non-dominated sorting algorithm for multi-objective optimization problems", *Applied Sciences*, vol. 10, no 19, art. no 6820, URL: <https://doi.org/10.3390/app10196858> (accessed: 14.04.2026).

Сведения об авторах

Трушкин Е. С. – аспирант кафедры "Автоматика и телемеханика" Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29).

About the authors

Trushkin E. S. – a postgraduate student at the Department of Automation and Telemechanics at the Perm National Research Polytechnic University (29 Komsomolsky Prospekt, Perm, Russia, 614990).

Научная статья

УДК 004.8

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-104-111

<https://elibrary.ru/ftasvd>

Формальная модель и метод интеграции API генеративных нейросетей в веб-платформу для автоматизированной обработки текстовых данных

Дарья Андреевна Черкасова¹, Валентина Андреевна Черкасова²²Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева, Астрахань, Россия¹dashacherk21@gmail.com²valyc@mail.ru

Аннотация. В статье представлена формальная модель интеграции API генеративных нейросетей в корпоративную веб-платформу для автоматизированной обработки текстовых данных. Предлагаемая модель описывается кортежем $M = (U, C, R, P, F, A)$ где U – множество пользователей, C – множество параметризуемых промптов (контекстов), R – множество запросов, P – функция параметризации промпта, F – функция взаимодействия с внешним API, A – функция аудита и учета ресурсов. Научная новизна заключается в разработке формальной модели, обеспечивающей изоляцию данных, централизованное управление промптами и отказоустойчивость; в предложении метода параметризации промптов на основе хранимых в базе данных контекстов; в создании алгоритма устойчивого взаимодействия с API, реализующего обработку таймаутов, повторные попытки и атомарное сохранение результатов. Проведено экспериментальное исследование, в ходе которого выдвинута и подтверждена гипотеза о сокращении времени обработки текста при использовании предложенной модели ($p < 0.001$, размер эффекта $r = 0.92$). Разработанная платформа развернута в промышленную эксплуатацию в организации-заказчике.

Ключевые слова: формальная модель; интеграция API; генеративные нейросети; DeepSeek; Django; MVT-архитектура; обработка текста; промпт-инжиниринг; отказоустойчивость; экспериментальное исследование.

Для цитирования: Черкасова Д. А., Черкасова В. А. Формальная модель и метод интеграции API генеративных нейросетей в веб-платформу для автоматизированной обработки текстовых данных // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 104–111. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-104-111. <https://elibrary.ru/ftasvd>.

Статья поступила в редакцию 15.03.2026; одобрена после рецензирования 25.05.2026; принята к публикации 20.06.2026.



© Черкасова Д. А., Черкасова В. А., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

Formal Model and API Integration Method for Generative Neural Networks in a Web-Platform for Automated Text Processing

Darya A. Cherkasova¹, Valentina A. Cherkasova²

²Astrakhan state university name of V.N Tatishcheva, Astrakhan, Russia

¹dashacherk21@gmail.com

²valyc@mail.ru

Abstract. The article presents a formal model for integrating generative neural network APIs into a corporate web platform for automated text processing. The proposed model is described by the tuple $M = (U, C, R, P, F, A)$, where U is the set of users, C is the set of parameterizable prompts (contexts), R is the set of requests, P is the prompt parameterization function, F is the external API interaction function, and A is the audit and resource accounting function. The scientific novelty lies in the development of a formal model that ensures data isolation, centralized prompt management, and fault tolerance; in the proposal of a method for prompt parameterization based on contexts stored in the database; and in the creation of a robust API interaction algorithm that implements timeout handling, retries, and atomic result storage. An experimental study was conducted, in which the hypothesis of reduced text processing time using the proposed model was formulated and confirmed ($p < 0.001$, effect size $r = 0.92$). The developed platform has been deployed into industrial operation at the customer organization.

Keywords: *formal model; API integration; generative neural networks; DeepSeek; Django; MVT architecture; text processing; prompt engineering; fault tolerance; experimental study.*

For citation: Cherkasova, D. A. and Cherkasova, V. A. (2026), "Formal Model and API Integration Method for Generative Neural Networks in a Web-Platform for Automated Text Processing", Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science, no 2(73), pp. 104–111, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-104-111, <https://elibrary.ru/ftasvd>.

The article was submitted 15.03.2026; approved after reviewing 25.05.2026; accepted for publication 20.06.2026.

Введение

В условиях цифровой трансформации организаций автоматизация обработки текстового контента с использованием технологий искусственного интеллекта становится актуальной научно-практической задачей. Корпоративные новостные отделы, пресс-службы и коммуникационные подразделения ежедневно сталкиваются с необходимостью оперативной адаптации единого информационного повода под различные каналы коммуникации [1]. Традиционный ручной режим такой адаптации является трудоемким, подверженным человеческим ошибкам и приводит к нежелательной вариативности в трактовке ключевых сообщений.

Генеративные нейросетевые модели, обученные на колоссальных массивах текстовых данных, демонстрируют способность к глубокому пониманию контекста, перефразированию, стиливой трансформации и сжатию текстов [2]. Однако интеграция таких моделей в корпоративные рабочие процессы сопряжена с рядом нерешенных научных и технических проблем. Анализ существующих подходов – универсальных CMS с AI-плагином, корпоративных порталов и специализированных AI-сервисов – показывает, что ни один из них не обеспечивает полного набора требований, необходимых для корпоративного использования. К числу таких требований относятся: изоляция данных между пользователями, централизованное управление промптами (инструкциями для нейросети), хранение полной истории обработки для аудита, учет использования платных ресурсов и отказоустойчивость при сетевом взаимодействии. Таким образом, научная проблема заключается в отсутствии формальных моделей

интеграции API генеративных нейросетей в корпоративные веб-платформы, учитывающих перечисленные требования. Целью данного исследования является разработка формальной модели и метода интеграции API генеративных нейросетей в корпоративную веб-платформу, обеспечивающих автоматизированную обработку текстовых данных с возможностью централизованного управления промптами, изоляции пользовательских данных и учета использования ресурсов.

Формальная модель интеграции

Предлагаемая формальная модель интеграции описывается кортежем $M = (U, C, R, P, F, A)$, где каждый компонент определяет ключевые сущности и функции системы. Множество $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ представляет собой множество пользователей системы, каждый из которых характеризуется ролью $role(u) \in \{USER, ADMIN\}$, что позволяет реализовать ролевую модель доступа.

Множество $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ представляет параметризуемые промпты (контексты), каждый из которых является кортежем $c = (id, name, prompt, desc, t_{create})$, где *prompt* – текстовая инструкция для нейросети, определяющая стиль, тональность и формат выходного текста. Множество $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ представляет собой множества запросов пользователей, каждый из которых является кортежем $r = (id, u, c, text_{in}, text_{out}, isShort, count, t_{create})$, где *text_{in}* – исходный текст, *text_{out}* – результат обработки нейросетью, *isShort* – флаг необходимости сокращения, *count* – счетчик использований нейросети для данного запроса.

Функция параметризации промпта $P: C \times \{0, 1\} \rightarrow S$, где S – множество строк (финальных промптов), определяется как $P(c, s) = c.prompt$ при $s = 0$ и $P(c, s) = c.prompt \oplus \text{"Предоставь сокращенную версию"}$ при $s = 1$, где $\oplus$ – операция конкатенации строк. Данная функция обеспечивает динамическое формирование инструкции для нейросети с учетом выбранного контекста и необходимости сокращения, что позволяет адаптировать поведение модели без изменения программного кода.

Функция взаимодействия с внешним API $F: S \times T \rightarrow T'$, где T – множество исходных текстов, T' – множество обработанных текстов, реализует отказоустойчивое взаимодействие. При успешном ответе API функция возвращает обработанный текст, при возникновении ошибки (таймаут, сетевая недоступность, ошибка API) возвращает диагностическое сообщение и сохраняет состояние ошибки в лог.

Функция аудита и учета ресурсов $A: R \times N \rightarrow N$ определяется как $A(r, n) = r.count + 1$, инкрементируя счетчик запросов в атомарной транзакции базы данных одновременно с сохранением результата обработки, что гарантирует целостность данных при учете использования платных ресурсов [3].

Предложенная модель обладает рядом формально доказуемых свойств. Свойство изоляции данных утверждает, что для любого пользователя u_i и запроса r_j выполняется условие: если $r_j.u = u_i$, то запрос доступен только пользователю u_i , что реализуется через фильтрацию запросов к базе данных по идентификатору текущего пользователя. Свойство централизованного управления промптами означает, что изменение промпта $c_i.prompt$ автоматически влияет на все последующие вызовы $P(c_i, s)$, что позволяет администратору адаптировать поведение нейросети без изменения кода. Свойство отказоустойчивости гарантирует, что функция F при сбое API не блокирует работу системы, а возвращает диагностическое сообщение и сохраняет состояние ошибки.

Свойство атомарности учета обеспечивает выполнение инкрементации счетчика в одной транзакции с сохранением результата обработки, исключая рассинхронизацию данных [4].

Для реализации функции F разработан алгоритм устойчивого взаимодействия с внешним API. Алгоритм принимает на вход системный промпт *prompt* и исходный текст *text*, формирует массив сообщений для API, включающий системное сообщение с инструкцией и пользовательское сообщение с исходным текстом. Затем формируется JSON-полезная нагрузка с параметрами модели ($\max_{tokens} = 4096, temperature = 0.7$) [2, 5]. Выбор параметра $\max_{tokens} = 4096$ обусловлен тем, что типичный пресс-релиз организации-заказчика имеет объём от 500 до 3000 токенов, и установка лимита 4096 токенов гарантирует сохранность полного ответа нейросети. Выбор параметра $temperature = 0.7$ обусловлен его широким использованием в качестве компромиссного значения в исследовательской практике, обеспечивающего сбалансированность между креативностью и детерминированностью ответов модели, что согласуется с рекомендуемым разработчиками диапазоном значений (0.5–0.7) и общей практикой настройки параметров генеративных моделей [2].

Выполняется *POST*-запрос к API с установкой таймаута 40 секунд. При успешном ответе (*HTTP*-статус 200) извлекается сгенерированный текст, выполняется его постобработка (очистка от служебных меток, экранирование *HTML*-сущностей) и возвращается результат. При возникновении ошибки (таймаут, сетевая недоступность, ошибка API) формируется понятное пользователю сообщение на русском языке, которое сохраняется в базе данных и отображается в интерфейсе. Весь вызов обернут в блок *try-except*, перехватывающий исключения *ConnectionError*, *Timeout* и ошибки API [6].

Сравнение с существующими подходами

Проведен сравнительный анализ предложенной модели с существующими подходами к интеграции AI-сервисов в веб-платформы. Универсальные CMS с AI-плагинами (например, *WordPress* с плагинами для ChatGPT) обеспечивают лишь частичную изоляцию данных между пользователями, не имеют централизованного управления промптами и встроенного учета использования ресурсов. Корпоративные порталы (например, *SharePoint*) обеспечивают полную изоляцию данных, но интеграция с AI в них является надстроечной и не предоставляет централизованного управления промптами. Специализированные AI-сервисы (прямое использование ChatGPT API или YandexGPT API) предоставляют доступ к нейросетям, но не имеют встроенных механизмов изоляции данных, истории обработки и учета ресурсов на уровне пользователя [7]. Предлагаемая модель объединяет преимущества всех перечисленных подходов, впервые обеспечивая одновременное выполнение требований изоляции данных, централизованного управления промптами, полной истории обработки, встроенного учета ресурсов и отказоустойчивости в единой формальной структуре. Ключевым отличием является наличие сущности C (параметризуемых промптов), которая позволяет администратору централизованно управлять поведением нейросети, и сущности R (запросов), которая сохраняет полную историю обработки с привязкой к пользователю и использованному контексту.

Реализация модели на платформе Django

Для реализации предложенной модели выбран фреймворк Django, который обеспечивает встроенную ORM для работы с базой данных, систему аутентификации и авторизации, административную панель для управления данными и архитектурный шаблон MVT (Model-View-Template) [8]. Данный выбор обусловлен необходимостью быстрой разработки при сохранении высокого уровня безопасности и поддержки сложных связей между сущностями. В качестве интеллектуального ядра выбран DeepSeek API, который обеспечивает высокое качество обработки русскоязычных

текстов, поддержку контекста до 128K токенов и экономически эффективную тарификацию [5].

Модели данных реализованы с использованием Django ORM. Модель пользователя создана на основе стандартной системы Django, что дало готовые функции для аутентификации, управления сессиями и разделения ролей. Модель ChatContext (соответствующая сущности *C*) хранит название контекста, системный промпт, описание и дату создания. Модель GPTRrequest (соответствующая сущности *R*) включает поля: *uuid* (уникальный идентификатор), *user* (внешний ключ к модели пользователя с каскадным удалением), *context* (внешний ключ к модели ChatContext с установкой NULL при удалении), *prompt* (исходный текст), *response* (ответ нейросети), *isShort* (флаг сокращенного варианта), *count* (счетчик запросов к AI), *create_at* (дата создания). Каскадная связь с пользователем (*on_delete = models.CASCADE*) обеспечивает свойство изоляции данных: при удалении пользователя все его запросы автоматически удаляются.

Модуль интеграции реализован как сервисный слой внутри Django-приложения, инкапсулирующий всю логику взаимодействия с DeepSeek API. При получении запроса от пользователя модуль извлекает из базы данных объект ChatContext, содержащий системный промпт. Если пользователь активировал опцию сокращенного варианта, к системному промпту программно добавляется дополнительная инструкция о необходимости предоставить сокращенную версию, что соответствует функции *P*. Затем формируется JSON-запрос к DeepSeek API с параметрами модели, выполняется POST-запрос с установкой таймаута 40 секунд. При успешном ответе извлекается сгенерированный текст, выполняется его постобработка и сохранение в поле *response* модели GPTRrequest. Одновременно инкрементируется счетчик *count*, фиксирующий использование платного ресурса, что соответствует функции *A*. Вся операция выполняется в контексте атомарной транзакции базы данных для гарантии целостности информации.

Система аутентификации реализована на основе встроенных механизмов Django с использованием кастомной модели пользователя. Ключевой особенностью является полная закрытость платформы: отсутствует возможность самостоятельной регистрации – учетные записи создаются только администратором через панель управления. Контроль доступа реализован на двух уровнях. На первом уровне каждое представление, отвечающее за работу с контентом, проверяет, авторизован ли текущий посетитель, и перенаправляет на страницу входа при отсутствии сессии. На втором уровне запросы к базе данных фильтруются строго по полю *user*, соответствующему текущему вошедшему пользователю, что исключает доступ к чужим статьям даже при попытке угадать *uuid*.

Пользовательский интерфейс построен с использованием асинхронного обмена данными на основе AJAX. При нажатии кнопки отправки запроса JavaScript-функция перехватывает событие отправки формы, собирает данные из полей ввода и отправляет их на сервер. Во время обработки запроса (до 40 секунд) пользователь видит индикатор загрузки. После получения ответа происходит динамическое обновление интерфейса – страница не перезагружается, а сгенерированный текст появляется в соответствующем контейнере [9].

Экспериментальное исследование

Для проверки эффективности предложенной модели сформулированы две гипотезы: нулевая гипотеза H_0 – использование предложенной модели не влияет на время обработки текстового материала; альтернативная гипотеза H_1 – использование предложенной модели приводит к сокращению времени обработки текстового

материала. Эксперимент проведен с участием 5 сотрудников новостного отдела организации-заказчика. Каждый участник обработал 10 пресс-релизов (общий объем – 50 релизов) двумя способами: в контрольной группе – традиционным ручным методом; в экспериментальной группе – с использованием разработанной платформы. Фиксировалось время обработки одного релиза в минутах. Для обеспечения чистоты эксперимента порядок обработки релизов был рандомизирован, а между двумя способами обработки соблюдался временной интервал для исключения эффекта обучения.

Результаты эксперимента показали, что в контрольной группе (ручная обработка) среднее время составило *32.4 минуты* при стандартном отклонении *8.2 минуты*, медиана – *30.0 минут*. В экспериментальной группе (с использованием платформы) среднее время составило *12.8 минуты* при стандартном отклонении *3.5 минуты*, медиана – *12.0 минут*. Статистический анализ проведен с использованием *U-критерия* Манна–Уитни для независимых выборок ($n_1 = n_2 = 50$). Выбор непараметрического критерия обусловлен тем, что распределение времени обработки в контрольной группе не соответствует нормальному закону (проверено критерием Шапиро–Уилка, $p < 0.05$). Полученное значение $U = 312.5$, $p < 0.001$. Размер эффекта Коэна $r = 0.92$, что свидетельствует о высокой практической значимости выявленных различий. Таким образом, нулевая гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости $\alpha = 0.001$. Полученные данные подтверждают гипотезу H_1 о сокращении времени обработки текстового материала при использовании предложенной модели [10]. Дополнительно проведена экспертная оценка качества обработки текста на тех же 50 релизах. Три эксперта из числа сотрудников новостного отдела оценивали сохранение ключевых смысловых элементов в обработанных текстах по шкале от 0 до 100%. Средний результат составил 94% (стандартное отклонение 4.2%), что согласуется с литературными данными о качестве генеративных моделей [2].

Научная новизна и обсуждение результатов

Научная новизна работы заключается в трех основных результатах. Во-первых, разработана формальная модель интеграции API генеративных нейросетей в веб-платформу, описываемая кортежем $M = (U, C, R, P, F, A)$, где P – функция параметризации промптов, F – алгоритм устойчивого взаимодействия с API, A – функция аудита и учета ресурсов. Модель впервые обеспечивает одновременное выполнение требований изоляции данных, централизованного управления промптами, отказоустойчивости и учета ресурсов, что подтверждается формальным доказательством свойств модели. Во-вторых, предложен метод параметризации промптов, основанный на хранении системных промптов в реляционной базе данных с возможностью динамической сборки финальной инструкции с учетом контекстных параметров (тип обработки, необходимость сокращения). Метод позволяет адаптировать поведение нейросети под различные сценарии обработки без изменения программного кода, что критически важно для корпоративного использования. В-третьих, Создан алгоритм устойчивого взаимодействия с внешним API, реализующий обработку таймаутов, сетевых ошибок и ошибок API, а также атомарное сохранение результатов с одновременной инкрементацией счетчика использования ресурсов. Алгоритм обеспечивает отказоустойчивость системы и целостность данных при учете использования платных ресурсов. Процесс разработки и внедрения системы осуществлялся в соответствии с методологиями управления требованиями к программному обеспечению [11].

Теоретическая значимость работы заключается в том, что предложенная формальная модель может быть использована как основа для проектирования корпоративных систем интеграции AI-сервисов в различных предметных областях, не

ограничиваясь обработкой пресс-релизов. Практическая значимость подтверждается внедрением разработанной платформы в промышленную эксплуатацию в организации-заказчике. Полученные экспериментальные данные демонстрируют сокращение времени обработки текста в 2.5 раза при сохранении качества на уровне 94%.

Заключение

В работе представлена формальная модель интеграции API генеративных нейросетей в корпоративную веб-платформу для автоматизированной обработки текстовых данных. Основные научные результаты включают разработку формальной модели $M = (U, C, R, P, F, A)$ с доказанными свойствами изоляции данных, централизованного управления промптами, отказоустойчивости и атомарности учета; предложение метода параметризации промптов $P: C \times \{0, 1\} \rightarrow S$, позволяющего динамически формировать инструкции для нейросети на основе хранимых в базе данных контекстов; создание алгоритма устойчивого взаимодействия с внешним API, реализующего обработку таймаутов и ошибок; проведение экспериментального исследования, подтвердившего гипотезу о сокращении времени обработки текста ($p < 0.001$, размер эффекта $r = 0.92$). Разработанная платформа внедрена в промышленную эксплуатацию. Полученные результаты могут быть использованы при разработке корпоративных систем автоматизации обработки текстового контента с применением технологий искусственного интеллекта.

Список источников

1. *Стратегия* развития информационного общества в Российской Федерации на 2017–2030 годы: утв. Указом Президента РФ от 09.05.2017 № 203 // Собрание законодательства РФ. 2017. № 20. Ст. 2901.
2. *Смирнова Е. В.* Генеративные модели в обработке естественного языка: обзор и перспективы // Труды института системного программирования РАН. 2022. Т. 34, № 2. С. 123–142.
3. *Базы данных: принципы, типы, тенденции развития* [Электронный ресурс] / Хабр. 2022. URL: <https://habr.com/ru/companies/otus/articles/648153/> (дата обращения: 07.10.2025).
4. *Фаулер М.* Архитектура корпоративных программных приложений = Patterns of Enterprise Application Architecture / пер. с англ. М.: Вильямс, 2016. 544 с.
5. *DeepSeek API Documentation* [Электронный ресурс] / DeepSeek. URL: <https://platform.deepseek.com/api-docs/> (дата обращения: 05.10.2025).
6. *DeepSeek-AI. DeepSeek-R1: GitHub repository.* 2025. URL: <https://github.com/deepseek-ai/DeepSeek-R1> (дата обращения: 05.10.2025).
7. *Yandex Cloud: Документация YandexGPT* [Электронный ресурс] / Yandex Cloud. URL: <https://cloud.yandex.ru/docs/yandexgpt/> (дата обращения: 01.10.2025).
8. *Django Documentation* [Электронный ресурс] / Django Software Foundation. URL: <https://docs.djangoproject.com/en/5.0/> (дата обращения: 10.10.2025).
9. *MDN Web Docs: JavaScript* [Электронный ресурс] / Mozilla. URL: <https://developer.mozilla.org/ru/docs/Web/JavaScript> (дата обращения: 15.10.2025).
10. *Киселёв Р. А.* Сравнительный анализ фреймворков для разработки веб-приложений: Django, Flask, FastAPI // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2022. Т. 15, № 3. С. 101–112.
11. *Вигерс К., Бумти Дж.* Разработка требований к программному обеспечению = Software Requirements. 3-е изд. М.: Русская редакция, 2018. 720 с.

References

1. *Strategy for the Development of the Information Society in the Russian Federation for 2017–2030*: approved by the Decree of the President of the Russian Federation dated

- 09.05.2017 No. 203, Sbornik zakonodatel'stva RF [Collection of Legislation of the Russian Federation], 2017, no 20, art. 2901.
2. Smirnova, E. V. (2022), "Generativnye modeli v obrabotke estestvennogo yazyka: obzor i perspektivy" [Generative models in natural language processing: review and prospects], *Trudy instituta sistemnogo programmirovaniya RAN* [Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS], vol. 34, no 2, pp. 123–142.
 3. *Bazy dannykh: printsipy, tipy, tendentsii razvitiya* [Databases: principles, types, development trends], Habr, 2022, URL: <https://habr.com/ru/companies/otus/articles/648153/> (accessed: 07.10.2025).
 4. Fowler, M. (2016), *Arkhitektura korporativnykh programmnykh prilozheniy* [Patterns of Enterprise Application Architecture], translated from English, Williams, Moscow, 544 p.
 5. DeepSeek API Documentation, DeepSeek, URL: <https://platform.deepseek.com/api-docs/> (accessed: 05.10.2025).
 6. DeepSeek-AI (2025), DeepSeek-R1: GitHub repository, URL: <https://github.com/deepseek-ai/DeepSeek-R1> (accessed: 05.10.2025).
 7. Yandex Cloud: Dokumentatsiya YandexGPT [Yandex Cloud: YandexGPT Documentation], Yandex Cloud, URL: <https://cloud.yandex.ru/docs/yandexgpt/> (accessed: 01.10.2025).
 8. Django Documentation, Django Software Foundation, URL: <https://docs.djangoproject.com/en/5.0/> (accessed: 10.10.2025).
 9. MDN Web Docs: JavaScript, Mozilla, URL: <https://docs.djangoproject.com/en/5.0/> (accessed: 15.10.2025).
 10. Kiselev, R. A. (2022), "Sravnitel'nyy analiz freymvorkov dlya razrabotki veb-prilozheniy: Django, Flask, FastAPI" [Comparative analysis of frameworks for web application development: Django, Flask, FastAPI], *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravlenie* [Scientific and Technical Journal of SPbPU. Informatics. Telecommunications. Management], vol. 15, no 3, pp. 101–112.
 11. Wiegers, K. and Beatty, J. (2018), *Razrabotka trebovaniy k programmnomu obespecheniyu* [Software Requirements], 3rd ed., Russkaya Redaktsiya, Moscow, 720 p.

Информация об авторах:

Д. А. Черкасова – бакалавр направления подготовки "Прикладная информатика", профиль "Высокопроизводительные вычисления в цифровой экономике", Финансовый университет при Правительстве РФ (125167, Россия, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 49), AuthorID: 1349499;

В. А. Черкасова – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой информационной безопасности, старший научный сотрудник научной лаборатории "Математическое моделирование и информационные технологии в науке и образовании" Астраханского государственного университета им. В. Н. Татищева (414056, Россия, г. Астрахань, ул. Татищева, д. 20а), AuthorID: 621283.

Information about the authors:

D. A. Cherkasova – Bachelor of the training program "Applied Informatics", profile "High-Performance Computing in the Digital Economy", Financial University under the Government of the Russian Federation (49 Leningradsky Prospekt, Moscow, Russia, 125167), AuthorID: 1349499;

V. A. Cherkasova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; Head of the Information Security Department, Senior Researcher at the Scientific Laboratory «Mathematical Modeling and Information Technologies in Science and Education», Astrakhan State University named after V.N. Tatishchev (20a Tatishchev St., Astrakhan, Russia, 414056), AuthorID: 621283.

Научная статья

УДК 004.056.53, 519.213, 519.224.22

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-112-129

<https://elibrary.ru/iavrsm>

Статистический анализ данных поведения сетевого трафика при DDoS-атаках

Алексей Леонидович Шкерин¹, Дмитрий Иванович Понаётов²,
Фёдор Владимирович Пискун³

^{1, 2, 3} Российский технологический университет – МИРЭА, Москва, Россия

¹shkerin@mirea.ru

²dmiponayotov@gmail.com

³piskun.fv@gmail.com

Аннотация. Из-за прошедшего этапа информатизации общества в последнее время участились случаи атак злоумышленников, которые воруют данные и перегружают сеть. Цель работы состоит в том, чтобы исследовать статистические особенности DDoS-трафика, оценить устойчивость точечных оценок и проверить соответствие данных известным распределениям. Построение гистограммы и эмпирической функции распределения; разбиение выборки на пять случайных подвыборок (~20% от объема); расчет точечных оценок (медиана, среднее, дисперсия, СКО); построение 95%-ных доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии; вычисление усеченного среднего; проверка гипотезы о симметрии с использованием коэффициента асимметрии; применение критерия Колмогорова–Смирнова и графического метода анаморфоз с оценкой соответствия по коэффициенту детерминации R^2 для трех распределений: логнормального, Максвелла–Больцмана и Лапласа. В результате анализа была выявлена ярко выраженная правосторонняя асимметрия и тяжелый "хвост". Выборочное среднее оказалось заметно смещено вправо по сравнению с медианой и усеченным средним, что типично для подобной структуры распределения. Все три рассмотренные параметрические модели (логнормальное, Максвелла–Больцмана и Лапласа) были отвергнуты на уровне значимости $\alpha = 0,05$, несмотря на то, что распределение Лапласа формально продемонстрировало наивысшее качество соответствия. В ходе исследования подтверждено, что DDoS-трафик обладает сложной структурой, которая не описывается классическими параметрическими моделями. Полученные результаты обосновывают необходимость применения сложных и непараметрических подходов при предобработке данных и разработке систем обнаружения вредоносного трафика.

Ключевые слова: статистический анализ; DDoS; сетевой трафик; критерий Колмогорова–Смирнова; распределение Максвелла–Больцмана; распределение Лапласа; анаморфоза.

Для цитирования: Шкерин А. Л., Понаётов Д. И., Пискун Ф. В. Статистический анализ данных поведения сетевого трафика при DDoS-атаках // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 112–129. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-112-129. <https://elibrary.ru/iavrsm>.



© Шкерин А. Л., Понаётов Д. И., Пискун Ф. В., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Благодарности: работа выполнена при поддержке научного сайта с данными IEEE Dataport, The Bot-IoT dataset; авторы выражают благодарность Нуру Мустафе за предоставление данных о DDoS-атаках.

Статья поступила в редакцию 09.01.2026; одобрена после рецензирования 20.05.2026; принята к публикации 20.10.2026.

Research article

Statistical Data Analysis of Network Traffic Behavior Under DDoS-Attack

Alexey L. Shkerin¹, Dmitriy I. Ponayotov², Fedor V. Piskun³

^{1, 2, 3} Russian Technological University – MIREA, Moscow, Russia

¹shkerin@mirea.ru

²dmiponayotov@gmail.com

³piskun.fv@gmail.com

Abstract. Due to the recent advancement of informatization in society, there has been a recent increase in the number of attacks by malicious users who steal data and overload the network. The aim of this work is to investigate the statistical characteristics of DDoS traffic, evaluate the robustness of point estimates, and check the data's conformity with known distributions. Constructing a histogram and empirical distribution function; splitting the sample into five random subsamples (~20% of the volume); calculating point estimates (median, mean, variance, standard deviation); constructing 95% confidence intervals for the expectation and variance; calculating the trimmed mean; testing the symmetry hypothesis using the asymmetry coefficient; applying the Kolmogorov–Smirnov test and the graphical goodness of fit method with conformity assessment using the R^2 determination coefficient for three distributions: lognormal, Maxwell–Boltzmann, and Laplace. The analysis revealed pronounced right-sided asymmetry and a heavy tail. The sample mean was significantly shifted to the right compared to the median and trimmed mean, which is typical for this type of distribution structure. Although the true mean fell within the 95% confidence intervals of all subsamples, the true variance did not fall within any of them, demonstrating the instability of this estimate. All three considered parametric models (lognormal, Maxwell-Boltzmann, and Laplace) were rejected at the significance level of $\alpha = 0.05$, despite the fact that the Laplace distribution formally demonstrated the highest quality of fit. The study confirmed that DDoS traffic has a complex structure that is not described by classical parametric models. The obtained results substantiate the need to apply complex and nonparametric approaches in data preprocessing and the development of malicious traffic detection systems.

Keywords: *statistical analysis; DDoS; network traffic; Kolmogorov-Smirnov test; Maxwell–Boltzmann distribution; Laplace distribution; goodness of fit.*

For citation: Shkerin, A. L., Ponayotov, D. I. and Piskun, F. V. (2026), "Statistical Data Analysis of Network Traffic Behavior Under DDoS-Attack", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 112–129, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-112-129, <https://elibrary.ru/iavrsm>.

Acknowledgments: the work was supported by the dataset files from IEEE Dataport, The Bot-IoT dataset; the authors are grateful to Nour Moustafa for providing the data of DDoS-attacks.

The article was submitted 09.01.2026; approved after reviewing 20.05.2026; accepted for publication 20.10.2026.

Введение

Современные сетевые сервисы все чаще сталкиваются с различными мощными видами *DDoS*-атак, которые ставят под угрозу стабильность их работы. Для эффективного противодействия этой проблеме важно понимать природу вредоносного трафика. Одной из выделяющихся характеристик таких атак является длительность *HTTP*-соединений – она может стать основой для адаптивных систем обнаружения аномалий [1–2].

В работе выявляются и исследуются характерные особенности *DDoS*-трафика, включая проверку его соответствия трем параметрическим моделям (логнормальная, Максвелла–Больцмана, Лапласа), при помощи визуально сложных и непараметрических методах.

Постановка задачи

Пусть дана выборка $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где $x_i > 0$ – длительность i -го *HTTP*-соединения *DDoS*-атаки в секундах. Поставим следующие задачи:

- визуально оценить структуру выборки;
- оценить устойчивость статистических характеристик;
- оценить соответствие распределения выборки классическим.

Методы исследования

Для решения поставленных задач используем комбинированный подход:

1. Выполним визуальный анализ при помощи гистограммы и эмпирической функции распределения.
2. Оценим устойчивость статистик – разобьем выборку на 5 случайных, не пересекающихся, подвыборок и вычислим основные статистики по ним: медиану, выборочные среднее и дисперсию, среднеквадратичное отклонение (СКО). После построим доверительные интервалы для среднего и дисперсии с надежностью 95%. Также вычислим усеченное среднее и коэффициент асимметрии выборки для численного подтверждения результатов визуального анализа.
3. Проверим соответствие распределения выборки трем классическим моделям (логнормальной, Максвелла–Больцмана и Лапласа) при помощи критерия Колмогорова–Смирнова и графического метода анаморфоз с оценкой по коэффициенту детерминации R^2 .

1. Выявление классических параметров и точечных оценок для анализируемых данных

Исследуемые наборы данных относятся к анализу сетевого трафика при *DDoS*-атаках (*Distributed Denial of Service*) [3–4]. Выбор датасетов *IEEE Dataport (The Bot-IoT dataset)* и *CAIDA UCSD "DDoS Attack 2007"* обусловлен их репрезентативностью и широким признанием в научном сообществе. Набор данных *Bot-IoT* содержит информацию о трафике *IoT*-устройств, включающую как легитимную активность, так вредоносную. Датасет *CAIDA* представляет собой реальные данные перехвата трафика во время крупномасштабной *DDoS*-атаки. Использование двух независимых источников данных позволит сравнить их специфику и сделать универсальные выводы для аналогичных исследований.

Первые записи датасета от *IEEE-dataport*, с интересующими нас признаками, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Обзор строк исследуемого датасета *IEEE-dataport*

Протокол	Категория	Длительность
TCP	DDoS	12,96526
UDP	DDoS	14,4117
TCP	Normal	1097,528
UDP	DDoS	13,81165
UDP	DDoS	12,1611
TCP	DDoS	14,71928
TCP	DDoS	0,258019
TCP	DDoS	0,298577
TCP	DDoS	34,36997
TCP	DDoS	0,282785
TCP	Normal	1478,756
TCP	DDoS	113,5577

В табл. 2 представлены записи датасета от *CAIDA*, с интересующими нас признаками.

Таблица 2. Обзор строк исследуемого датасета *CAIDA*

Протокол	Информация	Длительность
TCP	50450 > 35451 [SYN] Seq=0 Win=64512 Len=0 MS...	138.717388
TCP	50452 > 35451 [SYN] Seq=0 Win=64512 Len=0 MS...	138.716784
TCP	50454 > 35451 [SYN] Seq=0 Win=64512 Len=0 MS...	210.258711
TCP	50456 > 35451 [SYN] Seq=0 Win=64512 Len=0 MS...	213.173783
TCP	50458 > 35451 [SYN] Seq=0 Win=64512 Len=0 MS...	213.173822
TCP	50460 > 35451 [SYN] Seq=0 Win=64512 Len=0 MS...	213.174086

Колонка "Информация" содержит следующие данные о сетевом пакете:

- исходный и целевой порты;
- TCP-флаг (к примеру, [SYN]);
- номер последовательности пакета (Seq);
- размер окна приема – объем байт данных, который может принять получатель (Win);
- длина полезной нагрузки пакета в байтах (Len);
- прочие TCP-опции.

Для анализа выберем признак длительности, который демонстрирует время жизни *HTTP*-соединения в секундах. Данный признак выбран поскольку *DDoS*-атаки на прикладном уровне часто характеризуются аномальными паттернами длительности соединений – либо массовыми короткими запросами, либо удержанием соединений в течение продолжительного времени.

Протокол *HTTP* выбран, поскольку, согласно статистике *Cloudflare*, на долю *HTTP*-запросов приходится около 75% всех зафиксированных *DDoS*-атак прикладного уровня [5].

Доля *HTTP*-трафика в структуре *DDoS*-атак представлена на рис. 1.

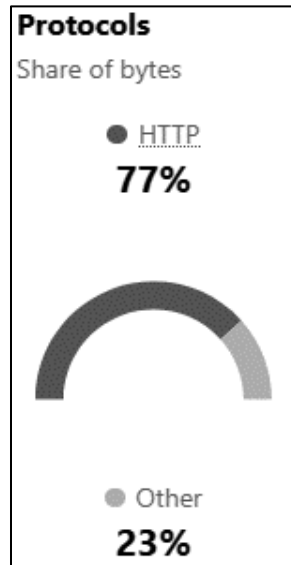


Рис. 1. Доля *HTTP*-трафика

Несмотря на то, что в таблице указаны протоколы *TCP* и *UDP*, исследуемый *HTTP*-трафик передается исключительно поверх *TCP* – это обусловлено самой архитектурой протокола *HTTP*, который использует *TCP* в качестве транспортного уровня. *UDP* же используется в основном для амплификационных атак, поэтому рассматриваться не будет. Перейдем непосредственно к анализу признака длительности соединения по первому датасету.

Тип признака – числовой, непрерывный, содержит только положительные значения. Объем выборки составляет 367307 наблюдений. Диапазон – от $2 \cdot 10^{-5}$ до 113.56 секунд (~2 минуты).

Построим гистограмму вариационного ряда по формуле Стёрджесса [6]:

$$k = 1 + \log_2 n = 1 + 3.222 \cdot \log_{10} 367307 \approx 19. \quad (1)$$

Разделим данные на 19 интервалов с шагом h и рассчитаем их границы по формулам:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}, \quad (2)$$

$$Z_i = x_{\min} + i \cdot h, i \in [0, k], \quad (3)$$

$$x_i = \frac{Z_i + Z_{i+1}}{2}, i \in [1, k], \quad (4)$$

где n – объем выборки;

Z_i – границы интервалов;

$x_{\max} = 113.56$ – максимальное значение в выборке;

$x_{\min} = 2 \cdot 10^{-5}$ – минимальное значение в выборке.

После деления на интервалы построим гистограмму частот. Гистограмма представлена на рис. 2.

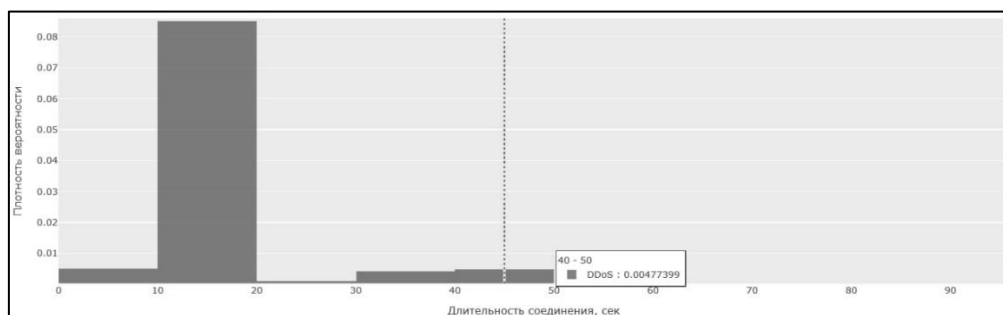


Рис. 2. Гистограмма длительности соединений DDoS трафика

Таким образом, гистограмма показывает сильную правостороннюю асимметрию. Для демонстрации различия с легитимным трафиком, построим его гистограмму длительности соединений. Гистограмма продемонстрирована на рис. 3.

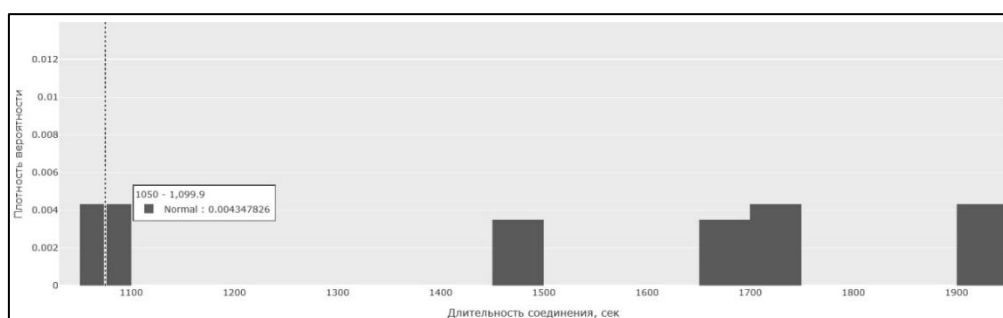


Рис. 3. Гистограмма длительности соединений легитимного трафика

Как видно из гистограммы, легитимному трафику исследуемого датасета характерны более длительные соединения до ~32 минут.

Перейдем к вычислению эмпирической функции (ЭФР) распределения по исследуемому вариационному ряду. Вычислим функцию по формуле:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{x_i < x}^n n_i = \frac{n_x}{n}, \quad (5)$$

где $n_x = \sum_{x_i < x}^n n_i$ – число вариантов, значения которых меньше x [7].

График ЭФР на отрезке от 0 до 50 секунд продемонстрирован на рис. 4.

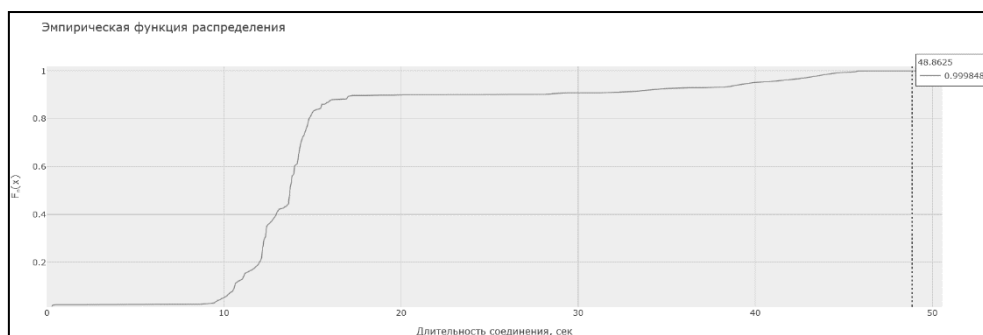


Рис. 4. ЭФР для признака длительности до 50 сек

Такой вид ЭФР подтверждает наличие сильной правосторонней асимметрии и тяжелого "хвоста", что согласуется с результатами визуального анализа гистограммы. Таким образом, выявлены асимметрия и тяжелый "хвост" в распределении.

Перейдем к анализу второго датасета от *CAIDA*. Тип исследуемого признака абсолютно такой же. Объем данных составил 1177442 наблюдений. Диапазон – от $1,9 \cdot 10^{-6}$ до 299.839 секунд (~5 минут). Как видно, данный датасет существенно отличается от предыдущего по масштабу и структуре. Построим гистограмму для визуальной оценки распределения данных. Гистограмма частот представлена на рис. 5.

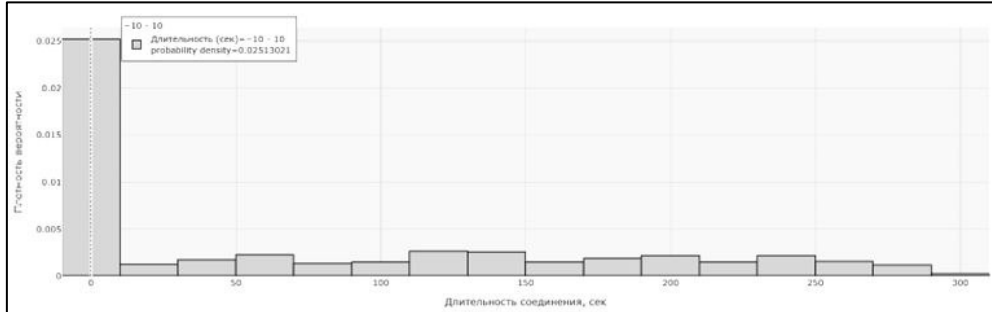


Рис. 5. Гистограмма длительности соединений

Также построим график ЭФР. Он продемонстрирован на рис. 6.

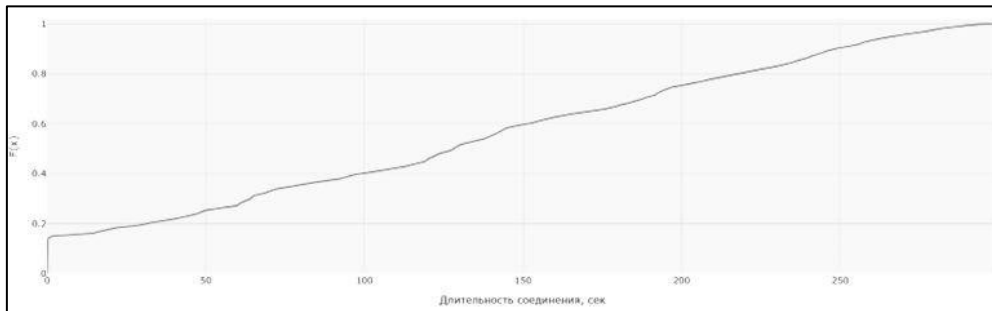


Рис. 6. ЭФР для признака длительности

Несмотря на структурные различия датасетов, оба демонстрируют ярко выраженную правостороннюю асимметрию и тяжелый "хвост", т.е. основная масса значений сосредоточена в диапазоне от 0 до 10 секунд, при этом редкие, но более длительные соединения формируют длинный правый "хвост" распределения. Перейдем к оценке устойчивости статистических характеристик исследуемого признака.

Разобьем каждую исследуемую совокупность по признаку на пять непересекающихся случайных выборок. Каждая из них составит ~20% от общего объема наблюдений. Для вычисления медианы используем следующую формулу:

$$Med = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{если } n - \text{нечетное} \\ \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}, & \text{если } n - \text{четное} \end{cases}, \quad (6)$$

для математического ожидания:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (7)$$

где x_i – значение i -го элемента выборки;
 n – объем выборки.

Для дисперсии будет использоваться следующая формула:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (8)$$

Для СКО:

$$s = \sqrt{\sigma^2}. \quad (9)$$

Поскольку нам известна дисперсия (σ), то для расчета доверительного интервала математического ожидания [6] будет использоваться формула:

$$\mu = \bar{X} \pm t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (10)$$

где $t_{1-\alpha/2}$ – квантиль стандартного нормального распределения соответствующего уровня;

α – уровень значимости ($\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$) [8].

Для расчета доверительного интервала дисперсии при тех же условиях будет использоваться следующая формула:

$$(\sigma^2)^\pm = \frac{n \cdot \sigma^2}{t_\alpha^\mp}, \quad (11)$$

где t_α^+ – квантиль распределения хи-квадрат с n степенями свободы уровня $\frac{1-\alpha}{2}$;

t_α^- – квантиль уровня $\alpha/2$ того же распределения;

σ^2 – выборочная дисперсия, вычисляемая.

Начнем с первого датасета. Истинные среднее и дисперсия генеральной совокупности составили 15.528 и 149.845 соответственно. Результаты вычислений по выборкам представлены в табл. 3.

Таблица 3. Точечные оценки и доверительные интервалы по выборкам датасета IEEE

Выборка	I	II	III	IV	V
Med	13.712	13.713	13.713	13.713	13.712
$\bar{x}$	15.521	15.540	15.533	15.540	15.507
σ^2	155.350	147.357	156.161	166.252	124.106
s	12.464	12.139	12.496	12.894	11.140
Верхняя граница ДИ для среднего	15.562	15.579	15.574	15.581	15.543
Верхняя граница ДИ для дисперсии	156.061	148.032	156.877	167.014	124.675
Нижняя граница ДИ для среднего	15.481	15.501	15.493	15.498	15.471

Выборка	I	II	III	IV	V
Нижняя граница ДИ для дисперсии	154.643	146.686	155.451	165.496	123.542
Попадание истинного среднего в ДИ	Да				
Попадание истинной дисперсии в ДИ	Нет				

Проанализируем полученные результаты. Медиана во всех выборках лежит в узком диапазоне 13.712 – 13.713 секунд, а выборочные средние – в пределах 15.507 – 15.540 секунд. Истинное среднее по всей совокупности (15.528 сек) попало в 95%-ные доверительные интервалы во всех пяти выборках, что подтверждает их репрезентативность.

Оценим результаты по дисперсии. Истинное значение (149.845 сек²) не вошло ни в один доверительный интервал. Оценки дисперсии сильно варьируются – от 124.106 до 166.252, что связано с высокой чувствительностью этой величины к выбросам. Таким образом, среднее оценивается надежно, а дисперсия – нет.

Теперь перейдем к вычислению усеченного среднего – оценке, устойчивой к выбросам. Для этого из выборки отбросим по 10% самых коротких и самых длинных значений (слева и справа распределения), а затем посчитаем среднее по оставшейся части. Усеченное среднее будем вычислять по следующей формуле:

$$\bar{X}_\alpha = \frac{1}{n - 2k} \sum_{i=k+1}^{n-k} x_i, \quad (12)$$

где $k = \alpha \cdot n$, α – доля отсечения [9].

Усеченное среднее (с отсечением по 10% с каждого конца) составило 13.485 секунд, что заметно меньше обычного среднего (~15.5 секунд) и меньше медианы (~13.7 секунд).

Перейдем к оценке второго набора данных. Истинные среднее и дисперсия составили 126.912 и 7832.156 соответственно. Результаты вычислений по выборкам представлены в табл. 4.

Таблица 4. Точечные оценки и доверительные интервалы по выборкам датасета CAIDA

Выборка	I	II	III	IV	V
Med	128.0	128.180	128.188	127.938	128.213
$\bar{x}$	126.794	127.167	127.001	126.712	126.886
σ^2	7835.757	7840.121	7803.541	7843.536	7837.828
s	88.520	88.544	88.338	88.564	88.532
Верхняя граница ДИ для среднего	126.436	126.809	126.644	126.355	126.529
Верхняя граница ДИ для дисперсии	7791.192	7795.531	7759.159	7798.927	7793.252
Нижняя граница ДИ для среднего	127.152	127.524	127.358	127.070	127.244

Выборка	I	II	III	IV	V
Нижняя граница ДИ для дисперсии	7880.708	7885.096	7848.306	7888.531	7882.790
Попадание истинного среднего в ДИ	Да				
Попадание истинной дисперсии в ДИ	Да				

Медиана во всех выборках также лежит в узком диапазоне 127.938 – 128.213 секунд, а выборочные средние – в пределах 126.712 – 127.167 секунд. Истинное среднее (126.912 сек) и дисперсия (7832.156 сек) по всей совокупности попали в 95%-ные доверительные интервалы всех пяти подвыборок, что свидетельствует о высокой репрезентативности и устойчивости оценок.

Стоит заметить, что, в отличие от первого датасета, здесь дисперсия оценивается надежно, что указывает на отсутствие выраженных экстремальных выбросов.

Усеченное среднее составило 125.049 секунд. Оно устойчиво ниже как обычного среднего (~126.912 секунд), так и медианы (~128.071 секунд), что согласуется с правосторонней асимметрией распределения и повторяет тенденцию, наблюдаемую в первом датасете.

Перейдем к проверке на соответствие исследуемых данных известным теоретическим распределениям.

2. Анализ представленных распределений и исследование закономерностей данных

Для начала проведем анализ наличия асимметрии. Воспользуемся коэффициентом асимметрии. Сформулируем следующие гипотезы:

- H_0 : распределение симметрично;
- H_1 : распределение асимметрично;
- $p\text{-value} < 0.0001$.

Для проверки гипотезы воспользуемся коэффициентом асимметрии [10]:

$$K_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3. \quad (13)$$

Значение коэффициента для первого датасета составило 1007.141. $p\text{-value}$ составил 0. Высокое значение статистики и практически нулевой $p\text{-value}$ четко указывают на сильную правостороннюю асимметрию. Нулевая гипотеза отвергнута.

Значение коэффициента для второго набора данных составило 0.061. $p\text{-value}$ также составил 0. Нулевая гипотеза отвергнута.

Проверим, подчиняется ли выборка следующим законам распределений: логнормальное, Максвелла–Больцмана и Лапласа при помощи непараметрического и графического методов.

Для проверки на принадлежность к логнормальному распределению будем использовать формулу плотности:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}, \quad (14)$$

где $x > 0$ [7].

Распределение Максвелла–Больцмана описывает распределение скоростей молекул в идеальном газе. Имеет фиксированную форму с пиком и быстрым спадом. Формула теоретической плотности:

$$f(x; a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{x^2}{a^3} \cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)}, \quad (15)$$

где $a = \frac{x}{\sqrt{2}}$ и $x \geq 0$ [11].

Распределение Лапласа – это двустороннее экспоненциальное распределение с пиком в нуле. Оно симметрично, но имеет более тяжелые "хвосты", чем нормальное [12, с. 189]. Формула теоретической плотности:

$$f(x; \mu, b) = \frac{1}{2b} \cdot e^{\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)}, \quad (16)$$

где $b = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ и $x \in (-\infty; \infty)$.

В качестве непараметрического метода воспользуемся критерием Колмогорова–Смирнова. Данная статистика сравнивает эмпирическую и теоретическую функции распределения, измеряя максимальное отклонение между ними и не требует группировки данных. Для вычисления воспользуемся формулой:

$$D_n = \sqrt{n} \cdot \sup_x |F_n(x) - F(x)|, \quad (17)$$

где D_n – статистика критерия Колмогорова;
 $F_n(x)$ – выборочная функция распределения;
 $F(x)$ – функция распределения [13].

Статистики по гипотезам о соответствии распределениям по первому набору данных представлены в табл. 5.

Таблица 5. Статистики по гипотезам о соответствии распределениям по датасету IEEE

Распределение	Статистика D_n	p-value	Решение по гипотезе
Логнормальное	0.292	0	Отвергается
Максвелла–Больцмана	0.327	0	Отвергается
Лапласа	0.192	0	Отвергается

Как видно, ни одно из трёх предполагаемых распределений не прошло тесты. Перейдём к проверке второго датасета. Статистики представлены в табл. 6.

Таблица 6. Статистики по гипотезам о соответствии распределениям по датасету CAIDA

Распределение	Статистика D_n	p-value	Решение по гипотезе
Логнормальное	0.308	0	Отвергается
Максвелла–Больцмана	0.195	0	Отвергается
Лапласа	0.100	0	Отвергается

Результаты теста аналогичны предыдущим – ни одно распределение не прошло тесты. Это в очередной раз указывает на то, что исследуемый DDoS-трафик обладает более сложной структурой, чем предполагают классические модели распределений.

Перейдем к идентификации распределений графическим способом при помощи анаморфоз. Анаморфоза – графический метод, при котором эмпирическая функция распределения отображается в координатах, соответствующих теоретическому закону. При соответствии точки лежат на прямой.

Оценка соответствия будет проводиться при помощи коэффициента детерминации R^2 , поскольку данная статистическая мера позволяет объективно сравнить, насколько хорошо разные распределения совпадают с эмпирическими данными. Вычисляют R^2 следующей формулой:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}, \quad (18)$$

где SSE – сумма квадратов остатков;
 SST – общая сумма квадратов;
 Y_i – наблюдаемые значения;
 $\hat{Y}_i$ – предсказанные значения;
 $\bar{Y}$ – среднее значение Y ;
 n – число точек.

Чем ближе $R^2 \rightarrow 1$, тем лучше распределение подходит [14].

Проанализируем первый набор данных. Статистики R^2 по распределениям представлены в табл. 7.

Таблица 7. Статистики R^2 по распределениям по датасету IEEE

Распределение	R^2
Логнормальное	0.760
Максвелла-Больцмана	0.640
Лапласа	0.899

График анаморфозы для логнормального распределения представлен на рис. 7.

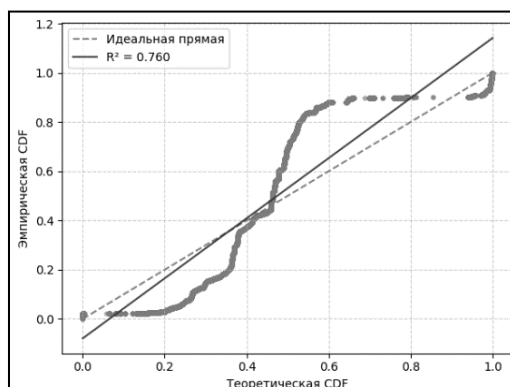


Рис. 7. Анаморфоза логнормального распределения

Точки на графике принимают S-образную форму, что говорит об отклонении в "хвостах" распределения причем как справа, так и слева от него. Несмотря на высокое значение коэффициента детерминации ($R^2 = 0.76$), асимметрия данных не учитывается корректно, это будет оговорено в следующих этапах анализа.

График анаморфозы для распределения Максвелла–Больцмана представлен на рис. 8.

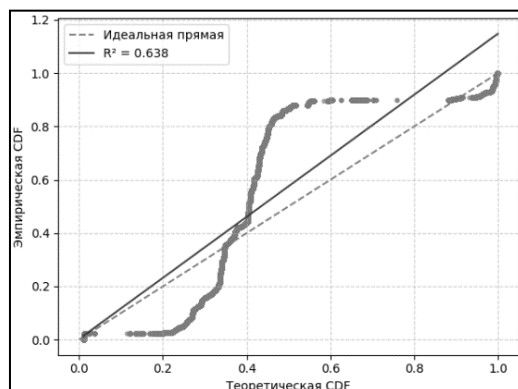


Рис. 8. Анаморфоза распределения Максвелла–Больцмана

График демонстрирует схожую с предыдущим S-образную форму. Отличительная особенность наблюдается в более выраженном отклонении в правом "хвосте" и смещении центра влево. Данное отклонение ухудшает R^2 – здесь его значение уже составляет 0.638.

График анаморфозы для распределения Лапласа представлен на рис. 9.

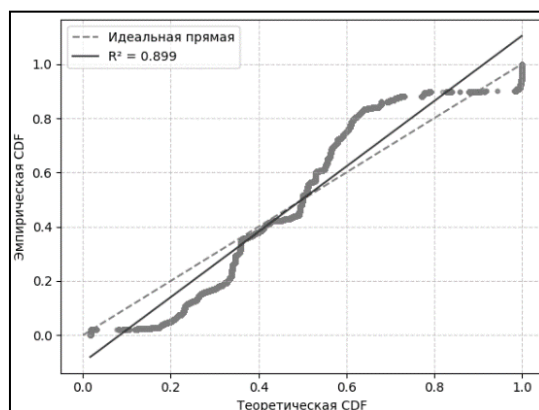


Рис. 9. Анаморфоза распределения Лапласа

Здесь точки также принимают S -образную форму, но менее выраженную, по сравнению с предыдущими анаморфозами. Также данная анаморфоза имеет наивысший среди всех $R^2 = 0.899$.

Перейдем к анализу второго датасета. Статистики R^2 по распределениям представлены в табл. 8.

Таблица 8. Статистики R^2 по распределениям по датасету CAIDA

Распределение	R^2
Логнормальное	0.665
Максвелла-Больцмана	0.956
Лапласа	0.974

График анаморфозы для логнормального распределения представлен на рис. 10.

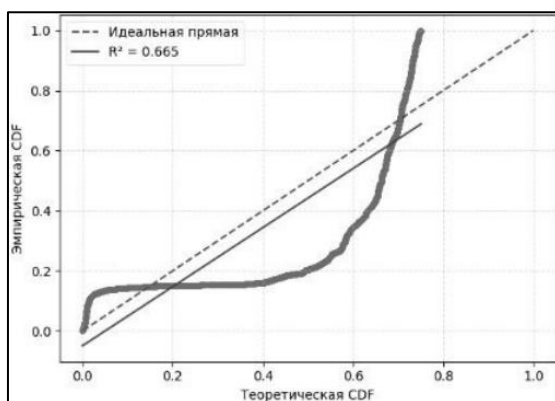


Рис. 10. Анаморфоза логнормального распределения

Точки образуют выраженную S -образную кривую, что указывает на систематическое отклонение в "хвостах" и отражается на значении R^2 (0.665). По сравнению с первым датасетом отклонение менее резкое, однако структура несоответствия сохраняется.

График анаморфозы для распределения Максвелла–Больцмана представлен на рис. 11.

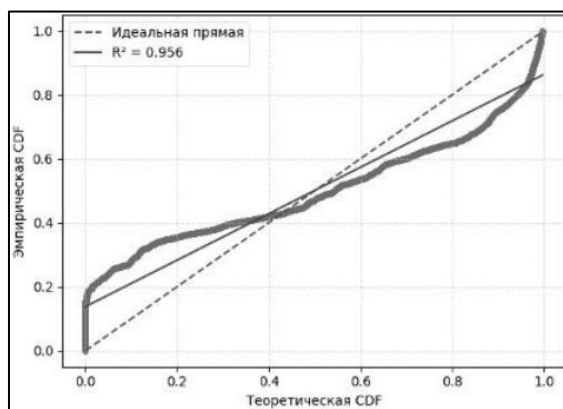


Рис. 11. Анаморфоза распределения Максвелла–Больцмана

На данном графике отклонения более линейны, в отличие от первого датасета, что отражается на более высоком значении R^2 (0.956).

График анаморфозы для распределения Лапласа представлен на рис. 12.

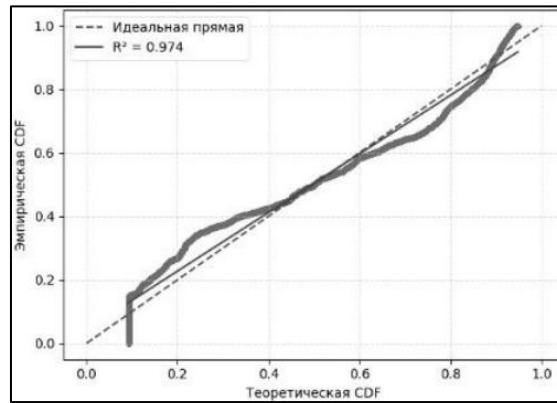


Рис. 12. Анаморфоза распределения Лапласа

Здесь можно наблюдать наиболее близкое приближение к прямой среди трех моделей. Значение коэффициента детерминации здесь также наиболее приближенно к 1 ($R^2 = 0.974$). Однако наблюдается слабая S-образная девиация, как и в первом наборе данных.

Тем не менее, распределение Лапласа демонстрирует наилучшее соответствие среди всех моделей как в первом, так и во втором наборах данных.

Несмотря на различия в масштабе и форме, оба датасета демонстрируют схожую структурную несогласованность с классическими параметрическими моделями, что подтверждает универсальность их статистической сложности.

Заключение

Таким образом, из трех рассмотренных моделей распределение Лапласа показало наилучшее соответствие как для первого, так и для второго датасета – у него самый высокий коэффициент детерминации. Однако даже в этом случае модель не может являться подходящей для описания DDoS-трафика, поскольку для нее характерна симметричность относительно нуля, а оба набора данных явно смещены вправо.

Логнормальное распределение и распределение Максвелла–Больцмана описывают данные немного хуже, что согласуется с общим выводом о структуре трафика – она сложная, с тяжелым "хвостом", и простые параметрические модели ее не передают.

Результаты работы показали, что классические модели плохо описывают поведение DDoS-трафика, что указывает на необходимость применять робастные и непараметрические методы при построении систем обнаружения вторжений (IDS/IPS).

Результаты данного анализа подтверждают выводы С.В. Кочергина о необходимости учета структуры данных для эффективного обнаружения аномалий в киберфизических системах. Методы, подобные *Isolation Forest*, оказываются предпочтительными именно в условиях резких, но редких отклонений – каковыми и являются длительные соединения в DDoS-трафике [15].

Проведенный статистический анализ закладывает методологическую основу для более точной и осмысленной предобработки длительности сетевого трафика, что позволит корректно применять методы машинного обучения в задачах кибербезопасности.

Список источников

1. Кодацкий Н. М., Муратов И. А. Решения в кибербезопасности // StudNet. 2022. № 1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/resheniya-v-kiberbezopasnosti> (дата обращения: 10.22.2025).

2. Крыгин Н. Д. DDoS-атаки и защиты от них // Столыпинский вестник. 2022. № 4. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ddos-ataki-i-zaschity-ot-nih> (дата обращения: 10.22.2025).
3. Nour Moustafa // The Bot-IoT dataset from IEEE-DataPort. URL: <https://dx.doi.org/10.21227/r7v2-x988> (дата обращения: 10.22.2025).
4. The CAIDA UCSD "DDoS Attack 2007" Dataset. URL: https://www.caida.org/catalog/datasets/ddos-20070804_dataset/ (дата обращения: 27.01.2026).
5. Cloudflare Radar. URL: <https://radar.cloudflare.com/?dateRange=7d> (дата обращения: 27.01.2026).
6. Коновалова М. Е., Жиронкин С. А., Сагдеев Р. Р. Особенности формирования инвестиционного портфеля розничных инвесторов // Вестник РГЭУ (РИНХ). 2024. № 2.
7. Дьячкова О. Н., Михайлов А. Е. Опыт применения эмпирических функций распределения для описания градостроительной деятельности (на примере Санкт-Петербурга) // Экология урбанизированных территорий. 2023. № 2.
8. Mokhtar S. f., Yusof Z. Md, Sapiri H. Confidence Interval Estimating the Mean of Normal Distribution and Skewed Distribution // Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences. 2024. Vol. 20(5). P. 1124–1135. URL: https://www.researchgate.net/publication/384959202_Confidence_Interval_Estimating_the_Mean_of_Normal_Distribution_and_Skewed_Distribution (дата обращения: 10.22.2025).
9. Галалу В. Г., Киракосян С. А., Аль-Карави Х. Ш. М., Турулин И. И. Сравнительная оценка методов усреднений для фильтрации измерительных сигналов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2023. № 2 (232). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnaya-otsenka-metodov-usredneniy-dlya-filtratsii-izmeritelnyh-signalov> (дата обращения: 10.22.2025).
10. Буре В. М. Теория вероятностей и вероятностные модели: учебник. В. М. Буре, Е. М. Парилина, А. А. Седаков. Санкт-Петербург: Лань, 2020. 296 с. ISBN 978-5-8114-3168-7. URL: <https://e.lanbook.com/book/108328> (дата обращения: 10.22.2025).
11. Тарханова А. М., Шулдикова Н. С. Компьютерное моделирование процесса установления распределения молекул по энергиям // МНКО. 2023. № 2 (99). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kompyuternoe-modelirovanie-protsesta-ustanovleniya-raspredeleniya-molekul-po-energiyam> (дата обращения: 10.22.2025).
12. Chattamvelli R., Shanmugam R. Laplace Distribution. In: Continuous Distributions in Engineering and the Applied Sciences. Part II. Synthesis Lectures on Mathematics & Statistics. Springer, Cham. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-02435-1_4 P. 189–199 (дата обращения: 10.22.2025).
13. Воробьёв Р. И., Брагин А. С. Исследование статистических критериев проверки гипотез для целей определения местоположения // Экономика и качество систем связи. 2022. № 3 (25). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-statisticheskikh-kriteriev-proverki-gipotez-dlya-tseley-opredeleniya-mestopolozheniya> (дата обращения: 10.22.2025).
14. Шукуров И. А. Парная регрессия и корреляция // Universum: технические науки. 2021. № 5–1 (86). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/parnaya-regressiya-i-korrelyatsiya> (дата обращения: 10.22.2025).
15. Кочергин С. В., Артемова С. В., Бакаев А. А., Мутяков Е. С., Вегера Ж. Г., Максимова Е. А. Кибербезопасность смарт-сетей: сравнение подходов машинного обучения для обнаружения аномалий // Russian Technological Journal. 2024.

Т. 12(6). С. 7–19. URL: <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-7-19> (дата обращения: 10.22.2025).

Reference

1. Kodyatsky, N. M. and Muratov, I. A. (2022), "Solutions in Cybersecurity" [Resheniya v kiberbezopasnosti], *StudNet*, no 1, URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/resheniya-v-kiberbezopasnosti> (accessed: 10.22.2025).
2. Krygin, N. D. (2022), "DDoS Attacks and Defenses Against Them" [DDoS-ataki i zashchity ot nikh], *Stolypinsky Vestnik* [Stolypinskii vestnik], no 4, URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ddos-ataki-i-zaschity-ot-nih> (accessed: 10.22.2025).
3. Moustafa, N. The Bot-IoT dataset from IEEE-DataPort, URL: <https://dx.doi.org/10.21227/r7v2-x988> (accessed: 10.22.2025).
4. The CAIDA UCSD "DDoS Attack 2007" Dataset, URL: https://www.caida.org/catalog/datasets/ddos-20070804_dataset/ (accessed: 27.01.2026).
5. Cloudflare Radar, URL: <https://radar.cloudflare.com/?dateRange=7d> (accessed: 27.01.2026).
6. Konovalova, M. E., Zhironkin, S. A. and Sagdeev, R. R. (2024), "Peculiarities of Forming an Investment Portfolio for Retail Investors" [Osobennosti formirovaniya investitsionnogo portfelya roznichnyh investorov], *Vestnik of Rostov State University of Economics* [Vestnik RGEU (RINKh)], no 2, URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-formirovaniya-investitsionnogo-portfelya-roznichnyh-investorov> (accessed: 10.22.2025).
7. Diachkova, O. N. and Mikhailov, A. E. (2023), "Experience in Applying Empirical Distribution Functions to Describe Urban Development Activities (on the Example of St. Petersburg)" [Opyt primeneniya empiricheskikh funktsiy raspredeleniya dlya opisaniya gradostroitelnoy deyatel'nosti na primere Sankt-Peterburga], *Ecology of Urbanized Territories* [Ekologiya urbanizirovannykh territoriy], no 2, URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opyt-primeneniya-empiricheskikh-funktsiy-raspredeleniya-dlya-opisaniya-gradostroitelnoy-deyatelnosti-na-primere-sankt-peterburga> (accessed: 10.22.2025).
8. Mokhtar, S. F., Yusof, Z. M. and Sapiri, H. (2024), "Confidence Interval Estimating the Mean of Normal Distribution and Skewed Distribution", *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences*, no 20(5), pp. 1124–1135. URL: https://www.researchgate.net/publication/384959202_Confidence_Interval_Estimating_the_Mean_of_Normal_Distribution_and_Skewed_Distribution (accessed: 10.22.2025).
9. Galalu, V. G., Kirakosyan, S. A., Al-Karavi, Kh. Sh. M. and Turulin, I. I. (2023), "Comparative Evaluation of Averaging Methods for Filtering Measurement Signals" [Sravnitel'naya otsenka metodov usredneniy dlya filtratsii izmeritel'nykh signalov], *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences* [Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki], no 2(232), URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitel'naya-otsenka-metodov-usredneniy-dlya-filtratsii-izmeritel'nykh-signalov> (accessed: 10.22.2025).
10. Bure, V. M., Parilina, E. M. and Sedakov, A. A. (2020), *Probability Theory and Probabilistic Models* [Teoriya veroyatnostei i veroyatnostnye modeli], Available at: <https://e.lanbook.com/book/108328> (accessed: 10.22.2025).
11. Tarkhanova, A. M. and Shuldykova, N. S. (2023), "Computer Simulation of the Process of Establishing the Distribution of Molecules by Energy" [Komp'yuternoe modelirovanie protsessa ustanovleniya raspredeleniya molekul po energiyam], *International Scientific Research Journal* [Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal], no 2(99), URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kompyuternoe-modelirovanie-protsessa-ustanovleniya-raspredeleniya-molekul-po-energiyam> (accessed: 10.22.2025).

12. Chattamvelli, R. and Shanmugam, R. (2021), *Laplace Distribution. In: Continuous Distributions in Engineering and the Applied Sciences – Part II. Synthesis Lectures on Mathematics & Statistics*, Springer, Cham, URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-02435-1_4 (accessed: 10.22.2025).
13. Vorobyov, R. I. and Bragin, A. S. (2022), "Research of Statistical Criteria for Hypothesis Testing for the Purposes of Location Determination" [Issledovanie statisticheskikh kriteriev proverki gipotez dlya tselei opredeleniya mestopolozheniya], *Economics and Quality of Communication Systems* [Ekonomika i kachestvo sistem svyazi], no 3(25), URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-statisticheskikh-kriteriev-proverki-gipotez-dlya-tseley-opredeleniya-mestopolozheniya> (accessed: 10.22.2025).
14. Shukurov, I. A. (2021), "Paired Regression and Correlation" [Parnaya regressiya i korrelyatsiya], *Universum: Technical Sciences* [Universum: tekhnicheskie nauki], no 5-1(86), URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/parnaya-regressiya-i-korrelyatsiya> (accessed: 10.22.2025).
15. Kochergin, S. V., Artemova, S. V., Bakaev, A. A., Mityakov, E. S., Vegera, Zh. G. and Maksimova, E. A. (2024), "Cybersecurity of Smart Grids: A Comparison of Machine Learning Approaches for Anomaly Detection", *Russian Technological Journal* [Russ. Technol. J.], no 12(6), pp. 7–19, URL: <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-7-19> (accessed: 10.22.2025).

Информация об авторах:

А. Л. Шкерин – ассистент кафедры прикладной математики института информационных технологий РТУ – МИРЭА (119454, Россия, г. Москва, проспект Вернадского д. 78);

Д. И. Понаётов – студент 3-го курса направления 09.03.03 "Прикладная информатика (Управление данными)" института информационных технологий РТУ – МИРЭА (119454, Россия, г. Москва, проспект Вернадского д. 78);

Ф. В. Пискун – студент 3-го курса направления 09.03.03 "Прикладная информатика (Управление данными)" института информационных технологий РТУ – МИРЭА (119454, Россия, г. Москва, проспект Вернадского д. 78).

Information about the authors:

A. L. Shkerin – assistant at the Department of Applied Mathematics at the Institute of Information Technology RTU – MIREA (78 Vernadsky Avenue, Moscow, Russia, 119454);

D. I. Ponayotov – third-year student of the applied computer science program at the Institute of Information Technology RTU – MIREA (78 Vernadsky Avenue, Moscow, Russia, 119454);

F. V. Piskun – third-year student of the applied computer science program at the Institute of Information Technology RTU – MIREA (78 Vernadsky Avenue, Moscow, Russia, 119454).

Научная статья

УДК 519.17:519.711

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-130-141

<https://elibrary.ru/ijreky>



Джемминг k^3 -меров разного размера на кубической решетке

Кирилл Александрович Эберт

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия
sirieeel@rambler.ru

Аннотация. В работе исследуется бидисперсная модель случайной последовательной адсорбции k^3 -меров (кубических блоков) разного размера на кубической решетке с периодическими граничными условиями. Рассматривается алгоритм упаковки, при котором сначала осуществляется максимальное заполнение системы большими k^3 -мерами, после чего свободное пространство заполняется малыми k^3 -мерами. Целью исследования является изучение влияния линейного размера системы и соотношения размеров k^3 -меров на порог джемминга.

Проведено численное моделирование в широком диапазоне параметров модели для соотношений $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10, 20$. Показано, что введение второй фракции k^3 -меров приводит к увеличению порога джемминга. Установлено, что при фиксированном соотношении размеров объектов порог джемминга монотонно уменьшается с ростом k_{large} и стремится к предельному значению, тогда как увеличение соотношения k_{large}/k_{small} приводит к росту порога джемминга за счет более эффективного заполнения пустот малыми k^3 -мерами.

Получены предельные оценки порогов джемминга и отношений концентраций больших и малых k^3 -меров при $k_{large} \rightarrow \infty$. Оценки порогов джемминга демонстрируют значительное повышение предельной концентрации заполнения по сравнению со случаем упаковки k^3 -меров одинакового размера при $k \rightarrow \infty$. Максимальная оценка порога джемминга составила $p_{jam} = 0.6561(3)$ для $k_{large}/k_{small} = 20$, а отношение концентраций больших и малых k^3 -меров – $1.8 : 1$.

Ключевые слова: джемминг; случайная последовательная адсорбция; порог джемминга; k^3 -меры; кубические блоки; кубическая решетка; максимальная упаковка; полидисперсные системы; плотные неупорядоченные структуры; численное моделирование.

Для цитирования: Эберт К. А. Джемминг k^3 -меров разного размера на кубической решетке // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 2(73). С. 130–141. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-130-141. <https://elibrary.ru/ijreky>.

Статья поступила в редакцию 15.03.2026; одобрена после рецензирования 30.05.2026; принята к публикации 20.06.2026.



© Эберт К. А., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

Jamming of k^3 -mers of Different Sizes on a Cubic Lattice

Kirill A. Ebert

Perm State University, Perm, Russia
sirieeel@rambler.ru

Abstract. A bidisperse model of random sequential adsorption (RSA) of k^3 -mers (cubic blocks) of different sizes on a cubic lattice with periodic boundary conditions is investigated. An adsorption algorithm is considered in which the system is first maximally filled with large k^3 -mers, after which the remaining free space is filled with small k^3 -mers. The aim of the study is to examine the influence of the system size and the size ratio of k^3 -mers on the jamming threshold.

Numerical simulations were performed over a wide range of model parameters for the size ratios $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10, 20$. It is shown that the introduction of a second fraction of k^3 -mers leads to an increase in the jamming threshold. It is established that, for a fixed size ratio, the jamming threshold decreases monotonically with increasing k_{large} and approaches a limiting value, whereas an increase in the ratio k_{large}/k_{small} results in a higher jamming threshold due to more efficient filling of voids by small k^3 -mers.

Limiting estimates of the jamming threshold and the concentration ratio of large and small k^3 -mers were obtained for $k_{large} \rightarrow \infty$. The estimated jamming thresholds demonstrate a significant increase in the limiting packing concentration compared with the case of packing identical k^3 -mers in the limit $k \rightarrow \infty$. The maximum estimated jamming threshold is $p_{jam} = 0.6561(3)$ for $k_{large}/k_{small} = 20$, while the concentration ratio of large and small k^3 -mers is 1.8 : 1.

Keywords: *jamming; random sequential adsorption; jamming threshold; k^3 -mers; cubic blocks; cubic lattice; maximum packing; polydisperse systems; dense disordered structures; numerical simulation.*

For citation: Ebert, K. A. (2026), "Jamming of k^3 -mers of Different Sizes on a Cubic Lattice", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 2(73), pp. 130–141, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-2-130-141, <https://elibrary.ru/ijreky>.

The article was submitted 15.03.2026; approved after reviewing 30.05.2026; accepted for publication 20.06.2026.

Введение

Проблема максимальной упаковки в бидисперсных системах представляет практический и теоретический интерес. Исследования гранулярных материалов, порошковых сред и бетонных смесей показывают, что введение второй фракции частиц меньшего размера способно существенно увеличивать плотность упаковки за счет заполнения пустот между более крупными частицами. Данный эффект лежит в основе ряда инженерных методов повышения плотности упаковки и прочностных характеристик композитных материалов. Во многих случаях максимальная плотность упаковки достигается при определенном соотношении размеров частиц и их объемных долей, зависящем от геометрии системы и механизма формирования структуры [1–3].

Модели случайной последовательной адсорбции (Random Sequential Adsorption, RSA) широко используются для исследования процессов необратимого заполнения поверхности или объема частицами конечного размера. Истоки данного направления восходят к работе П. Флори [4], посвященной адсорбции молекул на одномерной решетке. Впоследствии подход был распространен на двумерные и трехмерные системы, а также

на объекты различной формы. Одной из ключевых характеристик RSA-процессов является порог джемминга – предельная концентрация заполнения, при которой дальнейшее размещение новых объектов становится невозможным [5–7].

Особый интерес представляют RSA-модели полидисперсных систем, поскольку они позволяют исследовать влияние распределения размеров объектов на структуру упаковки и величину порога джемминга. Подобно реальным гранулярным средам, малые объекты в таких моделях способны занимать области пространства, недоступные для размещения крупных объектов, что приводит к более эффективному заполнению системы. Исследование подобных моделей позволяет установить связь между геометрическими свойствами объектов и предельной концентрацией заполнения, а также выявить закономерности формирования плотных неупорядоченных структур [8–10].

Настоящее исследование продолжает цикл работ [11–13], посвященных моделированию джемминга объектов конечного размера на регулярных решетках. В [11] исследована трехмерная модель джемминга k^3 -меров (кубических блоков). Были определены оценки порогов джемминга при $2 \leq k \leq 80$, а также получена оценка в пределе $k \rightarrow \infty$: $p_{jam} = 0.4225(1)$.

В [12] исследована двумерная модель джемминга k^2 -меров (квадратных блоков) разного размера. В указанной работе были предложены два алгоритма упаковки объектов двух фракций. В первом большие объекты последовательно размещаются до некоторой промежуточной концентрации по алгоритму максимальной упаковки, описанному в [11]. Затем по этому же алгоритму происходит максимальная упаковка малых объектов. Во втором алгоритме большие и малые объекты упаковываются поочередно до состояния джемминга для больших объектов. Далее происходит максимальная упаковка малых объектов. В работе было установлено, что введение малых k^2 -меров способствует более эффективному заполнению свободного пространства на решетке, вследствие чего порог джемминга системы возрастает. Максимально достигнутая концентрация упаковки по первому алгоритму при $k_{large}/k_{small} \rightarrow \infty$ составила $p_{jam} = 0.803(1)$, что существенно превышает значение $p_{jam} \approx 0.5620$ [14, с. 69], характерное для монодисперсного случая при $k \rightarrow \infty$.

В [13] предложена трехмерная модель джемминга k^3 -меров разного размера и представлены первые результаты численного моделирования по первому алгоритму для ограниченного набора параметров модели. Однако влияние линейного размера системы и соотношения размеров объектов на порог джемминга исследовано не было. В связи с этим целью настоящей работы является систематическое исследование влияния указанных факторов на порог джемминга в трехмерной бидисперсной RSA-модели k^3 -меров разного размера.

1. Постановка задачи

Рассматривается кубическая решетка с линейным размером L . На решетке размещаются k^3 -меры двух размеров (сначала большие k^3 -меры, затем малые) при условии отсутствия пересечений между ними. Используются периодические граничные условия, то есть система имеет период L по каждому из трех координатных направлений.

Математически модель имеет вид

$$M = \langle L, W_n, k_{large}, k_{small}, N \rangle,$$

где L – линейный размер кубической решетки, W_n – множество троек координат, задающих положения левых верхних передних вершин k^3 -меров (см. рис. 1), а n – общее количество объектов в системе, k_{large} – длина стороны больших k^3 -меров, k_{small} – длина стороны малых k^3 -меров, N – количество независимых испытаний в эксперименте.

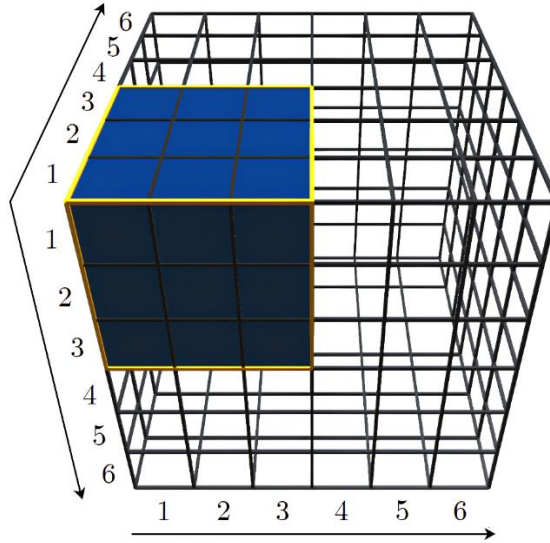


Рис. 1. Размещение 3^3 -мера на кубической решетке с началом в ячейке с координатами $(1, 1, 1)$, $L = 6$ [11]

Обозначим через $NumOfLarge$ количество упакованных k^3 -меров с длиной стороны k_{large} , а через $NumOfSmall$ – количество упакованных k^3 -меров с длиной стороны k_{small} . Пусть p_{large} и p_{small} обозначают доли пространства системы, занятые соответственно большими и малыми k^3 -мерами. Итоговая концентрация k^3 -меров определяется выражением

$$p = p_{large} + p_{small},$$

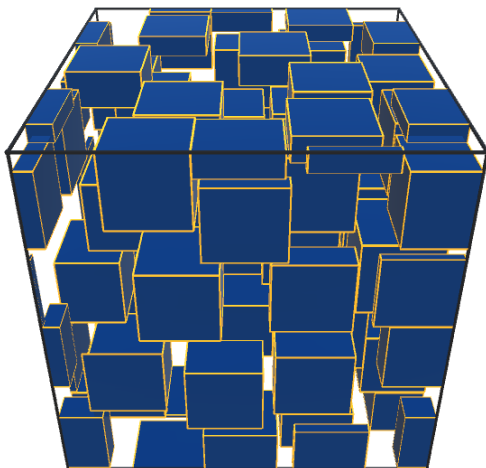
где

$$p_{large} = \frac{NumOfLarge \cdot k_{large}^3}{L^3}, \quad p_{small} = \frac{NumOfSmall \cdot k_{small}^3}{L^3},$$

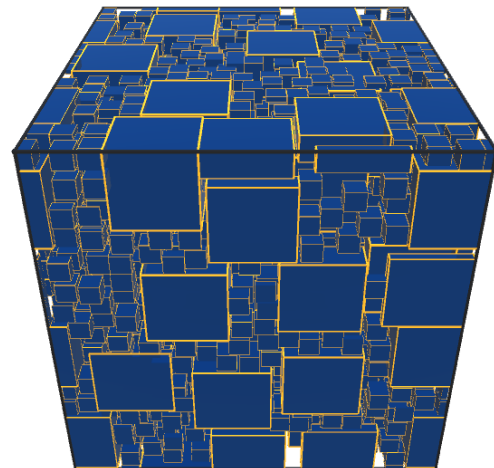
при этом

$$NumOfLarge + NumOfSmall = n.$$

Пример максимальной упаковки k^3 -меров разного размера по первому алгоритму представлен на рис. 2.



а) $p_{large} = 0.432$



б) $p = 0.631625$

Рис. 2. Визуализация работы первого алгоритма упаковки [13]

2. Метод моделирования

Численное моделирование проводится по первому алгоритму с использованием программы, реализованной на языке C#. Входными данными являются параметры L , k_{large} , k_{small} , N . Для каждого набора параметров выполняется N независимых испытаний. В каждом испытании сначала формируется трехмерная система, максимально заполненная большими k^3 -мерами, после чего оставшееся свободное пространство заполняется малыми k^3 -мерами. В результате каждого независимого испытания определяются концентрации $p_{large, i}$ и $p_{small, i}$. Полученные значения сохраняются в текстовый файл. Для каждого испытания итоговая концентрация определяется как

$$p_i = p_{large, i} + p_{small, i},$$

после чего формируется выборка значений $p_1, p_2, \dots, p_N$.

Для оценки порога джемминга используется формула [11]

$$p_{jam} = \bar{p} \pm t_\gamma \frac{S}{\sqrt{N}},$$

где $\bar{p}$ – среднее значение полученных концентраций, t_γ – коэффициент Стьюдента, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 0.99$ (при $N \geq 1000$ используется значение $t_\gamma \approx 2.58$), S – исправленное среднеквадратическое отклонение.

Значения p_{large}/p_{small} усредняются по количеству независимых испытаний и округляются до второго или третьего знака после запятой.

3. Результаты

В таблице 1 приведены результаты вычислительных экспериментов при $k_{large} = 20$ и $k_{small} = 2$ для различных линейных размеров решетки. Наиболее точная оценка порога джемминга получена для $L = 2000$ и составляет $p_{jam} = 0.790045(6)$. Для сравнения отметим, что в [11] для монодисперсных систем были получены оценки при $k = 2$ и $k = 20$: $p_{jam, k=2} = 0.6453461(10)$, $p_{jam, k=20} = 0.440066(26)$.

Таблица 1. Значения порогов джемминга по первому алгоритму при $k_{large} = 20$, $k_{small} = 2$ для различных L

L	p_{large}/p_{small}	p_{jam}	N
100	1.265	0.790728(15)	1000000
200	1.260	0.790054(13)	200000
400	1.258	0.7901(1)	1000
500	1.257	0.79004(5)	1000
600	1.257	0.79003(4)	1000
800	1.257	0.79005(2)	1000
1000	1.257	0.79004(2)	1000
1200	1.257	0.79005(1)	1000
1500	1.257	0.79005(1)	1000
1800	1.257	0.790046(7)	1000
2000	1.257	0.790045(6)	1000

В бидисперсном случае порог джемминга значительно выше и превышает значения для соответствующих монодисперсных систем примерно на 22 % ($k = 2$) и 80 % ($k = 20$). Такое увеличение максимальной концентрации обусловлено тем, что малые k^3 -меры эффективно заполняют пустоты, формирующиеся между большими k^3 -мерами, что приводит к более плотной упаковке системы в целом.

Во всех последующих вычислительных экспериментах выполнялось $N = 1000$ независимых испытаний. В таблицах 2–4 приведены результаты экспериментов, выполненных для соотношений $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10$ при $10 \leq k_{large} \leq 100$. В экспериментах поддерживалось постоянное соотношение линейного размера решетки и длины стороны больших блоков, равное $L/k_{large} = 20$.

Таблица 2. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 10, 20, \dots, 100, k_{large}/k_{small} = 2, L/k_{large} = 20$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
10	5	2.580	0.6367(1)
20	10	2.712	0.6023(1)
30	15	2.758	0.5913(1)
40	20	2.781	0.5859(1)
50	25	2.796	0.5827(1)
60	30	2.805	0.5805(1)
70	35	2.811	0.5790(1)
80	40	2.816	0.5780(1)
90	45	2.822	0.5771(1)
100	50	2.826	0.5764(1)

Таблица 3. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 10, 20, \dots, 100, k_{large}/k_{small} = 5, L/k_{large} = 20$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
10	2	1.415	0.7832(1)
20	4	1.689	0.7006(1)
30	6	1.794	0.6760(1)
40	8	1.848	0.6641(1)
50	10	1.882	0.6572(1)
60	12	1.905	0.6526(1)
70	14	1.923	0.6494(1)
80	16	1.935	0.6470(1)
90	18	1.945	0.6451(1)
100	20	1.952	0.6436(1)

Таблица 4. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 10, 20, \dots, 100, k_{large}/k_{small} = 10, L/k_{large} = 20$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
10	1	0.848	1
20	2	1.258	0.7901(1)
30	3	1.433	0.7370(1)
40	4	1.529	0.7129(1)
50	5	1.590	0.6992(1)
60	6	1.632	0.6903(1)
70	7	1.663	0.6841(1)
80	8	1.685	0.6794(1)
90	9	1.705	0.6760(1)
100	10	1.721	0.6732(1)

В таблицах 5–7 приведены результаты экспериментов, выполненных для соотношений $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10$ при $110 \leq k_{large} \leq 200$. В экспериментах поддерживалось соотношение $L/k_{large} = 10$. Уменьшение относительного размера системы по сравнению с предыдущей серией экспериментов ($L/k_{large} = 20$) обусловило некоторое увеличение погрешностей оценок порогов джемминга.

Таблица 5. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 110, 120, \dots, 200$, $k_{large}/k_{small} = 2$, $L/k_{large} = 10$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
110	55	2.83	0.5757(3)
120	60	2.83	0.5754(3)
130	65	2.83	0.5749(3)
140	70	2.83	0.5747(3)
150	75	2.84	0.5744(3)
160	80	2.84	0.5741(3)
170	85	2.84	0.5739(3)
180	90	2.84	0.5736(3)
190	95	2.84	0.5735(3)
200	100	2.84	0.5735(3)

Таблица 6. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 110, 120, \dots, 200$, $k_{large}/k_{small} = 5$, $L/k_{large} = 10$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
110	22	1.961	0.6425(3)
120	24	1.966	0.6414(3)
130	26	1.967	0.6404(3)
140	28	1.974	0.6399(3)
150	30	1.979	0.6394(3)
160	32	1.979	0.6387(3)
170	34	1.985	0.6383(3)
180	36	1.985	0.6377(3)
190	38	1.988	0.6375(3)
200	40	1.989	0.6371(3)

Таблица 7. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 110, 120, \dots, 200$, $k_{large}/k_{small} = 10$, $L/k_{large} = 10$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
110	11	1.731	0.6708(3)
120	12	1.741	0.6689(3)
130	13	1.750	0.6674(3)
140	14	1.759	0.6661(3)
150	15	1.765	0.6649(3)
160	16	1.773	0.6640(3)
170	17	1.780	0.6633(3)
180	18	1.782	0.6623(3)
190	19	1.788	0.6617(3)
200	20	1.790	0.6609(3)

Дополнительно в табл. 8 приведены результаты экспериментов, выполненных для соотношения $k_{large}/k_{small} = 20$ при $20 \leq k_{large} \leq 200$. В этом случае также поддерживалось соотношение $L/k_{large} = 10$.

Таблица 8. Значения порогов джемминга по первому алгоритму
при $k_{large} = 20, 40, \dots, 200$, $k_{large}/k_{small} = 20$, $L/k_{large} = 10$

k_{large}	k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
20	1	0.787	1
40	2	1.191	0.7928(3)
60	3	1.365	0.7414(3)
80	4	1.461	0.7183(3)
100	5	1.522	0.7051(3)
120	6	1.566	0.6969(3)
140	7	1.595	0.6908(3)
160	8	1.618	0.6865(3)
180	9	1.639	0.6833(3)
200	10	1.654	0.6807(3)

Из таблиц 2–8 следует, что при фиксированных соотношениях k_{large}/k_{small} порог джемминга монотонно уменьшается с ростом размеров объектов и стремится к предельным значениям. При увеличении соотношения k_{large}/k_{small} наблюдается рост порога джемминга, что свидетельствует о более эффективном заполнении пустот малыми объектами.

Следует отметить, что при $k_{small} = 1$ достигается полное заполнение решетки ($p_{jam} = 1$), поскольку после завершения упаковки крупных объектов все оставшиеся свободные ячейки могут быть заняты единичными k^3 -мерами.

На рис. 3–4 представлены все полученные значения порогов джемминга и отношений концентраций больших и малых k^3 -меров.

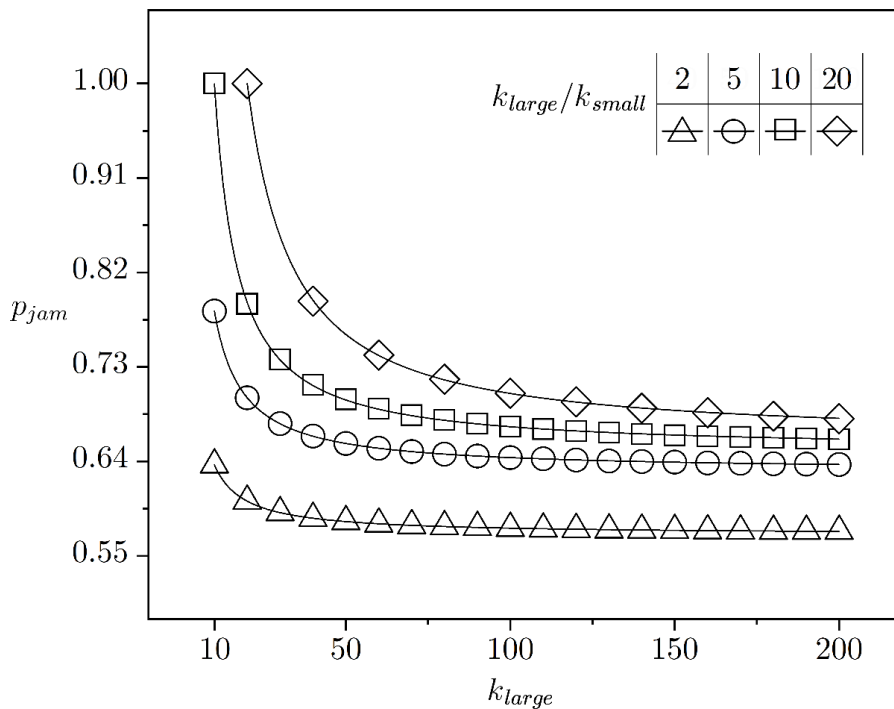


Рис. 3. Зависимости порога джемминга для различных соотношений k_{large}/k_{small} ,
 $10 \leq k_{large} \leq 200$

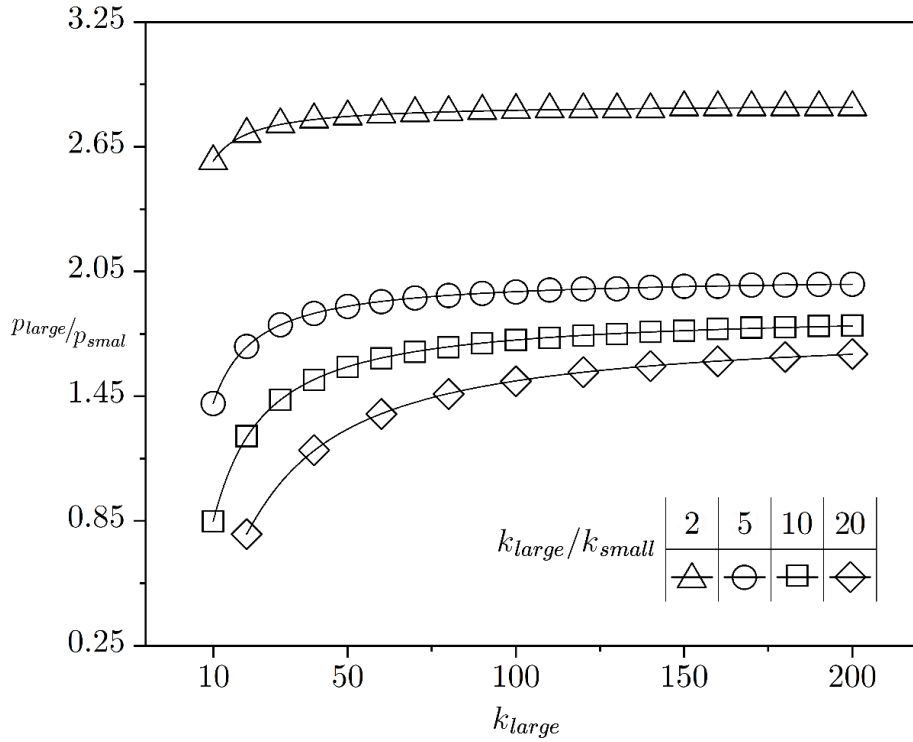


Рис. 4. Зависимости отношений концентраций больших и малых k^3 -меров, $10 \leq k_{large} \leq 200$

Результаты подтверждают, что введение второй фракции объектов является эффективным механизмом повышения плотности упаковки. Оценки порогов джемминга при $k_{large} \rightarrow \infty$ получены путем линейной экстраполяции зависимости p_{jam} от k_{large}^{-1} . Для экстраполяции использовались данные при $100 \leq k_{large} \leq 200$ – рис. 5.

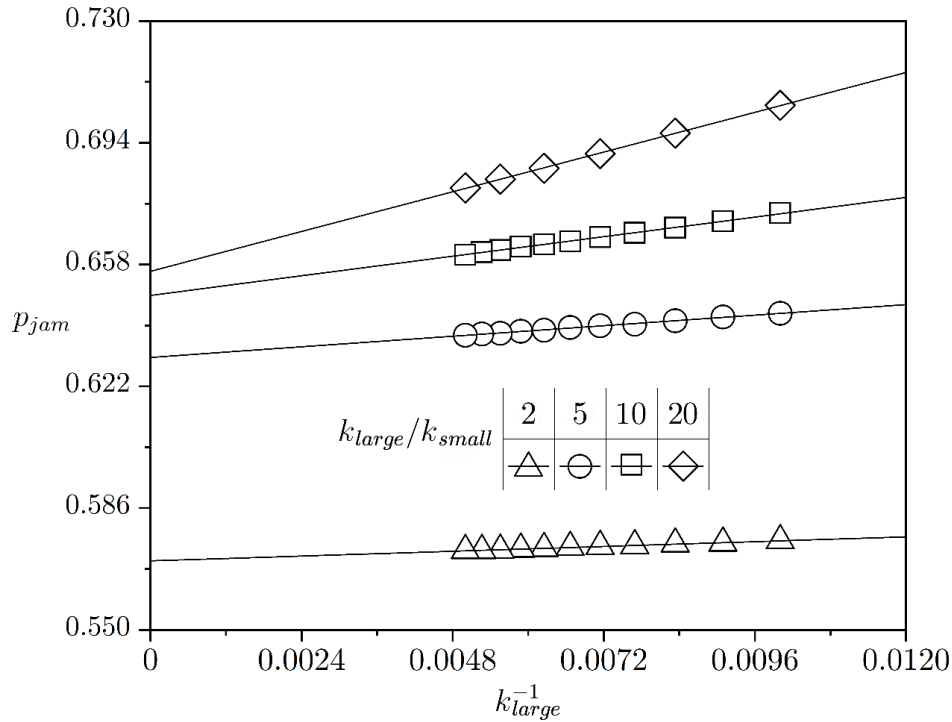


Рис. 5. Экстраполяция порогов джемминга для различных соотношений k_{large}/k_{small} , $100 \leq k_{large} \leq 200$

Предельные значения отношений концентраций больших и малых k^3 -меров получены в ходе аппроксимации соответствующих зависимостей функцией

$$\frac{p_{large}}{p_{small}} = A + \frac{B}{k_{large}}.$$

В каждом случае коэффициент A принимается за оценку в пределе и округляется до одного знака после запятой. Результаты приведены в табл. 9.

Таблица 9. Предельные значения p_{large}/p_{small} и p_{jam} для соотношений $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10, 20$ при $k_{large} \rightarrow \infty$

k_{large}/k_{small}	p_{large}/p_{small}	p_{jam}
2	2.9	0.5705(1)
5	2.0	0.6306(2)
10	1.9	0.6490(2)
20	1.8	0.6561(3)

Стоит отметить, что дальнейшее исследование предельного случая $k_{large}/k_{small} \rightarrow \infty$ требует значительного увеличения вычислительных ресурсов. При $k_{large}/k_{small} > 20$ и сохранении условия $L/k_{large} = 10$ проведение вычислительных экспериментов для больших значений k_{large} оказывается затруднительным вследствие высоких требований к объему оперативной памяти компьютера. Поэтому уточнение оценок порога джемминга в области больших значений k_{large}/k_{small} является перспективным направлением дальнейших исследований.

4. Заключение

В работе проведено численное исследование бидисперсной модели джемминга k^3 -меров разного размера на кубической решетке. Установлено, что введение второй фракции k^3 -меров меньшего размера приводит к существенному увеличению порога джемминга по сравнению с монодисперсным случаем. Показано, что при фиксированном соотношении размеров объектов порог джемминга монотонно уменьшается с ростом k_{large} и стремится к предельному значению. При увеличении соотношения k_{large}/k_{small} наблюдается рост порога джемминга, что связано с более эффективным заполнением свободного пространства малыми k^3 -мерами. Получены предельные оценки порогов джемминга и отношений концентраций больших и малых k^3 -меров при $k_{large} \rightarrow \infty$ для соотношений $k_{large}/k_{small} = 2, 5, 10, 20$. Максимальная оценка порога джемминга составила $p_{jam} = 0.6561(3)$ для $k_{large}/k_{small} = 20$, а соответствующее отношение концентраций больших и малых k^3 -меров – $1.8 : 1$.

Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании полидисперсных решеточных RSA-моделей и процессов формирования плотных упаковок объектов конечного размера.

Список источников

1. Furnas C. C. Grading Aggregates—I.—Mathematical Relations for Beds of Broken Solids of Maximum Density // Industrial & Engineering Chemistry. 1931. Vol. 23, № 9. P. 1052–1058. DOI: 10.1021/ie50261a017.
2. McGeary R. K. Mechanical Packing of Spherical Particles // Journal of the American Ceramic Society. 1961. Vol. 44, № 10. P. 513–522. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1961.tb13716.x.
3. de Larrard F. Concrete Mixture Proportioning: A Scientific Approach. London, New York: E & FN Spon, 1999. 421 p.

4. Flory P. J. Intramolecular Reaction between Neighboring Substituents of Vinyl Polymers // *Journal of the American Chemical Society*. 1939. Vol. 61, № 6. P. 1518–1521. DOI: 10.1021/ja01875a053.
5. Rényi A. On a one-dimensional problem concerning random space filling // *Publicationes Mathematicae Instituti Hungarici Academiae Scientiarum*. 1958. Vol. 3. P. 109–127.
6. Evans J. W. Random and cooperative sequential adsorption // *Reviews of Modern Physics*. 1993. Vol. 65, № 4. P. 1281–1329. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.1281.
7. Talbot J., Tarjus G., Van Tassel P. R., Viot P. From car parking to protein adsorption: an overview of sequential adsorption processes // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2000. Vol. 165, № 1. P. 287–324. DOI: 10.1016/S0927-7757(99)00409-4.
8. Torquato S. *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. New York: Springer, 2002. 703 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-6355-3.
9. Sergi D., D'Angelo C., Scocchi G., Ortona A. Random Packing of Small Blocks: Pressure Effects, Orientational Correlations and Application to Polymer-Based Composites // *Particle & Particle Systems Characterization*. 2012. Vol. 29, № 1. P. 24–34. DOI: 10.1002/ppsc.201200001.
10. Hart R. C., Aarão Reis F. D. A. Random sequential adsorption of polydisperse mixtures on lattices // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94, № 2. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.022802.
11. Эберт К. А., Бузмакова М. М., Русаков С. В. Максимальная случайная упаковка блоков на кубической решетке // *Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование"* (Вестник ЮУрГУ ММП). 2024. Т. 17, № 4. С. 82–93. DOI: 10.14529/mmp240407.
12. Эберт К. А., Бузмакова М. М. Джемминг блоков разного размера на квадратной решетке // *Математическое моделирование в естественных науках: материалы конференции*. 2024. С. 449–452.
13. Эберт К. А., Бузмакова М. М. Моделирование фильтрационных свойств пористой структуры на основе бидисперсного кварцевого песка // *Физико-химические проблемы адсорбции, структуры и химии поверхности нанопористых материалов: сб. тр. XXI всерос. симпозиума с междунар. участием*. 2025. С. 128–130.
14. Эберт К. А., Бузмакова М. М. Модели перколяции и джемминга неточечных объектов на квадратной решетке. Пермь, 2024. 86 с.

References

1. Furnas, C. C. (1931), "Grading Aggregates—I.—Mathematical Relations for Beds of Broken Solids of Maximum Density", *Industrial & Engineering Chemistry*, vol. 23, no 9, pp. 1052–1058, doi: 10.1021/ie50261a017.
2. McGeary, R. K. (1961), "Mechanical Packing of Spherical Particles", *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 44, no 10, pp. 513–522, doi: 10.1111/j.1151-2916.1961.tb13716.x.
3. de Larrard, F. (1999), *Concrete Mixture Proportioning: A Scientific Approach*, E & FN Spon, London, New York, 421 p.
4. Flory, P. J. (1939), "Intramolecular Reaction between Neighboring Substituents of Vinyl Polymers", *Journal of the American Chemical Society*, vol. 61, no 6, pp. 1518–1521, doi: 10.1021/ja01875a053.
5. Rényi, A. (1958), "On a one-dimensional problem concerning random space filling", *Publicationes Mathematicae Instituti Hungarici Academiae Scientiarum*, vol. 3, pp. 109–127.
6. Evans, J. W. (1993), "Random and cooperative sequential adsorption", *Reviews of Modern Physics*, vol. 65, no 4, pp. 1281–1329, doi: 10.1103/RevModPhys.65.1281.

7. Talbot, J., Tarjus, G., Van Tassel, P. R., Viot, P. (2000), "From car parking to protein adsorption: an overview of sequential adsorption processes", *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, vol. 165, no 1, pp. 287–324, doi: 10.1016/S0927-7757(99)00409-4.
8. Torquato, S. (2002), *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*, Springer, New York, 703 p., doi: 10.1007/978-1-4757-6355-3.
9. Sergi, D., D'Angelo, C., Scocchi, G., Ortona, A. (2012), "Random Packing of Small Blocks: Pressure Effects, Orientational Correlations and Application to Polymer-Based Composites", *Particle & Particle Systems Characterization*, vol. 29, no 1, pp. 24–34, doi: 10.1002/ppsc.201200001.
10. Hart, R. C., Aarão Reis, F. D. A. (2016), "Random sequential adsorption of polydisperse mixtures on lattices", *Phys. Rev. E*, vol. 94, no 2, doi: 10.1103/PhysRevE.94.022802.
11. Ebert, K. A., Buzmakova, M. M., Rusakov, S. V. (2024), "Maksimal'naya sluchainaya upakovka blokov na kubicheskoi reshetke" [Jamming coverage of blocks on a cubic lattice], *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye"* [Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS)], vol. 17, no 4, pp. 82–93, doi: 10.14529/mmp240407.
12. Ebert, K. A., Buzmakova, M. M. (2024), "Dzhemming blokov raznogo razmera na kvadratnoi reshetke", *Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukakh: materialy konferentsii*, pp. 449–452.
13. Ebert, K. A., Buzmakova, M. M. (2025), "Modelirovanie fil'tratsionnykh svoystv poristoi struktury na osnove bidispersnogo kvartseвого песка", *Fiziko-khimicheskie problemy adsorbtsii, struktury i khimii poverkhnosti nanoporistykh materialov: sbornik trudov XXI vserossiiskogo simpoziuma s mezhdunarodnym uchastiem*, pp. 128–130.
14. Ebert, K. A., Buzmakova, M. M. (2024), *Modeli perkolyatsii i dzhemminga netochechnykh ob'ektov na kvadratnoi reshetke*, Perm, 86 p.

Информация об авторах:

К. А. Эберт – аспирант, Пермский государственный национальный исследовательский университет (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), AuthorID: 1037665.

Information about the authors:

K. A. Ebert – postgraduate student, Perm State University (15 Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 1037665.

Научный периодический журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" зарегистрирован в 2007 г. как самостоятельное издание, являющееся продолжением серии журнала "Вестник Пермского университета", издаваемого с 1994 г. В каждом номере научного журнала автору разрешается опубликование в любом разделе не более одной статьи, в том числе в соавторстве.

Статьи, оформленные в соответствии с нижеизложенными правилами, должны быть отправлены через **личный кабинет автора на сайте журнала**. Статьи отправляются в двух форматах: текстовый документ и pdf-файл без данных об авторе (для организации слепого рецензирования). Вместе с рукописью отправляются контактные данные авторов в свободной форме в текстовом документе (ФИО, должность, место работы с указанием полного адреса, e-mail, номер телефона), сопроводительное письмо и экспертное заключение о возможности открытого опубликования. Для публикации статьи необходимо заполнить и подписать согласие на обработку персональных данных и лицензионный договор.

Аннотация статьи (на русском и английском языках) должна содержать основные краткие сведения: описание проблемы, включая цели и задачи исследования; методы исследования с указанием новизны, если имеется; полученные результаты и выводы. Объем аннотации примерно 250 слов.

Текст статьи должен содержать разделы: Введение, Постановка задачи, Методы исследования, Результаты, Обсуждения, Заключение, **Благодарности** для русскоязычной статьи; Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgements для англоязычной статьи. Объем рукописи – не менее 6 страниц машинописного текста.

Оформление. Текст статьи необходимо оформить **в редакторе Word**. Формат листа, используемый для написания статьи – А4. Размеры верхнего и нижнего полей – 2.6 см, правого и левого – 2.5 см. Расстояние до верхнего и нижнего колонтитулов 1.25 см. Шрифтом Times New Roman Сур, размер – 12 пт, межстрочный интервал – множитель 1.1. Подписи к рисункам и таблицам набираются курсивом, в конце заголовков и ячеек таблицы точка не ставится. Формулы набираются в редакторе формул.

Структура статьи

Вид статьи (научная, обзорная или др.).

Название раздела (математика, механика, компьютерные науки и информатика).

УДК

DOI:

EDN

Название статьи на русском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

Ф.И.О. автора (-ов) полностью (Times New Roman – 12 pt, полужирный).

Место работы (с указанием подразделения), город и страна (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

Аннотация на русском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Ключевые слова на русском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

Информация для цитирования (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Благодарности (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Даты поступления, одобрения и принятия рукописи (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Название статьи на английском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

На английском языке Ф.И.О. автора (-ов) полностью (шрифт Times New Roman – 12 пт, полужирный).

Место работы (с указанием подразделения), город и страна на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

Аннотация на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Ключевые слова на английском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

Информация для цитирования на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Благодарности на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Даты поступления, одобрения и принятия рукописи на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Основной текст статьи (шрифт Times New Roman – 12 пт) набирается в ширину страницы, абзацный отступ основного текста – 1.0 см (задается автоматически, не пробелами). Другие отступы не допускаются. Выравнивание текста по ширине.

Список источников оформляется в едином формате, в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018, без использования тире. Если в списке литературы используется источник из электронного ресурса, необходимо указать дату обращения. Ссылка на литературный источник указывается в тексте статьи в квадратных скобках после упоминания цитаты. Список использованных литературных источников необходимо представить на русском и английском языках (**References**). **Список литературы на латинице**, называемый References, готовится отдельно от Списка литературы и размещается сразу за указанным списком. Ссылки на зарубежные источники необходимо повторять в Списке литературы и References. В References недопустимо использовать российские ГОСТы. Необходимо следовать требованиям международных стандартов. Инструкция по оформлению списка литературы в латинице – References, стандарт "Harvard" находится по ссылке http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-hurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Все рукописи проходят двойное слепое рецензирование двумя специалистами в научной области исследования. При возникновении спорной ситуации назначается третий рецензент. Окончательное решение о публикации рукописи принимает главный редактор журнала.

Датой поступления статьи считается день ее отправки через личный кабинет на сайте журнала или по электронной почте журнала (главного редактора). Рукописи рассматриваются в порядке их поступления в течение одного месяца в зависимости от сложности ситуации и объема работы. Редакция оставляет за собой право без согласования с автором проводить литературную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла.

Одобрённые статьи публикуются бесплатно. Полнотекстовая версия каждой рукописи выставляется на сайте журнала и в системе РИНЦ (e-library).

Scientific periodical journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" is published since 1994 in the series of the journal "Bulletin of Perm University". Then it was registered as an independent publication in 2007.

An author is allowed to publish no more than one article (also as co-author) in any section for each issue of the journal.

Article's structure should be accordant with the rules below and should be sent through the **author's personal account on the journal's website**. Articles should be sent in two formats: a text document and a pdf-file without information about the author(s) (for review). Authors contact data (name, position and place of work with address, e-mail, phone number in a text document), a cover letter and an expert letter on the open publication possibility should be sent with the manuscript. Author(s) must make and sign consent to the personal data processing and an agreement.

Abstract (in Russian and English) should contain main information of research: a problem including the goals and objectives of the study; research methods with novelty indication, if any; significant results and findings. The abstract size is approximately 250 words.

Text should contain sections: Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgments. The manuscript size is at least 6 typewritten pages.

An article text must be formatted in the editor Word. The sheet format is A4. The top and bottom margins are 2.6 cm, the right and left margins are 2.5 cm. The distances to the header and footer are 1.25 cm. Times New Roman Cyr font, size – 12 pt, single spacing. Legends for figures and tables are typed in italics style. Formulas are typed in the Equation editor.

The structure of the article

Article's type

UDC

DOI

EDN

TITLE in Russian (Times New Roman font – 16 pt, bold).

Name: author (s) name in full (Times New Roman font – 12 pt).

Place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**

Abstract in Russian (Times New Roman font – 11 pt).

Keywords in Russian: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt, italic).

Information for citation in English (Times New Roman font – 11 pt, italic).

Acknowledgments in English (Times New Roman font – 11 pt, italic).

Submitted, approved, accepted dates of receipt in English (Times New Roman font – 11 pt, italic).

TITLE in English (Times New Roman font – 16 pt, bold).

In English author (s) name in full, place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**.

Abstract in English (Times New Roman font – 11 pt).

Keywords in English: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt).

Information for citation in English (Times New Roman font – 11 pt).

Acknowledgments in English (Times New Roman font – 11 pt).

Submitted, approved, accepted dates of receipt in English (Times New Roman font – 11 pt).

The article text (Times New Roman font – 12 pt) is typed the paragraph indent is 1.0 cm (set automatically, not spaces). No other indents are allowed. Justify the text in width (Times New Roman font – 16 pt)..

References are formed in a single format with using GOST R 7.0.100–2018 without a dash. If a source from an electronic resource is used, the author should indicate the request date. To indicate a source in text author uses square brackets after the quotation mention. References must be submitted **in Russian and English**.

The References list in Latin, called References, is prepared separately from the References List in Russian and placed below. Foreign sources references should be repeated in the References Lists in Russian and English. It is inadmissible to use Russian GOSTs in References. It is necessary to follow the requirements of international standards. Instructions on the References in Latin script design – References, Harvard standard can be found at http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc

REVIEW AND PUBLICATION OF ARTICLES

All manuscripts are double-blind peer-reviewed by two research scientists. If a disputable situation arises, a third reviewer is appointed. The final decision on the manuscript publication is made by the editor-in-chief of the journal.

The receipt date of the article is the day of its submission through the personal account on the journal's website or by e-mail of the journal (or editor-in-chief). Manuscripts are reviewed in the order they are received within one month, review period may be changed depending on a situation complexity and a works amount. The journal editors can to edit the article text without basic meaning change.

Approved articles are published free. The full-text version of each manuscript is posted on the journal's website and in the RSCI system (e-library).

Научное издание

ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Математика. Механика. Информатика

Выпуск 2(73)

2026

Адрес учредителя и издателя

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Адрес редакции

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Физико-математический институт

e-mail: vestnik_mmi@psu.ru

Редактор Е. В. Шумилова

Корректор В. Е. Пирожкова

Компьютерная верстка: А. А. Силина

Подписано в печать 09.07.2026. Выход в свет 13.07.2026

Формат 60×84/8. Усл. печ. л. 16,74. Тираж 500 экз. Заказ 80

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Управление издательской деятельности

614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15. Тел. (342) 239-66-36

Отпечатано в типографии ПГНИУ.

Тел. (342) 239-65-47

Подписной индекс журнала

«Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика»

в онлайн-каталоге «Урал-Пресс» – 015010

https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase_id=396133

Распространяется бесплатно и по подписке