

**Учредитель: Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»**

Научный журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" публикует оригинальные научные статьи, краткие сообщения и обзорные статьи по направлениям журнала на русском и английском языках, ранее не публиковавшиеся и не представленные для публикации в других изданиях. Все статьи проходят рецензирование членами редакционной коллегии журнала и внешними рецензентами.

#### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**БУЗМАКОВА М. М.**, к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**МАЛАНИН В. В.**, д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**БАРУЛИНА М. А.**, д. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**НУРБАКОВА Д. М.**, PhD in Computer Science; Национальный институт прикладных наук Лиона (National Institute of Applied Sciences of Lyon), Лион, Франция.

#### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**БУЗМАКОВА М. М.**, к.ф.-м.н., доцент, **главный редактор**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**РУСАКОВА О. Л.**, к.ф.-м.н., доцент, **ответственный секретарь**; Пермь, Россия;

**АЛЕКСЕЕВ А. О.**, д.т.н., доцент; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

**АПТУКОВ В. Н.**, д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**АПУШКИНСКАЯ Д. Е.**, д.ф.-м.н.; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

**БАРУЛИНА М. А.**, д.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**БИРЮКОВ А. Н.**, д.э.н., доцент; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;

**БОРИСОВ В. В.**, д.т.н., профессор; Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», Смоленск, Россия;

**ВЕЧТОМОВ Е. М.**, д.ф.-м.н., профессор; Вятский государственный университет, Киров, Россия;

**ГУСЕВ А. Л.**, д.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ДЕМИДОВ С. С.**, д.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

**ИВАНОВ Д. В.**, д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

**ИСАЕВ К. П.**, д.ф.-м.н.; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ИШКИН Х. К.**, д.ф.-м.н.; доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**КРИВОШЕЕВА О. А.**, д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**КОССОВИЧ Л. Ю.**, д.ф.-м.н., профессор; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

**КУЗНЕЦОВ А. Г.**, к.т.н.; Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия;

**МАЛАНИН В. В.**, д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**МАТВЕЕНКО В. П.**, д.т.н., профессор, академик РАН; Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия;

**МАХНЕВ А. А.**, д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

**ПАЛКОВА И. В.**, д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

**ПЕСТРЕНИН В. М.** к.ф.-м.н., доцент; Пермь, Россия;

**ПОЛОСКОВ И. Е.**, д.ф.-м.н., доцент; Пермь, Россия.

**РУСАКОВ С. В.**, д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**САВЧИН В. М.**, д.ф.-м.н., профессор; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

**СЕЛЕТКОВ И. П.**, к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ТРУСОВ П. В.**, д.ф.-м.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

**ХАЧАЙ М. Ю.**, д.ф.-м.н., профессор РАН, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

**ХЕННЕР Е. К.**, д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАО; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ФАЗУЛЛИН З.Ю.**, д.ф.-м.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ЧЕРНЫХ В. В.**, д.ф.-м.н., доцент; Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия;

**ЧЕРНИКОВ А. В.**, к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ЧИНЕНОВА В. Н.**, к.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

**ШАХМАМЕТОВА Г. Р.**, д.т.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ШВАРЦ К. Г.**, д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ЮМАГУЛОВ М. Г.**, д.ф.-м.н., профессор; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ЯСНИЦКИЙ Л. Н.**, д.т.н., профессор; Пермский филиал Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики", Пермь, Россия.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ No ФС 77-66787 от 08.08.2016.

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (приказ от 08.07.2024). Научные специальности: Вещественный, комплексный и функциональный анализ; Дифференциальные уравнения и математическая физика; Геометрия и топология; Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика; Вычислительная математика; Теоретическая механика, динамика машин; Механика деформируемого твердого тела; Механика жидкости, газа и плазмы; Искусственный интеллект и машинное обучение; Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; Теоретическая информатика, кибернетика; Системный анализ управление и обработка информации, статистика; Вычислительные системы и их элементы; Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования. Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ, eLIBRARY ID 28484).

**Founder: Perm State University**

The journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" publishes Full Articles, Short Communications Article and Review paper/perspectives on the journal's directions, which have not been previously published. The papers have been written in Russian and English. The papers are reviewed by the journal editorial board members and external reviewers.

**EDITORIAL COUNCIL**

**BUZMAKOVA M. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**MALANIN V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**BARULINA M. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**NURBAKOVA D. M.**, PhD in Computer Science; National Institute of Applied Sciences of Lyon, France.

**EDITORIAL BOARD**

**BUZMAKOVA M. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Editor-in-Chief**; Perm State University, Perm, Russia;  
**RUSAKOVA O. L.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Executive Secretary**; Perm, Russia;  
**ALEKSEEV A. O.**, Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;  
**APTUKOV V. N.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**APUSHKINSKAYA D. E.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;  
**BARULINA M. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**BIRUKOV A. N.**, Doctor of Science in Economics, Associate Professor; Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;  
**BORISOV V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Smolensk Branch of National Research University "MEI", Smolensk, Russia;  
**VECHTOMOV E. M.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Vyatka State University, Kirov, Russia;  
**GUSEV A. L.**, Doctor of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**DEMIDOV S. S.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;  
**IVANOV D. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**ISAEV K. P.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**ISHKIN H. K.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**KRIVOSHEEVA O. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**KOSSOVICH L. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**KUZNECOV A. G.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State Humanitarian and Pedagogical University, Perm, Russia;  
**MALANIN V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**MATVEENKO V. P.**, Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician of RAS; Institute of Continuous Media Mechanics, UrD RAS, Perm, Russia;

**MAHNEV A. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS;  
**PAPKOVA I. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**PESTRENIN V. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm, Russia;  
**POLOSKOV I. E.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm, Russia;  
**RUSAKOV S. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**SAVCHIN V. M.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;  
**SELETKOV I. P.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**TRUSOV P. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;  
**HACHAI M. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of RAS, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS, Yekaterinburg, Russia;  
**HENNER E. K.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAO; Perm State University, Perm, Russia;  
**FAZULLIN Z. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**CHERMNYH V. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Piterim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia;  
**CHERNIKOV A. V.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**CHINENOVA V. N.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;  
**SHAHMAMETOVA G. R.**, Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**SHVARTS K. G.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**UMAGULOV M. G.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**YASNICKIY L. N.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm Branch of the National Research University Higher School of Economics, Perm, Russia.

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor). Certificate of registration of the mass media PI No. FS 7 -66787 dated 08.08.2016.

The journal is included in the peer-reviewed scientific publications list for the main research results should be published (Candidate of Sciences and Doctor of Sciences, order dated 07/08/2024). Scientific specialties: Real, complex and functional analysis; Differential equations and mathematical physics; Geometry and topology; Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics; Computational Mathematics; Theoretical mechanics, dynamics of machines; Mechanics of deformable solids; Mechanics of liquid, gas and plasma; Artificial intelligence and machine learning; Mathematical modeling, numerical methods and software packages; Theoretical Computer science, cybernetics; System analysis, information management and processing, statistics; Computer systems and their elements; Computer modeling and design automation. The journal is included in the national information and analytical system "Russian Science Citation Index" (eLIBRARY ID 28484).

## Содержание

### МАТЕМАТИКА

<b>Алиева С. Т., Мансимов К. Б.</b> Об оптимальности квазиисобных управлений в одной задаче управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка.....	5
<b>Ахмедова Ж. Б.</b> Необходимое и достаточное условие в одной линейной дробной задаче оптимального управления.....	19
<b>Белоусова В. И., Махнев А. А., Токбаева А. А.</b> Сильно регулярный граф с параметрами (1666, 105, 0, 7) не существует.....	29
<b>Протасов Н. С.</b> О пирсовских слоях полуколец с нормальной инволюцией.....	35
<b>Шмидт Е. С.</b> Оценка оператора Чезаро в линейно-инвариантных семействах аналитических функций в круге.....	43

### МЕХАНИКА

<b>Зидыганов В. Г., Синер А. А., Демин В. А.</b> Исследование акустических характеристик резонатора экспериментальным методом и численным моделированием.....	51
<b>Чихачева В. В., Словиков С. В.</b> Разработка композитной полифиламентной хирургической нити с регулируемым сроком биодegradации.....	60

### КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

<b>Djeguede A. M. A. E.</b> Statistical Analysis of Time Series for Port Scan and DDoS Detection.....	72
<b>Ndungu R., Blekanov I. S.</b> IT Job Market Forecasting in East Africa: An ML Approach..	92
<b>Коваленко И. И., Ахременко Е. А., Андреев А. И., Барулина М. А.</b> Современные методы моделирования динамики и отслеживания траектории систем с высокой степенью свободы.....	100
<b>Сидоров С. В., Черкасова В. А.</b> Модель интеграции геймифицированного обучающего модуля в процесс изучения алгоритмов сортировки.....	118
<b>Толстенко А. А., Исаева Е. В.</b> Методы и технологии полуавтоматического структурирования и оценки текста научной статьи: обзор и перспективы разработки информационной системы.....	131
<b>Правила подачи и оформления рукописей.....</b>	144

## C o n t e n t s

## MATHEMATICS

<b>Alieva S. T., Mansimov K. B.</b> On the Optimality of Quasi-Special Controls in a Nonlinear Fractional-Order Difference Equations Control Problem.....	5
<b>Akhmedova Zh. B.</b> Necessary and Sufficient Condition in a Linear Fractional Optimal Control Problem.....	19
<b>Belousova V. I., Makhnev A. A., Tokbaeva A. A.</b> A Strongly Regular Graph With Parameters (1666, 105, 0, 7) Does not Exist.....	29
<b>Protasov N. S.</b> On the Pierce Stalks of Semirings With Proper Involution.....	35
<b>Shmidt E. S.</b> The Cesaro Operator Estimation in Linearly Invariant Families of Analytic Functions in the Circle.....	43

## MECHANICS

<b>Zidyganov V. G., Siner A. A., Demin V. A.</b> The study of Acoustic Characteristics of a Resonator by Experimental Method and Numerical Simulation.....	51
<b>Chikhacheva V. V., Slovikov S. V.</b> Development of a Composite Polyfilament Surgical Suture With Controlled Biodegradation Period.....	60

## COMPUTER SCIENCE

<b>Djeguede A. M. A. E.</b> Statistical Analysis of Time Series for Port Scan and DDoS Detection.....	72
<b>Ndungi R., Blekanov I. S.</b> IT Job Market Forecasting in East Africa: An ML Approach.....	92
<b>Kovalenko I. I., Ahremenko E. A., Andreev A. I., Barulina M. A.</b> Modern Methods for Dynamics and Trajectory Tracking Modeling of High-Degree-of-Freedom Systems.....	100
<b>Sidorov S. V., Cherkasova V. A.</b> A Model for Gamified Learning Module Integrating Into the Sorting Algorithms Study.....	118
<b>Tolstenko A. A., Isaeva E. V.</b> Methods and Techniques for Semi-Automatic Structuring and Evaluation of the Text of a Scientific Article: Review and Prospects for the Development of Information System.....	131
<b>Rules for submission and structure of manuscripts.....</b>	145

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 517.934

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-5-18

<https://elibrary.ru/exv1vj>



**Об оптимальности квазиособых управлений  
в одной задаче управления  
нелинейными разностными уравнениями дробного порядка**

Саадат Тофик кызы Алиева<sup>1</sup>, **Камил Байрамали оглы Мансимов**<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

<sup>2</sup> Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана, Баку, Азербайджан

<sup>1</sup>saadata@mail.ru

<sup>2</sup>kamilbmansimov@gmail.com

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального управления объектом, описываемого системой нелинейных разностных уравнений дробного порядка. При предположении выпуклости области управления установлено линейризованное необходимое условие оптимальности. Отдельно изучен случай вырождения (квазиособый случай) линейризованного условия максимума. Получены квадратичные (т.е. второго порядка) необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.

**Ключевые слова:** допустимое управление; оптимальное управление; выпуклое множество; разностное уравнение дробного порядка; дробный оператор; линейризованный принцип максимума; дробная сумма; квазиособое управление.

**Для цитирования:** Алиева С. Т., **Мансимов К. Б.** Об оптимальности квазиособых управлений в одной задаче управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 5–18. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-5-18. <https://elibrary.ru/exv1vj>.

Статья поступила в редакцию 22.04.2025; одобрена после рецензирования 02.09.2025; принята к публикации 15.03.2026.



© Алиева С. Т., **Мансимов К. Б.**, 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## MATHEMATICS

Research article

**On the Optimality of Quasi-Special Controls  
in a Nonlinear Fractional-Order Difference Equations  
Control Problem**Saadat T. Alieva<sup>1</sup>, Kamil B. Mansimov<sup>2</sup><sup>1,2</sup> Baku State University, Baku, Azerbaijan<sup>2</sup> Institute of control system of the National academy of sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan<sup>1</sup>saadata@mail.ru<sup>2</sup>kamilbmansimov@gmail.com

**Abstract.** This paper considers an optimal control problem for an object described by a system of nonlinear fractional-order difference equations. Under the assumption of convexity of the control domain, a linearized necessary optimality condition is established. The degeneracy case (quasi-singular case) of the linearized maximum condition is separately studied. Quadratic (i.e., second-order) necessary optimality conditions for quasi-singular controls are obtained.

**Keywords:** *admissible control; optimal control; convex set; fractional order difference equation; fractional operator; linearized maximum principle; fractional sum; quasi-singular control.*

**For citation:** Alieva, S. T. and Mansimov, K. B. (2026), "On the Optimality of Quasi-Special Controls in a Nonlinear Fractional-Order Difference Equations Control Problem", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 5–18, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-5-18, <https://elibrary.ru/exv1vj>.

*The article was submitted 22.04.2025; approved after reviewing 02.09.2025; accepted for publication 15.03.2026.*

**Введение**

Дробное исчисление приобрело важное значение за последние три десятилетия из-за его применимости в различных областях науки и техники. Наличие в уравнениях дробной конечной разности интерпретируется как отражение свойства памяти процесса. В настоящее время большое внимание уделяется разработке и развитию качественной теории дифференциальных уравнений дробного порядка и соответствующих разностных уравнений дробного порядка. Исходя из теоретических и практических приложений, разработка качественной теории задач оптимального управления, объект и динамика которого описываются различными разностными уравнениями дробного порядка, также является актуальной. Отметим, что качественная теория дифференциальных и разностных уравнений дробного порядка, а также теория необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления, описываемые разными разностными уравнениями дробного порядка, относительно мало разработана. Обзор соответствующих работ имеется, например, в работах [1–4].

В предлагаемой работе рассматривается терминальная задача оптимального управления процессом, описываемая системой нелинейных разностных уравнений дробного

порядка. При предположении выпуклости области управления доказано линейризованное условие оптимальности. Отдельно рассмотрен случай вырождения линейризованного условия максимума (квазиособый случай). В статье используется представление решения линейризованной задачи, получено специальное приращение второго порядка критерия качества. С помощью полученной этой формулы приращения исследован квазиособый случай и доказано необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

### 1. Основные понятия и вспомогательные утверждения

Приведем некоторые понятия и определения, которые в дальнейшем будут использованы.

Следующие определения, являясь стандартными [5–10], служат основой для определения разностей дробного порядка.

Пусть  $N$  множество натуральных чисел вместе с нулем. Для  $a \in Z$  введем следующие обозначения:  $N_a^+ = \{a, a + 1, a + 2, \dots\}$ ,  $\sigma(t) = t + 1$ ,  $\rho(t) = t - 1$ .

**Определение 1.** Дробная сумма порядка  $\alpha$  определяется следующим образом:

$$\Delta^{-\alpha}u(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j + \alpha - 1}{j} u(n - j) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n - j + \alpha - 1}{n - j} u(j),$$

а дробный оператор порядка  $\alpha$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha u(n) &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j - \alpha}{j} \Delta u(n - j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \binom{n - j - \alpha - 1}{n - j} u(j) - \binom{n - \alpha - 1}{n - 1} u(0). \end{aligned}$$

Здесь биномиальный коэффициент  $\binom{a}{n}$  определяется по формуле

$$\binom{a}{n} = \begin{cases} \frac{\Gamma(a + 1)}{\Gamma(a - n + 1)\Gamma(n + 1)}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Пусть для любого  $x, y \in R$ ,  $x^{(y)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-y)}$ , где  $\Gamma$  – гамма-функция, для которой выполняется тождество  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ .

Заметим, что дробную сумму и дробный оператор порядка  $\alpha$  можно определить еще и таким образом:

Пусть  $a$  – произвольное действительное и  $b = k + a$ , здесь  $k \in N$ ,  $k \geq 2$ ;

$T = \{a, a + 1, \dots, b\}$ ,  $T^k = \{a, a + 1, \dots, b - 1\}$ , а  $\mathbb{T}$  – множество функций определенных на  $T$ .

**Определение 2.** Пусть  $f \in \mathbb{T}$ . Для него левые и правые дробные суммы порядка  $\alpha > 0$  определяются соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_a\Delta_t^{-\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=a}^{t-\alpha} (t - \sigma(s))^{\alpha-1} f(s), \\ {}_t\Delta_b^{-\alpha}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=t+a}^b (s - \sigma(t))^{\alpha-1} f(s). \end{aligned}$$

**Определение 3.** Пусть  $0 < \alpha \leq 1$  и  $\mu = 1 - \alpha$ , тогда для функции  $f \in \mathbb{T}$  левые и правые дробные суммы порядка  $\alpha$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_a\Delta_t^\alpha f(t) &= \Delta({}_a\Delta_t^{-\mu} f(t)), \\ {}_t\Delta_b^\alpha f(t) &= -\Delta({}_t\Delta_b^{-\mu} f(t)). \end{aligned}$$

Отметим некоторые известные свойства дробной суммы и дробной разности:

1.  $\Delta^\alpha \Delta^\beta f(t) = \Delta^{\alpha+\beta} f(t)$ ;
2.  $\Delta^{-\alpha} \Delta^\alpha f(t) = f(t) - f(0)$ ;
3.  $\Delta^\alpha \Delta^{-\alpha} f(t) = f(t)$ ;

Имеет место следующая теорема (см., например, [1]).

**Теорема 1. (о дробной суммировании по частям).** Пусть  $f$  и  $g$  – неотрицательные функции с действительными значениями, определенными на  $T^k$  и  $T$  соответственно. Если  $0 < \alpha \leq 1$  и  $\mu = 1 - \alpha$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) \Delta^\alpha g(t) &= f(b-1)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{t=a}^{b-2} \Delta^\alpha f(t) g^\sigma(t) + \\ &+ \frac{\mu}{\Gamma(\mu+1)} g(a) \left( \sum_{t=a}^{b-1} (t+\mu-\alpha)^{(\mu-1)} f(t) - \sum_{t=\sigma(a)}^{b-1} (t+\mu-\sigma(\alpha))^{(\mu-1)} f(t) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую систему линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка:

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha y(t+1) &= A(t)y(t) + g(t), \\ t &\in \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\}, \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = y_0. \quad (2)$$

Здесь  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$  –  $n$ -мерный вектор столбец,  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)'$  заданный  $n$ -мерный вектор,  $y_0$  – заданный постоянный  $n$ -мерный вектор столбец,  $t_0, t_1$  – заданные числа,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} - \text{заданная } n \times n - \text{ дискретная матричная функция.}$$

ция.

Задача (1)–(2) является дискретным аналогом задачи Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $0 < \alpha \leq 1$  и  $\mu = \alpha - 1$ . Решение  $y(t)$  системы линейных, неоднородных разностных уравнений дробного порядка (1)–(2) допускает представление

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, j)A(j)] + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, j)g(j) \times \\ &\times \prod_{k=j+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, k)A(k)]. \end{aligned}$$

Здесь

$$R_\alpha(t, j) = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j}.$$

**Доказательство:** Применяя  $\Delta^{-\alpha}$  обеим сторонам уравнения (1) имеем

$$\Delta^{-\alpha}(\Delta^\alpha y(t+1)) = \Delta^{-\alpha}(A(t)y(t) + g(t)) \quad (3)$$

Теперь рассмотрим левую сторону уравнения (3):

$$\Delta^{-\alpha}(\Delta^{\alpha}y(t+1)).$$

Учитывая свойства операторов дробной суммы и дробной разности проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\Delta^{-\alpha}(\Delta^{\alpha}y(t+1)) &= \Delta^{-\alpha}(\Delta^{1-\mu}y(t+1)) = \Delta^{-\alpha}\Delta^{-\mu}(\Delta y(t+1)) = \\ \Delta^{-1}(\Delta y(t+1)) &= \sum_{j=t_0}^t (y(j+1) - y(j)) = y(t+1) - y(t_0).\end{aligned}$$

Преобразуем теперь правую сторону уравнения (3). Используя определение 1, имеем:

$$\begin{aligned}\Delta^{-\alpha}(A(t)y(t) + g(t)) &= \\ &= \sum_{j=t_0}^t \binom{t-j+\alpha-1}{t-j} (A(j)y(j) + g(j)) = \\ &= \sum_{j=t_0}^t R_{\alpha}(t,j)(A(j)y(j) + g(j))\end{aligned}$$

Таким образом, получили что

$$y(t+1) = y(t_0) + \sum_{j=t_0}^t R_{\alpha}(t,j)(A(j)y(j) + g(j))$$

или

$$y(t) = y(t_0) + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_{\alpha}(t-1,j)(A(j)y(j) + g(j)).$$

Из последней формулы получим что [6],

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} [1 + R_{\alpha}(t-1,j)A(j)] + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_{\alpha}(t-1,j)g(j) \times \\ &\quad \times \prod_{k=j+1}^{t-1} [1 + R_{\alpha}(t-1,k)A(k)].\end{aligned}\tag{4}$$

Теорема доказана.

## 2. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$S(u) = \varphi(x(t_1)),\tag{5}$$

при следующих ограничениях:

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T,\tag{6}$$

$$\Delta^{\alpha}x(t+1) = f(t, x(t), u(t)),\tag{7}$$

$$t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\},\tag{7}$$

$$x(t_0) = x_0.\tag{8}$$

Здесь  $x(t)$  –  $n$ -мерный вектор фазовых переменных,  $u(t)$  –  $r$ -мерный дискретный вектор управляющих воздействий,  $U$  – заданное непустое ограниченное и выпуклое множество, числа  $t_0, t_1$  и постоянный вектор  $x_0$  – заданы,  $f(t, x, u)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $x$  и  $u$ , до второго порядка включительно,  $\varphi(x)$  заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а  $\Delta^{\alpha}x(t), 0 < \alpha \leq 1$ -дробный оператор порядка  $\alpha$  [5–10].

Управляющую функцию назовем *допустимым управлением*, если оно удовлетворяет ограничению (6).

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении дискретный аналог задачи Коши, т. е. задача (7)–(8) имеет единственное решение.

Допустимое управление  $u(t)$ , доставляющее минимум функционалу (5) при ограничениях (6)–(8), называется *оптимальным управлением*, а пара  $(u(t), x(t))$  – *оптимальным процессом*.

В работе [11] для рассматриваемой задаче управления (5)–(8) доказано необходимое условие оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина. В случае открытости области управления в работе [12] получены условия оптимальности первого и второго порядка.

В предлагаемой работе для рассматриваемой задачи в случае выпуклости область управления доказан аналог линеаризованного принципа максимума и исследован случай его вырождения (квазиособый случай [3, 4, 13–16]).

### 3. Формула приращения критерия качества и необходимое условие оптимальности

Построим формулу приращения критерия качества.

Пусть  $(u(t), x(t))$  фиксированный, а  $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$  – произвольный допустимые процессы.

Учитывая введенные обозначения получаем что,  $\Delta x(t)$  (приращение траектории  $x(t)$ ), соответствующее  $\Delta u(t)$  (приращению управления  $u(t)$ ), будет удовлетворять системе уравнений

$$\Delta^\alpha(\Delta x(t+1)) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)), \quad (9)$$

с начальными условиями

$$\Delta x(t_0) = 0. \quad (10)$$

С другой стороны, ясно, что, приращение функционала  $S(u)$ , отвечающее приращению  $\Delta u(t)$  управления, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S(u) &= S(\bar{u}) - S(u) = \\ &= \varphi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)). \end{aligned} \quad (11)$$

Через  $\psi(t)$  обозначим пока неизвестную  $n$  – мерную вектор-столбец и положим

$$H(t, x, u, \psi) = \psi'(t)f(t, x, u).$$

Здесь и в дальнейшем, штрих для векторов означает операцию скалярного произведения, а для матриц – транспонирование. Функцию  $H(t, x, u, \psi)$  назовем функцией Гамильтона–Понтрягина для рассматриваемой задачи оптимального управления (5)–(8).

Умножая обе части соотношения (9) слева скалярно на  $\psi(t)$ , а затем, суммируя обе части полученного тождества по  $t$  от  $t_0$  до  $t_1 - 1$  и принимая во внимание выражение функции Гамильтона–Понтрягина, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta^\alpha(\Delta x(t+1)) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) [f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x(t), u(t))] = \\ &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t))]. \end{aligned}$$

С учетом этого тождества приращение (11) функционала получим, что

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & \varphi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta^\alpha(\Delta x(t+1)) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t))]. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь займемся преобразованием левой части слагаемого этой формулы. С этой целью рассмотрим выражение

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta^\alpha(\Delta x(t+1))$$

Сделаем в нем замену переменных  $t+1 = s$  и учитывая начальное условие, получим

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta^\alpha(\Delta x(t+1)) &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \psi'(t-1) \Delta^\alpha(\Delta x(t)) = \\ &= \psi'(t_1-1) \Delta^\alpha(\Delta x(t_1)) - \psi'(t_0-1) \Delta^\alpha(\Delta x(t_0)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1) \Delta^\alpha(\Delta x(t)) = \\ &= \psi'(t_1-1) \Delta^\alpha(\Delta x(t_1)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1) \Delta^\alpha(\Delta x(t)). \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, с учетом теоремы о дробном суммировании по частям, приведенной выше, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t-1) \Delta^\alpha(\Delta x(t)) &= \psi'(t_1-1) \Delta x(t_1) - \psi'(t_0-1) \Delta x(t_0) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-2} t \Delta^\alpha_{\rho(t_1)} \psi(t-1) \Delta x(t) + \frac{\mu}{\Gamma(\mu)} \Delta x(t_0) \times \\ &\times \left( \sum_{t=t_0}^{t_1-1} (t+\mu-t_0)^{(\mu-1)} \psi(t) - \sum_{t=\sigma(a)}^{t_1-1} (t+\mu-\sigma(t_0))^{(\mu-1)} \Delta x(t) \right) = \\ &= \psi'(t_1-1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-2} t \Delta^\alpha_{\rho(t_1)} \psi(t-1) \Delta x(t). \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом тождества (14) из (12) получим

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & \varphi(x(t_1) + \Delta x(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \\ & + \psi'(t_1-1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-2} t \Delta^\alpha_{\rho(t_1)} \psi(t-1) \Delta x(t) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t))]. \end{aligned} \quad (15)$$

В дальнейшем будут использованы обозначения типа

$$\begin{aligned} H_x[t] &\equiv H_x(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)), \quad H_{xx}[t] \equiv H_{xx}(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)), \\ H_u[t] &\equiv H_u(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)), \quad f_x[t] \equiv f_x(t, x(t), y(t), u(t)), \\ f_y[t] &\equiv f_y(t, x(t), y(t), u(t)), \quad f_u[t] \equiv f_u(t, x(t), y(t), u(t)). \end{aligned}$$

При сделанных предположениях формулу приращения из (15), используя формулу Тейлора и функционала  $S(u)$ , соответствующих допустимым управлению  $\bar{u}(t)$  и  $u(t)$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= \varphi_x(x(t_1))\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) + \\ &+ \psi'(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t - 1)\Delta x(t) - \\ &\sum_{t=t_0}^{t_1-2} t\Delta^\alpha_{\rho(t_1)}\psi'(t - 1)\Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H'_x[t]\Delta x(t) + H'_u[t]\Delta u(t)] - \\ &- \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t) + \\ &+ 2\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t) + \Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)] + \\ &+ o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь предположим, что  $\psi(t)$  является решением следующей системы линейных однородных дробного порядка разностных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{t=t_0}^{t_1-2} t\Delta^\alpha_{\rho(t_1)}\psi'(t - 1) = H_x[t], \quad t = t_1 - 1, t_1 - 2, \dots, t_0, \\ \psi(t_1 - 1) = -\varphi_x(x(t_1)). \end{cases}$$

Эту систему уравнений с заданным начальным условием назовем *сопряженной системой в рассматриваемой задаче* (5)–(8).

При выполнении соотношений (17) формула приращения (16) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u[t]\Delta u(t) - \\ &- \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\Delta x'(t)H_{xx}[t]\Delta x(t) + \Delta x'(t)H_{xu}[t]\Delta u(t) + \\ &+ 2\Delta u'(t)H_{ux}[t]\Delta x(t) + \Delta u'(t)H_{uu}[t]\Delta u(t)] + \\ &+ o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2[\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2. \end{aligned} \quad (17)$$

В силу выпуклости множество  $U$  специальное приращение оптимального управления  $u(t)$  определим следующим образом:

$$\Delta u(t; \varepsilon) = \varepsilon[v(t) - u(t)]. \quad (18)$$

Здесь  $\varepsilon \in [0,1]$  – произвольное число, а  $v(t) \in U, t \in T$ .

Через  $\Delta x(t; \varepsilon)$  обозначим специальное приращение оптимальной траектории  $x(t)$ , отвечающей специальному приращению управления  $u(t)$ , определяемое формулой (18).

Используя схему работы [15] по аналогии, доказывается оценка

$$\|x(t+1)\| \leq L_1 \prod_{j=t_0}^{t-1} (1 + A_\alpha(t, j) \|\Delta u(j)\|),$$

здесь  $L_1 = \text{const} > 0, t \in T \cup t_1$ .

Из этого неравенства получаем, что

$$\|\Delta x(t; \varepsilon)\| \leq L_1 \prod_{j=t_0}^{t-1} (1 + A_\alpha(t, j) \|\Delta u(j; \varepsilon)\|) \leq \varepsilon L_2 \prod_{j=t_0}^{t-1} (\|v(j) - u(j)\|). \quad (19)$$

С учетом оценки (19) получаем, что

$$\|\Delta x(t; \varepsilon)\| \leq \varepsilon \|v(t) - u(t)\|.$$

Можно показать, что

$$\Delta x(t; \varepsilon) = \varepsilon l(t) + o(\varepsilon; t), \quad (20)$$

где  $l(t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция является решением системы уравнений

$$\Delta^\alpha l(t+1) = f_x[t]l(t) + f_u[t](v(t) - u(t)), \quad (21)$$

с начальным условием

$$l(t_0) = 0. \quad (22)$$

Принимая во внимание формулы (18)–(22) из формулы приращения (16) получим

$$\begin{aligned} & S(u(t) + \Delta u(t; \varepsilon)) - S(u(t)) = \\ & = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u[t](v(t) - u(t)) + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta l'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \Delta l(t_1) - \\ & - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [l'(t) H_{xx}[t] l(t) + l'(t) H_{xu}[t] (v(t) - u(t)) + \\ & + (v(t) - u(t))' H_{ux}[t] l(t) + \\ & + (v(t) - u(t))' H_{uu}[t] (v(t) - u(t))] + o(\varepsilon^2). \quad (23) \end{aligned}$$

Разделяя обе части разложения (23) на  $\varepsilon$  и переходя пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{v(t)} H'_u[t] (v(t) - u(t)) \leq 0. \quad (24)$$

Таким образом доказано следующее утверждение.

**Теорема 3.** (линеаризованный принцип максимума). Для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  необходимо, чтобы неравенство (24) выполнялось для всех  $v(t) \in U$ ,  $t \in T$ .

Соотношение (24) представляет собой аналог линеаризованного (дифференциального) условия максимума и является необходимым условием оптимальности первого порядка.

Изучим случай его вырождения.

**Определение 4.** Допустимое управление  $u(t)$  назовем *квазиособым управлением*, если для всех  $v(t) \in U$ ,  $t \in T$  :

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u[t](v(t) - u(t)) = 0. \quad (25)$$

Из разложения (23) с учетом (25) сразу следует, что для оптимальности квазиособого управления  $u(t)$  необходимо, чтобы неравенство

$$l'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))l(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [l'(t)H_{xx}[t]l(t) + 2l'(t)H_{xu}[t](v(t) - u(t)) + (v(t) - u(t))'(t)H_{uu}[t](v(t) - u(t))] \geq 0. \quad (26)$$

выполнялось для всех  $v(t) \in U$ ,  $t \in T$ .

Неравенство (26) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Но используя его можно получить необходимое условие оптимальности, выраженное непосредственно через параметры рассматриваемой задачи.

Уравнение (21) является линейным неоднородным разностным уравнением дробного порядка относительно  $l(t)$  с начальным условием (22). Поэтому решение задачи (21)–(22) на основе результата теоремы 2 допускает представление

$$l(t) = \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, j)f_u[j](v(j) - u(j)) \times \prod_{k=j+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, k)f_x[k]]. \quad (27)$$

Используя представления (27), займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенстве (26).

Ясно, что

$$\begin{aligned} & l'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))l(t_1) = \\ & = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1, \tau)f_u[\tau](v(\tau) - u(\tau)) \times \\ & \times \prod_{k=\tau+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k)f_x[k]]\varphi_{xx}(x(t_1)) \times \\ & \times R_\alpha(t-1, s)f_u[s](v(s) - u(s)) \prod_{k=s+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k)f_x[k]]. \end{aligned}$$

Неравенство (26) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1, \tau) f_u[\tau] (v(\tau) - u(\tau)) \times \\
 & \times \prod_{k=\tau+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] \varphi_{xx}(x(t_1)) \times \\
 & \times R_\alpha(t-1, s) f_u[s] (v(s) - u(s)) \prod_{k=s+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] - \\
 & - \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} R_\alpha(t-1, \tau) f_u[\tau] (v(\tau) - u(\tau)) \times \\
 & \times \prod_{k=\max(\tau+1, s+1)}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, \tau) f_x[\tau]] H_{xx}[t] \times \\
 & \times [1 + R_\alpha(t-1, s) f_x[s]] R_\alpha(t-1, s) f_u[s] (v(s) - u(s)) + \\
 & + 2 \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \left[ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, \tau) f_u[\tau] (v(\tau) - u(\tau)) \times \right. \\
 & \times \prod_{k=\tau+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] H_{xu}[t] (v(t) - u(t)) \\
 & \left. + (v(t) - u(t))'(t) H_{uu}[t] (v(t) - u(t)) \right] \geq 0. \tag{28}
 \end{aligned}$$

Пусть  $\Phi(\tau, s)$  –  $(n \times n)$  матричная функция, определяемая формулой

$$\begin{aligned}
 \Phi(\tau, s) = & -R_\alpha(t-1, \tau) \prod_{k=\tau+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] \varphi_{xx}(x(t_1)) \times \\
 & \times R_\alpha(t-1, \tau) \prod_{k=s+1}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] + \\
 & + R_\alpha(t-1, \tau) \prod_{k=\max(\tau+1, s+1)}^{t_1-1} [1 + R_\alpha(t-1, \tau) f_x[\tau]] H_{xx}[t] [1 + R_\alpha(t-1, s) f_x[s]]. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Учитывая формулу (29), неравенство (28) записывается в виде

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} (v(\tau) - u(\tau)) f'_u[\tau] \Phi(\tau, s) f_u[s] (v(s) - u(s)) + \\
 & + 2 \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \left[ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, \tau) f_u[\tau] (v(\tau) - u(\tau)) \times \right. \\
 & \times \prod_{k=\tau+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, k) f_x[k]] H_{xu}[t] (v(t) - u(t)) +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} (v(t) - u(t))' H_{uu}[t] (v(t) - u(t)) \leq 0. \quad (30)$$

**Теорема 4.** Для оптимальности квазиособого управления  $u(t)$  в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство (30) выполнялось для всех  $u(t) \in U, t \in T$ .

Приведем одно следствие, вытекающее из теоремы 3.

**Следствие.** Если  $u(t)$  квазиособое управление, то для его оптимальности необходимо, чтобы неравенство

$$(v - u(\theta))' f'_u[\theta] \Phi(\theta, \theta) f_u[\theta] (v - u(\theta)) + \\ + (v - u(\theta))' H_{uu}[\theta] (v - u(\theta)) \leq 0 \quad (31)$$

выполнялось для всех  $\theta \in T$  и  $v \in U$ .

**Доказательство:** Используя произвольность  $v(t)$ , определим его следующим образом:

$$v(t) = \begin{cases} v, t = \theta \in T, \\ u(t), t \neq \theta \in T, \end{cases} \quad (32)$$

где  $\theta \in T$  и  $v \in U$  произвольный вектор.

Учитывая формулы (32) в неравенстве (30), приходим к неравенству (31). Этим следствием доказано.

### Заключение

В рассматриваемой терминальной задаче оптимального управления, при предположении о выпуклости области допустимых управлений, получен аналог линейаризованного условия оптимальности, представляющего собой дискретный аналог принципа максимума Понтрягина. Особое внимание уделено случаю, когда линейаризованное условие максимума вырождается, то есть становится тривиальным. Такие управления называются квазиособыми и требуют отдельного анализа. Для квазиособых управлений получены квадратичные необходимые условия оптимальности, которые являются более информативными, чем линейаризованные условия.

Полученные результаты могут быть использованы для решения практических задач управления системами с дробной динамикой, в частности, в экономике, в биологии и технике. В качестве перспективных направлений дальнейших исследований можно отметить разработку численных методов для решения задач оптимального управления с квазиособыми управлениями на основе полученных условий, расширение результатов на случай невыпуклых областей управления, исследование влияния параметров дробного порядка на свойства оптимальных управлений. Таким образом, данная работа внесла вклад в теорию оптимального управления разностными системами дробного порядка и открывает перспективы для дальнейших исследований в этой области.

### Список источников

1. Nuno R., Bastos O., Rui A., Ferreira C., Delfim F., Torres M. Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations // *Discret. Contin. Dynam. Syst.* 2011. Vol. 29, № 2. P. 417–437.
2. Bahaa G. M. Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // *Advanc. Differen. Equat.* 2017. № 1. P. 1–19.
3. Bahaa G. M. Fractional optimal control problem for differential system with control constraints // *Filomat.* 2016. Vol. 30. № 8. P. 2177–2189.

4. Miller K., Ross B. An introduction to fractional calculus and fractional differential equations/. New York: Wiley. 1993. 366 p.
5. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. 340 p.
6. Mohan J. J., Deekshitulu G. V. S. R. Fractional Order Difference Equations. // Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations Volume. 2012. Article ID 780619. 11 p. doi:10.1155/2012/780619
7. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
8. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations // Elsevier. Amsterdam, The Netherlands. 2006.
9. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of their Applications. Minsk: Nauka and Tekhnika. Belarus, 1987.
10. Discrete fractional calculus / C. Goodric, A. C. Piterson. Department of Mathematic University of Nebraska—Lincoln Lincoln, NE, USA, 2015.
11. Алиева С. Т. Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, вычислительная техника. 2021. № 54. С. 4–11.
12. Алиева С. Т. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче управления, описываемой нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Автоматика и телемеханика. 2023. № 2. С. 54–64.
13. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2011.
14. Мансимов К. Б. Дискретные системы. Баку: изд-во Бакинского Государственного Университета, 2013. 151 с.
15. Джаббарова А. Я., Мансимов К. Б. Исследование квазиособых управлений в дискретно-непрерывной задаче оптимального управления типа Россера // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. 2004. № 4. С. 13–23.
16. Алиева С. Т., Мансимов К. Б. Аналог линеаризованного принципа максимума для задачи оптимального управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. № 1(52). С. 9–15.

## References

1. Nuno, R., Bastos, O., Rui, A., Ferreira, C., Delfim, F. and Torres, M. (2011), "Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations", *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, vol. 29, no 2, pp. 417–437.
2. Bahaa, G. M. (2017), "Fractional optimal control problem for differential system with delay argument", *Advances in Difference Equations*, no 1, pp. 1–19.
3. Bahaa, G. M. (2016), "Fractional optimal control problem for differential system with control constraints", *Filomat*, vol. 30, no 8, pp. 2177–2189.
4. Miller, K. and Ross, B. (1993), *An introduction to fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, New York, 366 p.
5. Podlubny, I. (1999), *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, 340 p.
6. Mohan, J. J. and Deekshitulu, G. V. S. R. (2012), "Fractional order difference equations", *Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations*, article ID 780619, 11 p., doi: 10.1155/2012/780619.
7. Nakhushev, A. M. (2003), *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Fizmatlit, Moscow, 272 p.
8. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. (2006), *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.

9. Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1987), *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications*, Nauka and Tekhnika, Minsk, Belarus, 587 p.
10. Goodrich, C. and Peterson, A. C. (2015), *Discrete fractional calculus. Department of Mathematics*, University of Nebraska–Lincoln, Lincoln, NE, USA.
11. Alieva, S. T. (2021), "Printsip maksimuma Pontryagina dlya nelineynykh raznostnykh uravneniy drobnogo poryadka" [Pontryagin's maximum principle for nonlinear difference equations of fractional order], *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science], no 54, pp. 4–11.
12. Alieva, S. T. (2023), "Neobkhodimye usloviya optimal'nosti pervogo i vtorogo poryadkov v odnoy zadache upravleniya, opisyyvaemoy nelineynymi raznostnymi uravneniyami drobnogo poryadka" [Necessary optimality conditions of first and second order in a control problem described by nonlinear difference equations of fractional order], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], no 2, pp. 54–64.
13. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (2011), *Osobyie optimal'nye upravleniya* [Special optimal controls], URSS, Moscow, 224 p.
14. Mansimov, K. B. (2013), *Diskretnye sistemy* [Discrete systems], Baku State University Press, Baku, 151 p.
15. Jabbarova, A. Ya. and Mansimov, K. B. (2004), "Issledovanie kvaziosobykh upravleniy v diskretno-nepreryvnoy zadache optimal'nogo upravleniya tipa Rossera" [Investigation of quasi-special controls in a discrete-continuous optimal control problem of Rossler type], *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika* [Bulletin of Belarusian State University. Series 1. Physics. Mathematics. Computer Science], no 4, pp. 13–23.
16. Alieva, S. T. and Mansimov, K. B. (2021), "Analog linearizovannogo printsiipa maksimuma dlya zadachi optimal'nogo upravleniya nelineynymi raznostnymi uravneniyami drobnogo poryadka" [Analogue of the linearized maximum principle for an optimal control problem with nonlinear difference equations of fractional order], *Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], no 1 (52), pp. 9–15.

**Информация об авторах:**

С. Т. Алиева – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры математической кибернетики Бакинского Государственного Университета (AZ1148, Азербайджан, Баку, улица Захида Халилова, 23);

К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор; AuthorID 247352.

**Information about the authors:**

S. T. Alieva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics at Baku State University (23 Zahid Khalilov Street, Baku, Azerbaijan, AZ1148);

K. B. Mansimov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; AuthorID 247352.

Научная статья

УДК 519.977

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-19-28

<https://elibrary.ru/iugyra>



## Необходимое и достаточное условие в одной линейной дробной задаче оптимального управления

**Жаля Биалал кызы Ахмедова**

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

[jaleahmadova23@gmail.com](mailto:jaleahmadova23@gmail.com)

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального управления динамической системой, поведение которой описывается системой линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с дробными производными Капуто. Область управления является ограниченным множеством. Управляющая функция относится к классу кусочно-непрерывных (имеющих конечное число точек разрыва первого рода) функций. А функционал качества является линейным. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. В случае нелинейного дифференцируемого и выпуклого функционала качества доказано достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина.

**Ключевые слова:** задача оптимального управления; интегро-дифференциальное уравнение; необходимое и достаточное условие оптимальности; достаточное условие оптимальности; производная Капуто.

**Для цитирования:** Ахмедова Ж. Б. Необходимое и достаточное условие в одной линейной дробной задаче оптимального управления // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 19–28. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-19-28. <https://elibrary.ru/iugyra>.

*Статья поступила в редакцию 30.05.2025; одобрена после рецензирования 25.10.2025; принята к публикации 15.03.2026.*

Research article

## Necessary and Sufficient Condition in a Linear Fractional Optimal Control Problem

**Zhala B. Akhmedova**

Baku State University, Baku, Azerbaijan

[jaleahmadova23@gmail.com](mailto:jaleahmadova23@gmail.com)

**Abstract.** The problem of optimal control of a dynamic system is considered, where the system's behavior is described by a system of linear Volterra integro-differential equations with Caputo fractional derivatives. The control domain is a bounded set. The control function belongs to the class of piecewise-continuous functions (having a finite number of



© Ахмедова Ж. Б., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

first-kind discontinuity points). The performance index is linear. A necessary and sufficient optimality condition of the Pontryagin maximum principal type is proven. In the case of a nonlinear, differentiable, and convex performance index, a sufficient optimality condition of the Pontryagin maximum principal type is established.

**Keywords:** *optimal control problem; integro-differential equation; necessary and sufficient optimality condition; sufficient optimality condition; Caputo derivative.*

**For citation:** Akhmedova, Zh. B. (2026), "Necessary and Sufficient Condition in a Linear Fractional Optimal Control Problem", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 19–28, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-19-28, <https://elibrary.ru/iugyra>.

*The article was submitted 30.05.2025; approved after reviewing 25.10.2025; accepted for publication 15.03.2026.*

## Введение

Как известно, процессы из практики управляемы. Но управляющие функции могут быть разными. И поэтому при исследовании конкретных процессов возникает вопрос о нахождении наилучшей управляющей функции, которую называют оптимальным управлением. Теория оптимального управления представляет значительный теоретический и практический интерес. Самым сильным и удобным необходимым условием оптимальности является принцип максимума Л. С. Понтрягина, впервые доказанный для случая обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. С появлением этого принципа стала интенсивно развиваться качественная теория оптимального управления. Разными специалистами рассмотрены различные аспекты этой теории и обзор ряда результатов имеется, например в [2–4].

Линейные динамические системы являются удобными объектами исследования в теории оптимального управления и имеют определенные особенности (см., например, [5–7]).

В работе [5] рассмотрена одна задача оптимального управления, описываемая системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Критерий качества является нетиповым. Считая область управления открытым, вычислены первая и вторая вариации функционала качества. Из равенства нулю первой вариации функционала качества вдоль оптимального процесса получен аналог уравнения Эйлера. Из условия неотрицательности второй вариации функционала качества получены различные необходимые условия оптимальности второго порядка, носящие конструктивный характер. Также отдельно изучен случай особых, в классическом смысле, управлений.

Но для линейных систем принцип максимума Л. С. Понтрягина превращается еще и в достаточное условие.

В работе [8] получено необходимое и достаточное условие глобальной оптимальности для задач оптимизации без ограничений, когда целевая функция не обязательно является выпуклой. Авторы используют дифференцируемость по Гато целевой функции и ее бисопряженной функции (последняя известна из выпуклого анализа).

Несмотря на то, что исследование дробно-дифференциального исчисления началось еще в XIX веке, широко оно стало применяться только в последние десятилетия. Уравнения с дробными производными применяются для описания динамических процессов в задачах классической механики, гидродинамики, диффузии, динамике турбулентной среды, модели фазовых превращений, пространственных и временных корреляциях в жидкостях, фильтрации в пористых средах, и т. д.

Задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными уравнениями дробного порядка, в настоящее время интенсивно исследуются. В этом направлении можно показать, например, работы [9–12].

Точное моделирование многих динамических систем приводит к системе дробных дифференциальных уравнений (FDE). В работе [12] рассмотрена общая формулировка и схема решения для класса дробных задач оптимального управления (FOCP) для этих систем, в котором дробная производная является производной Римана–Лиувилля. Индекс производительности дробных задач оптимального управления рассматривается как функция, как переменных состояния, так и переменных управления, а динамические ограничения выражаются набором дробных дифференциальных уравнений. Вариационное исчисление, множитель Лагранжа и формула дробного интегрирования по частям используются для получения аналога уравнений Эйлера–Лагранжа для дробных задач оптимального управления. Представленная формулировка и полученные уравнения очень похожи на те, которые появляются в классической теории оптимального управления. Таким образом, рассматриваемая задача, по существу, расширяет классическую теорию управления на дробную динамическую систему.

А в работе, например, [13], рассмотрена задача оптимального управления, описываемая интегро-дифференциальным уравнением типа Вольтерра с дробной производной Капуто. Функционал качества является функционалом терминального типа. Применяя аналог модифицированного метода приращений, установлено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина.

В данной работе с помощью аналога метода приращений (см., например, [2, 4, 5, 7]) исследуется одна задача оптимального управления, описываемая интегро-дифференциальным уравнением дробного порядка Капуто с линейным функционалом качества. Область управления является непустым и ограниченным множеством. Управляющая функция берется из класса кусочно-непрерывных (имеющие конечное число точек разрыва первого рода) функций. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в рассматриваемой задаче. А в случае нелинейного функционала качества – отдельно доказано достаточное условие оптимальности.

### 1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается системой линейных интегро-дифференциальных уравнений:

$${}^c D_t^\alpha x(t) = A(t)x(t) + f(t, u(t)) + \int_{t_0}^t [B(t, \tau)x(\tau) + g(t, \tau, u(\tau))] d\tau, \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где

$${}^c D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{1+\alpha-n}} d\tau, \quad n = [\alpha] + 1, \alpha \in R_+$$

левая дробная производная Капуто (см. например [13-15]).

Здесь  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  –  $n$ -мерный вектор состояния управляемого объекта,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)'$  –  $r$ -мерная кусочно-непрерывная (имеющая конечное число точек разрыва первого рода) управляющая вектор-функция, принимающая свои значения из заданного, непустого и ограниченного множества  $U$ , т.е.,

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (3)$$

Здесь  $(\cdot)$  означает для векторов операцию скалярного произведения, а для матриц – операцию транспонирования.

Предположим, что  $t_0, t_1, x_0$  – соответственно заданные числа и постоянный вектор,  $A(t)$  – заданная  $(n \times n)$ -мерная непрерывная матричная-функция,  $f(t, u)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных.

На решениях задачи Коши (1)–(2) соответствующих всем управлениям, удовлетворяющим условию (3), определим терминальный функционал:

$$S(u) = c'x(t_1). \quad (4)$$

Здесь  $c$  – заданный  $n$ -мерный постоянный вектор.

Задачу нахождения минимального значения функционала при условиях (1)–(3) для краткости назовем задачей (1)–(4). Как видно, функционал линейный и правая часть уравнения линейна относительно  $x$ .

Допустимое управление  $u(t)$ , доставляющее минимум функционалу (4), при ограничениях (1)–(3), назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс  $(u(t), x(t))$  – *оптимальным процессом*.

## 2. Вычисление приращения функционала

Пусть  $(u(t), x(t))$  – фиксированный, а  $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$  – произвольный допустимые процессы.

Напишем приращение функционала (4), соответствующее допустимым управлениям  $\bar{u}(t)$  и  $u(t)$ :

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = c'\Delta x(t_1). \quad (5)$$

Ясно, что приращение  $\Delta x(t)$  траектории  $x(t)$  является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha \Delta x(t) &= A(t)\Delta x(t) + [f(t, \bar{u}(t)) - f(t, u(t))] + \\ &+ \int_{t_1}^t [B(t, \tau) \Delta x(\tau) + (g(t, \tau, \bar{u}(\tau)) - g(t, \tau, u(\tau)))] d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Delta x(t_0) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) является линейным, неоднородным уравнением, относительно  $\Delta x$ .

Пусть  $\psi = \psi(t)$  пока произвольная  $n$ -мерная вектор-функция. Умножая обе стороны уравнения (6) скалярно на  $\psi(t)$  и интегрируя полученное уравнение по  $t$  от  $t_0$  до  $t_1$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) {}^c D_t^\alpha \Delta x(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) A(t) \Delta x(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) (f(t, \bar{u}(t)) - f(t, u(t))) dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{t_0}^t \psi'(t) [B(t, \tau) \Delta x(\tau) + (g(t, \tau, \bar{u}(\tau)) - g(t, \tau, u(\tau)))] d\tau \right] dt. \end{aligned} \quad (8)$$

По формуле частичного интегрирования для дробных интегралов [14] имеем:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) {}^c D_t^\alpha \Delta x(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \Delta {}^c D_{t_1}^\alpha \psi(t) dt + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \Delta x(t) \psi(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \Delta {}^c D_{t_1}^\alpha \psi(t) dt + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \Delta x(t_1) \psi(t_1) + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \Delta x(t_0) \psi(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \Delta {}^c D_{t_1}^\alpha \psi(t) dt + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \Delta x(t_1) \psi(t_1). \end{aligned} \quad (9)$$

По формуле Дирихле (см., например, [16]) имеем, что

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{t_0}^t \psi'(t) \left[ B(t, \tau) \Delta x(\tau) + (g(t, \tau, \bar{u}(\tau)) - g(t, \tau, u(\tau))) \right] d\tau \right] dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} \psi'(\tau) \left[ B(\tau, t) \Delta x(t) + (g(\tau, t, \bar{u}(t)) - g(\tau, t, u(t))) \right] d\tau \right] dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая тождества (9) и (10) в формуле приращения (5), получим

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= c' \Delta x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) {}^c D_{t_1}^\alpha \psi(t) dt + {}^I I_{t_1}^{1-\alpha} \Delta x(t_1) \psi(t_1) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) A(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) (f(t, \bar{u}(t)) - f(t, u(t))) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} \psi'(\tau) \left[ B(\tau, t) \Delta x(t) + (g(\tau, t, \bar{u}(t)) - g(\tau, t, u(t))) \right] d\tau \right] dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Предположим, что вектор-функция  $\psi(t)$  является решением следующей системы уравнений:

$${}^c D_{t_1}^\alpha \psi(t) = A'(t) \psi(t) + \int_t^{t_1} B'(\tau, t) \psi(\tau) d\tau, \quad (12)$$

$${}^I I_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) = -c. \quad (13)$$

Задача (12)–(13) называется *сопряженной системой для рассматриваемой задачи* и является линейной неоднородной задачей Коши для интегро-дифференциального уравнения с дробными производными (12).

Тогда формула приращения (11) функционала будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) (f(t, \bar{u}(t)) - f(t, u(t))) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} \psi'(\tau) (g(\tau, t, \bar{u}(t)) - g(\tau, t, u(t))) d\tau \right] dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем аналог функции Гамильтона–Понтрягина следующим образом:

$$H(t, u(t), \psi(t)) = \psi'(t) f(t, u(t)) + \int_t^{t_1} \psi'(\tau) g(\tau, t, u(t)) d\tau.$$

Тогда формула приращения (14) преобразуется к следующему виду:

$$\Delta S(u) = - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, u(t), \psi(t))] dt. \quad (15)$$

Доказанная формула приращения (15) позволяет получить необходимое и достаточное условие оптимальности следующим образом.

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы равенство

$$\max_{v \in U} H(\theta, v, \psi(\theta)) = H(\theta, u(\theta), \psi(\theta)), \quad (16)$$

выполнялось для всех  $v \in U, \theta \in [t_0, t_1)$ .

Точка  $\theta \in [t_0, t_1)$  является произвольной точкой непрерывности управления  $u(t)$ .

**Доказательство**

**Необходимость.** Пусть управление  $u(t)$  является оптимальным управлением,  $v \in U$  произвольный вектор,  $\theta \in [t_0, t_1)$ , а  $\varepsilon > 0$  такое достаточно малое число, что выполняется неравенство  $\theta + \varepsilon < t_1$ .

Определим специальное приращение управления  $u(t)$  следующим образом:

$$\Delta u(t; \varepsilon) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \quad (17)$$

Тогда, используя теорему о среднем из формулы приращения функционала (15) получим, что

$$\begin{aligned} S(u(t) + \Delta u(t; \varepsilon)) - S(u(t)) &= \\ &= -\varepsilon [H(\theta, v, \psi(\theta)) - H(\theta, u(\theta), \psi(\theta))] + o(\varepsilon) \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда получается условие максимума (16).

**Достаточность.** Пусть выполняется условие максимума (16). Покажем, что в таком случае управление  $u(t)$  является оптимальным управлением. Выполнение условия максимума (16) означает, что для любого управления  $v(\theta) \in U, \theta \in [t_0, t_1)$  выполняется следующее условие:

$$H(\theta, v(\theta), \psi(\theta)) \leq H(\theta, u(\theta), \psi(\theta)).$$

Тогда по формуле приращения (15) можем написать, что

$$\begin{aligned} S(v) - S(u) &= \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} (H(\theta, v(\theta), \psi(\theta)) - H(\theta, u(\theta), \psi(\theta))) d\theta \geq 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$S(v) \geq S(u).$$

А это означает, что управление  $u(t)$  является оптимальным управлением. Этим доказана теорема.

**3. Достаточное условие оптимальности в случае нелинейного функционала качества**

Предположим, что  $\varphi(x)$  заданная непрерывно-дифференцируемая и выпуклая скалярная функция.

Рассмотрим задачу о нахождении минимального значения функционала

$$S(u) = \varphi(x(t_1)) \quad (18)$$

при ограничениях (1)–(3).

Аналогичными рассуждениями, приведенными в начале работы, запишем приращение функционала (18), соответствующее допустимым управлениям  $u(t)$  и  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= S(\bar{u}) - S(u) \\ &= \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) {}^C D_{t_1}^\alpha \psi(t) dt + {}^I_{t_1}^{1-\alpha} \Delta x(t_1) \psi(t_1) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) A(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) (f(t, \bar{u}(t)) - f(t, u(t))) dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} \psi'(\tau) B(\tau, t) d\tau \right] \Delta x(t) dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} \psi'(\tau) (g(\tau, t, \bar{u}(t)) - g(\tau, t, u(t))) d\tau \right] dt. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\psi(t)$  пока произвольная  $n$ -мерная вектор-функция.

Используя линеаризацию по формуле Тейлора, формулу приращения (19) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Delta S(u) = & \frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + \int_{t_0}^{t_1} {}^c D_{t_1}^\alpha (\psi'(t)) \Delta x(t) dt + \\
 & + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \psi'(t_1) \Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) A(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) (f(t, \bar{u}(t)) - f(t, u(t))) dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} \psi'(\tau) B(\tau, t) d\tau \right] \Delta x(t) dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} \psi'(\tau) (g(\tau, t, \bar{u}(t)) - g(\tau, t, u(t))) d\tau \right] dt. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\|\alpha\|$  – норма вектора  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ , определяемая формулой  $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ , а  $o(\alpha)$  есть величина более высокого порядка чем  $\alpha$ , т. е.  $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Предположим, что вектор-функция  $\psi(t)$  является решением следующей задачи:

$${}^c D_{t_1}^\alpha \psi(t) = A'(t) \psi(t) + \int_t^{t_1} B'(\tau, t) \psi(\tau) d\tau, \quad (21)$$

$${}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) = - \frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}. \quad (22)$$

Введя аналог функции Гамильтона–Понтрягина следующим образом,

$$H(t, u(t), \psi(t)) = \psi' f(t, u(t)) + \int_t^{t_1} \psi'(\tau) g(\tau, t, u(t)) d\tau,$$

приращение (20) функционала (18) можно записать в таком виде:

$$\Delta S(u) = - \int_{t_0}^{t_1} H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t)) dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|). \quad (23)$$

По условию задачи  $\varphi(x)$  – выпуклая и дифференцируемая функция. Поэтому, по свойствам выпуклой функции, выполняется неравенство

$$o_1(\|\Delta x(t_1)\|) \geq 0.$$

Следовательно, из формулы (23) получим, что для приращения функционала качества выполняется неравенство

$$\Delta S(u) \geq - \int_{t_0}^{t_1} H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t)) dt. \quad (24)$$

Из неравенства (24) получается справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.** Для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  в рассматриваемой задаче (1)–(3), (18) достаточно, чтобы соотношение

$$\max_{v \in U} H(\theta, v, \psi(\theta)) = H(\theta, u(\theta), \psi(\theta))$$

выполнялось для всех  $\theta \in [t_0, t_1)$ .

### Заключение

В классе кусочно-непрерывных управляющих функций со значениями из непустого и ограниченного множества (область управления) рассмотрена задача минимизации линейного функционала в процессах, описываемых линейными интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра дробного порядка.

Построена формула приращения функционала качества, позволяющая доказать необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В случае нелинейного выпуклого функционала доказано достаточное условие оптимальности.

### Список источников

1. Понтрягин Л. С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во Ленанд, 2024. 72 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: Либроком, 2011. 272 с.
3. Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во МГУ, 2004. 73 с.
4. Марданов М. Дж., Мансимов К. Б., Меликов Т. К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: Изд-во "ЭЛИМ", 2013. 363 с.
5. Мансимов К. Б., Нагиева И. Ф. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления с нетиповым критерием качества // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 64. С. 10–20.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем методы функционального анализа. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 246 с.
7. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 333 с.
8. Pál Burai Necessary and sufficient condition on global optimality without convexity and second order differentiability // Optimization Letters. 2013. Vol. 7. P. 903–911.
9. Almedia R., Ferreira R. A. C., Torres D. F. M. Free time fractional optimal control problems // European Control Conference. Zurich. Switzerland. July 17–19. 2013. P. 3985–3990.
10. Almedia R., Ferreira R. A. C., Torres D. F. M. Fractional order optimal control problems with free terminal time // Journal of Industrial and Management Optimization. 2014. Vol. 10, № 2. P. 363–381.
11. Kumar P., Pandey D. N., Bahuguna D. Impulsive boundary value problems for fractional differential equations with deviating arguments // Journal of Fractional Calculus and Applications. 2014. Vol. 5 (1). P. 146–155.
12. Agrawal O. P. A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Nonlinear Dynamics. 2004. № 38. С. 323–337.
13. Ахмедова Ж. Б. О необходимых условиях оптимальности первого порядка в задаче управления, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений

- дробного порядка // Вестник Томского Государственного Университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 64. С. 4–10.
14. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 951 p.
  15. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Springer, 2004. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2> (дата обращения: 20.04.2025).
  16. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2018. 384 с.

## References

1. Pontryagin, L. S. (2024), *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [Maximum principle in optimal control], Lenand, Moscow, 72 p.
2. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (2011), *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [Maximum principle in the theory of optimal control], Librokom, Moscow, 272 p.
3. Milyutin, A. A., Dmitruk, A. V. and Osmolovskiy, N. P. (2004), *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [Maximum principle in optimal control], Moscow State University Press, Moscow, 73 p.
4. Mardanov, M. Dj., Mansimov, K. B. and Melikov, T. K. (2013), *Issledovanie osobyykh upravleniy i neobkhodimye usloviya optimal'nosti vtorogo poryadka v sistemakh s zapazdyvaniyem* [Investigation of special controls and necessary optimality conditions of second order in systems with delay], ELM, Baku, 363 p.
5. Mansimov, K. B. and Nagieva, I. F. (2023), "Neobkhodimye usloviya optimal'nosti pervogo i vtorogo poryadkov v odnoy zadache optimal'nogo upravleniya s netipovym kriteriyem kachestva" [Necessary optimality conditions of first and second order in an optimal control problem with a non standard quality criterion], *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science], no 64, pp. 10–20.
6. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (1973), *Optimizatsiya lineynykh sistem: metody funktsional'nogo analiza* [Optimization of linear systems: methods of functional analysis], Belarusian State University Press, Minsk, 246 p.
7. Andreeva, E. A., Kolmanovskiy, V. B. and Shaikhet, L. E. (1992), *Upravlenie sistemami s posledeystviem* [Control of systems with aftereffect], Nauka, Moscow, 333 p.
8. Burai, P. (2013), "Necessary and sufficient condition on global optimality without convexity and second order differentiability", *Optimization Letters*, vol. 7, pp. 903–911.
9. Almedia, R., Ferreira, R. A. C. and Torres, D. F. M. (2013), "Free time fractional optimal control problems", in *European Control Conference*, Zurich, Switzerland, 17–19 July 2013, pp. 3985–3990.
10. Almedia, R., Ferreira, R. A. C. and Torres, D. F. M. (2014), "Fractional order optimal control problems with free terminal time", *Journal of Industrial and Management Optimization*, vol. 10, no 2, pp. 363–381.
11. Kumar, P., Pandey, D. N. and Bahuguna, D. (2014), "Impulsive boundary value problems for fractional differential equations with deviating arguments", *Journal of Fractional Calculus and Applications*, vol. 5, no 1, pp. 146–155.
12. Agrawal, O. P. (2004), "A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems", *Nonlinear Dynamics*, no 38, pp. 323–337.
13. Akhmedova, Zh. B. (2023), "O neobkhodimyykh usloviyakh optimal'nosti pervogo poryadka v zadache upravleniya, opisyyvaemoy sistemoy integro differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka" [On necessary optimality conditions of first order in a

control problem described by a system of fractional order integro differential equations], *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University Journal of Control and Computer Science], no 64, pp. 4–10.

14. Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I. (1993), *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, 951 p.
15. Diethelm, K. (2004), *The analysis of fractional differential equations: an application oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Springer, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2> (accessed: 20.04.2025).
16. Alekseev, V. M., Tikhomirov, V. M. and Fomin, S. V. (2018), *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control], Fizmatlit, Moscow, 384 p.

**Информация об авторе:**

Ж. Б. Ахмедова – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры математической кибернетики Бакинского Государственного Университета (AZ1148, Азербайджан, г. Баку, ул.Захида Халилова, д. 23).

**Information about the author:**

Zh. B. Akhmedova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics at Baku State University (23 Zahid Khalilov Street, Baku, Azerbaijan, AZ1148).

Научная статья

УДК 519.17

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-29-34

<https://elibrary.ru/amekjl>



## Сильно регулярный граф с параметрами (1666, 105, 0, 7) не существует

Вероника Игоревна Белоусова<sup>1</sup>, Александр Алексеевич Махнев<sup>2</sup>,  
Альбина Аниуаровна Токбаева<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup> Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

<sup>3</sup> Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия

<sup>1</sup>[vkazarina@mail.ru](mailto:vkazarina@mail.ru)

<sup>2</sup>[makhnev@imm.uran.ru](mailto:makhnev@imm.uran.ru)

<sup>3</sup>[tok2506@mail.ru](mailto:tok2506@mail.ru)

**Аннотация.** Заметим, что недвудольный сильно регулярный граф без треугольников с  $\mu = 7$  имеет параметры  $k = 49s^2 + 49s + 7$ ,  $s \in \{1, 2, 7\}$ . В работе доказано, что двудольный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{105, 104, 98, 7, 1; 1, 7, 98, 104, 105\}$  не существует. Как следствие, сильно регулярный граф с параметрами (1666, 105, 0, 7) не существует.

**Ключевые слова:** граф; регулярный граф; сильно регулярный граф; дистанционно регулярный граф; числа пересечений.

**Для цитирования:** Белоусова В. И., Махнев А. А., Токбаева А. А. Сильно регулярный граф с параметрами (1666, 105, 0, 7) не существует // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 29–34. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-29-34. <https://elibrary.ru/amekjl>.

*Статья поступила в редакцию 26.01.2026; одобрена после рецензирования 06.03.2026; принята к публикации 20.03.2026.*

Research article

## A Strongly Regular Graph With Parameters (1666, 105, 0, 7) Does not Exist

Veronika I. Belousova<sup>1</sup>, Alexander A. Makhnev<sup>2</sup>, Albina A. Tokbaeva<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia

<sup>2</sup> N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia

<sup>3</sup> Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, Nalchik, Russia

<sup>1</sup>[vkazarina@mail.ru](mailto:vkazarina@mail.ru)

<sup>2</sup>[makhnev@imm.uran.ru](mailto:makhnev@imm.uran.ru)

<sup>3</sup>[tok2506@mail.ru](mailto:tok2506@mail.ru)



© Белоусова В. И., Махнев А. А., Токбаева А. А., 2026

Лицензировано под CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Abstract.** Note that a non-bipartite triangle-free strongly regular graph with  $\mu = 7$  has parameters  $k = 49s^2 + 49s + 7$ , where  $s \in \{1, 2, 7\}$ . In this paper, it is proved that a bipartite distance-regular graph with intersection array  $\{105, 104, 98, 7, 1; 1, 7, 98, 104, 105\}$  does not exist. Consequently, a strongly regular graph with parameters  $(1666, 105, 0, 7)$  does not exist.

**Keywords:** graph; regular graph; strongly regular graph; distance-regular graph; intersection numbers.

**For citation:** Belousova, V. I., Makhnev, A. A. and Tokbaeva, A. A. (2026), "A Strongly Regular Graph With Parameters  $(1666, 105, 0, 7)$  Does not Exist", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 29–34, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-29-34, <https://elibrary.ru/amekjl>.

The article was submitted 26.01.2026; approved after reviewing 06.03.2026; accepted for publication 20.03.2026.

## Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если  $a, b$  – вершины графа  $\Gamma$ , то через  $d(a, b)$  обозначается расстояние между  $a$  и  $b$ , а через  $\Gamma_i(a)$  – подграф графа  $\Gamma$ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$  от вершины  $a$ . Подграф  $\Gamma_1(a)$  называется *окрестностью вершины  $a$*  и обозначается через  $[a]$ . Через  $a^\perp$  обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром  $a$ .

Граф  $\Gamma$  называется *регулярным графом степени  $k$* , если  $[a]$  содержит точно  $k$  вершин для любой вершины  $a$  из  $\Gamma$ . Граф  $\Gamma$  называется *реберно регулярным графом с параметрами  $(v, k, \lambda)$* , если  $\Gamma$  содержит  $v$  вершин, является регулярным степени  $k$ , и каждое ребро из  $\Gamma$  лежит в  $\lambda$  треугольниках. Граф  $\Gamma$  называется *вполне регулярным графом с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$* , если  $\Gamma$  реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф  $[a] \cap [b]$  содержит  $\mu$  вершин в случае  $d(a, b) = 2$ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в  $[a] \cap [b]$  обозначим через  $\lambda(a, b)$  (через  $\mu(a, b)$ ), если  $d(a, b) = 1$  (если  $d(a, b) = 2$ ), а соответствующий подграф назовем  $(\mu)$ - *$\lambda$ -подграфом*.

Если вершины  $u, w$  находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$ , то через  $b_i(u, w)$  (через  $c_i(u, w)$ ) обозначим число вершин в пересечении  $\Gamma_{i+1}(u)$  (в пересечении  $\Gamma_{i-1}(u)$ ) с  $[w]$ . Граф диаметра  $d$  называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений  $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения  $b_i = b_i(u, w)$  и  $c_i = c_i(u, w)$  не зависят от выбора вершин  $u, w$  на расстоянии  $i$ . Положим  $a_i = k - b_i - c_i$  и  $k_i = |\Gamma_i(u)|$  (значение  $k_i$  не зависит от выбора вершины  $u$ ). Числа пересечений графа  $p_{ij}^l$  и параметры Крейна  $q_{ij}^l$  определены в [1] (стр. 43 и 48 соответственно).

Особый интерес представляют сильно регулярные графы без треугольников. Такие графы обладают уникальными свойствами и связаны с классическими объектами комбинаторики, включая графы Мура диаметра 2. Недвудольный сильно регулярный граф без треугольников с  $\mu = 7$  имеет степень  $k = 49s^2 + 49s + 7$  для  $s \in \{1, 2, 7\}$ . Если  $s = 1$ , то граф имеет параметры  $(1666, 105, 0, 7)$  Если  $s = 2$ , то граф имеет параметры  $(13202, 301, 0, 7)$ , а если  $s = 7$ , то граф имеет параметры  $(1083502, 2751, 0, 7)$ . Исследованию допустимости параметров для сильно регулярных графов без треугольников посвящены работы Биггса [2], в которых уточняются условия существования таких графов и развиваются методы проверки их реализуемости.

Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами (1666, 105, 0, 7) существует тогда и только тогда, когда существует его двудольное удвоение (дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{105, 104, 98, 7, 1; 1, 7, 98, 104, 105\}$ ). Связь между сильно регулярными графами и их двудольными удвоениями подробно обсуждается в монографии [1], где рассматриваются конструкции двудольных удвоений и их свойства.

**Теорема 1.** *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{105, 104, 98, 7, 1; 1, 7, 98, 104, 105\}$  не существует.*

**Теорема 2.** *Сильно регулярный граф с параметрами (1666, 105, 0, 7) не существует.*

Доказательство этих теорем основано на современных методах теории дистанционно регулярных графов, включая анализ тройных чисел пересечений, как это продемонстрировано, например, в работе [3] для графов с похожими параметрами.

### 1. Тройные числа пересечений

В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений. Метод тройных чисел пересечений, развитый в работах [4–6], является эффективным инструментом для доказательства несуществования дистанционно регулярных графов с заданными массивами пересечений.

Пусть  $\Gamma$  – дистанционно регулярный граф диаметра  $d$ .

Если  $u_1, u_2, u_3$  – вершины графа  $\Gamma$ ,  $r_1, r_2, r_3$  – неотрицательные целые числа, не большие  $d$ , то  $\begin{Bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{Bmatrix}$  – множество вершин  $w \in \Gamma$  таких, что

$$d(w, u_i) = r_i, \begin{Bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{Bmatrix} = \left| \begin{Bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{Bmatrix} \right|.$$

Числа  $\begin{Bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{Bmatrix}$  называются *тройными числами пересечений*. Для фиксированной тройки вершин  $u_1, u_2, u_3$  вместо  $\begin{Bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{Bmatrix}$  будем писать  $[r_1 r_2 r_3]$ .

Пусть  $u, v, w$  – вершины графа  $\Gamma$ ,  $W = d(u, v), U = d(v, w), V = d(u, w)$ . Так как имеется точно одна вершина  $x = u$  такая, что  $d(x, u) = 0$ , то число  $[0jh]$  равно 0 или 1. Отсюда  $[0jh] = \delta_{jW} \delta_{hV}$ , где  $\delta$  – символ Кронекера.

Аналогично,  $[i0h] = \delta_{iW} \delta_{hU}$  и  $[ij0] = \delta_{iU} \delta_{jV}$ .

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из  $\{u, v, w\}$ , и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$$\sum_{i=1}^d [ljh] = p_{jh}^U - [0jh], \sum_{i=1}^d [ilh] = p_{ih}^V - [i0h], \sum_{l=1}^d [ijl] = p_{ij}^W - [ij0], \quad (1).$$

При этом некоторые тройки исчезают.

При  $|i - j| > W$  или  $i + j < W$  имеем  $p_{ij}^W = 0$ , поэтому  $[ijh] = 0$  для всех  $h \in \{0, \dots, d\}$ . В работе [4], посвященной исследованию экстремальных 1-кодов в дистанционно регулярных графах диаметра 3, система уравнений (1) в сочетании с условиями симметрии применяется для существенного сокращения перебора возможных конфигураций троек вершин и получения целочисленных решений для тройных чисел пересечений.

Положим  $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{Bmatrix} uvw \\ rst \end{Bmatrix}$ . Если параметр Крейна  $q_{ij}^h = 0$ , то  $S_{ijh}(u, v, w) = 0$ . Использование параметров Крейна для получения линейных соотношений между тройными числами пересечений было предложено в работе Кулсета и Юришича [4], где авторы применили равенство в условиях Крейна для доказательства несуществования определенных дистанционно регулярных графов.

Зафиксируем вершины  $u, v, w$  дистанционно регулярного графа  $\Gamma$  и положим

$$\begin{aligned} \{ijh\} &= \left\{ \begin{matrix} uvw \\ ijh \end{matrix} \right\}, \\ [ijh] &= \left[ \begin{matrix} uvw \\ ijh \end{matrix} \right], \\ [ijh]' &= \left[ \begin{matrix} uvw \\ ihj \end{matrix} \right], \\ [ijh]^* &= \left[ \begin{matrix} uvw \\ jih \end{matrix} \right], \\ [ijh]^\sim &= \left[ \begin{matrix} uvw \\ hji \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

Вычисление параметров  $[ijh]'$ ,  $[ijh]^*$  и  $[ijh]^\sim$  (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

Для нахождения тройных чисел в статье использовался пакет sage-drg, примененный в статье [5].

## 2. Свойства графа с массивом пересечений $\{105,104,98,7,1;1,7,98,104,105\}$

В этом разделе  $\Gamma$  – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{105,104,98,7,1; 1,7,98,104,105\}$ . Антиподальное частное графа  $\Gamma$  является сильно регулярным графом с параметрами  $(1666, 105, 0, 7)$ . Далее,  $\Gamma$  имеет  $1 + 105 + 1560 + 1560 + 105 + 1 = 3332$  вершины, спектр  $105^1, 14^{560}, 7^{1105}, -7^{1105}, -14^{560}, -105^1$  и дуальную матрицу собственных значений:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 560 & 1105 & 1105 & 560 & 1 \\ 1 & \frac{224}{3} & \frac{221}{3} & -\frac{221}{3} & -\frac{224}{3} & -1 \\ 1 & \frac{14}{3} & \frac{17}{3} & -\frac{17}{3} & \frac{14}{3} & 1 \\ 1 & \frac{14}{3} & \frac{17}{3} & \frac{17}{3} & \frac{14}{3} & -1 \\ 1 & -\frac{224}{3} & -\frac{221}{3} & \frac{221}{3} & \frac{224}{3} & -1 \\ 1 & -\frac{224}{3} & \frac{221}{3} & \frac{221}{3} & -\frac{224}{3} & 1 \\ 1 & -560 & 1105 & -1105 & 560 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 1.** Числа пересечений графа  $\Gamma$  равны:

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 0, p_{12}^1 = 104, p_{23}^1 = 1456, p_{34}^1 = 104, p_{45}^1 = 1, \\ p_{11}^2 &= 7, p_{12}^2 = 0, p_{13}^2 = 98, p_{22}^2 = 1461, p_{24}^2 = 98, p_{33}^2 = 543, p_{35}^2 = 1, p_{44}^2 = 7, \\ p_{12}^3 &= 98, p_{23}^3 = 1461, p_{34}^3 = 98, p_{25}^3 = 1, \\ p_{13}^4 &= 104, p_{15}^4 = 1, p_{22}^4 = 1456, p_{15}^4 = 1, p_{24}^4 = 104, p_{33}^4 = 1456, \\ p_{14}^5 &= 105, p_{23}^5 = 1560. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Прямые вычисления.  $\square$

Пусть  $u, v, w$  – вершины графа  $\Gamma$ ,  $\{ijl\} = \left\{ \begin{matrix} uvw \\ ijl \end{matrix} \right\}$ ,  $[ijl] = \left[ \begin{matrix} uvw \\ ijl \end{matrix} \right]$ . Положим  $\Sigma = \Gamma_2(u)$ ,  $\Lambda = \Sigma_2$ . Тогда  $\Lambda$  – регулярный граф степени  $p_{22}^2 = 1461$  на  $k_2 = 1560$  вершинах.

**Лемма 2.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 4$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [113] &= [131] = 7, [133] = 91; \\ [222] &= 1364, [224] = [242] = 97; \\ [313] &= [331] = 97, [333] = 1364, [315] = [351] = 1; \\ [422] &= 91, [424] = [442] = 7; \end{aligned}$$

$$[533] = 1.$$

*Доказательство.* Упрощение формул из предыдущего раздела.  $\square$

Для числа ребер  $d$  между  $\Lambda(v)$  и  $\Lambda - (\{v\} \cup \Lambda(v))$  в графе  $\Lambda$  верно равенство  $d = 1364 \cdot 104 = 141856$ .

С другой стороны,  $d = 1461(1460 - \lambda)$ , где  $\lambda$  – среднее значение параметра  $\lambda(\Lambda)$ . Поэтому  $1460 - \lambda = 97.095$  и  $\lambda = 1362.905$ .

**Лемма 3.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$[111] = -r_1 + 7, [113] = [131] = r_1, [133] = -r_1 + 98;$$

$$[222] = r_1 + 1362, [224] = [242] = -r_1 + 98, [244] = r_1;$$

$$[311] = r_1, [313] = [331] = -r_1 + 98, [333] = r_1 + 1362, [335] = [353] = 1;$$

$$[422] = -r_1 + 98, [424] = [442] = r_1, [444] = -r_1 + 7;$$

$$[533] = 1,$$

где  $0 \leq r_1 \leq 7$ .

*Доказательство.* Упрощение формул из предыдущего раздела.  $\square$

По лемме 3 имеем  $1362 \leq [222] = r_1 + 1362 \leq 1369$ .

Пусть  $d(u, v) = 2$ . Подсчитаем число  $f_4$  пар вершин  $y, z$  на расстоянии 4 в графе  $\Gamma$ , где  $y \in \binom{uv}{24}$  и  $z \in \binom{uv}{22}$ . С одной стороны, по лемме 2 имеем  $[224] = 97$ , поэтому  $f_4 = 98 \cdot 97 = 9506$ . С другой стороны, по лемме 3 имеем  $[244] = r_1$ , поэтому  $9506 = f_4 = \sum_i r_1^i$  и  $\sum_i r_1^i / 1560 = 6.09$ .

Противоречие с тем, что  $\lambda = 1362.905 = \sum_i [222]^i / 1560 = \sum_i r_1^i / 1560 + 1362 = 1368.09$ .

Теорема 1 доказана.

### Список источников

1. *Distance-Regular Graphs* / Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 485 p. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. Biggs N. Families of parameters for SRNT graphs // Preprint arXiv:0911.2455. 2009. DOI: 10.48550/arXiv.0911.2455. URL: arxiv.org (дата обращения: 05.03.2024).
3. Makhnev A. A., Bitkina V. V., Gutnova A. K. Distance-Regular Graphs with Intersection Arrays  $\{7,6,6;1,1,2\}$  and  $\{42,30,2;1,10,36\}$  Do not Exist // Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal. 2021. Vol. 23, iss. 3. P. 68–76. DOI: 10.46698/y2738-1800-0363-i.
4. Coolsaet K., Jurišić A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 2008. Vol. 115, iss. 6. P. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
5. Vidali J. Using triple intersection numbers to prove non-existence of distance-regular graphs // Electronic Journal of Combinatorics. 2018. Vol. 25, iss. 4. Paper № P4.21. DOI: 10.37236/7763.
6. Urlep M. Triple intersection numbers of Q-polynomial distance-regular graphs // European Journal of Combinatorics. 2012. Vol. 33, iss. 6. P. 1246–1252. DOI: 10.1016/j.ejc.2012.02.005.

### References

1. Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. (1989), *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, doi: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. Biggs, N. (2009), "Families of parameters for SRNT graphs", *arXiv preprint arXiv:0911.2455*, doi: 10.48550/arXiv.0911.2455, URL: arxiv.org (accessed: 05.03.2024).

3. Makhnev, A. A., Bitkina, V. V. and Gutnova, A. K. (2021), "Distance-Regular Graphs with Intersection Arrays  $\{7,6,6;1,1,2\}$  and  $\{42,30,2;1,10,36\}$  Do not Exist", *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal*, 23(3), pp. 68–76, doi: 10.46698/y2738-1800-0363-i.
4. Coolsaet, K. and Jurišić, A. (2008), "Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs", *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 115(6), pp. 1086–1095, doi: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
5. Vidali, J. (2018), "Using triple intersection numbers to prove non-existence of distance-regular graphs", *Electronic Journal of Combinatorics*, 25(4), P4.21, doi: 10.37236/7763.
6. Urlep, M. (2012), "Triple intersection numbers of Q-polynomial distance-regular graphs", *European Journal of Combinatorics*, 33(6), pp. 1246–1252, doi: 10.1016/j.ejc.2012.02.005.

**Информация об авторах:**

В. И. Белоусова – кандидат физико-математических наук; доцент Уральского федерального университета первого Президента России Б. Н. Ельцина (620062, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19), AuthorID: 160714;

А. А. Махнев – член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН (620077, Россия, г. Екатеринбург, Бокс № 82, ул. С. Ковалевской, 16), AuthorID: 2970;

А. А. Токбаева – кандидат физико-математических наук; доцент Кабардино-Балкарского университета им. Х. М. Бербекова (360004, Россия, г. Нальчик, ул. Чернышевского, № 173), AuthorID: 885243.

**Information about the authors:**

V. I. Belousova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin (19 Mira Street, Yekaterinburg, Russia, 620062), AuthorID: 160714;

A. A. Makhnev – Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Chief Researcher, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (16 S. Kovalevskaya Street, P.O. Box 82, Yekaterinburg, Russia, 620077), AuthorID: 2970;

A. A. Tokbaeva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov (173 Chernyshevskogo Street, Nalchik, Russia, 360004), AuthorID: 885243.

Научная статья

УДК 512.55

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-35-42

<https://elibrary.ru/uugmzp>



## О пирсовских слоях полуколец с нормальной инволюцией

Никита Сергеевич Протасов

Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия  
 protasownikita@yandex.ru

**Аннотация.** В работе исследуется связь локальных и глобальных условий (полу)нормальности инволюций в  $*$ -полукольцах. Под нормальной инволюцией понимается такая инволюция, при которой из равенства  $aa^* = 0$  следует  $a = 0$ ; полунормальная инволюция определяется более слабым условием:  $aSa^* = 0$  влечет  $a = 0$ . Установлено, что в риккартовых  $*$ -полукольцах любая инволюция является нормальной, а в  $pq$ -бэровских – полунормальной. Доказано, что при наличии полунормальной инволюции множество центральных дополняемых идемпотентов совпадает с множеством центральных проекций, что может быть использовано при изучении пирсовского пучка  $*$ -полуколец. Основным результатом работы – доказательство следующих результатов: 1) инволюция в  $*$ -полукольце  $S$  является нормальной тогда и только тогда, когда она нормальна во всех слоях пирсовского пучка  $*$ -полукольца  $S$ ; 2) инволюция в  $*$ -полукольце  $S$ , булева алгебра центральных проекций которого конечна, является полунормальной тогда и только тогда, когда она полунормальна во всех слоях пирсовского пучка  $*$ -полукольца  $S$ .

**Ключевые слова:**  *$*$ -полукольцо; полукольцо с инволюцией; нормальная инволюция; полунормальная инволюция; риккартово полукольцо с инволюцией;  $pq$ -бэровское полукольцо с инволюцией; проекция; булева алгебра центральных проекций; пирсовский пучок; самосопряженный элемент.*

**Для цитирования:** Протасов Н. С. О пирсовских слоях полуколец с нормальной инволюцией // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 35–42. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-35-42. <https://elibrary.ru/uugmzp>.

*Статья поступила в редакцию 09.11.2025; одобрена после рецензирования 20.02.2026; принята к публикации 20.03.2026.*

Research article

## On the Pierce Stalks of Semirings With Proper Involution

Nikita S. Protasov

Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia  
 protasownikita@yandex.ru

**Abstract.** In this paper, we study the relationship between local and global conditions for proper and semiproper involutions in  $*$ -semirings. An involution is said to be proper if  $aa^* = 0$  implies  $a = 0$ . A semiproper involution is defined by a weaker condition:  $aSa^* = 0$  implies



© Протасов Н. С., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

$a = 0$ . It is established that in Rickart ( $pq$ -Baer)  $*$ -semirings any involution is proper (semi-proper). It is proved that in the presence of a semiproper involution, the set of all central complemented idempotents coincides with the set of all central projections, which can be used in the study of the Pierce sheaf of  $*$ -semirings. The main result of the paper is the proof of the following results: 1) an involution in a  $*$ -semiring  $S$  is proper if and only if it is proper in all stalks of the Pierce sheaf of  $*$ -semiring  $S$ ; 2) an involution in a  $*$ -semiring  $S$  whose Boolean algebra of central projections is finite is semiproper if and only if it is semiproper in all stalks of the Pierce sheaf of  $*$ -semiring  $S$ .

**Keywords:**  $*$ -semiring; semiring with involution; proper involution; semiproper involution; Rickart semiring with involution;  $pq$ -Baer semiring with involution; projection; Boolean algebra of central projections; Pierce sheaf; selfadjoint element.

**For citation:** Protasov, N. S. (2026), "On the Pierce Stalks of Semirings With Proper Involution", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 35–42, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-35-42, <https://elibrary.ru/uugmzp>.

The article was submitted 09.11.2025; approved after reviewing 20.02.2026; accepted for publication 20.03.2026.

## Введение

Следуя Дж. Голану [1], под *полукольцом* нами понимается алгебраическая структура  $\langle S, +, \cdot \rangle$ , если  $\langle S, + \rangle$  – коммутативная полугруппа,  $\langle S, \cdot \rangle$  – полугруппа, операция умножения дистрибутивна относительно сложения с обеих сторон. В статье мы рассматриваем полукольцо с аддитивным нулем  $0$ , причем  $0s = 0 = s0$  для любого  $s \in S$ , и единицей  $1$ .

Пусть  $e \in S$ . Элемент  $e^\perp$  называется *дополнением* к  $e$ , если  $e + e^\perp = 1$  и  $e \cdot e^\perp = e^\perp \cdot e = 0$ . Множество всех центральных дополняемых идемпотентов полукольца  $S$  обозначается через  $BS$ . Если положить  $e \oplus f = e^\perp f + e f^\perp$ , то  $\langle BS, \oplus, \cdot \rangle$  становится булевым кольцом. Если же положить  $e \vee f = e f^\perp + f = e^\perp f + e$  и  $e \wedge f = e f$ , то получим булеву решетку  $\langle BS, \vee, \wedge \rangle$ .

**Определение 1.** Полукольцо  $S$  называется  *$*$ -полукольцом* (или *полукольцом с инволюцией*), если существует антиавтоморфизм  $*$ :  $a \mapsto a^*$  полукольца  $S$ :

$$a^{**} = a, (a + b)^* = a^* + b^*, (ab)^* = b^* a^*.$$

Далее  $S$  – произвольное  $*$ -полукольцо.

**Определение 2.** Дополняемый идемпотент  $e \in S$  называется *проекцией*, если  $e = e^*$ ; множество всех проекций  $*$ -полукольца  $S$  обозначим через  $\tilde{S}$ .

Образ элемента  $a \in S$  относительно инволюции  $*$  будем называть *сопряжением* элемента  $a$ .

Элемент  $a \in S$  называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряжением, то есть если  $a^* = a$ . Элементы  $a, b \in S$  называются *ортгоналичными*, если  $ab = ba = 0$ .

Очевидно,  $0$  и  $1$  являются проекциями, а произведение самосопряженных элементов является самосопряженным в точности тогда, когда элементы коммутируют.

Укажем далее некоторые примеры  $*$ -полуколец.

**Пример 1.** Любое коммутативное полукольцо является  $*$ -полукольцом с инволюцией  $*$  такой, что  $a^* = a$  (тождественная инволюция) для любого элемента полукольца.

**Пример 2.** Полукольцо матриц над произвольным коммутативным полукольцом является  $*$ -полукольцом, в котором под инволюцией понимается операция транспонирования.

**Пример 3.** Поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел с обычными операциями сложения и умножения, в котором в качестве инволюции выступает операция комплексного сопряжения.

В частных случаях инволюция обладает тем свойством, что условие  $aa^* = 0$  влечет  $a = 0$ .

Действительно, в условиях примера 1 рассмотрим полукольцо натуральных чисел. Тогда условие  $aa^* = 0$  означает  $a^2 = 0$ , а значит  $a = 0$ .

В условиях примера 3 условие  $z \cdot \bar{z} = 0$  для данного числа  $z = a + bi$  означает  $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = 0$ , откуда получим, что  $a = b = 0$ .

В условиях примера 2 рассмотрим полукольцо матриц над полукольцом натуральных чисел. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + \cdots + a_{1n}^2 & \cdots & a_{11} \cdot a_{n1} + \cdots + a_{1n} \cdot a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \cdot a_{11} + \cdots + a_{nn} \cdot a_{1n} & \cdots & a_{n1}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{pmatrix}.$$

Согласно условию,  $AA^T = 0$ , что означает, в частности, что элементы указанной матрицы, стоящие на главной диагонали, равны нулю. Следовательно,  $b_{ii} = a_{i1}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0$ , откуда получим, что все элементы  $i$ -ой строки исходной матрицы равны нулю, поэтому нулевой окажется и матрица  $A$ .

**Определение 3** [2]. Если в полукольце  $S$  с инволюцией  $*$  выполняется импликация  $aa^* = 0 \Rightarrow a = 0$ , то инволюция  $*$  называется *нормальной* (*proper*).

Основываясь лишь на приведенном определении, можно заключить, что если в полукольце нет делителей нуля, то любая инволюция в нем является нормальной. Действительно, пусть в полукольце  $S$  без делителей нуля задана инволюция  $*$  и пусть для некоторого  $a \in S$  выполнено  $aa^* = 0$ . Тогда ввиду отсутствия делителей нуля можно заключить, что  $a = 0$  или  $a^* = 0$ . Во втором случае, действуя инволюцией на указанное равенство, получим требуемое условие, а значит  $*$  – нормальная инволюция.

Исходя из этого, можно получить пример  $*$ -полукольца, в котором инволюция не является нормальной. Действительно, рассмотрим  $*$ -полукольцо  $\mathbb{N}[x]/(x^2)$  с тривиальной инволюцией – факторполукольцо полукольца  $\mathbb{N}[x]$  по конгруэнции, при которой сравнимыми являются многочлены, имеющие равные коэффициенты при первой и нулевой степени переменной  $x$ . Для ненулевого элемента  $x$  указанного полукольца верно, что  $xx^* = x^2 = 0$ , а значит указанная импликация не выполняется.

Однако это не означает, что нормальность инволюции влечет за собой отсутствие делителей нуля в полукольце. Достаточно рассмотреть полукольцо матриц с транспонированием над множеством натуральных чисел. При этом, например, матрица  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  является делителем нуля, так как  $A^2 = 0$ .

Таким образом, условие нормальности инволюции позволяет гарантировать, что в  $*$ -полукольце отсутствуют ненулевые самосопряженные нильпотентные элементы (определяются так же, как и для колец). Предположим, что в полукольце  $S$  с нормальной инволюцией нашелся нильпотентный самосопряженный элемент  $a$ , отличный от нуля. Тогда для некоторого  $n$  верно, что  $a^n = 0$ . Предположим, что  $n = 2k$ , тогда  $a^n = a^k \cdot a^k = a^k \cdot (a^k)^* = 0$ , что влечет  $a^k = 0$ , противоречие. Предположим, что  $n = 2k + 1$ , тогда рассмотрим  $b = a^{k+1}$ . Заметим, что  $b^* = b$ . Тогда  $bb^* = b^2 = a^{n+1} = a^n a = 0a = 0$ , откуда, согласно тому, что  $*$  является нормальной, получим  $b = 0$ . Следовательно,  $a^{k+1} = 0$  для  $k + 1 < 2k + 1$ , противоречие.

**Определение 4** [3]. Если в полукольце  $S$  с инволюцией  $*$  выполняется импликация  $aSa^* = 0 \Rightarrow a = 0$ , то инволюция  $*$  называется *полунормальной* (*semiproper*).

Отметим также, что если в полукольце  $S$  задана полунормальная инволюция  $*$ , то  $xSx = 0$  влечет  $x = 0$ . Пусть  $xSx = 0$ . Тогда  $xsx^*Sxs^*x^* = xsx^*S(xsx^*)^* = 0$  для любого  $s \in S$ . Следовательно, в силу полунормальности инволюции  $*$  получим, что  $xSx^* = 0$ , а значит  $x = 0$ .

**Определение 5.** Полукольцо  $S$  называется *коммукативным в нуле*, если в нем выполняется импликация  $ab = 0 \Rightarrow ba = 0$ .

**Утверждение 1.** В полукольце  $S$  любая нормальная инволюция является полунормальной. В коммукативных в нуле полукольцах указанные понятия совпадают.

**Доказательство.** Пусть в полукольце  $S$  задана нормальная инволюция  $*$ . Предположим, что для некоторого элемента  $a \in S$  верно, что  $aSa^* = 0$ . Тогда, в частности, при  $s = a^*a$  получим, что  $0 = aa^*aa^* = (aa^*)(aa^*)^*$  откуда, в силу нормальности инволюции, можем заключить, что  $aa^* = 0$ , а значит и  $a = 0$ .

Покажем вторую часть утверждения. Пусть в коммукативном в нуле полукольце  $S$  задана полунормальная инволюция  $*$ . Пусть нашелся такой элемент  $a \in S$ , что  $aa^* = 0$ . Тогда для любого  $s \in S$  верно, что  $0 = 0s = aa^*s = a(a^*s) = (a^*s)a = a^*s(a^*)^*$ . Следовательно,  $a^*S(a^*)^* = 0$ , откуда, в силу полунормальности инволюции, можно заключить, что  $a^* = 0$ , а значит и  $a = 0$ .

Для рассмотрения менее очевидных примеров полуколец с (полу)нормальной инволюцией  $*$  введем следующие определения.

**Определение 6.** Полукольцо  $S$  с инволюцией называется *риккартовым* (*rq-бэровским*)  $*$ -полукольцом, если для любого  $a \in S$  найдется такая проекция  $e \in S$ , что  $\text{ann}_r(a) = eS$  ( $\text{ann}_r(aS) = eS$ ).

Через  $\text{ann}_r(a)$  обозначен правый аннулятор элемента  $a$ , то есть множество таких элементов  $s \in S$ , что  $as = 0$ . Через  $\text{ann}_r(aS)$  обозначен правый аннулятор главного правого идеала, порожденного элементом  $a$ , то есть множество элементов  $t \in S$  таких, что для любого  $s \in S$  выполняется условие  $ast = 0$ .

**Утверждение 2.** Любая инволюция в риккартовом полукольце является нормальной.

**Доказательство.** Пусть в риккартовом полукольце задана инволюция  $*$  и пусть для некоторого элемента  $a \in S$  выполнено условие  $aa^* = 0$ . Тогда  $a^* \in \text{ann}_r(a) = eS$ , а значит  $a^* = ea^*$ . Действуя инволюцией на указанное равенство, получим  $a = ae$ . Согласно определению,  $e \in \text{ann}_r(a)$ , а значит  $a = ae = 0$ .

Аналогично можно установить, что верно и следующее.

**Утверждение 3.** Любая инволюция, заданная в  $pq$ -бэровском полукольце, является полунормальной.

**Доказательство.** Пусть в  $pq$ -бэровском полукольце задана инволюция  $*$  и пусть для некоторого элемента  $a \in S$  выполнено условие  $aSa^* = 0$ . Тогда  $a^* \in \text{ann}_r(aS) = eS$ , а значит  $a^* = ea^*$ . Действуя инволюцией на указанное равенство, получим  $a = ae$ . Согласно определению,  $e \in \text{ann}_r(aS)$ , а значит  $a = ae = 0$ .

Отметим также, что в [4] установлено, что для произвольного полукольца  $S$  с инволюцией возникают упорядоченное множество всех проекций  $\tilde{S}$  и две булевы решетки – всех центральных дополняемых идемпотентов  $BS$  и всех центральных проекций  $B^*S$  соответственно. Понятно, что указанные булевы решетки связаны равенством  $B^*S = BS \cap \tilde{S}$  в любом полукольце с заданной инволюцией  $*$ . В случае полуколец с (полу)нормальной инволюцией строение указанных решеток можно уточнить, о чем говорит следующее

**Утверждение 4.** Если в полукольце  $S$  задана (полу)нормальная инволюция  $*$ , то множества  $BS$  и  $B^*S$  совпадают.

**Доказательство.** Очевидно, что  $B^*S \subseteq BS$ , поэтому достаточно показать лишь обратное включение. Учитывая утверждение 1, проведем доказательство лишь для случая, если в полукольце задана полунормальная инволюция. Выберем для этого произвольный центральный дополняемый идемпотент  $e \in BS$ , рассмотрим элемент  $h = e(e^\perp)^*$  и сопряженный с ним элемент  $h^* = e^*e^\perp$ . Пользуясь условием дополняемости элемента  $e$ , нетрудно показать, что  $(e^\perp)^* = (e^*)^\perp$ . Тогда  $hSh^* = e(e^\perp)^*Se^*e^\perp = e(e^*)^\perp Se^*e^\perp = ee^\perp Se^*(e^*)^\perp = 0 \cdot S \cdot 0 = 0$ . Изменение порядка множителей в третьем равенстве допустимо согласно условию центральности элемента  $e$ . Поскольку инволюция является полунормальной, получим  $h = 0$ , следовательно, и  $h^* = 0$ . Таким образом,  $e^* = e^*(e + e^\perp) = e^*e + e^*e^\perp = e^*e$ . Действуя инволюцией на полученное равенство, имеем  $e = (e^*e)^* = e^*e = e^*$ , а значит  $e$  – самосопряженный элемент.

Как следствие, укажем, что в риккартовых и  $pq$ -бэровских  $*$ -полукольцах любой центральный дополняемый идемпотент является центральной проекцией.

Обратное утверждение при этом неверно. Рассмотрим трехэлементное полукольцо, где  $0 < a < 1$ , сложение – выбор максимального элемента с нейтральным элементом  $0$ . Коммутативное умножение имеет поглощающий элемент  $0$ , нейтральный элемент  $1$ , элемент  $a$  – нильпотентный элемент индекса 2. Зададим в полукольце  $S$  тривиальную инволюцию. Поскольку  $aa^* = aa = 0$  при  $a \neq 0$ , а в силу коммутативности умножения, можно заключить, что  $0 = 0S = aaS = aSa = aSa^*$  при  $a \neq 0$ , получим пример инволюции, которая не является ни нормальной, ни полунормальной. Однако в указанном полукольце множества центральных дополняемых идемпотентов и центральных проекций совпадают.

Центральные проекции в теории  $*$ -полуколец являются удобным инструментом для построения фактор-полуколец, инволюция в которых сохраняется. Обозначим через  $\text{Max } BS$  множество максимальных идеалов булева кольца  $BS$ . Для любого  $M \in \text{Max } BS$  определим конгруэнцию  $\theta_M$ :

$$a \equiv b \pmod{\theta_M} \Leftrightarrow ae = be \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M.$$

Действуя инволюцией на указанное равенство, получим, что  $a^*e^* = b^*e^*$ . Следовательно, элементы, сопряженные с  $a$  и  $b$ , эквивалентны по модулю указанной конгруэнции лишь в случае, если максимальный идеал  $M$  замкнут относительно инволюции. Это выполняется, в частности, когда  $BS = B^*S$ . Будем называть конгруэнцию  $\theta$ , для которой

выполняется импликация  $a\theta b \Rightarrow a^*\theta b^*$ , конгруэнцией, *устойчивой относительно инволюции*  $*$  ( $*$ -конгруэнцией). Фактор-полукольцо по  $*$ -конгруэнции будем называть *фактор- $*$ -полукольцом*. Для каждого  $M \in \text{Max } BS$  полукольцо  $S/\theta_M$  называется *пирсовским слоем* [5]. Заметим, что в  $*$ -полукольцах с (полу)нормальной инволюцией любая конгруэнция, согласно утверждению 5, устойчива относительно инволюции, а значит любой пирсовский слой является  $*$ -полукольцом.

**Определение 7.** Тройка  $(\Pi, \pi, X)$  называется *пучком  $*$ -полуколец*, если выполняются следующие условия:

- 1)  $\Pi, X$  – топологические пространства;
- 2)  $\pi: \Pi \rightarrow X$  – локальный гомеоморфизм;
- 3) для любого  $x \in X$   $\Pi_x = \pi^{-1}(x)$  – полукольцо с инволюцией;
- 4) сложение, умножение и инволюция, определенные поточечно, непрерывны;
- 5) отображения, сопоставляющие каждому  $x \in X$  нуль и единицу из  $\Pi_x$ , непрерывны.

Пространства  $\Pi$  и  $X$ , указанные в определении, называются *накрывающим* и *базисным* соответственно,  $*$ -полукольца  $\Pi_x$  называются *слоями*. Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow \Pi$ , определенное на всем базисном пространстве, и такое, что  $f(x) \in \Pi_x$  для любого  $x \in X$ , называется *глобальным сечением*.

Пусть базисным пространством пучка является  $\text{Max } B^*S$ , а накрывающим – дизъюнктное объединение фактор- $*$ -полуколец  $S/\theta_M$ , где  $M \in \text{Max } B^*S$ . Такой пучок  $*$ -полуколец называется *пирсовским пучком  $*$ -полуколец* [5]. В указанной работе установлено, что любое  $*$ -полукольцо  $*$ -изоморфно  $*$ -полукольцу глобальных сечений своего пирсовского пучка.

Нормальность инволюции может быть охарактеризована соответствующими свойствами инволюции в пирсовских слоях, о чем говорит следующая

**Теорема 1.** *Инволюция в полукольце  $S$  является нормальной тогда и только тогда, когда она является нормальной в каждом пирсовском слое.*

**Доказательство.** Докажем прямую импликацию. Пусть  $S$  – полукольцо с нормальной инволюцией. Пусть для некоторого максимального идеала  $M \in \text{Max } B^*S$  и некоторого  $a_M \in S/\theta_M$  верно, что  $a_M a_M^* = 0$ . Это означает, что для некоторого  $e \in B^*S \setminus M$  выполнено  $aa^*e = 0$ . Тогда  $0 = aa^*e = aa^*ee = (ae)(ae)^*$ . Поскольку инволюция  $*$  является нормальной, получим, что  $ae = 0$ , а значит  $a_M = 0$ . Прямая импликация установлена.

Обратно, пусть все пирсовские слои  $*$ -полукольца  $S$  являются полукольцами с нормальной инволюцией. Рассмотрим  $s \in S$  такой, что  $ss^* = 0$ . Поскольку  $*$ -полукольцо  $S$   $*$ -изоморфно  $*$ -полукольцу глобальных сечений своего пирсовского пучка, указанному элементу соответствует глобальное сечение  $\hat{s} \in \Gamma$ , для которого выполняется  $\hat{s} \cdot (\hat{s})^* = 0$ . Отметим, что  $\hat{s}(M) = s_M$  для любой точки  $M$  базисного пространства  $\text{Max } B^*S$ . Также укажем, что инволюция в  $*$ -полукольце глобальных сечений определена поточечно, поэтому  $(\hat{s}(M))^* = \widehat{s^*}(M) = s_M^*$ . Тогда, для любого  $M \in \text{Max } B^*S$  верно, что  $\hat{s}(M) \cdot (\hat{s}(M))^* = \hat{s}(M) \cdot \widehat{s^*}(M) = s_M \cdot s_M^* = 0$ , откуда, в силу нормальности инволюции в пирсовских слоях, получим  $s_M = \hat{s}(M) = 0$ . Следовательно, глобальное сечение  $\hat{s}$  совпадает

с нулевым сечением в каждой точке, а значит  $s = 0$ , поэтому инволюция в  $S$  является нормальной. Теорема доказана.

Попытки установить похожую взаимосвязь для полунормальной инволюции приводят к дополнительным ограничениям на структуру булевой алгебры центральных проекций.

**Теорема 2.** *Рассмотрим следующие условия для инволюции  $*$ :*

- 1) *инволюция  $*$  является полунормальной в  $S$ ;*
- 2) *инволюция  $*$  является полунормальной в каждом пирсовском слое  $*$ -полукольца  $S$ .*

*Тогда импликация 2)  $\Rightarrow$  1) выполняется всегда, выполнение импликации 1)  $\Rightarrow$  2) возможно в случае, когда булева алгебра  $B^*S$  конечна.*

**Доказательство.** Покажем выполнение импликации 2)  $\Rightarrow$  1). Пусть для любого  $M \in \text{Max } BS$  инволюция  $*$  в полукольце  $S/\theta_M$  является полунормальной. Рассмотрим  $a \in S$  такой, что  $aSa^* = 0$ . Указанному элементу соответствует глобальное сечение  $\hat{a} \in \Gamma$  такое, что  $\hat{a}\Gamma(\hat{a})^* = 0$ . Тогда  $a_M S/\theta_M a_M^* = 0$ , в силу полунормальности инволюции в пирсовских слоях, получим, что  $a_M = 0$  для любого  $M \in \text{Max } B^*S$ . Следовательно,  $\hat{a} = 0$ , а значит и  $a = 0$ . Обратная импликация показана.

Покажем выполнение импликации 1)  $\Rightarrow$  2) при условии конечности булевой алгебры  $B^*S$ . Предположим, что для некоторого  $M \in \text{Max } B^*S$  нашелся такой  $a_M \in S/\theta_M$ , что  $a_M \cdot (S/\theta_M) \cdot a_M^* = 0$  при  $a_M \neq 0$ . Тогда для любого  $s \in S$  найдется такая центральная проекция  $e_s \in B^*S \setminus M$ , что  $asa^*e_s = 0$ . Рассмотрим произвольный атом  $f \in B^*S \setminus M$ . Такой существует, поскольку  $M$  – собственный идеал решетки  $B^*S$ . Для любого  $s \in S$  проекция  $e_s^\perp$  лежит в  $M$ , и  $fe_s^\perp = 0$ . Заметим, что  $asa^* = asa^*e_s^\perp$ , поэтому  $asa^*f = 0$ . Получаем  $(af)s(af)^* = 0$  для любого  $s \in S$ , откуда  $af = 0$  и  $a_M = 0$ . Следовательно, прямая импликация выполняется. Теорема доказана.

Полученные в работе результаты естественным образом порождают ряд вопросов, требующих дальнейшего исследования. При доказательстве импликации 1)  $\Rightarrow$  2) требуется локализовать элемент  $a \in S$  в отдельных слоях пирсовского пучка. Конечность булевой алгебры – достаточно сильное условие, открытым остается вопрос, можно ли ослабить предложенное условие? Можно ли охарактеризовать все полукольца, в которых любая инволюция (полу)нормальна? Являются ли риккартовы ( $pq$ -бэровские) полукольца с инволюцией максимальным таким классом?

Автор искренне благодарит научного руководителя, доктора физико-математических наук Чермных В. В., за постановку задачи, внимание к работе, конструктивные замечания при выполнении исследования.

#### **Список источников**

1. *Golan J. S.* Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1999. XII, 382 p. doi: 10.1007/978-94-015-9333-5
2. *Sterling K.* Berberian Baer  $*$ -Rings. Heidelberg: Springer Berlin. Publ, 1972. XIII, 301 p. doi: 10.1007/978-3-642-15071-5.
3. *Birkenmeier G.F., Park J.K., Rizvi S.T.* A Theory of Hulls for Rings and Modules // In: *Albu, T., Birkenmeier, G.F., Erdođgan, A., Tercan, A.* (eds) Ring and Module Theory. Trends in Mathematics. Springer, Basel. 2010. doi: 10.1007/978-3-0346-0007-1\_2

4. Протасов Н. С., Чермных В. В. О пучковом представлении  $pq$ -Бэровского полукольца с инволюцией // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 1. С. 190–202. DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-190-202.
5. Марков Р. В. Пирсовское представление полукольца с инволюцией // Изв. вузов. Матем. 2014. № 4. С. 18–24. DOI: 10.3103/S1066369X14040033.

## References

1. Golan, J. S. (1999), *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, xii, 382 p., doi: 10.1007/978-94-015-9333-5.
2. Sterling, K. (1972), *Berberian Baer \*-rings*, Springer Berlin, Heidelberg, xiii, 301 p. doi: 10.1007/978-3-642-15071-5.
3. Birkenmeier, G. F., Park, J. K. and Rizvi, S. T. (2010), "A theory of hulls for rings and modules", in Albu, T., Birkenmeier, G. F., Erdoğan, A. and Tercan, A. (eds), *Ring and module theory*. Trends in mathematics, Springer, Basel, doi: 10.1007/978-3-0346-0007-1\_2.
4. Protasov, N. S. and Chermnykh, V. V. (2024), "О пучковом представлении  $pq$ -Бэровского полукольца с инволюцией" [On the sheaf representation of a  $pq$ -Baer semiring with involution], *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences], vol. 30, no 1, pp. 190–202, doi: 10.21538/0134-4889-2024-30-1-190-202.
5. Markov, R. V. (2014), "Пирсовское представление полукольца с инволюцией" [Pirs representation of semirings with involution], *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)], no 4, pp. 18–24, doi: 10.3103/S1066369X14040033.

## Информация об авторе:

Н. С. Протасов – преподаватель кафедры физико-математического и информационного образования Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский пр-т, д. 55).

## Information about the author:

N. S. Protasov – lecturer at the department of physico-mathematical and information education, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University (55 Oktyabrsky prospect, Syktyvkar, Russia, 167001).

Научная статья

УДК 517.5

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-43-50

<https://elibrary.ru/swhmjy>



## Оценка оператора Чезаро в линейно-инвариантных семействах аналитических функций в круге

Елизавета Сергеевна Шмидт

Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск, Россия

[shmidt@petsu.ru](mailto:shmidt@petsu.ru)

**Аннотация.** В данной статье понятие обобщенного оператора Чезаро перенесено на линейно-инвариантное семейство функций, аналитических в единичном круге. Получена оценка модуля этого оператора.

**Ключевые слова:** *оператор Чезаро; обобщенный оператор Чезаро; линейно-инвариантное семейство.*

**Для цитирования:** Шмидт Е. С. Оценка оператора Чезаро в линейно-инвариантных семействах аналитических функций в круге // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 43–50. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-43-50. <https://elibrary.ru/swhmjy>.

*Статья поступила в редакцию 27.08.2025; одобрена после рецензирования 15.11.2025; принята к публикации 20.03.2026.*

Research article

## The Cesàro Operator Estimation in Linearly Invariant Families of Analytic Functions in the Circle

Elizaveta S. Shmidt

Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia

[shmidt@petsu.ru](mailto:shmidt@petsu.ru)

**Abstract.** In this article, the concept of the averaging Cesàro operator is extended to a linearly invariant family of functions analytic on the unit disk. An estimate for the modulus of this operator is obtained.

**Keywords:** *Cesàro operator; averaging Cesàro operator; linearly invariant family.*

**For citation:** Shmidt, E. S. (2026), "The Cesàro Operator Estimation in Linearly Invariant Families of Analytic Functions in the Circle", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 43–50, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-43-50, <https://elibrary.ru/swhmjy>.

*The article was submitted 27.08.2025; approved after reviewing 15.11.2025; accepted for publication 20.03.2026.*



© Шмидт Е. С., 2026

Лицензирована по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## 1. Введение и постановка задачи

Итальянский математик Эрнесто Чезаро в 1890 году [1] предложил новый эффективный метод суммирования расходящихся рядов. Приведенный метод усреднения лег в основу многих научных работ. Х. Поммеренке в [2] занимался исследованием оператора, который при некотором условии является классическим оператором Чезаро. Л. Фейер в [3] для получения сходящегося функционального ряда переходил к последовательности среднеарифметических заданной функциональной последовательности. Среди работ, посвященных обобщению метода усреднения Чезаро, можно отметить [4] и [5]. В данной работе будет использоваться определение обобщенного (averaging) оператора Чезаро, данное в 1994 году в [4].

Свойства оператора Чезаро и различных его обобщений играют важную роль при изучении сингулярных и функционально-дифференциальных уравнений. Такие уравнения возникают в химическом реакторе [6, с. 176–179], в левой части однородного уравнения Эйлера [7, с. 154], в уравнении Шрёдингера для одномерной частицы [8, с. 116] и других задачах. Здесь удобно осуществить переход от функционально-дифференциальных уравнений к операторным, такой прием избавляет от громоздких расчетов. Отсюда вытекает важность исследования свойств операторов в разных функциональных пространствах и установление условий их ограниченности. Переход от функционально-дифференциальных уравнений к операторным можно увидеть в работах [9], [10] и [11], в них авторы используют описанный выше переход для доказательства достаточных условий разрешимости задачи Коши и для доказательства существования единственного решения. В [12] оператор Чезаро используется в изучении свойств модельной задачи, которая возникает в некоторых химических реакциях. Еще об одном интересном приложении можно прочесть в [13].

Одним из важнейших свойств оператора Чезаро является свойство ограниченности. Наличие этого свойства изучалось в различных пространствах. В предлагаемой работе рассматривается вопрос об ограниченности оператора Чезаро для аналитических функций в  $\Delta = \{z: |z| < 1\}$ , которые принадлежат линейно-инвариантным семействам.

Понятие линейно-инвариантного семейства дал Х. Поммеренке в 1964 году в [14, с. 109].

Множество  $\mathfrak{M}$  аналитических и локально однолистных функций в круге  $\Delta$

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(g)z^n \quad (1)$$

называется линейно-инвариантным семейством (л.и.с.), если для любой функции  $g(z) \in \mathfrak{M}$  и для любого конформного автоморфизма  $\Phi$  круга  $\Delta$  функция

$$g_{\Phi}(z) = \frac{g(\Phi(z)) - g(\Phi(0))}{g'(\Phi(0))\Phi'(0)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$$

также принадлежит  $\mathfrak{M}$ .

Число  $\text{ord } \mathfrak{M} = \sup_{g \in \mathfrak{M}} |a_2(g)|$  называется *порядком линейно-инвариантного семейства*.

Множество  $U_{\alpha}$ , которое состоит из объединения всех л.и.с.  $\mathfrak{M}$  для которых  $\text{ord } \mathfrak{M} \leq \alpha$  называется универсальным линейно-инвариантным семейством порядка  $\alpha$ .

Известно, что порядок  $\text{ord } \mathfrak{M} \geq 1$  [14] для любого л.и.с.  $\mathfrak{M}$ . Порядок семейства, которому принадлежат аналитические и локально однолистные функции, оказывает влияние на ряд свойств этих функций. Примеры л.и.с. приведены в [15, с. 8]. Среди них из-

вестные классы аналитических в  $\Delta$  функций с разложением (1):  $U_1 = K$  – класс выпуклых функций, отображающих  $\Delta$  на выпуклые области, класс  $S = U_2$  – класс всех однолистных функций, по теореме Бибераха  $\text{ord } S = 2$  [16], и другие примеры. Далее рассматриваются только л.и.с. конечного порядка.

В силу того, что функции из л.и.с. имеют разложение (1), это позволяет уточнить вид оператора Чезаро в данном классе и получить условия его ограниченности.

## 2. Оператор Чезаро в линейно-инвариантных семействах функций

Для любого комплексного числа  $b$  далее используем символ Похгаммера:

$$(b)_n := b(b+1)(b+2) \dots (b+n-1) = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

и обозначим  $A_n^\beta := \frac{(\beta+1)_n}{(1)_n}$ , причем,  $(1)_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (1+n-1) = n!$  и  $(b)_0 = 1$ .

Пусть  $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n$  аналитическая функция в  $\Delta$ . В [4] (см. также [17]) для  $\beta \in \mathbb{C}$  с  $\text{Re } \beta > -1$  для функций  $\psi(z)$  обобщенный оператор Чезаро был определен следующим образом:

$$C^\beta \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{A_{n-1}^{\beta+1}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^\beta \xi_{k-1} \right) z^{n-1}. \quad (2)$$

При  $\beta = 0$  в (2) получаем классический оператор Чезаро:

$$C^0 \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{k-1} \right) z^{n-1}.$$

Уточним (2) для аналитических функций в  $\Delta$ , имеющих разложение  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ . Рассмотрим тождество:

$$\frac{z}{1-z} \cdot \frac{1}{(1-z)^\beta} = \frac{z}{(1-z)^{\beta+1}}, \quad (3)$$

в котором каждую дробь представим в виде степенных рядов:

$$\frac{1}{(1-z)^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^{\beta-1} z^{n-1}.$$

Поскольку

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad \text{и} \quad \frac{z}{(1-z)^{\beta+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^\beta z^n,$$

получаем выражение, эквивалентное (3):

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^{\beta-1} z^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^\beta z^n. \quad (4)$$

Раскроем скобки левой части (4), выполним группировку и получим следующее выражение:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^{\beta-1} z^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n A_{k-1}^{\beta-1} \right) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\beta-1} \right) z^n.$$

Отсюда следует, что (4) эквивалентно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\beta-1} \right) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}^\beta z^n.$$

Приравнивая коэффициенты при  $z^n$ , получим

$$\sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\beta-1} = A_{n-1}^{\beta}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\beta-1} = 1.$$

Пусть  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  аналитическая функция в  $\Delta$ . Определяем оператор Чезаро порядка  $\beta > 0$  в пространстве аналитических функций в  $\Delta$  следующим образом:

$$C^{\beta} f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\beta-1} a_k \right) z^n. \quad (5)$$

В частности, при  $\beta = 1$  получаем классический оператор Чезаро.

Таким образом, получен уточненный вид обобщенного оператора Чезаро порядка  $\beta$  (или  $\beta$  – оператора Чезаро), который можно применять к функциям из л.и.с.

### 3. Оценка модуля оператора Чезаро

Пусть  $\mathfrak{M}$  – л.и.с. конечного порядка. Обозначим  $\mathcal{LM}$  класс аналитических функций в  $\Delta$ :

$$\mathcal{LM} = \left\{ f(z) = \log g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n : g \in \mathfrak{M} \right\},$$

здесь  $\log w$  обозначает главную ветвь комплексного логарифма.

**Теорема 1.** Для любой функции  $f(z) \in \mathcal{LU}_{\alpha}$ ,  $\alpha > 1, \beta > 0$ ,  $\beta$  – оператор Чезаро ограничен и

$$|C^{\beta} f(z)| \leq 2\alpha\beta r \Phi(r, 1, \beta) + r^2 e \left( \alpha - \frac{1}{4\alpha} \right) \left( \frac{1}{1-r} - \beta \Phi(r, 1, \beta + 1) \right),$$

где  $|z| = r$  и  $\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}$  – трансцендентная функция Лерха.

**Доказательство:** Для доказательства используем оценки коэффициентов в классе  $\mathcal{LU}_{\alpha}$ . Обозначим  $A_n(\alpha) = \sup_{f \in \mathcal{LU}_{\alpha}} |a_n(f)|$ , для  $\alpha > 1$  и  $n \geq 2$  в классе  $\mathcal{LU}_{\alpha}$  в [18] (см. также [15, с. 102], [19]) были доказаны следующие оценки:

$$\frac{(\alpha - 1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \leq A_n(\alpha) \leq \frac{2 \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)}{\left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} \leq e \left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right).$$

Также из определения  $\mathcal{LU}_{\alpha}$  следует, что  $A_1(\alpha) = \sup_{f \in \mathcal{LU}_{\alpha}} |a_1(f)| \leq 2\alpha$ .

Обозначим  $r = |z|$ ,  $\beta > 0$ . Оценим модуль оператора Чезаро:

$$\begin{aligned} |C^{\beta} f(z)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\beta-1} a_k \right) z^n \right| = \\ &= \left| a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^n A_{n-k}^{\beta-1} a_k \right) z^n \right| \leq \\ &\leq |a_1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} r^n + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^n A_{n-k}^{\beta-1} |a_k| \right) r^n \leq \\ &\leq 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} r^n + e \left(\alpha - \frac{1}{4\alpha}\right) \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^n A_{n-k}^{\beta-1} \right) r^n. \end{aligned}$$

Так как для любого  $\beta > 0$  и  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{A_{n-1}^{\beta-1}}{A_{n-1}^{\beta}} &= \frac{(\beta)_{n-1}(1)_{n-1}}{(1)_{n-1}(\beta+1)_{n-1}} = \frac{\Gamma(\beta+n-1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+1+n-1)} = \\ &= \frac{\Gamma(\beta+n-1)\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)(\beta+n-1)\Gamma(\beta+n-1)} = \frac{\beta}{(\beta+n-1)} \end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=1}^n A_{n-k}^{\beta-1} = 1,$$

следовательно,

$$\frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^n A_{n-k}^{\beta-1} = 1 - \frac{\beta}{(\beta+n-1)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} A_{n-1}^{\beta-1} r^n + e \left( \alpha - \frac{1}{4\alpha} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{A_{n-1}^{\beta}} \sum_{k=2}^n A_{n-k}^{\beta-1} \right) r^n = \\ = 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{(\beta+n-1)} r^n + e \left( \alpha - \frac{1}{4\alpha} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \left( 1 - \frac{\beta}{(\beta+n-1)} \right) r^n = \\ = 2\alpha\beta r \Phi(r, 1, \beta) + r^2 e \left( \alpha - \frac{1}{4\alpha} \right) \left( \frac{1}{1-r} - \beta \Phi(r, 1, \beta+1) \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

#### Список источников

1. *Cesàro E.* Sur la multiplication des séries // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1890. Т. 14, № 2. P. 114–120. URL: <https://zbmath.org/22.0248.01> (дата обращения: 07.11.2025).
2. *Pommerenke Ch.* Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mitt-lerer Oszillation // Commentarii Mathematici Helvetici. 1977. Т. 52. P. 591–602. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02567392> (дата обращения: 07.11.2025).
3. *Fejér L.* Untersuchungen über Fouriersche Reihen // Mathematische Annalen. 1903. Т. 58. P. 51–69. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01447779> (дата обращения: 07.11.2025).
4. *Stempak K.* Cesaro averaging operators // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1994. Vol. 124. P. 121–126. URL: <https://doi.org/10.1017/S030821050002922X> (дата обращения: 07.11.2025).
5. *Rhaly H. C.* Discrete generalized Cesaro operator // Proceedings of the American Mathematical Society. 1982. Vol. 86, № 3. P. 405–409. URL: <https://doi.org/10.2307/2044437> (дата обращения: 07.11.2025).
6. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с. ISBN: 5–93972–112–5.
7. *Симонов Н. И.* Прикладные методы анализа у Эйлера. М.: Государственное издание технико-теоретической литературы. 1957. 167 с.
8. *Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков: учеб. пособие. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 200 с.

9. Абдуллаев А. Р., Плехова Э. В. О спектре оператора Чезаро // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 4. С. 33–37. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17963144&ysclid=mhn3mksm49704551996> (дата обращения 06.11.2025).
10. Плаксына В. П., Плаксына И. М., Плехова Э. В. О разрешимости задачи Коши для одного квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения // Известия вузов. Математика. 2016. № 2. С. 54–61. URL: <https://mi.mathnet.ru/ivm9082> (дата обращения: 07.11.2025).
11. Кунгурцева А. В. Об одном классе краевых задач для сингулярных уравнений // Известия вузов. Математика. 1995. № 9. С. 30–36. URL: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=1802&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=1802&option_lang=rus) (дата обращения: 07.11.2025).
12. Плаксына И. М. Об одной модельной сингулярной задаче // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. № 1 (1). С. 19–23. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13361921> (дата обращения: 07.11.2025).
13. Hong H.-K., Chen C. H. Application of Cesaro Mean and the L-Curve for the Deconvolution Problem // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 1995. Т. 14. Р. 361–373. URL: [https://doi.org/10.1016/0267-7261\(95\)00003-D](https://doi.org/10.1016/0267-7261(95)00003-D) (дата обращения: 07.11.2025).
14. Pommerenke Ch. Linear-invariant Familien analytischer Funktionen I // Mathematische Annalen. 1964. Vol. 155. P. 108–154. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01344077> (дата обращения: 07.11.2025).
15. Старков В. В. Линейно-инвариантные семейства аналитических в круге функций. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2019. 122 с. ISBN: 978–5–8021–3606–5
16. Bieberbach L. Uber die koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine Schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1916. P. 940–955. URL: [https://books.google.ru/books/about/%C3%9Cber\\_die\\_Koeffizienten\\_der\\_jenigen\\_Poten.html?id=7OuNPgAACA AJ&redir\\_esc=y](https://books.google.ru/books/about/%C3%9Cber_die_Koeffizienten_der_jenigen_Poten.html?id=7OuNPgAACA AJ&redir_esc=y) (дата обращения: 07.11.2025).
17. Kayumov I. R., Khammatova D. M., Ponnusamy S. The Bohr inequality for the generalized Cesàro averaging operators // Mediterranean Journal of Mathematics. 2022. Vol. 19. 16 p. URL: <https://doi.org/10.1007/s00009-021-01931-1> (дата обращения: 07.11.2025).
18. Kayumov I. R., Starkov V. V. Estimate of logarithmic coefficients of locally univalent function // XVIth Rolf Nevanlinna colloquium. Berlin, New York: de Gruyter & Co, 1996. P. 239–245. URL: [https://scholar.google.com/citations?view\\_op=view\\_citation&hl=ru&user=342hVIUAAAAAJ&cstart=20&pagesize=80&citation\\_for\\_view=342hVIUAAAAAJ:NyGDZy8z5eUC](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=342hVIUAAAAAJ&cstart=20&pagesize=80&citation_for_view=342hVIUAAAAAJ:NyGDZy8z5eUC) (дата обращения: 07.11.2025).
19. Ponnusamy S., Shmidt E.S., Starkov V.V. The Bohr radius and its modifications for linearly invariant families of analytic functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2024. Vol. 533, № 1. P. 128039 DOI: 10.1016/j.jmaa.2023.128039.

## References

1. Cesàro, E. (1890), "Sur la multiplication des séries" [On the multiplication of series], *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 14, no 2, pp. 114–120, URL: <https://zbmath.org/22.0248.01> (accessed: 07.11.2025).
2. Pommerenke, Ch. (1977), "Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation" [Univalent functions and analytic functions of

- bounded mean oscillation], *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 52, pp. 591–602, URL: <https://doi.org/10.1007/BF02567392> (accessed: 07.11.2025).
3. Fejér, L. (1903), "Untersuchungen über Fouriersche Reihen" [Investigations on Fourier series], *Mathematische Annalen*, vol. 58, pp. 51–69, URL: <https://doi.org/10.1007/BF01447779> (accessed: 07.11.2025).
  4. Stempak, K. (1994), "Cesaro averaging operators", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 124, pp. 121–126, URL: <https://doi.org/10.1017/S030821050002922X> (accessed: 07.11.2025).
  5. Rhaly, H. C. (1982), "Discrete generalized Cesaro operator", *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 86, no. 3, pp. 405–409, URL: <https://doi.org/10.2307/2044437> (accessed: 07.11.2025).
  6. Azbelev, N. V., Maksimov, V. P. and Rakhmatullina, L. F. (2002), *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. Metody i prilozheniya* [Elements of the modern theory of functional differential equations. Methods and applications], Institute of Computer Research, Moscow, 384 p., ISBN: 5–93972–112–5.
  7. Simonov, N. I. (1957), *Prikladnye metody analiza u Eylera* [Applied methods of analysis by Euler], State Technical and Theoretical Literature Publishing House, Moscow, 167 p.
  8. Faddeev, L. D. and Yakubovskiy, O. A. (1980), *Lektsii po kvantovoy mekhanike dlya studentov-matematikov* [Lectures on quantum mechanics for mathematics students], Leningrad University Press, Leningrad, 200 p.
  9. Abdullaev, A. R. and Plekhova, E. V. (2011), "O spektre operatora Chezaro" [On the spectrum of the Cesaro operator], *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik Povolzh'ya* [Volga Region Scientific and Technical Bulletin], no 4, pp. 33–37, URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17963144&ysclid=mhn3mksm49704551996> (accessed: 06.11.2025).
  10. Plaksina, V. P., Plaksina, I. M. and Plekhova, E. V. (2016), "O razreshimosti zadachi Koshi dlya odnogo kvazilineynogo singulyarnogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya" [On the solvability of the Cauchy problem for a quasilinear singular functional differential equation], *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], no 2, pp. 54–61, URL: <https://mi.mathnet.ru/ivm9082> (accessed: 07.11.2025).
  11. Kungurtseva, A. V. (1995), "Ob odnom klasse kraevykh zadach dlya singulyarnykh uravneniy" [On a class of boundary value problems for singular equations], *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], no. 9, pp. 30–36, URL: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=1802&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=1802&option_lang=rus) (accessed: 07.11.2025).
  12. Plaksina, I. M. (2010), "Ob odnoy model'noy singulyarnoy zadache" [On a model singular problem], *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*. [Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], no. 1, pp. 19–23, URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13361921> (accessed: 07.11.2025).
  13. Hong, H.-K. and Chen, C. H. (1995), "Application of Cesaro mean and the L-curve for the deconvolution problem", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 14, pp. 361–373, URL: [https://doi.org/10.1016/0267-7261\(95\)00003-D](https://doi.org/10.1016/0267-7261(95)00003-D) (accessed: 07.11.2025).
  14. Pommerenke, Ch. (1964), "Linear-invariant Familien analytischer Funktionen I" [Linearly invariant families of analytic functions I], *Mathematische Annalen*, vol. 155, pp. 108–154, URL: <https://doi.org/10.1007/BF01344077> (accessed: 07.11.2025).

15. Starkov, V. V. (2019), *Lineyno-invariantnye semeystva analiticheskikh v krugе funktsiy* [Linearly invariant families of functions analytic in the disk], Petrozavodsk State University Press, Petrozavodsk, 122 p., ISBN: 978–5–8021–3606–5.
16. Bieberbach, L. (1916), "Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln" [On the coefficients of power series that provide a univalent mapping of the unit disk], *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pp. 940–955, URL: [https://books.google.ru/books/about/%C3%9Cber\\_die\\_Koeffizienten\\_derjenigen\\_Poten.html?id=7OuNPgAACAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.ru/books/about/%C3%9Cber_die_Koeffizienten_derjenigen_Poten.html?id=7OuNPgAACAAJ&redir_esc=y) (accessed: 07.11.2025).
17. Kayumov, I. R., Khammatova, D. M. and Ponnusamy, S. (2022), "The Bohr inequality for the generalized Cesàro averaging operators", *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 19, 16 p. URL: <https://doi.org/10.1007/s00009-021-01931-1> (accessed: 07.11.2025).
18. Kayumov, I. R. and Starkov, V. V. (1996), "Estimate of logarithmic coefficients of locally univalent function", in *XVth Rolf Nevanlinna Colloquium*. Berlin, de Gruyter & Co, New York, pp. 239–245, URL: [https://scholar.google.com/citations?view\\_op=view\\_citation&hl=ru&user=342hVIUAAAAJ&cstart=20&pagesize=80&citation\\_for\\_view=342hVIUAAAAJ:NyGDZy8z5eUC](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=ru&user=342hVIUAAAAJ&cstart=20&pagesize=80&citation_for_view=342hVIUAAAAJ:NyGDZy8z5eUC) (accessed: 07.11.2025).
19. Ponnusamy, S., Shmidt, E. S. and Starkov, V. V. (2024), "The Bohr radius and its modifications for linearly invariant families of analytic functions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 533, no 1, 128039.

**Информация об авторе:**

Е. С. Шмидт – аспирант, старший преподаватель кафедры математического анализа, Петрозаводский государственный университет (185910, Россия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, д. 33).

**Information about the author:**

E. S. Shmidt – postgraduate student, senior lecturer, Department of Mathematical Analysis, Petrozavodsk State University (33 Lenin prospect, Petrozavodsk, Russia, 185910).

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 533.6; 534.2; 534.6, PACS 43.55.Dt

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-51-59

<https://elibrary.ru/jmigmy>



**Исследование акустических характеристик резонатора  
экспериментальным методом и численным моделированием**

**Виталий Герасимович Зидыганов<sup>1</sup>, Александр Александрович Синер<sup>2</sup>,  
Виталий Анатольевич Демин<sup>3</sup>**

<sup>1, 2, 3</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

<sup>1, 2</sup> АО "ОДК-Авиадвигатель", Пермь, Россия

<sup>1</sup>[zidyganov-vg@avid.ru](mailto:zidyganov-vg@avid.ru)

<sup>2</sup>[siner@avid.ru](mailto:siner@avid.ru)

<sup>3</sup>[demin@psu.ru](mailto:demin@psu.ru)

**Аннотация.** В работе экспериментально и методом численного моделирования исследуются акустические характеристики резонатора Гельмгольца с использованием двухмикрофонного метода передаточной функции. Эксперимент проводился в лаборатории аэродинамики ПГНИУ на установке, центральным элементом которой является импедансная труба. В рамках эксперимента определялись импеданс и коэффициент звукопоглощения, которые затем сравнивались с результатами математического моделирования, выполненного численно методом конечных элементов в пакете ЛОГОС Аэро-Гидро. В наиболее востребованном для практики диапазоне частот получено удовлетворительное согласие расчетов и экспериментальных данных.

**Ключевые слова:** акустика; звукопоглощающие конструкции; эксперимент.

**Для цитирования:** Зидыганов В. Г., Синер А. А., Демин В. А. Исследование акустических характеристик резонатора экспериментальным методом и численным моделированием // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 51–59. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-51-59. <https://elibrary.ru/jmigmy>.

*Статья поступила в редакцию 10.01.2026; одобрена после рецензирования 06.03.2026; принята к публикации 20.03.2026.*



© Зидыганов В. Г., Синер А. А., Демин В. А., 2026  
Лицензирован по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## MECHANICS

Research article

### The Study of Acoustic Characteristics of a Resonator by Experimental Method and Numerical Simulation

Vitalii G. Zidyganov<sup>1</sup>, Alexander A. Siner<sup>2</sup>, Vitalii A. Demin<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Perm State University, Perm, Russia

<sup>1,2</sup> UEC-Aviadvigatel JSC, Perm, Russia

<sup>1</sup>zidyganov-vg@avid.ru

<sup>2</sup>siner@avid.ru

<sup>3</sup>demin@psu.ru

**Abstract.** This paper examines the acoustic characteristics of a Helmholtz resonator experimentally using a two-microphone transfer function method and numerical modeling. The experiment was conducted in the Perm State University in Aerodynamics Laboratory using a set-up whose central element is an impedance tube. The impedance and sound absorption coefficient were determined during the experiment and then compared with the results of mathematical modeling performed numerically using the finite element method in the LOGOS Aero-Hydro package. Satisfactory agreement between the calculations and experimental data was achieved in the frequency range most commonly used in practice.

**Keywords:** acoustics; sound-absorbing structures; experiment.

**For citation:** Zidyganov, V. G., Siner, A. A. and Demin, V. A. (2026), "The Study of Acoustic Characteristics of a Resonator by Experimental Method and Numerical Simulation", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 51–59, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-51-59, <https://elibrary.ru/jmigmy>.

*The article was submitted 10.01.2026; approved after reviewing 06.03.2026; accepted for publication 20.03.2026.*

#### 1. Постановка задачи

В связи с ужесточением международных требований по шуму на местности для самолетов с турбореактивными двигателями проявляется повышенный интерес к различным мероприятиям, направленным на снижение шума авиадвигателей. Наиболее эффективным средством снижения шума являются резонансные сотовые звукопоглощающие конструкции (ЗПК). При создании звукопоглощающих конструкций авиационного двигателя широко используются резонаторы Гельмгольца. Ячейки сотовых ЗПК представляют собой отдельные резонаторы такого типа.

Для определения акустических характеристик ЗПК существуют различные экспериментальные методы [1–4]. Экспериментальное определение акустических характеристик проводится в акустических интерферометрах, в канале с потоком, в реверберационных камерах. Измерения как правило проводятся в диапазоне частот, при которых в установках распространяются только плоские волны. Экспериментальные значения акустического давления обрабатываются математическими процедурами. В данной работе используется интерферометр с нормальным падением звуковых волн и стандартизированный двухмикрофонный метод передаточной функции [2, 5]. Принципиальная схема интерферометра изображена на рис. 1.

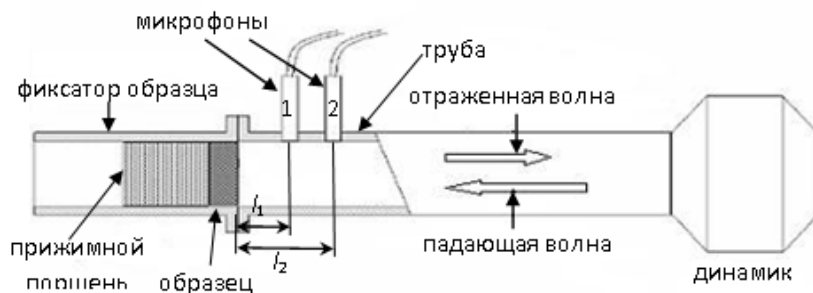


Рис. 1. Схема экспериментальной установки. Импедансная труба

Интерферометр состоит из трубы с толстыми стенками, двух микрофонов, динамика и фиксатора испытуемого образца. В начале трубы установлен динамик, возбуждающий звуковые колебания. В конце трубы закрепляется испытуемый образец ЗПК. Данный экспериментальный метод не позволяет детально проанализировать физические процессы, происходящие внутри резонатора Гельмгольца, и определить в явном виде основные причины затухания звуковых волн, так как наблюдатель эксперимента видит только показания микрофонов в двух точках. Для более детального изучения процесса звукопоглощения в ячейке ЗПК используется прямое численное моделирование, проводимое в коммерческом программном продукте, например, как в работе [6].

Целью данного исследования является определение локальных акустических характеристик ячейки звукопоглощающей конструкции резонансного типа. Для достижения поставленной цели ставятся следующие задачи:

1. Определить экспериментальным методом импеданс и коэффициент поглощения образца ЗПК.
2. Провести трехмерное газодинамическое моделирование звуковых волн в интерферометре в отечественном программном пакете ЛОГОС Аэро-Гидро.
3. Выполнить валидацию расчета по результатам эксперимента при исследовании акустических характеристик одиночного резонатора, включая численную [7].

В качестве объекта исследования взят одиночный резонатор цилиндрической формы, установленный в интерферометр нормального падения. Длина горла и характерный размер полости резонатора должны быть много меньше длины волны, площадь сечения горла должна быть много меньше площади сечения полости. Геометрия одиночного резонатора представлена на рис. 2.

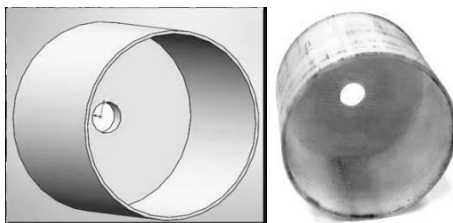


Рис. 2. Резонатор Гельмгольца

В ходе проведения эксперимента динамик возбуждает звуковые колебания с частотами в диапазоне от 500 Гц до 3000 Гц, и записываются значения акустического давления с двух микрофонов, расположенных, как показано на рис. 1. Затем с помощью стандартизированного двух-микрофонного метода передаточной функции определяются, соответственно, коэффициент отражения, импеданс и коэффициент звукопоглощения [2, 5] по формулам:

$$R(f_k) = \frac{H_{21}(f_k) - e^{-i\frac{2\pi f_k}{c}(l_2-l_1)}}{e^{i\frac{2\pi f_k}{c}(l_2-l_1)} - H_{21}(f_k)} e^{2i\frac{2\pi f_k l_2}{c}}$$

$$Z(f_k) = \frac{1 + R(f_k)}{1 - R(f_k)}, k = 0..N - 1$$

$$\alpha = 1 - |R|^2.$$

Здесь  $H_{21}$  – передаточная функция,  $f_k$  – значение частоты,  $k$  – индекс соответствующий частоте,  $c$  – скорость звука,  $l_1, l_2$  – расстояния до микрофонов (см. рис. 1).

## 2. Методика расчета

Многофункциональный программный комплекс ЛОГОС, разработанный в ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", предназначен для численного моделирования процессов, протекающих при рассмотрении аэро- и гидродинамики, тепломассопереноса, статической, динамической и вибрационной прочности и разрушения, электродинамики, а также для проведения сопряженных или связанных мультидисциплинарных расчетов.

Нестационарное течение вязкого сжимаемого теплопроводного газа в ПО ЛОГОС Аэро-Гидро описывается системой уравнений Навье–Стокса, которая в интегральной форме в декартовой системе координат записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint W dV + \iint [\vec{F} - \vec{G}] \cdot \vec{dS} = 0$$

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, F_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{pmatrix},$$

$$F_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{pmatrix}, F_z = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{pmatrix}$$

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \\ q_x + \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w \end{pmatrix},$$

$$G_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zy} \\ q_y + \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w \end{pmatrix},$$

$$G_z = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ q_z + \tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w \end{pmatrix},$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости,  $E$  – полная энергия,  $\tau_{ij}$  – компоненты тензора вязких напряжений,  $q_i$  – компоненты вектора теплового потока,  $E = H - \frac{p}{\rho}$  – полная энергия, в которую входит

$$H = h + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$$

полная энтальпия; где  $h = C_p T$  – энтальпия,  $p$  – давление,  $C_p$  – теплоемкость при постоянном давлении.

Система уравнений Навье–Стокса замыкается уравнением состояния  $\rho = \rho(p, T)$ , где  $T$  – температура. В расчетах для замыкания задачи использовалось уравнение состояния идеального газа с материальными константами, соответствующими воздуху.

В расчетах использовались два подхода: прямое численное моделирование и модель турбулентности SST. Неструктурированная сетка содержала 4 млн узлов и изображена на рис. 3.

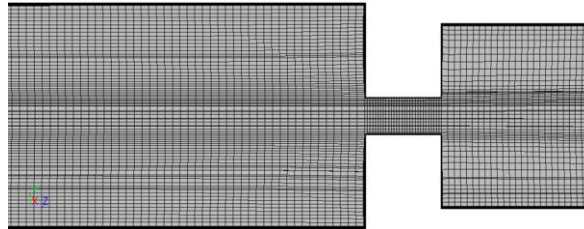


Рис 3. Расчетная сетка

На входе в расчетную область задается сигнал в виде давления, зависящего от времени, изображенный на рис. 4.

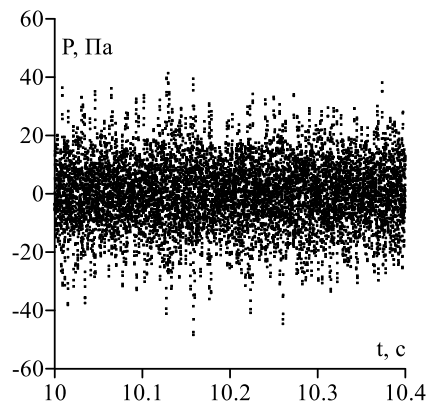


Рис 4. Фрагмент сигнала на входе

Амплитуда сигнала составляла примерно 40 Па, что соответствует реальному экспериментальному значению.

### 3. Результаты

Полученные результаты численных расчетов сравниваются с экспериментальными данными. На рис. 5 представлена зависимость коэффициента поглощения звукового сигнала  $\alpha$  для разных частот.

График коэффициента поглощения показывает, на какой частоте лучше всего работает резонатор. Видно, что обе зависимости имеют характерный максимум, что говорит о том,

что расчет отражает свойства используемого резонатора поглощать звук наиболее эффективно на частоте порядка 700 Гц.

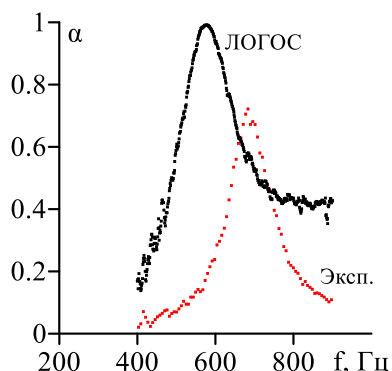


Рис. 5. Зависимость коэффициента поглощения от частоты звука

Экспериментальные и расчетные данные по импедансу изображены на рис. 6 для разных значений частоты. Видно, что максимум данной величины также воспроизводится в ходе численного моделирования.

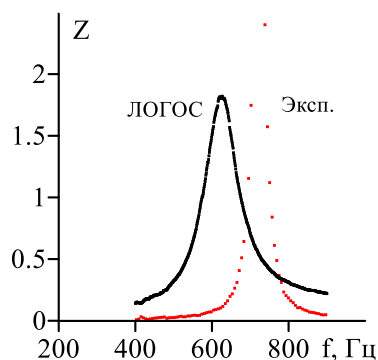


Рис. 6. Зависимость импеданса от частоты звука

При более высоких частотах наблюдается большой разброс результатов численного моделирования и экспериментальных данных как для коэффициента поглощения, так и импеданса. Причину столь высокого разброса на данный момент выявить не удалось. Требуется дальнейшие исследования.

На рис. 7 изображено поле давления в осевом сечении для момента времени  $t = 0.4$  сек в ходе численного моделирования. Видно, что с хорошей точностью фронт волны является плоским, т.е. имеет место одномерная продольная звуковая волна.



Рис. 7. Поле давления в импедансной трубе и резонаторе



Рис. 8. Поле температуры в импедансной трубе и резонаторе

Несмотря на наложение условия адиабатичности стенок в ходе расчетов, при прохождении звуковой волны в соответствии с ожиданиями наблюдаются колебания температуры. На рис. 8 изображено поле температуры в осевом сечении при  $t = 0.4$  сек. Видно, что температурная бегущая волна полностью повторяет поле давления.

Этот результат хорошо согласуется с простым аналитическим выражением, справедливым для плоских звуковых волн, согласно которому осцилляции давления  $p'$  и температуры  $T'$  однозначно связаны друг с другом следующим известным соотношением [8]:

$$T' = \frac{\beta T}{\rho C_p} p'.$$

Здесь  $\beta$  – коэффициент теплового расширения,  $T$  – абсолютная температура.

По результатам численного моделирования на рис. 9 изображена продольная по оси  $Z$  компонента скорости в осевом сечении для момента времени  $t = 0.4$  сек.

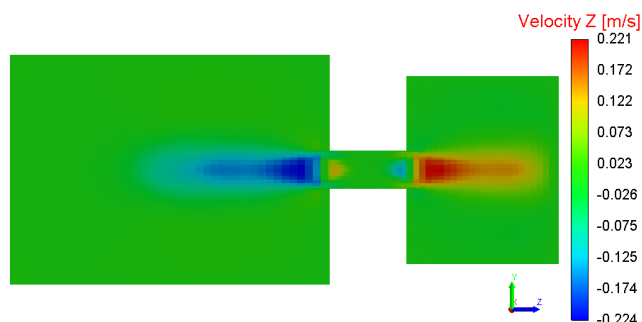


Рис. 9. Компонента скорости по оси  $Z$

Как и ожидалось, максимум по модулю скорости наблюдается в горле резонатора. Видно, что в данный момент времени воздух через отверстие преимущественно поступает в резонатор. Однако не будем забывать, что уравнения гидродинамики рассматриваются применительно к сжимаемой среде. Дивергенция скорости не равна нулю, поэтому вполне естественно, что плотность газа в резонаторе будет меняться периодически вблизи некоторого среднего значения.

#### 4. Заключение

Таким образом, расчеты показывают, что программное обеспечение ЛОГОС Аэро-Гидро неплохо описывает эффект поглощения звука резонатором Гельмгольца, установленным в импедансной трубе, в случае их реалистичных размеров и при наложении практически реализуемых граничных условий. А именно, в ходе численного моделирования воспроизводятся максимумы на графиках коэффициента поглощения звука и импеданса

в зависимости от частоты. Наблюдаемое расхождение между частотами, соответствующими максимумам импеданса и коэффициента звукопоглощения в численном моделировании и натурном эксперименте, вероятно обусловлено двумя основными факторами. Во-первых, в рамках численной модели не удалось точно воспроизвести пространственно-временные характеристики падающей акустической волны, реализованные в экспериментальных условиях. Во-вторых, в расчетах не учитывались термодинамическое взаимодействие между газом и стенками импедансной трубы, в частности – теплообмен, который может существенно влиять на локальные акустические свойства среды и, как следствие, – на резонансное поведение системы.

#### Список источников

1. Комкин А.И. Методы измерения акустических характеристик звукопоглощающих материалов // Измерительная техника. 2003. № 3. С. 47–50.
2. Chung J. Y., Blaser D. A. Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I. Theory // Journal of acoustical society of America. 1980. Vol. 68, № 3.
3. Dean P. An in-situ method of wall acoustic impedance measurement in flow ducts // Journal of sound and vibration. 1974. Vol. 34, № 1. P. 97–130.
4. Jones M. G., Watson W. R., Nark D. M., Parrot T. L., Gerhold C. H., Brown M. C. Development of experimental and computational aeroacoustic tools for advanced liner evaluation // INTE-NOISE, 2006, 3-6 December, Honolulu, Hawaii, USA.
5. ISO 10534-2, Acoustics – Determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes – Part 2: Transfer-function method.
6. Колегов Р. Н., Синер А. А., Любимова Т. П., Усанин М. В. Расчет ячейки звукопоглощающей конструкции в установке "Импедансная труба" с помощью коммерческого газодинамического пакета ANSYS FLUENT // Сборник трудов Научной конференции "Сессия Научного совета РАН по акустике и XXVII сессия Российского акустического общества", посвященной памяти ученых-акустиков ФГУП "Крыловский государственный научный центр" А. В. Смольякова и В. И. Попкова, на CD. 2014.
7. Синер А. А., Русаков С. В., Сипатов А. М., Усанин М. В. Об одном подходе к решению обратных задач акустики турбомашин // Ученые записки ЦАГИ. Т. 41, № 1. 2010. С. 53–58.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики, Т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001.

#### References

1. Komkin, A. I. (2003), "Metody izmereniya akusticheskikh kharakteristik zvukopogloshchayushchikh materialov" [Methods for measuring acoustic characteristics of sound-absorbing materials], *Izmeritel'naya tekhnika* [Measurement Techniques], no 3, pp. 47–50.
2. Chung, J. Y. and Blaser, D. A. (1980), "Transfer function method of measuring induct acoustic properties. I. Theory", *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 68, no 3.
3. Dean, P. (1974), "An in-situ method of wall acoustic impedance measurement in flow ducts", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 34, no 1, pp. 97–130.
4. Jones, M. G., Watson, W. R., Nark, D. M., Parrot, T. L., Gerhold, C. H. and Brown, M. C. (2006), "Development of experimental and computational aeroacoustics tools for advanced liner evaluation", in *INTER-NOISE 2006*, Honolulu, Hawaii, USA, 3–6 December.

5. ISO 10534-2 (1998) *Acoustics — Determination of sound absorption coefficient and impedance in impedance tubes — Part 2: Transfer-function method.*
6. Kolegov, R. N., Siner, A. A., Lyubimova, T. P. and Usanin, M. V. (2014), "Расчет ячейки звукопоглощающей конструкции в установке "Импедансная труба" с помощью модуля коммерческого газодинамического пакета ANSYS FLUENT" [Calculation of a sound-absorbing structure cell in an "Impedance tube" setup using the commercial gas dynamics package ANSYS FLUENT], in *Sbornik trudov Nauchnoy konferentsii "Sessiya Nauchnogo soveta RAN po akustike i XXVII sessiya Rossiyskogo akusticheskogo obshchestva"* [Proceedings of the Scientific Conference "Session of the RAS Scientific Council on Acoustics and 27th Session of the Russian Acoustical Society"], dedicated to the memory of acousticians A. V. Smolyakov and V. I. Popkov from Krylov State Research Centre. On CD.
7. Siner, A. A., Rusakov, S. V., Sipatov, A. M. and Usanin, M. V. (2010), "Об одном подходе к решению обратных задач акустики турбомашин" [On one approach to solving inverse problems of turbomachine acoustics], *Uchenye zapiski TsAGI* [TsAGI Science Journal], vol. 41, no. 1, pp. 53–58.
8. Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (2001), *Kurs teoreticheskoy fiziki, T. 6: Gidrodinamika* [Course of theoretical physics, Vol. 6: Hydrodynamics], Fizmatlit, Moscow.

**Информация об авторах:**

В. Г. Зидыганов – аспирант физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), инженер-конструктор-расчетчик АО "ОДК-Авиадвигатель" (614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 93);

А. А. Синер – кандидат физико-математических наук; доцент физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), начальник отдела АО "ОДК-Авиадвигатель" (614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 93);

В. А. Демин – доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой теоретической физики физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15).

**Information about the authors:**

V. G. Zidyganov — Postgraduate Student at the Institute of Physics and Mathematics, Perm State University (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068), Design and Calculation Engineer at JSC "UEC-Aviadvigatel" (93 Komsomolsky Avenue, Perm, Russia, 614990);

A. A. Siner — Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor at the Institute of Physics and Mathematics, Perm State University (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068), Head of Department at JSC "UEC-Aviadvigatel" (93 Komsomolsky Avenue, Perm, Russia, 614990);

V. A. Demin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Head of the Department of Theoretical Physics at the Institute of Physics and Mathematics, Perm State University (15 Bukireva Street, Perm, Russia, 614068).

Научная статья

УДК 617-089-03:610.355.2:519.6

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-60-71

<https://elibrary.ru/lhjxus>



## Разработка композитной полифиламентной хирургической нити с регулируемым сроком биodeградации

Виктория Владимировна Чихачева<sup>1</sup>, Станислав Васильевич Словиков<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

<sup>1</sup>[vchixacheva@bk.ru](mailto:vchixacheva@bk.ru)

<sup>2</sup>[sslovikov@yandex.ru](mailto:sslovikov@yandex.ru)

**Аннотация.** В работе представлены результаты разработки и комплексного исследования композитной полифиламентной хирургической нити с регулируемым сроком биodeградации. Экспериментально изучены механические свойства единичного волокна и жгута, разработана математическая модель биodeградации, основанная на изменении площади поперечного сечения нити и толщины полимерного покрытия. Подобран оптимальный состав гибридного покрытия, обеспечивающий контролируемое рассасывание в диапазоне 15–30 суток. Методом конечно-элементного моделирования определены оптимальные параметры наложения шва на кожу, минимизирующие риск повреждения тканей. Проведен сравнительный анализ разработанной нити с коммерческими аналогами, показавший ее преимущества в возможности точной настройки срока деградации и высоких прочностных характеристик. Результаты работы могут быть использованы для производства новых высокоэффективных шовных материалов для пластической, детской и общей хирургии.

**Ключевые слова:** хирургическая нить; полифиламентная структура; биodeградация; полимерное покрытие; математическое моделирование; механические испытания; прочность; биосовместимость.

**Для цитирования:** Чихачева В. В., Словиков С. В. Разработка композитной полифиламентной хирургической нити с регулируемым сроком биodeградации // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 60–71. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-60-71. <https://elibrary.ru/lhjxus>.

Статья поступила в редакцию 27.09.2025; одобрена после рецензирования 04.12.2025; принята к публикации 10.03.2026.



© Чихачева В. В., Словиков С. В., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

## Development of a Composite Polyfilament Surgical Suture With Controlled Biodegradation Period

Viktoriya V. Chikhacheva<sup>1</sup>, Stanislav V. Slovikov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

<sup>1</sup>vchixacheva@bk.ru

<sup>2</sup>sslovikov@yandex.ru

**Abstract.** The paper presents the results of the development and comprehensive study of a composite polyfilament surgical suture with a controlled biodegradation period. The mechanical properties of a single filament and a bundle were experimentally investigated. A mathematical model of biodegradation was developed, based on the changes in the cross-sectional area of the suture and the thickness of the polymer coating. An optimal composition of a hybrid coating was selected, providing controlled resorption within 15–30 days. Using finite element modeling, the optimal parameters of skin suturing were determined, minimizing the risk of tissue damage. A comparative analysis of the developed suture with commercial analogues has been carried out, which demonstrated its advantages in terms of the possibility of precise adjustment of the degradation period and high strength characteristics. The results of the work can be used for the production of new highly effective suture materials for plastic, pediatric, and general surgery.

**Keywords:** *surgical suture; polyfilament structure; biodegradation; polymer coating; mathematical modeling; mechanical testing; strength; biocompatibility.*

**For citation:** Chikhacheva, V. V. and Slovikov, S. V. (2026), "Development of a Composite Polyfilament Surgical Suture With Controlled Biodegradation Period", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 60–71. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-60-71, <https://elibrary.ru/lhjxus>.

*The article was submitted 27.09.2025; approved after reviewing 04.12.2025; accepted for publication 10.03.2026.*

### Введение

Современная хирургия предъявляет высокие требования к шовным материалам. Они должны обладать высокой прочностью, надежностью, удобством в работе, биосовместимостью, а в случае рассасывающихся материалов – контролируемым и предсказуемым сроком биодegradации [1–3]. Несмотря на широкий ассортимент, многие коммерческие нити имеют фиксированные, часто неоптимальные сроки рассасывания: слишком короткие сроки могут привести к преждевременному расхождению краев раны, а слишком длинные – спровоцировать образование колоний бактерий (воспаление) или образование грубых рубцов [4, 5].

Разработка современных хирургических шовных материалов направлена на создание биосовместимых, высокопрочных и минимально травматичных нитей с контролируемым сроком рассасывания.

Особый интерес представляют полифиламентные нити, которые за счет своей структуры обладают высокой прочностью на разрыв, гибкостью и хорошими манипуляционными свойствами [6, 7]. Однако их существенным недостатком является "пилящий эффект", когда жесткая структура нити травмирует ткани при наложении шва. Решение этой проблемы заключается в нанесении полимерного покрытия, которое также может служить инструментом для управления временем биодegradации [8, 9].

Целью данного исследования является разработка композитной полифиламентной хирургической нити с регулируемым сроком биодеградации, обеспечивающей высокую прочность, биосовместимость и минимальное травмирование тканей за счет оптимизации состава полимерного покрытия и структуры нити.

Задачи исследования:

1. Экспериментальное определение механических характеристик единичного волокна полифиламентной нити.
2. Моделирование и анализ прочностных свойств полифиламентного жгута заданной структуры.
3. Разработка математической модели биодеградации, связывающая время рассасывания с геометрическими параметрами нити и покрытия.
4. Подбор и обоснование состава гибридного полимерного покрытия с контролируемой скоростью деградации [8, 10].
5. Конечно-элементарное моделирование процесса наложения шва для определения параметров, минимизирующих повреждение тканей.
6. Сравнительный анализ разработанной нити с существующими коммерческими аналогами [4, 11, 12].

Экспериментальная часть работы выполнена на базе Центра экспериментальной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (ЦЭМ ПНИПУ).

### 1. Механические испытания полигликолидных волокон

В данной работе экспериментальные исследования проводились на универсальной испытательной системе Instron 5965 в соответствии с рекомендациями стандартов для испытания тонких полимерных волокон [1, 3, 13, 13]. Испытанию подвергались отдельные волокна полифиламентной полигликолидной нити. Скорость перемещения траверсы составляла 10 мм/мин. Для визуализации и измерения диаметра волокон использовался модульный стереомикроскоп ZEISS SteREO Discovery.V12 с моторизованным 12-кратным увеличением [15]. Получены диаграммы растяжения волокон (рис. 1).

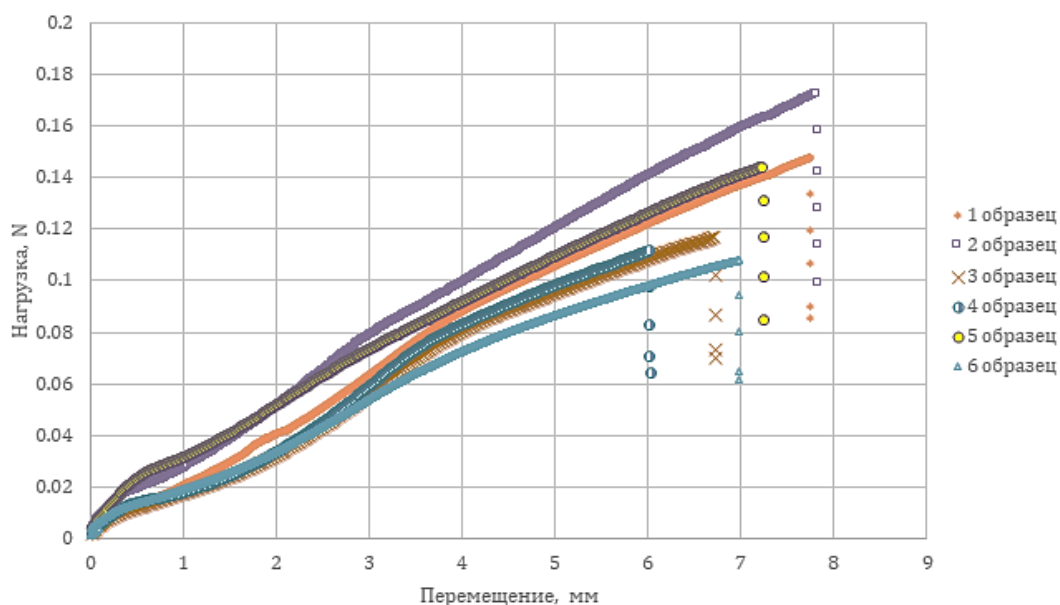


Рис. 1. График зависимости "Нагрузка (Н) – Перемещение (мм)"

## 2. Моделирование и анализ прочностных свойств полифиламентного жгута

По результатам испытаний и определенных основных геометрических и механических параметров волокон (средний диаметр, модуль упругости, предел прочности) была построена геометрическая модель жгута, состоящего из 19 волокон с соответствующими усредненными механическими характеристиками. Моделирование в системе ANSYS (рис. 2) показало его высокую несущую способность. Диаграмма нагружения жгута демонстрирует линейное упругое поведение вплоть до разрушения при нагрузке  $F_{\text{жгута}} = 28 \text{ Н}$  [2].

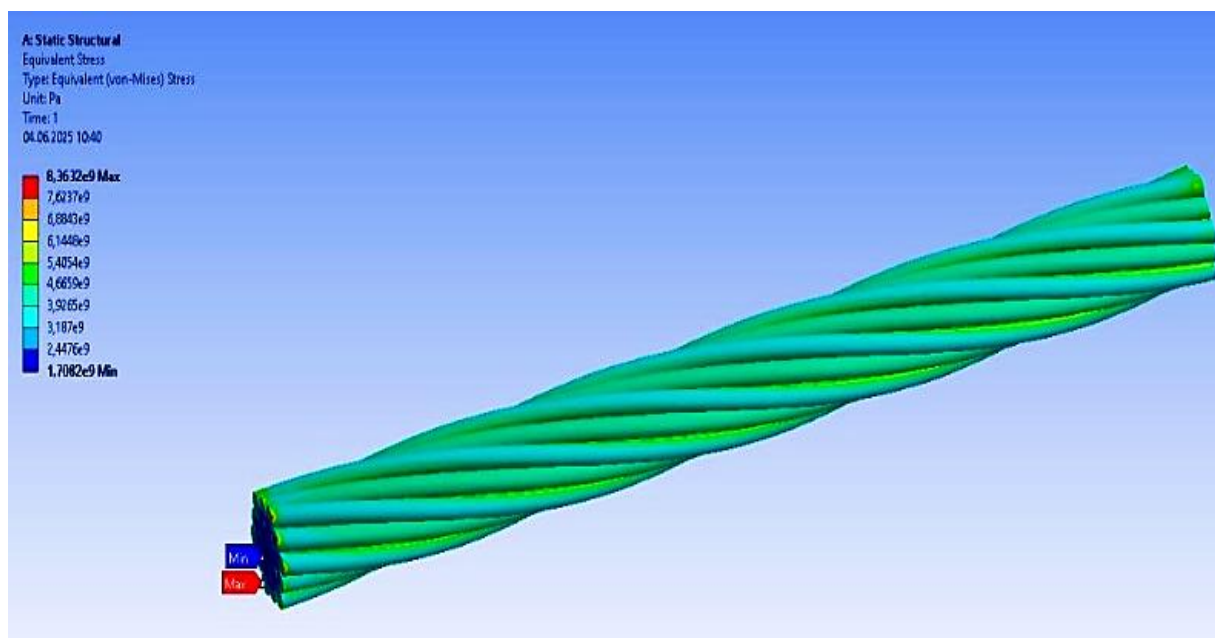


Рис. 2. Моделирование жгута из волокон в системе ANSYS

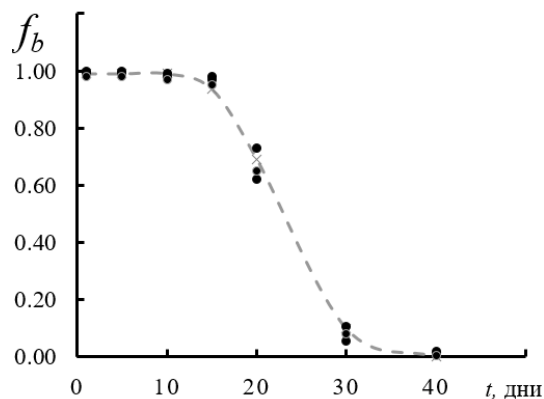
Расчетная прочность канатной структуры значительно превышает необходимые для хирургической практики нагрузки (до 5Н) обеспечивая шестикратный запас прочности.

## 3. Математическая модель биодеградации

Для анализа процессов биодеградации полигликолидного волокна в ЦЭМ ПНИПУ была проведена серия экспериментов по определению предела прочности ( $\sigma_B$ ) полигликолидных пучков волокон (нитей) эффективного диаметра 0,3 мм, выдержанных в изотоническом растворе натрия хлорида в концентрации 0,9 %-ной дистиллированной воды при 37 С. Если принять гипотезу о линейной связи предела прочности нити с эффективной площадью сечения пучка волокон, то из результатов испытаний имеем нормированную функцию биодеградации ( $f_b$ ) (рис. 3):

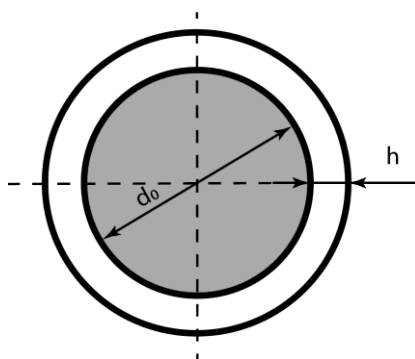
$$f_b = \frac{\sigma_B^i}{\sigma_B^0}, \quad (1)$$

где  $\sigma_B^i$  – предел прочности выдержанного в растворе пучка волокон  $i$ -го эксперимента,  $\sigma_B^0$  – среднее значение предела прочности сухого пучка волокон (нити).



**Рис. 3.** Нормированные результаты испытаний на растяжения полигликолидных нитей, выдержанных в изотоническом растворе

Конструкция композитной нити представляет собой сердцевину в виде жгута из полигликолидных волокон в полимерной оболочке. Ее сечение схематично может быть представлено так, как показано на рис. 4.



**Рис. 4.** Схема конструкции композитной нити (\$d\_0\$ – диаметр пучка полигликолидных волокон, \$h\$ – толщина полимерной оболочки)

Для прогнозирования срока рассасывания нити разработана математическая модель, учитывающая площадь поперечного сечения и свойства полимерного покрытия. Модель описывается кусочно-заданной функцией (2):

$$A(t) = \begin{cases} \frac{\pi d_{total}^2}{4}, & \text{если } 0 \leq t \leq t_{const}, \\ A_{total} - \left(\frac{\pi(0,3-2h)^2}{4T}\right) * (t - t_{const}), & \text{если } t_{const} < t \leq (t_{const} + T), \\ 0, & \text{если } t > (t_{const} + T). \end{cases} \quad (2)$$

где:

\$A(t)\$ – площадь поперечного сечения в момент времени \$t\$,

\$h\$ – толщина полимерного покрытия,

\$t\_{const}\$ – время деградации покрытия,

\$T\$ – время полной деградации внутреннего волокна без учета покрытия,

\$A\_{total}\$ – Общая начальная площадь поперечного сечения нити (с покрытием).

Представленная кусочно-линейная модель (2) является упрощением, основанным на гипотезе о постоянной скорости убывания площади сечения. Однако реальный

процесс гидролитической деградации полимерных волокон имеет выраженную нелинейную кинетику, обусловленную рядом физических факторов [16].

**Автокаталитический эффект:** Продукты распада полимеров (например, карбоновые кислоты при гидролизе PGA и PLA) снижают локальный pH, что, в свою очередь, ускоряет дальнейший гидролиз. Это приводит к нелинейному, зачастую ускоренному, разрушению материала изнутри после достижения определенной степени конверсии.

**Зависимость скорости от площади поверхности:** Скорость гидролиза пропорциональна площади контакта полимера с водной средой. В начальный период, пока покрытие цело, эта площадь минимальна. После разрушения покрытия и появления микродефектов в волокне площадь реакционной поверхности резко возрастает, что ведет к ускорению деградации. На финальной стадии, когда сечение становится малым, скорость процесса вновь может снижаться.

**Накопление повреждений и их синергетический эффект:** Случайное возникновение и рост микропор и трещин снижают нагрузочную способность волокна непропорционально потерям массы. Небольшое уменьшение площади сечения может приводить к значительному (нелинейному) росту механических напряжений в оставшемся материале, ускоряя его разрушение.

Для учета этих эффектов предложена обобщенная экспоненциально-степенная функция биodeградации (3), которая является решением кинетического уравнения с переменным (зависящим от текущего состояния) порядком реакции:

$$fb(t) = A_0 \cdot e^{-\alpha \cdot [\max(0, t-t_0)]^\beta}, \text{ если } t \geq t_0, \quad (3)$$

где:

$\alpha$  – коэффициент скорости деградации. Чем он выше, тем быстрее идет разрушение;

$\beta$  – коэффициент интенсивности деградации. Отражает "форму" кривой разрушения (замедленное/ускоренное);

$t_0$  – время начала деградации.

В данной параметризации:

Параметр  $\alpha$  является обобщенной константой скорости деградации, агрегирующей влияние химического состава полимера, температуры и pH среды.

Параметр  $\beta$  отражает степень нелинейности (кооперативности) процесса. При  $\beta > 1$  модель описывает ускоренную деградацию (автокатализ, быстрый рост площади поверхности), характерную для внутренних зон пучка. При  $\beta < 1$  модель описывает замедленную деградацию, например, на начальном этапе при защите покрытием или на финальной стадии.

Время  $t_0$  соответствует индукционному периоду, в течение которого происходит набухание полимера и разрушение защитного покрытия до начала активной деградации основного волокна.

Таким образом, модель (3) не является просто математической "подгонкой", а представляет собой феноменологическое описание, учитывающее ключевые физико-химические механизмы нелинейной биodeградации полифиламентных структур. Она позволяет более адекватно, чем линейная модель, описать изменение прочностных свойств нити во времени, особенно на критической стадии, предшествующей полному разрушению.

Для результатов экспериментов, представленных на рис. 3, параметры модели (3) могут быть получены методом наименьших квадратов. Значения полученных параметров представлены в табл.1 ( $R^2 = 0.98$ ).

**Таблица 1.** Пример параметров модели деградации полигликолидного пучка волокон диаметром 0,3 мм

Параметр	$A_0$	$t_0$	$T$	$\alpha$	$\beta$
Значение, ед.	0.99	10	40	0.00065	2.77

График экспоненциально-степенной модели деградации по параметрам из табл. 1 представлен на рис. 3 пунктирной линией.

Таким образом, данная модель позволяет адекватно описать изменение прочностных свойств нити во времени, особенно на критической стадии, предшествующей полному разрушению.

#### 4. Разработка гибридного полимерного покрытия

В результате проведенных исследований было подобрано гибридное покрытие на основе комбинации полигликолевой кислоты (PGA, 60–70%), крахмала (25–35%) и полимолочной кислоты (PLA, 5–10 %) [8, 17, 10]. Был вычислен оптимальный состав, обеспечивающий деградацию покрытия за 5–7 суток и общее время рассасывания нити 15–30 суток (табл. 2). Такой состав позволяет за счет быстрого гидролиза PGA и крахмала создать пористую структуру, обеспечивающую доступ гидролитических агентов к сердечнику, в то время как PLA обеспечивает необходимую начальную механическую прочность и замедляет процесс для предотвращения слишком раннего ослабления шва [9, 18, 19].

**Таблица 2.** Преимущество гибрида по сравнению с отдельными компонентами

Компонент	Преимущества	Недостатки	Как гибрид их устраняет
PLA	Высокая прочность, медленная деградация (до 2 лет)	Жесткость, риск воспаления из-за длительного рассасывания	Крахмал и PGA ускоряют деградацию, снижая жесткость
PGA	Быстрое рассасывание (30–90 дней), хорошая эластичность	Хрупкость, кислая среда при распаде (риск воспаления)	PLA нейтрализует кислотность, крахмал смягчает хрупкость
Крахмал	Дешевизна, биосовместимость, ускорение деградации	Низкая прочность, гидролитическая нестабильность	PLA и PGA стабилизируют структуру, предотвращая преждевременное разрушение

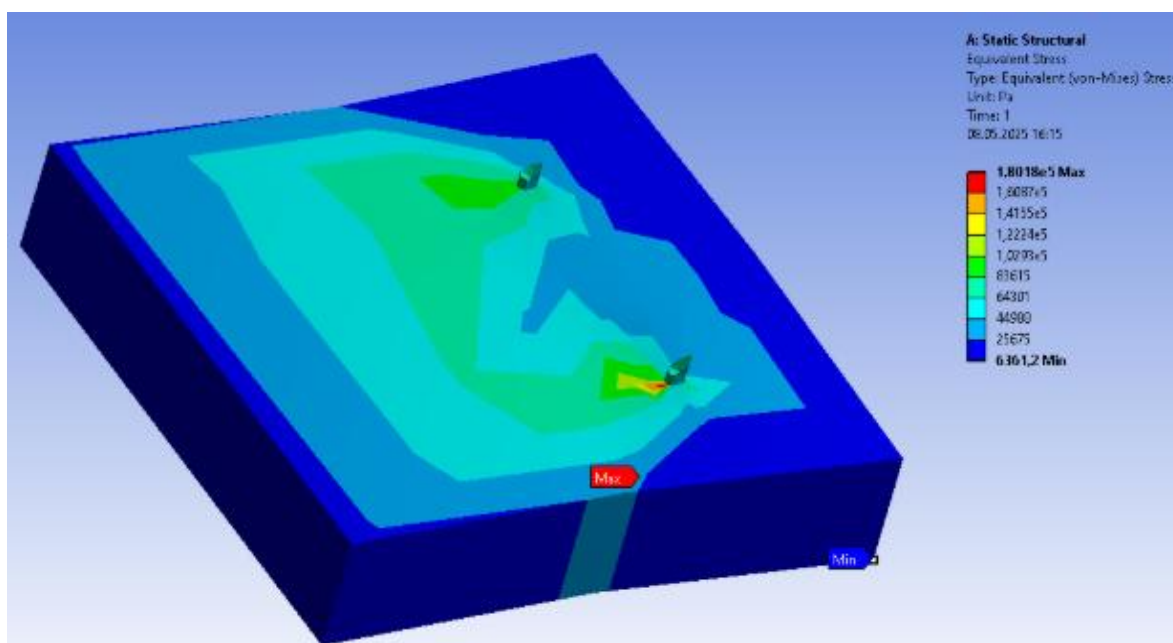
#### 5. Моделирование хирургического сшивания кожи

В программном комплексе ANSYS проведено моделирование процесса наложения шва для определения параметров ушивания, минимизирующих риск разрыва ткани. Моделировался процесс стягивания квадратного лоскута биологической ткани (10 x 10 x 0,2 мм) с различным количеством нитей, усилием натяжения и расстоянием шва от края лоскута [20]. В ходе численного исследования анализировалось влияние количества нитей на единицу длины шва, усилия натяжения, расстояния от края ткани и предложено оптимальное количество стежков для предотвращения разрыва ткани (табл. 3.).

**Таблица 3.** Рекомендации для предотвращения разрушения ткани в результате использования нити

Диаметр нити, мм	0,3															
Тип ткани	Кожа толщиной 0,2 мм															
Ориентировочное усилие утягивания тканей, Н	0,1		0,5			1			2				3			
Оценочное расстояние от края, мм	1	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4
Рекомендуемое количество стежков на 10 мм длины шва	2	1	3	2	1	5	3	2	6	4	2	1	7	5	2	1

Пример распределения эквивалентных напряжений по Мизесу для оптимального случая представлен на рис. 5 [8, 20].



**Рис. 5.** Распределение напряжений при наложении шва (2 нити, усилие 1Н, расстояние 3 мм от края)

## 6. Сравнительный анализ и рекомендации

Ключевым преимуществом разработанной нити является возможность регулирования срока биодеградации в диапазоне, критически важном для временных швов (15–30 суток), в то время как большинство аналогов имеют фиксированные и более длительные сроки [4, 11, 12]. При этом нить не уступает, а по некоторым параметрам превосходит аналоги по прочности. В табл. 4 представлен сравнительный анализ разработанной нити с коммерческими аналогами. Это делает нить перспективной для применения в разных областях хирургии, где требуется кратковременная, но надежная фиксация тканей с последующим быстрым и полным рассасыванием.

**Таблица 4.** Сравнительный анализ разработанной нити с аналогами диаметром 0,3 мм

Параметр	Разработанная нить (PLA+крахмал+PGA)	Vicryl (PGA+PLA)	PDS II (Полидиоксанон)	Махон (Полигликонат)	Polysorb (PGA+PLA)
Скорость деградации	15–30 дней (регулируемая)	50–70 дней	180–210 дней	180–210 дней	56–70 дней
Прочность на разрыв	23–27 Н	20–25 Н	18–22 Н	25–30 Н	22–26 Н
Контроль деградации	Точная настройка	Фиксированный	Фиксированный	Фиксированный	Фиксированный

Практические рекомендации для применения разработанной композитной нити:  
Области использования: пластическая хирургия, детская хирургия, временные швы (15–30 дней).

Параметры хирургического шва: диаметр нити 0,3 мм. усилие натяжения 1–2 Н, расстояние от края 2–3 мм, 3–5 стежков на 1 см длины шва.

## 7. Выводы

В ходе проведенного исследования была разработана композитная полифиламентная хирургическая нить с гибридным полимерным покрытием (PGA 60–70 %, крахмал 25–35 %, PLA 5–10 %), обеспечивающим регулируемый срок биодеградации в диапазоне 15–30 суток, что критически важно для временных швов в пластической, детской и общей хирургии. Экспериментально определены механические характеристики единичного полигликолидного волокна и жгута из 19 волокон: расчётная прочность жгута составляет 28 Н, что обеспечивает шестикратный запас прочности относительно типовых хирургических нагрузок до 5 Н. Для прогнозирования срока службы разработана и верифицирована математическая модель биодеградации на основе экспоненциально-степенной функции с коэффициентом детерминации  $R^2 = 0,98$ , учитывающая нелинейную кинетику гидролитической деградации, автокаталитический эффект и накопление повреждений. Оптимизированный состав гибридного покрытия устраняет недостатки отдельных компонентов: PLA обеспечивает начальную механическую прочность, тогда как PGA и крахмал ускоряют деградацию и снижают жесткость, минимизируя риск воспаления и «пилящего эффекта».

Методом конечно-элементного моделирования определены оптимальные параметры наложения шва, минимизирующие риск разрыва ткани: усилие натяжения 1–2 Н, расстояние от края ткани 2–3 мм и 3–5 стежков на 1 см длины шва. Сравнительный анализ подтвердил преимущества разработанной нити перед коммерческими аналогами, а именно: возможность точной настройки срока деградации и оптимальный срок рассасывания для кратковременной фиксации тканей.

## Список источников

1. Бонцевич Д. Н. Хирургический шовный материал. М.: Интеграция, 2005. 118 с.
2. Третьяк С. И., Маркевия Е. В. Хирургический шовный материал: метод. рекомендации. Минск: БГМУ, 2012. 56 с.
3. Федоров А. Е., Самарцев В. А., Гаврилов В. А. и др. Экспериментальное исследование механических свойств современных хирургических

- рассасывающихся шовных материалов // Российский журнал биомеханики. 2009. № 4. С. 78–84.
4. Хирургические нити "Викрил Рапид" Vicryl Rapide [Электронный ресурс] // ЛегасиМед. URL: <https://www.legmed.ru/catalogue/?section=27> (дата обращения: 15.04.2025).
  5. Шадрин В. В., Тепликов А. В. Манипуляционные свойства хирургических нитей // Российский журнал биомеханики. 2001. Т. 5, № 3. С. 41–50.
  6. Altman G. H., Diaz F., Jakuba C., Calabro T., et al. Silk-based biomaterials // Biomaterials. 2003. Vol. 24. P. 1141–1148.
  7. Bezwada R. S., Jamiolkowski D. D., Lee I.-Y., et al. Monocryl suture, a new ultra-pliable absorbable monofilament suture // Biomaterials. 1995. Vol. 16. P. 401–416.
  8. Биоразлагаемые полимеры в медицине: технологии, рынок [Электронный ресурс] // ИХТЦ Химические технологии. URL: [https://ect-center.com/blog/biopolymers\\_for\\_medical\\_materials](https://ect-center.com/blog/biopolymers_for_medical_materials) (дата обращения: 20.11.2024).
  9. Костин А. А., Зубков И. Н., Непомнящий А. П. и др. Биоразлагаемые антимикробные пленки как материалы для упаковки скоропортящейся продукции // Все о мясе. 2020. № 55. С. 160–163.
  10. Суворова А. И., Тюкова И. С., Труфанова Е. И. Биоразлагаемые полимерные материалы на основе крахмала // Успехи химии. 2000. № 5. С. 494–504.
  11. Шовный материал в хирургии: классификация, свойства и современные требования [Электронный ресурс] // Волоть. URL: [https://www.volot.ru/info/stati/shovnyj\\_material/](https://www.volot.ru/info/stati/shovnyj_material/) (дата обращения: 15.06.2024).
  12. Реферат на тему: Хирургический шовный материал [Электронный ресурс]. URL: <https://pandia.ru/text/78/019/92957.php> (дата обращения: 24.06.2024).
  13. ГОСТ Р 53005-2008. Материалы хирургические шовные. Общие технические требования. Методы испытаний.
  14. Genda Chen. Instron 5965 dual column tabletop testing system [Электронный ресурс] // SPAR Lab Director. URL: <https://spar.mst.edu/media/research/spar/documents/SPAR%20Lab%20Poster%200-%20%20Instron%205965%20Load%20Frame.pdf> (дата обращения: 20.06.2024).
  15. ZEISS SteREO Discovery. V12. Ваш модульный стереомикроскоп с моторизованным 12-кратным увеличением [Электронный ресурс] // ZEISS. URL: <https://www.zeiss.com/microscopy/en/products/light-microscopes/stereo-and-zoom-microscopes/stereo-discovery-v12.html> (дата обращения: 20.06.2024).
  16. Богданова О. И., Седуш Н. Г., Овчинникова Т. Н. и др. Полилактид – биоразлагаемый биосовместимый полимер на основе растительного сырья // Экология и промышленность России. 2010. № 5. С. 18–23.
  17. Фомин В. А., Гузеев В. В. Биоразлагаемые полимеры // Химия и жизнь – XXI век. 2005. № 7. С. 8–11.
  18. Легонькова О. А., Сухарева Л. А. Тысяча и один полимер от биостойких до биоразлагаемых. М.: РадиоСофт, 2004. 272 с.
  19. Volenko A. V., Germanovich Ch. S., et al. Capromed – an antibacterial suture material // Biomedical Engineering. 1994. Vol. 28, № 2. P. 98–100.
  20. Хирургический шовный материал [Электронный ресурс] // Reclin. URL: [https://reclin.ru/wp-content/uploads/2024/06/khirurgicheskiy\\_shovny\\_material.pdf](https://reclin.ru/wp-content/uploads/2024/06/khirurgicheskiy_shovny_material.pdf) (дата обращения: 17.06.2024).

## References

1. Bontsevich, D. N. (2005), *Khirurgicheskiy shovnyy material [Surgical suture material], Integratsiya*, Moscow, 118 p.
2. Tretyak, S. I. and Markeviya, E. V. (2012), *Khirurgicheskiy shovnyy material: Metodicheskie rekomendatsii [Surgical suture material: Methodological recommendations]*, Belarusian State Medical University, Minsk, 56 p.
3. Fedorov, A. E., Samartsev, V. A., Gavrilov, V. A. et al. (2009), "Eksperimental'noe issledovanie mekhanicheskikh svoystv sovremennykh khirurgicheskikh rassasyvayushchikhsya shovnykh materialov" [Experimental study of mechanical properties of modern surgical absorbable suture materials], *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki [Russian Journal of Biomechanics]*, no 4, pp. 78–84.
4. *Khirurgicheskie niti "Vicryl Rapide" Vicryl Rapide [Surgical sutures "Vicryl Rapide]* [Online], LegasiMed, URL: <https://www.legmed.ru/catalogue/?section=27> (accessed: 15.04.2025).
5. Shadrin, V. V. and Teplikov, A. V. (2001), "Manipulyatsionnye svoystva khirurgicheskikh nitey" [Manipulative properties of surgical sutures], *Rossiyskiy zhurnal biomekhaniki [Russian Journal of Biomechanics]*, vol. 5, no 3, pp. 41–50.
6. Altman, G. H., Diaz, F., Jakuba, C., Calabro, T. et al. (2003), "Silk based biomaterials", *Biomaterials*, vol. 24, p. 1141–1148.
7. Bezwada, R. S., Jamiolkowski, D. D., Lee, I. Y. et al. (1995), "Monocryl suture, a new ultra pliable absorbable monofilament suture", *Biomaterials*, vol. 16, pp. 401–416.
8. *Biorazlagaemye polimery v meditsine: tekhnologii, rynek [Biodegradable polymers in medicine: technologies, market]* [Online], IKHTs Khimicheskie tekhnologii [ICTC Chemical Technologies], URL: [https://ect-center.com/blog/biopolymers\\_for\\_medical\\_materials](https://ect-center.com/blog/biopolymers_for_medical_materials) (accessed: 20.11.2024).
9. Kostin, A. A., Zubkov, I. N., Nepomnyashchiy, A. P. et al. (2020), "Biorazlagaemye antimikrobnnye plenki kak materialy dlya upakovki skoroportyashcheysya produktsii" [Biodegradable antimicrobial films as materials for packaging perishable products], *Vse o myase [All About Meat]*, no 55, pp. 160–163.
10. Suvorova, A. I., Tyukova, I. S. and Trufanova, E. I. (2000), "Biorazlagaemye polimernye materialy na osnove krakhmala" [Biodegradable polymer materials based on starch], *Uspekhi khimii [Russian Chemical Reviews]*, no 5, pp. 494–504.
11. *Shovnyy material v khirurgii: klassifikatsiya, svoystva i sovremennyye trebovaniya [Suture material in surgery: classification, properties and modern requirements]* [Online], Volot', URL: [https://www.volot.ru/info/stati/shovnyj\\_material/](https://www.volot.ru/info/stati/shovnyj_material/) (accessed: 15.06.2024).
12. *Referat na temu: Khirurgicheskiy shovnyy material [Essay on the topic: Surgical suture material]* [Online], URL: <https://pandia.ru/text/78/019/92957.php> (accessed: 24.06.2024).
13. GOST R 53005-2008 (2008), *Materialy khirurgicheskie shovnye. Obshchie tekhnicheskie trebovaniya. Metody ispytaniy [Surgical suture materials. General technical requirements. Test methods]*.
14. Chen, G. (2024), *Instron 5965 dual column tabletop testing system* [Online], SPAR Lab Director, URL: <https://spar.mst.edu/media/research/spar/documents/SPAR%20Lab%20Poster%200-%20%20Instron%205965%20Load%20Frame.pdf> (accessed: 20.06.2024).
15. *ZEISS SteREO Discovery. V12. Vash modul'nyy stereomikroskop s motorizovannym 12 kratnym uvelicheniem [ZEISS SteREO Discovery V12. Your modular stereo microscope with motorized 12× magnification]* [Online], ZEISS,

- URL: <https://www.zeiss.com/microscopy/en/products/light-microscopes/stereo-and-zoom-microscopes/stereo-discovery-v12.html> (accessed: 20.06.2024).
16. Bogdanova, O. I., Sedush, N. G., Ovchinnikova, T. N. et al. (2010), "Polilaktid – biorazlagaemyy biosovmestimyy polimer na osnove rastitel'nogo syr'ya" [Polylactide — a biodegradable biocompatible polymer based on plant raw materials], *Ekologiya i promyshlennost' Rossii* [Ecology and Industry of Russia], no 5, pp. 18–23.
  17. Fomin, V. A. and Guzeev, V. V. (2005), "Biorazlagaemye polimery" [Biodegradable polymers], *Khimiya i zhizn' – XXI vek* [Chemistry and Life – XXI Century], no 7, pp. 8–11.
  18. Legon'kova, O. A. and Sukhareva, L. A. (2004), *Tysyacha i odin polimer ot biostoykikh do biorazlagaemykh* [A thousand and one polymers from biostable to biodegradable], RadioSoft, Moscow, 272 p.
  19. Volenko, A. V., Germanovich, Ch. S. et al. (1994), "Capromed – an antibacterial suture material", *Biomedical Engineering*, vol. 28, no 2, pp. 98–100.
  20. *Khirurgicheskiy shovnyy material* [Surgical suture material] [Online], Reclin, URL: [https://reclin.ru/wp-content/uploads/2024/06/khirurgicheskiy\\_shovny\\_material.pdf](https://reclin.ru/wp-content/uploads/2024/06/khirurgicheskiy_shovny_material.pdf) (accessed: 17.06.2024).

**Информация об авторах:**

В. В. Чихачева – магистрант кафедры экспериментальной механики и конструкционного материаловедения Пермского национального исследовательского политехнического университета (614000, Россия, Пермь, Комсомольский проспект, д. 29);

С. В. Словиков – кандидат технических наук; доцент кафедры экспериментальной механики и конструкционного материаловедения Пермского национального исследовательского политехнического университета (614000, Россия, Пермь, Комсомольский проспект, д. 29).

**Information about the authors:**

V. V. Chikhacheva – Master's Student; Dept. of Experimental Mechanics and Structural Materialogy, Perm National Research Polytechnic University (29 Komsomolsky Prospekt, Perm, Russia, 614000);

S. V. Slovikov – Candidate of Technical Sciences; Associate Professor of the Experimental Mechanics and Structural Materialogy Department at Perm National Research Polytechnic University (29 Komsomolsky Prospekt, Perm, Russia, 614000).

COMPUTER SCIENCE

Research article

УДК 004.021, 004.056

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-72-91

<https://elibrary.ru/pvxuen>



## Statistical Analysis of Time Series for Port Scan and DDoS Detection

Adeyemi Marc Aurele Emmanuel Djeguede

RUDN University, Moscow, Russia

[djeguede.marc@gmail.com](mailto:djeguede.marc@gmail.com)

**Abstract.** In this paper, statistical methodologies for time series analysis – specifically the Z-score and the modified Z-score – are examined in the context of detecting Port Scan and Distributed Denial of Service (DDoS) attacks. Six different time series were constructed using the following traffic characteristics: the average number of packets transmitted from sources to destinations, the data transfer rate, the response data transfer rate, the duration of the connection between the source and destination, the entropy computed based on destination ports associated with each IP source, and the number of unique destination ports available to each IP source. To evaluate the statistical methodologies under study, the indicators such as reliability, accuracy, response time, and F1-score were used. The obtained numerical results show that when detecting the network threats in question, the modified Z-score reduces the number of false positives compared to the Z-score standard, thereby influencing the evaluation of these performance metrics. The F1-scores achieved using the modified Z-score for DDoS detection ranged from 93% to 98%, depending on the specific traffic characteristics analyzed. Conversely, in the case of Port Scan detection, the F1-score did not exceed 58% even under optimal conditions. A comprehensive analysis showed that all the identified Port Scan instances refer to fast port scanning since this scanning method causes a sharp increase in network traffic. This phenomenon is manifested in a local violation of the stationarity of the time series. These findings were confirmed by Augmented Dickey-Fuller (ADF) and Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) statistical tests conducted to evaluate various hypotheses regarding the stationarity of the time series.

**Keywords:** *time series analysis; anomaly detection; Port Scan; DDoS; Z-score.*

**For citation:** Djeguede, A. M. A. E. (2026), "Statistical Analysis of Time Series for Port Scan and DDoS Detection", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 72–91, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-72-91, <https://elibrary.ru/pvxuen>.

*The article was submitted 11.08.2025; approved after reviewing 18.11.2025; accepted for publication 10.03.2026.*



© Djeguede, A. M. A. E., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Научная статья

### Статистический анализ временных рядов для обнаружения Port Scan и DDoS

Адейеми Марк Ауреле Эммануэль Джегюеде

Российский Университет Дружбы Народов, Москва, Россия

djeguede.marc@gmail.com

**Аннотация.** В ходе этой научной статьи статистические методологии анализа временных рядов, в частности Z-оценка и модифицированная Z-оценка, были рассмотрены в контексте обнаружения атак Port Scan и распределенного отказа в обслуживании (DDoS). Было построено шесть различных временных рядов с использованием следующих характеристик трафика: среднее количество пакетов, передаваемых от источников к получателям, скорость передачи данных от источника к получателю, скорость передачи ответных данных, продолжительность соединения между источником и адресатом, вычисленная энтропия на основе портов назначения, связанных с каждым IP-источником, и количество уникальных портов назначения, доступных каждому IP-источнику. Для оценки вышеупомянутых статистических методологий использовались показатели надежности, точности, времени отклика и показатели F1. Полученные численные результаты показывают, что модифицированная Z-оценка снижает количество ложных срабатываний (по сравнению с Z-оценкой) при выявлении исследованных сетевых угроз, что влияет на оценку этих показателей. Результаты измерения F1, полученные с использованием модифицированной Z-оценки при обнаружении DDoS-атак, варьировались от 93 до 98% в зависимости от конкретных проанализированных характеристик трафика. И наоборот, показатель F1 в контексте обнаружения Port Scan в самом оптимальном случае не превышает 58%. Комплексный анализ показал, что все экземпляры, выявленные Port Scan, относятся к категории быстрого сканирования портов, поскольку именно этот метод сканирования приводит к резкому увеличению сетевого трафика. Это явление проявляется в локальном нарушении стационарности временных рядов. Эти выводы были подтверждены статистическими тестами Дики–Фуллера (ADF) и Квятковского–Филлипса–Шмидта–Шина (KPSS), проведенными для оценки различных гипотез относительно стационарности временных рядов.

**Ключевые слова:** анализ временных рядов; обнаружение аномалий; Port Scan; DDoS; Z-score.

**Для цитирования:** Джегюеде А. М. А. Э. Статистический анализ временных рядов для обнаружения Port Scan и DDoS // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 72–91, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-72-91. <https://elibrary.ru/pvpxuen>.

*Статья поступила в редакцию 11.08.2025; одобрена после рецензирования 18.11.2025; принята к публикации 10.03.2026.*

#### Introduction

Intrusion detection systems (IDS) play a vital role in safeguarding computer networks by continuously monitoring and analyzing network traffic to identify potential security threats. As network environments grow more complex and data volumes expand, traditional static detection methods often fail to recognize sophisticated or evolving cyberattacks. Time series analysis offers a dynamic alternative by focusing on how network behaviors change over time. By treating indicators such as connection rates, packet flows, and data volumes as temporal

data, IDS can detect subtle irregularities or evolving trends that may indicate malicious activity. This temporal perspective enhances the system's ability to identify both sudden and gradual attacks, paving the way for more adaptive and intelligent intrusion detection mechanisms.

Port scanning is a common reconnaissance technique used by attackers to discover open ports and available services on a target system. Detecting such activity is crucial for maintaining network security as scans often precede more severe intrusions. Traditional detection methods, which rely on predefined rules or threshold limits, may fail to capture slow or stealthy scans designed to evade detection. Time series analysis provides a stronger alternative by examining temporal patterns and anomalies in connection attempts. By modeling these attempts as time-dependent data, it becomes possible to identify deviations from normal behavior that signal scanning activity, even when it occurs gradually or covertly. This approach not only improves detection accuracy but also enables earlier and more proactive responses to potential threats.

Distributed Denial-of-Service (DDoS) attacks remain a persistent threat to online services, aiming to overwhelm targeted infrastructures – such as servers, networks, or applications – with massive amounts of malicious traffic, thereby denying access to legitimate users. Traditional signature-based detection systems often struggle to cope with new or rapidly changing attack patterns. Time series analysis (TSA) offers a data-driven alternative by analyzing the temporal dynamics of network traffic, allowing for the identification of subtle or emerging anomalies that may signal the onset of a DDoS attack.

## 1. Literature review

The centralized architecture of software-defined networks (SDN) makes them ideal targets for flood attacks such as DDoS and port scanning. Addressing this issue, G. F. Scaranti et al. [1] proposed an intrusion detection system (IDS) based on online clustering to detect attacks in evolving SDN networks by leveraging the entropy of the source and destination IP addresses and ports. The proposed system eliminates the need for data labeling, paving the way for comprehensive analysis by projecting cluster structures into the feature space and providing information on the intensity, seasonality, and type of various attacks. The system is built on the DenStream algorithm [1], utilizing multiple databases targeted by DDoS and port scanning attacks with varying intensity and duration. C. Birkinshaw et al. in [2] also designed an SDN-based Intrusion Detection and Prevention System (IDS/IPS). The proposed system is a software application that monitors the network for malicious activity or security policy violations and takes measures to mitigate such activity. Special emphasis is placed on protection against port scanning and Denial-of-Service (DoS) attacks. In their study, the authors described and tested the Port Bingo (PB) algorithm as a defense mechanism against port scanning and implemented two connection-based methods: Credit-Based Threshold Random Walk (CB-TRW) and Rate Limiting (RL). Botnets are responsible for some of the most significant malicious attacks on the internet: DDoS attacks, email spam, brute-force attacks, port scanning, and others. Their danger stems from the coordinated actions of infected hosts targeting a single objective. R. Abrantes et al. in their article [3] focused on identifying botnet traffic to prevent communication between the botmaster and infected hosts. For analyzing hosts in the Botnet2014 dataset, they employed the CICFlowMeter algorithm and machine learning methods – Random Forest (RF) and Decision Tree (CART). The results show that the analysis scenario using IP addresses and L4 ports achieves higher accuracy but a lower F1-score compared to equivalent scenarios without IP addresses or L4 ports. Detection of low-frequency attacks requires additional computational overhead compared to regular traffic. In [4], D. Ono et al. proposed a method for detecting port scanning by analyzing the characteristics of Packet-In messages sent from an OpenFlow (OF) switch to the controller. Port scanning typically generates a large volume of Packet-In messages. The proposed method monitors the flow rate of Packet-In messages sent by each host

to the switch, identified by their addresses. Upon detecting an abnormal increase in this rate, the controller requests statistics from the switch and implements an algorithm based on the collected data to identify port scanning. The employed algorithm significantly reduces computational costs compared to conventional methods. Port scanning, commonly used as a reconnaissance tool in attacks, can create significant performance and bandwidth challenges for applications. In [5], B. Hartpence et al. describe an architecture of recurrent neural networks (RNN) for packet classification, TCP datagram separation, TCP packet type identification, and port scanning detection. Recurrent neural networks enable detecting temporal dependencies in prolonged port scanning sequences that unfold over time. Testing the proposed model in this work with real NMAP application pcap files demonstrated successful detection of open ports and scanning attempts with high accuracy and a low false-positive rate. Q. Abu Al-Haija et al. in [6] proposed a novel inclusive port scanning detection scheme that evaluates five machine learning classifiers, including logistic regression, decision trees, linear/quadratic discriminant analysis, naive Bayes, and ensemble boosted trees. Studies conducted on the modern PSA-2017 dataset demonstrated the best performance for the logistic regression-based detection scheme, achieving 99.4% accuracy, 99.9% precision, 99.4% recall, 99.7% F-score, and a detection time of 0.454  $\mu$ sec. SNORT is an intrusion detection and prevention system (IDS/IPS) and a popular tool for monitoring network traffic in real-time and performing rule-based packet analysis. These rules act as signatures for various types of attacks. Each packet passing through SNORT is thoroughly analyzed to identify matches with predefined rules. In their work [7], M. Almseidin et al. propose a novel approach for detecting slow port scanning using a Fuzzy Rule Interpolation (FRI) rule set, which also determines the maliciousness level of detected attacks. These rules are based on the following parameters:

- number of packets sent between the source and destination;
- average Time between Packets received by the victim, in milliseconds;
- number of Packets Received by the destination (victim) per second.

The majority of approaches proposed in the literature for detecting slow port scanning are focused on identifying slow port-scanning attacks within a static period. Mehr u Nisa et al. [8] proposed a technique to detect slow port-scanning attacks not only during static time intervals but all attacks conducted with a gradual increase or decrease in duration over time. The proposed system is divided into four main modules. In the first module, real-time data packets are captured from a live network for analysis. In the second module, the captured data is analyzed to detect signs of port scanning and labeled accordingly. The third module categorizes the labeled packets into parallel and single scans based on the scanner's IP address and other selected features. Finally, in the last module, a decision is made based on time duration analysis to determine whether the scan was a fast or slow attack. The generated reports can then be used to block the attacker's IP address or take other necessary measures. E. S. Sagatov et al. [9] presented methods for detecting and countering the initial stages of cyberattacks, including TCP and UDP port scanning. The proposed methods analyze outgoing traffic to identify response packets such as ICMP 3.3 and TCP RST, which indicate the onset of an attack. The authors also described two countermeasures based on developed modules for software-defined network controllers and Linux OS utilities. Testing of the developed methods was conducted on a cybersecurity testbed and demonstrated that the accuracy of detecting open TCP ports did not exceed 15%, while for other ports (closed TCP ports and UDP ports of any type), the accuracy remained below 2%. E. K. Baah [10] employed seven machine learning classifiers for port scan detection after successfully applying the Principal Component Analysis (PCA) algorithm for reducing dimensionality and selecting the most relevant features. A comparison of the results from various models and prior studies identified the XGBoost model as the best classifier, achieving the highest accuracy of 99.98%, with no false positives detected, a precision of 99.99%, a recall of

99.98%, and an area under the curve (AUC) of 99.99%. M. Ring et al. [11] propose an innovative approach to preprocessing streaming data, designed to detect slow port scanning. The preprocessing process generates new objects based on domain knowledge and information on the network structure collected over a specific period. The computed objects are used as input data for further analysis; based on these, two distinct approaches for detecting slow port scans were proposed. One approach employs sequential hypothesis testing, while the other utilizes classification algorithms. The proposed methods were tested on the CIDDs-001 dataset.

## 2. Materials

The **CIC-IDS-2017** dataset is one of the most widely used cybersecurity datasets for evaluating **IDS**. The Canadian Institute for Cybersecurity (**CIC**) created it at the **University of New Brunswick (UNB)**. The data was captured using **realistic user behavior** and **attack scenarios**, therefore it contains both benign and malicious activities such as botnets and web attacks.

The data capturing period started at 9 a.m., Monday, July 3, 2017 and ended at 5 p.m. on Friday July 7, 2017, for a total of 5 days. The daily traffic classification and attacks were presented in Table 1.

**Table 1.** *CIC-IDS-2017 daily traffic classification*

Day	Type of traffic	Attack types present
Monday	Normal traffic only	None
Tuesday	Brute Force attacks	SSH Brute Force, FTP Brute Force
Wednesday	DoS and Heartbleed	DoS Hulk, DoS GoldenEye, Heartbleed
Thursday	Web and Infiltration	Web Attack (XSS, SQLi, Cmd Injection), Infiltration
Friday	Botnet and Port Scan	Botnet, Port Scan, DDoS

In this work, I will explore time series analysis techniques used to detect Port Scan and DDoS attacks.

**2.1. Port scan attacks.** By performing port scans, attackers can gather information about a host's port numbers, operating system, and running applications by sending specific data to network ports and analyzing the responses. For example, a simple port scan can be performed by a method called a TCP scan, which checks whether a port is in use by attempting a 3-way handshake on the target port. However, since a 3-way handshake is performed even in standard TCP connections, it is difficult to distinguish between a port-scan attack and regular communication on a packet-by-packet basis. Therefore, it is necessary to extract features from multiple packets in order to identify port scans, such as the number of port accesses per unit of time from the same host to different hosts or the amount of traffic per port. There are many behaviors characterizing a scanning activity, such as:

- **numerous connection attempts:** a scanning mechanism dispatches a multitude of connection requests directed toward various ports on a designated machine;
- **sequential or patterned approach:** ports are typically examined in a sequential manner (for instance, 1, 2, 3, 4...) or according to a predetermined pattern (prioritizing common ports, e.g., 22, 80, 443);
- **transient connections:** connections are frequently of a fleeting nature – they are sufficiently brief to ascertain whether the port is open, closed, or filtered;
- **anomalous traffic volume:** relative to normative behavior, port scanning engenders an elevated number of connection attempts, frequently within a condensed period;

- **unexpected origin**: scanning activities predominantly originate from external or unrecognized IP addresses.  
There can be distinguished different categories of scans:
- **SYN scan (half-open)**: transmits SYN packets while abstaining from completing the TCP handshake;
- **FIN, XMAS, NULL scans**: dispatch unconventional TCP flags to circumvent firewalls or to discreetly identify ports;
- **UDP scan**: since UDP has **no handshake**, traditional scanning (like SYN scan for TCP) doesn't work. Instead, a UDP scan sends an **empty or protocol-specific packet** to a port and analyzes the response.  
Depending on variations in scanning timing, scans can be divided into:
  - **aggressive** (rapid scans with heightened likelihood of detection);
  - **stealthy** (deliberate scans over extended periods to mitigate the risk of detection).

**2.2. Distributed Denial of Service (DDoS) attacks.** DDoS attacks remain a persistent threat in cybersecurity, evolving in scale and sophistication. Proactive defense strategies, combined with rapid incident response plans, are essential for minimizing their impact. Unlike a traditional Denial-of-Service (DoS) attack, which originates from a single source, a DDoS attack leverages a distributed network of compromised devices (a botnet) to amplify its impact, making mitigation more challenging.

DDoS has a variety of attack vectors, such as:

- **volume-based attacks**: flood the target with high traffic volumes to exhaust bandwidth. Examples include **UDP/ICMP floods**, which consist in sending spoofed UDP or ICMP packets, and **amplification attacks** exploiting protocols such as **DNS** or **NTP** to magnify traffic by triggering large responses to small requests.
- **protocol attacks**: overwhelm the TCP handshake process, leaving connections half-open (**SYN floods**), or send malformed packets to crash systems (**Ping of Death**).
- **application-layer attacks**: target specific applications (e.g., web servers) with resource-intensive requests, **mimicking** legitimate user traffic to overload servers (**HTTP floods**, e.g., repeated page requests) or keeping server connections open indefinitely to exhaust resources (**Slowloris**).

### 3. Methods

Effective anomaly detection is essential for maintaining the security and stability of network infrastructure. One method for identifying unusual network behavior is through time series analysis. In this study, I have analyzed the time series corresponding to the features listed in Tables 2 and 3, which were derived from the columns of the CIC-IDS-2017 dataset.

**Table 2.** Selected features for DDoS detection

Features	Descriptions
Mean number of forward packets per source IP	Average number of packets transmitted from sources to receivers
Forward speed	Data transfer rate
Backward speed	Response data transfer rate

**Table 3.** Selected features for Port Scan detection

Features	Descriptions
Connection lifetime	Duration of connection between source and destination
Destination ports entropy per source IP	Computed entropy based on destination ports of each IP source
Unique destination ports count by source IP	Count of unique destination ports connected by each IP source

To examine these time series and identify potential anomalies, I apply a statistical Z-score computation to each  $i$ -th point using a sliding window of size  $n$ . The Z-score is calculated as follows:

$$Z_i = \frac{x_i - \mu(w_i)}{\sigma_i(w_i)}, \quad (1)$$

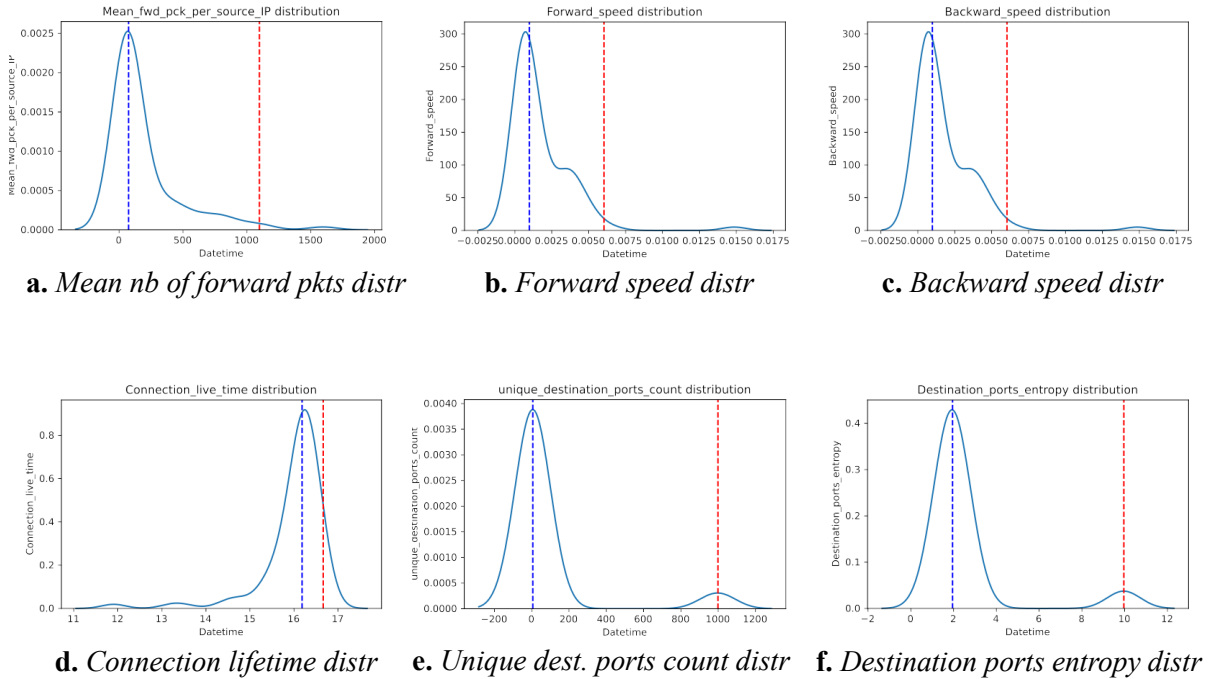
where the local mean

$$\mu(w_i) = \frac{1}{d} \cdot \sum_{j=i-d}^{i-1} x_j \quad (2)$$

and

$$\sigma(w_i) = \sqrt{\frac{1}{d} \cdot \sum_{j=i-d}^{i-1} [x_j - \mu(w_i)]^2} \quad (3)$$

is the standard deviation. The primary assumption underlying the use of the Z-score is that the analyzed features follow a normal distribution.



**Fig. 1.** Feature distribution functions

An empirical study of the distribution of these features is shown in the graphs in Fig. 1. These distributions are near to Gaussian distribution, therefore the decision to use the Z-score in this work is justified. Below is a sample algorithm, based on the Z-score, to detect outliers in time series.

---

Algorithm 1. Detection of anomalies in time series

---

```

1:  $T = \{x_1, \dots, x_n\}$  – time series
2:  $d$  – size of window
3:  $t$  – threshold
4: for  $i \in \{1, \dots, n\}$  do
5:   select window  $w_i = \{x_{i-d}, x_{i-d+1}, \dots, x_{i-1}\}$ 
6:   compute Z-score  $Z_i := \frac{x_i - \mu(w_i)}{\sigma(w_i)}$ 
7:   if  $|Z_i| \geq t$  then
8:     label  $x_i$  as anomaly
9:   else
10:    label  $x_i$  as benign
11:   end if
12: end for

```

---

Due to several factors that will be discussed in the next section, the algorithm based on Z-score calculations with sliding windows may prove inefficient. In such cases, I employ the modified Z-score, which can be calculated as follows:

$$Z_{modified\_score} = \frac{0.6745 * x_i - median}{mad}, \quad (4)$$

where MAD stands for median absolute deviation and can be calculated as follows:

$$mad = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=i-N}^{i-1} (x_j - median)^2}. \quad (5)$$

#### 4. Results and discussion

This section presents the results of the experimentation. Figs. 2–7 depict the time series obtained from the features for DDoS detection described in Table 2; Figs. 8–13 show the representation of the time series obtained from the features for Port Scan detection presented in Table 3. In these figures, green points on the time series indicate actual threats (DDoS and Port Scan), whereas red points indicate predicted threats. Points with overlapping colors indicate correctly predicted threats. A quick visual inspection of these results reveals that the modified Z-score algorithm achieves a high level of DDoS detection, as evidenced by the large number of bicolored points in this case. More formal performance evaluation metrics are presented.

Time Series Anomaly Detection

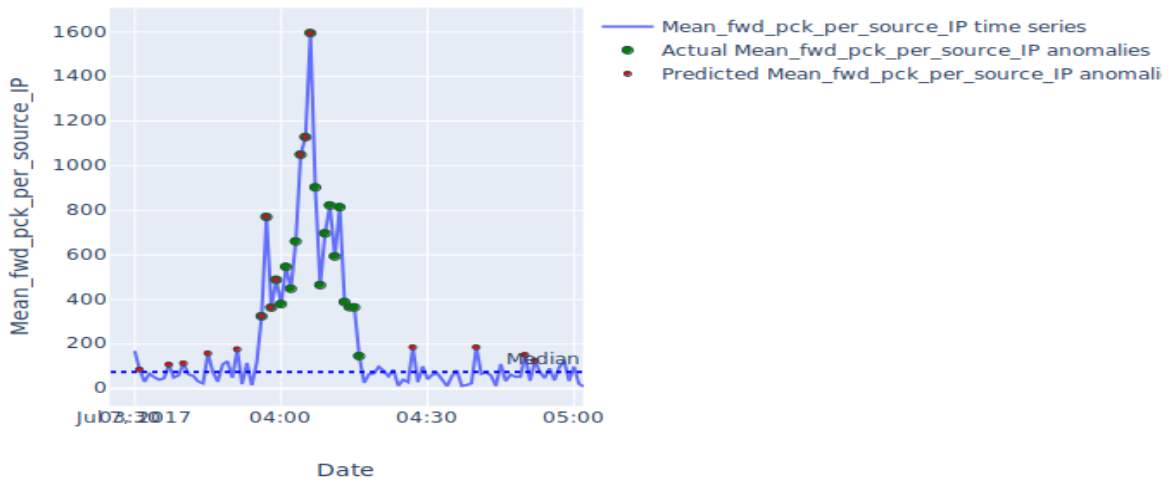


Fig. 2. Z-score with mean forward packets time series (DDoS)

Time Series Anomaly Detection

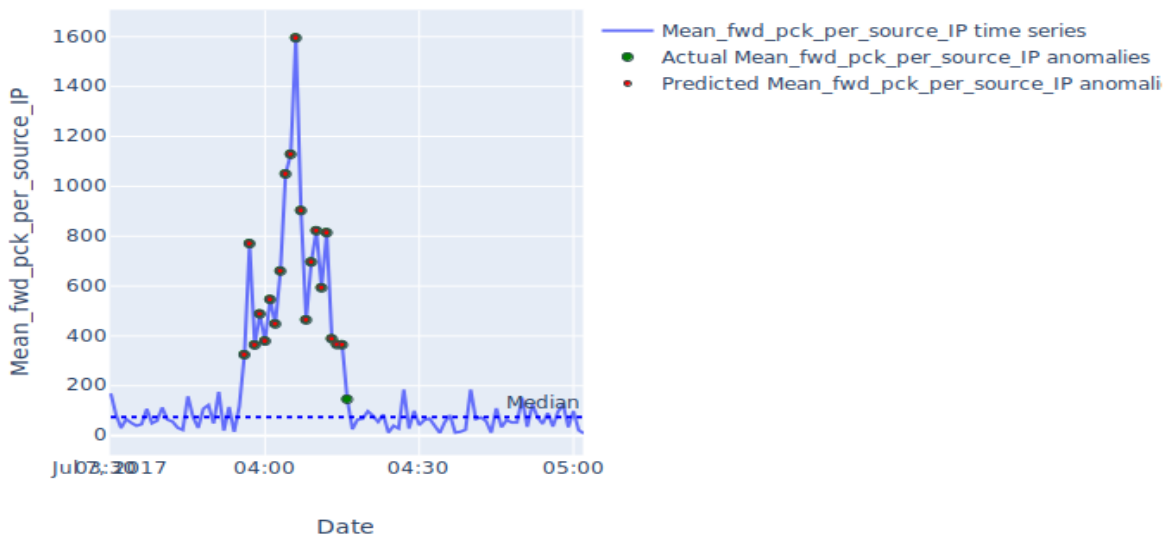


Fig. 3. Modified Z-score with mean forward packets (DDoS)

### Time Series Anomaly Detection

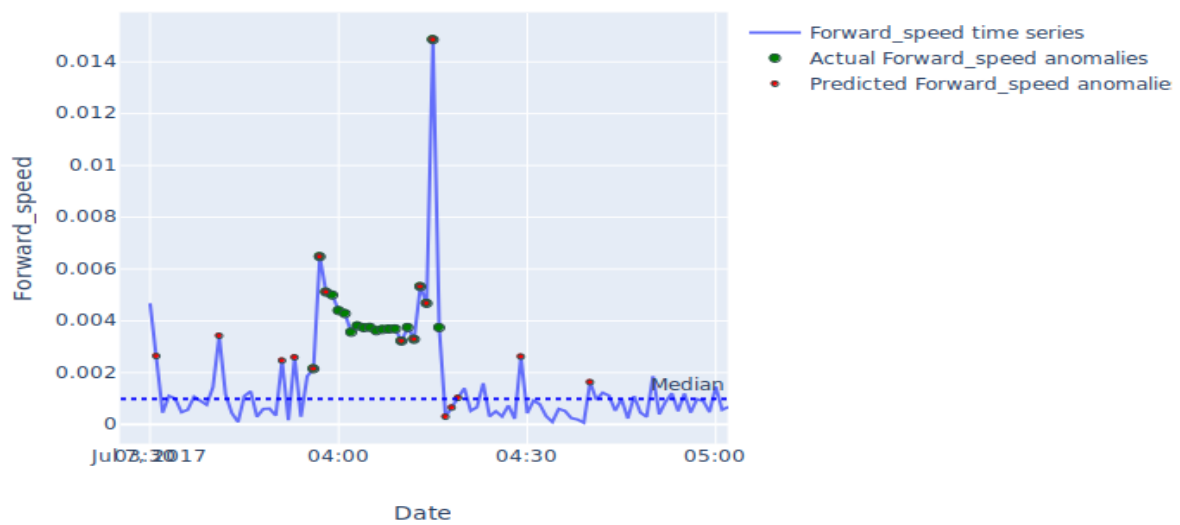


Fig. 4. Z-score with forward speed time series (DDoS)

### Time Series Anomaly Detection

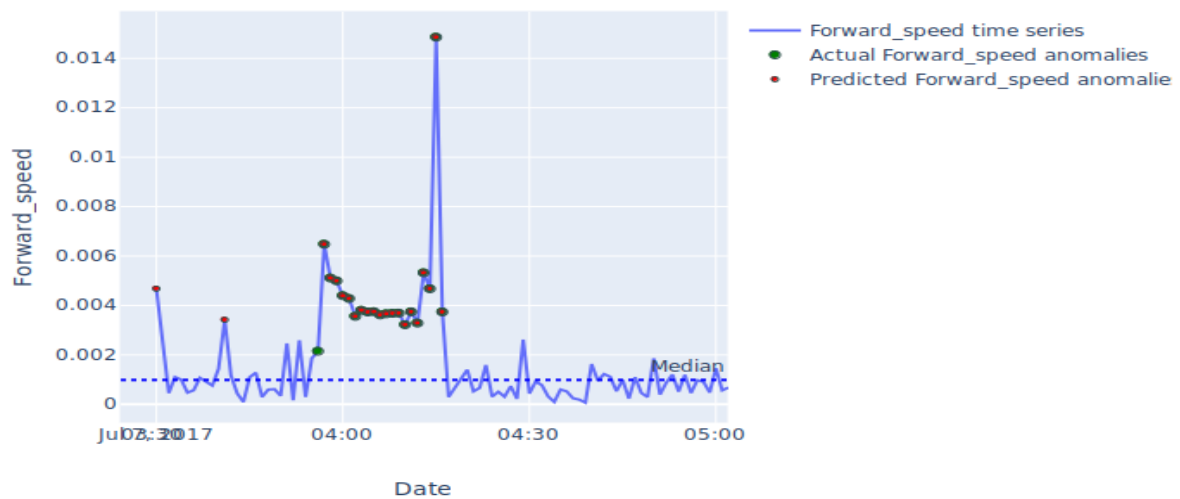


Fig. 5. Modified Z-score with forward speed time series (DDoS)

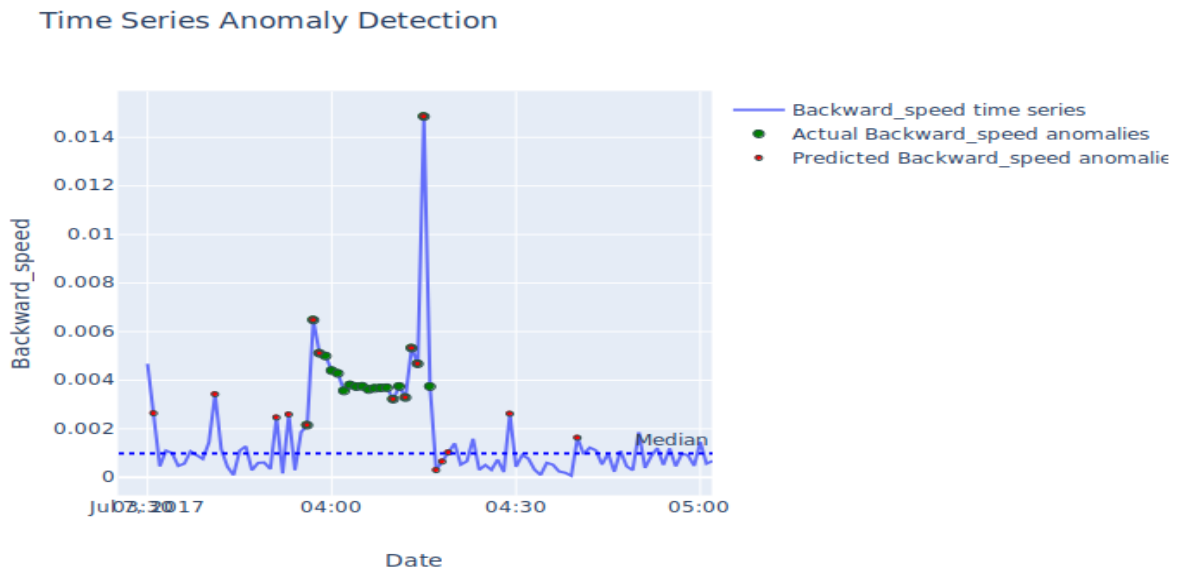


Fig. 6. Z-score with backward speed time series (DDoS)

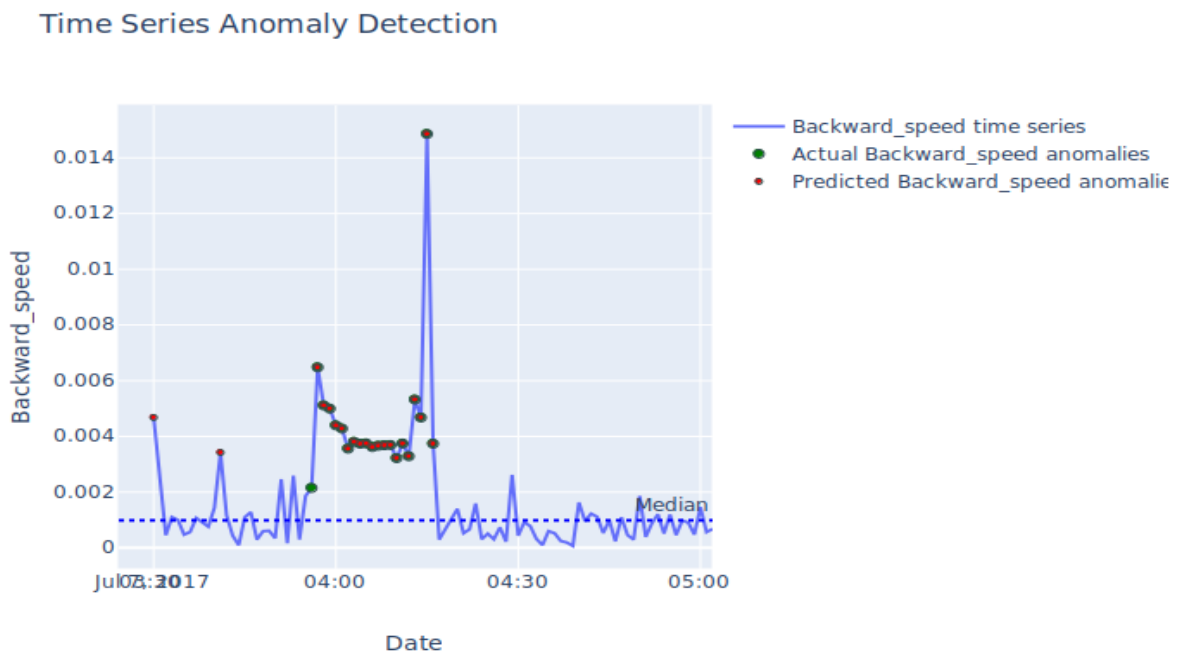


Fig. 7. Modified Z-score with backward speed time series (DDoS)

Time Series Anomaly Detection

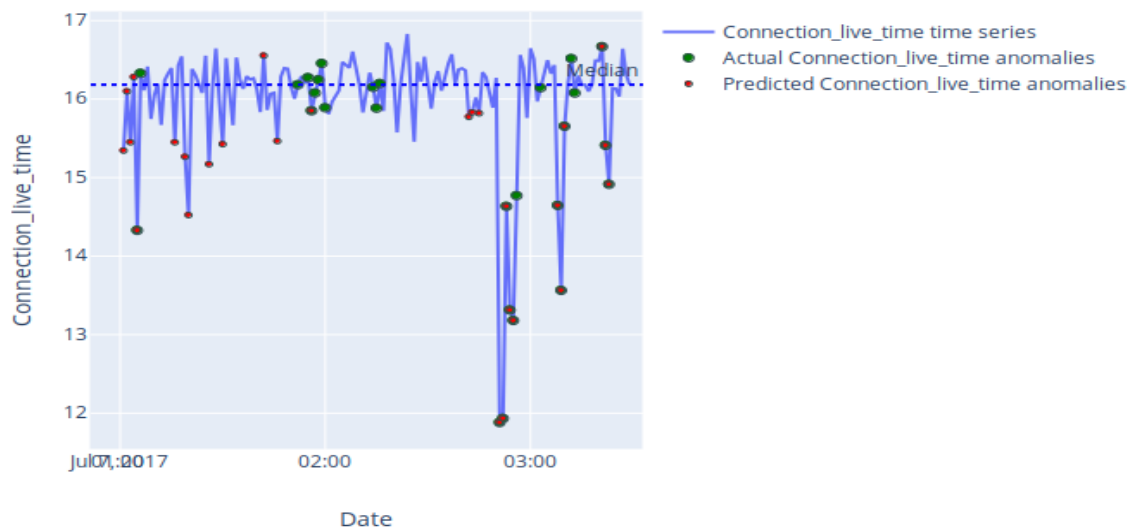


Fig. 8. Z-score with connection lifetime time series (Port Scan)

Time Series Anomaly Detection

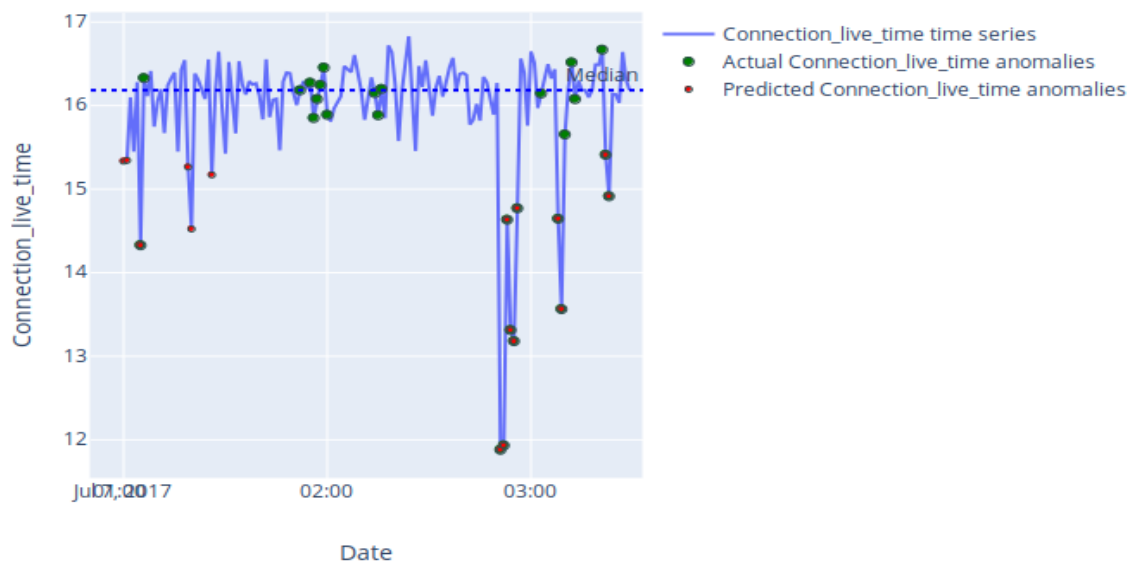
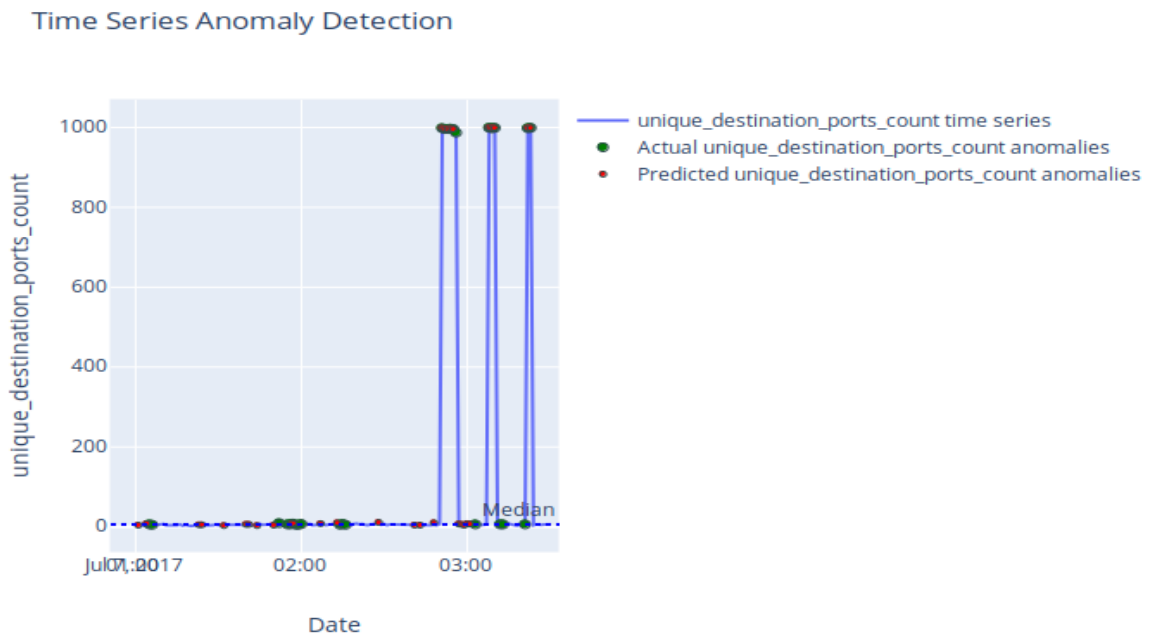
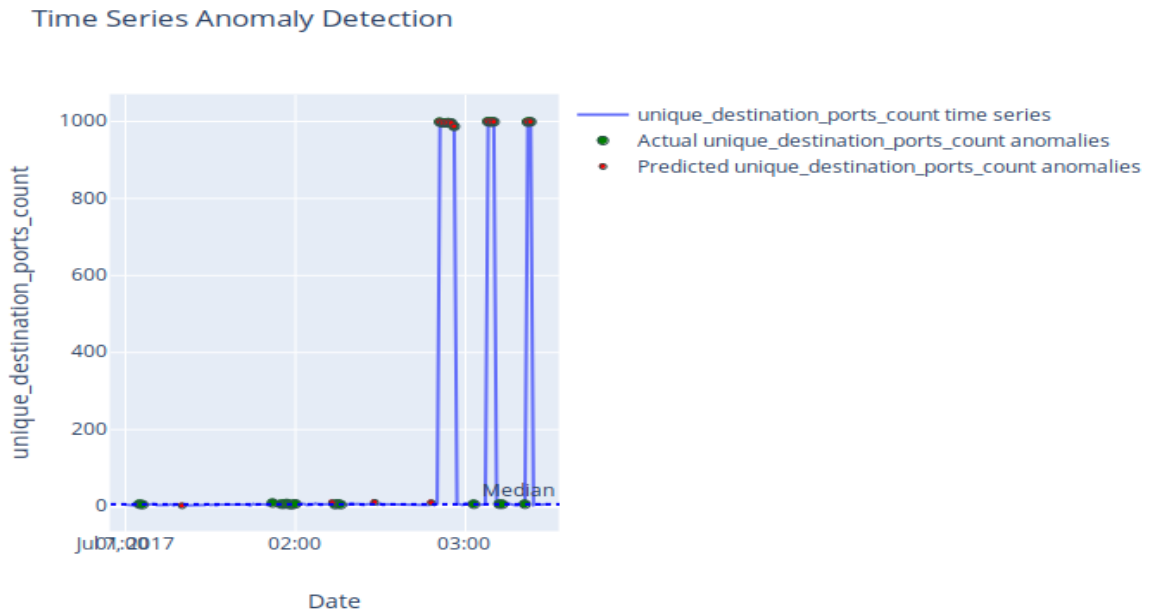


Fig. 9. Modified Z-score with connection lifetime time series (Port Scan)



**Fig. 10.** Z-score with unique destination ports count (Port Scan)



**Fig. 11.** Modified Z-score with unique destination ports count (Port Scan)

Time Series Anomaly Detection

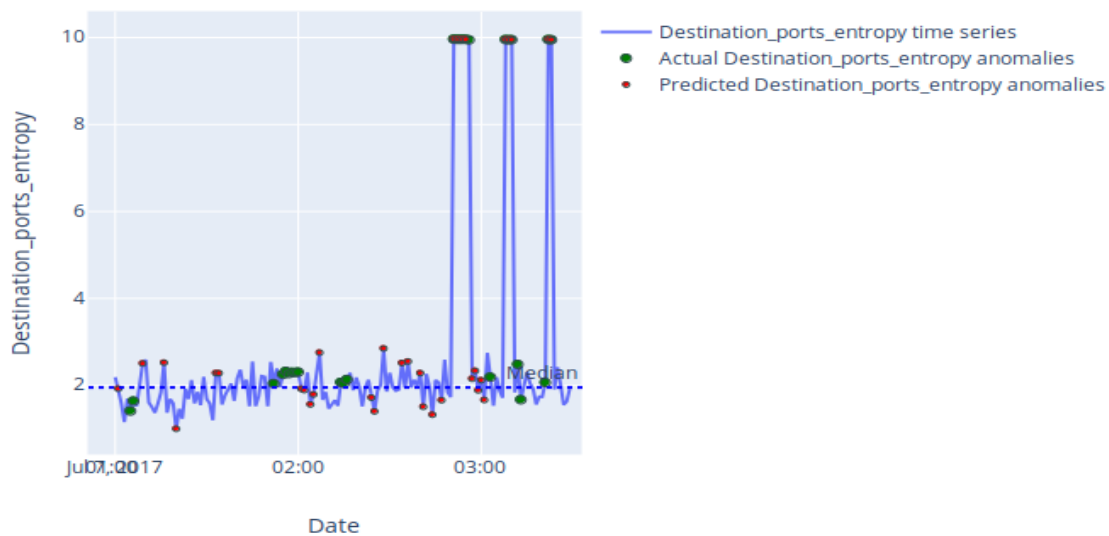


Fig. 12. Z-score with destination ports entropy (Port Scan)

Time Series Anomaly Detection

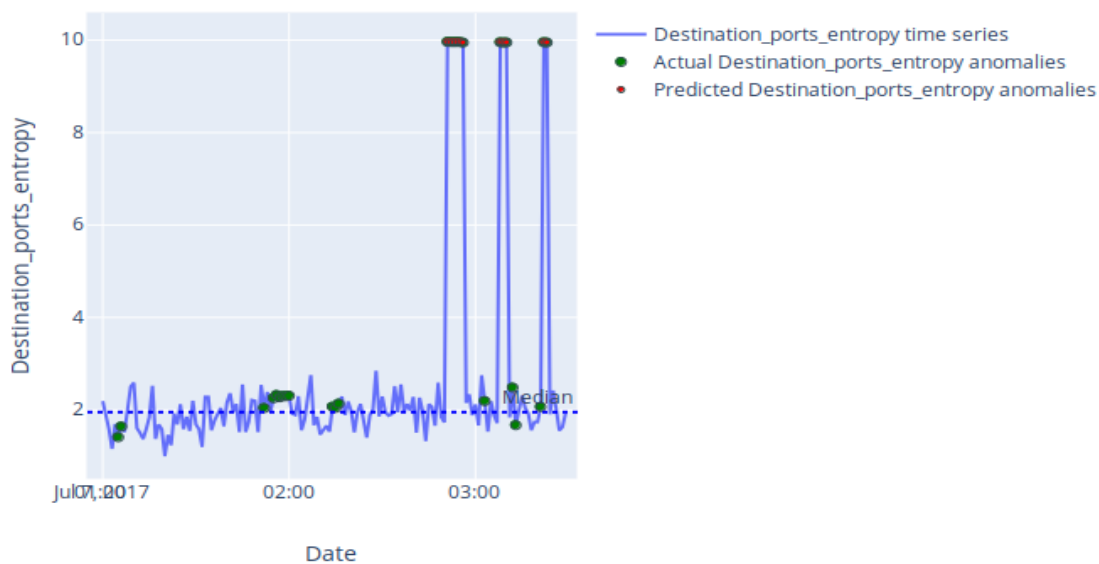


Fig. 13. Modified Z-score with destination ports entropy (Port Scan)

For a more detailed assessment of the performance of the two methods, I will use a confusion matrix (whose structure is explained in ) to compute the metrics – accuracy, precision, recall, and F1 – using the following formulas:

$$Accuracy = \frac{TruePositives+TrueNegatives}{TotalPredictions}, \tag{6}$$

$$Precision = \frac{TruePositives}{TruePositives+FalsePositives}, \tag{7}$$

$$Recall = \frac{TruePositives}{TruePositives+FalseNegatives}, \tag{8}$$

and

$$F1 = \frac{2*Recall*Precision}{Recall+Precision}. \tag{9}$$

**Table 4.** Confusion matrix structure

	Predicted Negative	Predicted Positive
Actual Positive	False Negative (FN)	True Positive (TP)
Actual Negative	True Negative (TN)	False Positive (FP)

**Table 5.** Confusion matrix for DDoS attack detection

a. Z-score with mean forward packets

	Predicted Benign	Predicted DDoS
Actual DDoS	14	7
Actual Benign	63	9

b. Z-score with forward speed

	Predicted Benign	Predicted DDoS
Actual DDoS	13	8
Actual Benign	63	9

c. Z-score with backward speed

	Predicted Benign	Predicted DDoS
Actual DDoS	13	8
Actual Benign	63	9

d. Modified Z-score with mean forward packets

	Predicted Benign	Predicted DDoS
Actual DDoS	1	20
Actual Benign	72	0

e. Modified Z-score with forward speed

	Predicted Benign	Predicted DDoS
Actual DDoS	1	20
Actual Benign	70	2

f. Modified Z-score with backward speed

	Predicted Benign	Predicted DDoS
Actual DDoS	1	20
Actual Benign	70	2

**Table 6.** Confusion matrix for Port Scan detection

a. Z-score with connection lifetime

	Predicted Benign	Predicted Port Scan
Actual Port Scan	14	13
Actual Benign	109	14

b. Z-score with unique destination ports count

	Predicted Benign	Predicted Port Scan
Actual Port Scan	16	11
Actual Benign	103	20

c. Z-score with destination ports entropy

	Predicted Benign	Predicted Port Scan
Actual Port Scan	17	10
Actual Benign	98	25

d. Modified Z-score with connection lifetime

	Predicted Benign	Predicted Port Scan
Actual Port Scan	16	11
Actual Benign	118	5

e. Modified Z-score with unique destination ports count

	Predicted Benign	Predicted Port Scan
Actual Port Scan	16	11
Actual Benign	119	4

f. Modified Z-score with destination ports entropy

	Predicted Benign	Predicted Port Scan
Actual Port Scan	16	11
Actual Benign	123	0

Based on the confusion matrices presented in

Table 5 and Table 6, I calculated the metrics summarized in Tables 7 and 8. The results lead to the following observations:

- low accuracy in the evaluation corresponds to a higher number of false positives,
- low recall indicates a higher number of false negatives.

When applying the sliding window algorithm with the standard Z-score, both DDoS and Port Scan detections yielded low accuracies and recalls (generally below 50%) across all selected features. In contrast, the global modified Z-score achieved strong performance for DDoS detection, with accuracy, recall, and F1-score typically exceeding 91%. However, its effectiveness for Port Scan detection remains less consistent.

The main hypothesis explaining the strong performance of the sliding window Z-score algorithm is the non-stationary nature of the time series. To confirm this hypothesis, I computed the p-values of the ADF and KPSS tests, as shown in Table 9, and examined how the mean and standard deviation of the time series evolve over time (see Fig. 14).

To better understand the performance of the modified Z-score in detecting port scanning activities, Fig. 9, Fig. 11, and Fig. 13 are particularly insightful. They show that the detected threats exhibit high variance, while those with low variance often remain undetected. Comparing the time intervals of high-dispersion threats with the original dataset and

considering the number of flows labeled as Port Scan, we can see that these intervals correspond to fast Port Scan attacks. This leads to a conclusion that the modified Z-score method effectively detects fast port scans but fails to identify slow ones.

**Table 7.** DDoS detection metrics (accuracy, precision, recall, and F1)

			Accuracy	Precision	Recall	F1	Support
Mean forward packets by source IP	Z-score	BENIGN	0.75	0.82	0.88	0.85	72
		DDoS		0.44	0.33	0.38	21
	Modified Z-score	BENIGN	0.99	0.99	1	0.99	72
		DDoS		1	0.95	0.98	21
Forward speed	Z-score	BENIGN	0.76	0.83	0.88	0.85	72
		DDoS		0.47	0.38	0.42	21
	Modified Z-score	BENIGN	0.97	0.99	0.97	0.98	72
		DDoS		0.91	0.95	0.93	21
Backward speed	Z-score	BENIGN	0.76	0.83	0.88	0.85	72
		DDoS		0.47	0.38	0.42	21
	Modified Z-score	BENIGN	0.97	0.99	0.97	0.98	72
		DDoS		0.91	0.95	0.93	21

The following paragraph examines how local non-stationarity in feature time series affects the detection of port scanning activities. To achieve this, we calculate the p-values of the ADF and KPSS statistics. The p-value can be expressed as follows:  $p_{value} = P(x_{obs} \vee H_0)$ , where  $H_0$  is the null hypothesis,  $x_{obs}$  is the calculated statistic (ADF or KPSS). The general form of the ADF test regression is:

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta_{t-i} + \epsilon_t. \quad (10)$$

Null hypothesis ( $H_0$ ):  $\gamma = 0 \rightarrow$  unit root is present (non-stationary). Alternative hypothesis ( $H_1$ ):  $\gamma < 0 \rightarrow$  no unit root (stationary). Then we can compute  $ADF_{stat} = \frac{\hat{\gamma}}{SE(\hat{\gamma})}$ . As  $p_{value}$  is more than 0.05, i fail to reject the null hypothesis. In the next step, i estimate the KPSS Test statistic formula as:

$$KPSS = \frac{1}{T^2} \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{\hat{\sigma}^2}, \quad (11)$$

where:

T: The number of observations;

$S_t = \sum_{i=1}^t \hat{\epsilon}_i$ : The **cumulative residuals** from the OLS regression of the time series on a constant (or constant + trend);

$\hat{\sigma}^2$ : **Long-run variance** of the residuals, estimated using a **Newey-West estimator** (or similar), which accounts for autocorrelation.

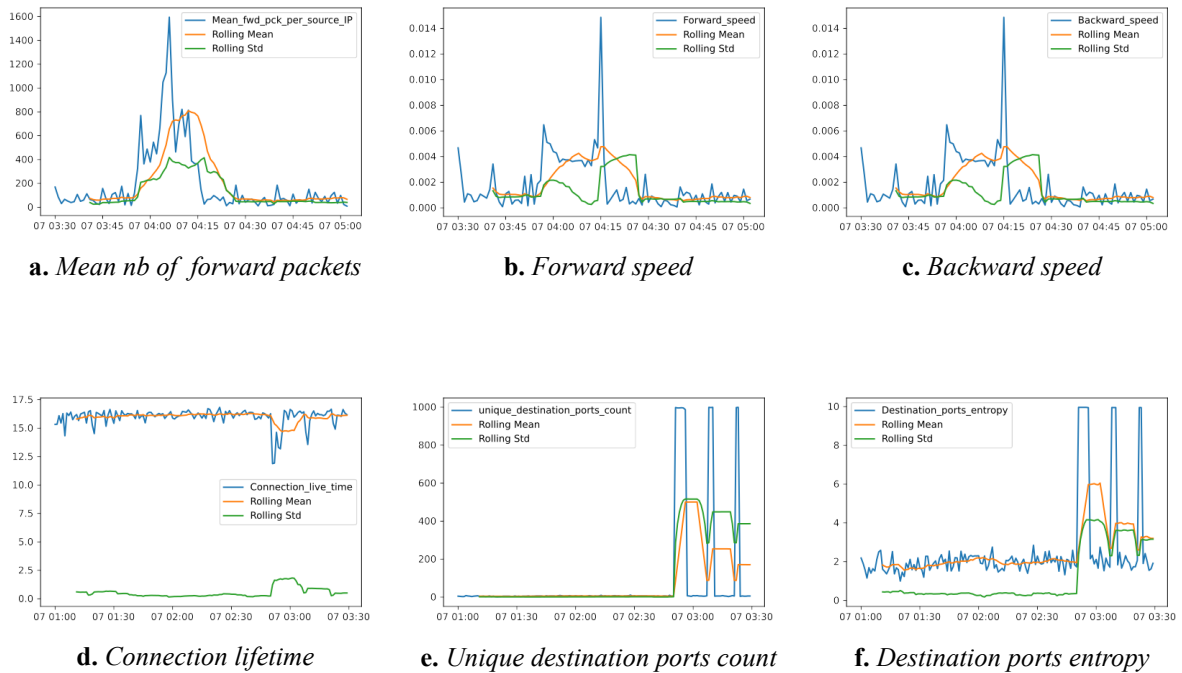
**Null Hypothesis (H<sub>0</sub>):** The series is **stationary** (level or trend stationary). **Alternative Hypothesis (H<sub>1</sub>):** The series has a **unit root** (non-stationary). I **reject H<sub>0</sub>** (stationary) if the  $pvalue < 0.05$  (KPSS statistic is **greater than the critical value**).

**Table 8.** Port Scan detection metrics (accuracy, precision, recall, and F1)

			Accuracy	Precision	Recall	F1	Support
Connection lifetime	Z-score	BENIGN	0.813	0.89	0.89	0.89	123
		Port Scan		0.48	0.48	0.48	27
	Modified Z-score	BENIGN	0.860	0.88	0.96	0.92	123
		Port Scan		0.69	0.41	0.51	27
Unique destination count by source IP	Z-score	BENIGN	0.76	0.87	0.84	0.85	123
		Port Scan		0.35	0.41	0.38	27
	Modified Z-score	BENIGN	0.867	0.88	0.97	0.92	123
		Port Scan		0.73	0.41	0.52	27
Destination port entropy	Z-score	BENIGN	0.72	0.85	0.80	0.82	123
		Port Scan		0.29	0.37	0.32	27
	Modified Z-score	BENIGN	0.893	0.88	1.00	0.94	123
		Port Scan		1.00	0.41	0.58	27

**Table 9.** ADF and KPSS statistics and p-values of the time series

	ADF		KPSS	
	ADF Statistic	p-value	Kpss Statistic	p-value
Mean forward packets	-2.68053	0.0774668	0.279649	0.1
Forward speed	-3.6409978	0.0050239	0.3529392	0.0974400
Backward speed	-3.6409978	0.0050239	0.3529392	0.0974400
Connection lifetime	-4.8111134	5.1785264e-05	0.1351005	0.1
Unique destination ports count	-1.9973058	0.2877557	0.5839902	0.0240918
Destination ports entropy	-1.9618836	0.3035317	0.6503301	0.0180609



**Fig. 14.** Rolling statistical characteristics for the feature time series

From the p-value results of the KPSS test applied to the time series used for port scan detection Table 9, we can conclude that the '**Connection lifetime**' time series is stationary, while the '**Unique destination ports count**' and '**Destination ports entropy**' series are non-stationary. The non-stationarity of the latter series results from traffic spikes caused by rapid port scanning activities, as illustrated in Fig.14 (d, e, f). Consequently, a high KPSS statistic in the local stationarity analysis can serve as a useful indicator of periods characterized by fast port scanning behavior.

## Conclusion

This study evaluates the effectiveness of statistical methods – specifically the Z-score and the modified Z-score – for processing time series data in the detection of Port Scan and DDoS attacks. The findings indicate that the modified Z-score is better suited for identifying anomalies in time series with asymmetric distributions. Experimental results demonstrate that DDoS attacks can be readily detected using statistical approaches. However, the effectiveness of these methods in identifying port scans varies depending on the scanning type. The analysis shows strong detection performance for fast scans but complete ineffectiveness for slow ones. Further investigation reveals that this difference arises from local disruptions in the stationarity of time series during fast scans, as evidenced by a high KPSS coefficient. Consequently, two main conclusions are drawn: slow scans exhibit statistical characteristics similar to normal traffic; the analysis of local stationarity in time series can serve as a foundation for detecting fast port scans.

## References

1. Scaranti, G. F., Carvalho, L. F., Barbon, S., Lloret, J. and Proença, M. L. (2022), "Unsupervised online anomaly detection in software defined network environments", *Expert Systems with Applications*, vol. 191, pp. 4–6.

2. Birkinshaw, C., Rouka, E. and Vassilakis, V. G. (2019), "Implementing an intrusion detection and prevention system using software-defined networking: defending against port-scanning and denial-of-service attacks", *Journal of Network and Computer Applications*, vol. 136, pp. 71–85.
3. Abrantes, R., Mestre, P. and Cunha, A. (2022), "Exploring dataset manipulation via machine learning for botnet traffic", *Procedia Computer Science*, vol. 196, pp. 133–141.
4. Ono, D., Guillen, L., Izumi, S., Abe, T. and Suganuma, T. (2021), "A proposal of port scan detection method based on Packet-In messages in OpenFlow networks and its evaluation", *International Journal of Network Management*, vol. 31, pp. 5–8.
5. Hartpence, B. and Kwasinski, A. (2020), "Combating TCP port scan attacks using sequential neural networks", in *2020 International Conference on Computing, Networking and Communications (ICNC)*.
6. Al-Haija, Q. A., Saleh, E. and Alnabhan, M. (2021), "Detecting port scan attacks using logistic regression", in *2021 4th International Symposium on Advanced Electrical and Communication Technologies (ISAECT)*.
7. Almseidin, M., Al-Kasassbeh, M. and Kovacs, S. (2019), "Detecting slow port scan using fuzzy rule interpolation", in *2019 2nd International Conference on New Trends in Computing Sciences (ICTCS)*.
8. Nisa, M. U. and Kifayat, K. (2020), "Detection of slow port scanning attacks", in *2020 International Conference on Cyber Warfare and Security (ICCWS)*.
9. Sagatov, E. S., Mayhoub, S., Sukhov, A. M., Esposito, F. and Callyam, P. (2021), "Proactive detection for countermeasures on port scanning based attacks", in *2021 17th International Conference on Network and Service Management (CNSM)*.
10. Baah, E. K., Yirenyki, D., Oppong, S. O., Opoku-Mensah, E., Partey, B. T., Sackey, A. K., Kornyo, O. and Obu, E. (2022), "Enhancing port scans attack detection using principal component analysis and machine learning algorithms", in *Frontiers in Cyber Security*, Singapore.
11. Ring, M., Landes, D. and Hotho, A. (2018), "Detection of slow port scans in flow-based network traffic", *PLOS ONE*, vol. 13, pp. 1–18.

**Information about the author:**

A. M. A. E. Djeguede – Postgraduate student in the Department of Mathematical Modeling and Artificial Intelligence, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (6, Miklukho-Maklaya st., Moscow, Russia, 117198), <https://orcid.org/0000-0002-8476-8994>.

**Информация об авторе:**

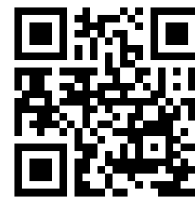
А. М. А. Э. Джегюеде – аспирант кафедры математического моделирования и искусственного интеллекта Российского университета дружбы народов (117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), <https://orcid.org/0000-0002-8476-8994>.

Research article

УДК 004.8

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-92-99

<https://elibrary.ru/bexxas>



## IT Job Market Forecasting in East Africa: An ML Approach

Rebecca Ndungi<sup>1</sup>, Ivan Stanislavovich Blekanov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

<sup>1</sup>rebeccahndungi94@gmail.com

<sup>2</sup>i.blekanov@spbu.ru

**Abstract.** This study focuses on forecasting the Information Technology (IT) job market in East Africa (specifically Kenya, Uganda, and Tanzania) using machine learning (ML) models. The research utilizes a dataset of 1,048,576 job postings collected from online platforms, including LinkedIn and Indeed. A comparative analysis of forecasting models Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA), Seasonal ARIMA (SARIMA), Long Short-Term Memory (LSTM), and Holt's linear trend was conducted to predict employment trends, seasonality, and residual patterns. The models were evaluated using Mean Absolute Error (MAE), Mean Squared Error (MSE), and Root Mean Squared Error (RMSE). The LSTM model demonstrated superior performance with an MAE of 2.75, MSE of 15.90, and RMSE of 3.99. The RMSE value of 3.99 indicates that the model's predictions are, on average, within approximately 4 job postings of the actual values. The findings confirm the applicability of ML models for reliable labor market forecasting in the region, providing valuable insights for stakeholders in education, policy, and industry to align strategies with market demands.

**Keywords:** *IT Industry; workforce strategy; job market analysis; technology demand forecasting; technological innovation demand forecasting; machine learning; Artificial Neural Network.*

**For citation:** Ndungi, R. and Blekanov, I. S. (2026), "IT Job Market Forecasting in East Africa: An ML Approach", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 92–99, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-92-99, <https://elibrary.ru/bexxas>.

*The article was submitted 09.04.2025; approved after reviewing 17.11.2025; accepted for publication 10.03.2026.*

Научная статья

## Прогнозирование рынка IT-вакансий в Восточной Африке: подход с использованием ML

Ндунги Р.<sup>1</sup>, Блеканов И. С.<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>1</sup>rebeccahndungi94@gmail.com

<sup>2</sup>i.blekanov@spbu.ru

**Аннотация.** В данном исследовании разрабатывается подход к прогнозированию рынка вакансий в сфере информационных технологий (ИТ) в Восточной Африке (на



© Ndungi R., Blekanov I. S., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

примере Кении, Уганды и Танзании) с применением моделей машинного обучения. В основе анализа лежит набор данных, содержащий 1 048 576 записей о вакансиях, собранных с онлайн-платформ, включая LinkedIn и Indeed. Проведено сравнительное исследование прогнозных моделей авторегрессионной интегрированной скользящей средней (ARIMA), сезонной ARIMA (SARIMA), сети с долгой краткосрочной памятью (LSTM) и линейного тренда Холта с целью прогнозирования динамики занятости, сезонных колебаний и остаточных паттернов. Для оценки эффективности моделей использовались метрики средней абсолютной ошибки (MAE), средней квадратичной ошибки (MSE) и среднеквадратической ошибки (RMSE). Наилучшие результаты показала модель LSTM, продемонстрировавшая значения MAE 2.75, MSE 15.90 и RMSE 3.99. Значение RMSE, равное 3.99, свидетельствует о том, что расхождения между прогнозируемыми и фактическими значениями в среднем составляют приблизительно 4 вакансии. Полученные результаты подтверждают применимость методов машинного обучения для достоверного прогнозирования регионального рынка труда и предоставляют стейкхолдерам в сфере образования, государственного управления и бизнеса ценную информацию для согласования стратегий с рыночными тенденциями.

**Ключевые слова:** *ИТ-отрасль; стратегия рабочей силы; анализ рынка труда; прогнозирование спроса на технологии и технологические инновации; машинное обучение; искусственная нейронная сеть.*

**Для цитирования:** Ндунги Р., Блеканов И. С. Прогнозирование рынка ИТ-вакансий в Восточной Африке: подход с использованием ML // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 92–99. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-92-99. <https://elibrary.ru/bexxas>.

*Статья поступила в редакцию 09.04.2025; одобрена после рецензирования 17.11.2025; принята к публикации 10.03.2026.*

## **Introduction**

The Information Technology (IT) sector represents a critical component of economic development in East Africa, characterized by rapid growth and changing skill requirements. Accurate forecasting of labor market dynamics within this sector has become essential for organizational strategy, educational planning, and policy formulation. While traditional forecasting techniques offer valuable insights, they often struggle to capture the complex, non-linear patterns that define contemporary job market data in emerging economies [1].

In time series forecasting, future values are estimated by the assessment of prior data, which has a timestamp. This approach is important in many fields because it helps ensure accurate decision-making and provide accurate forecasts. It involves using data gathered in the past to build models that will determine how an organization is going to chart its course in the future. Forecasting differs from other forms of analysis because producers cannot predict future events at the time of analysis. Instead, the process relies on assumptions that are derived from thorough research. Planning is enhanced by the use of statistical and modeling techniques to analyze data and make forecasts [1]. The uncertainty is inherent because of other factors, and larger datasets lead to greater accuracy. However, forecasts do offer an indication of the likelihood of specific occurrences [2].

This study focuses on an approach based on deep learning neural networks, intended to replace statistical methods such as the Auto-Regressive Integrated Moving Average (ARIMA) used in time series forecasting. The ARIMA model is recognized for its linearity and high accuracy in predicting results across various domains [3]. The model, an analytical instrument introduced by Box and Jenkins, is used more frequently in forecasting. However, there is a problem of decreased efficiency, especially when working with noisy data, this reducing the model's stability and accuracy [3]. The following three parameters need to be defined beforehand: the autonomy term ( $p$ ), the distinction term ( $d$ ), and the mean advance term ( $q$ ), where:

(p) stands for the number of previous values used in the formula, known as a lag order; (d) is the degree of difference used to transform the series to stationary; (q) reflects the size of the moving average smoothing or the order of the moving median [4].

A common approach to identifying the level of difficulty of a particular task is through the use of the forecasting horizon. While single-step forecasting is already quite difficult, multi-step forecasting presents even more difficulties such as the accumulation of errors, reduced precision, and enhanced variability [5]. In addition, it has its concept limitations on uncertainty and there may be consequences of unpredictability. While appropriate for some data, temporal series prediction is not appropriate across the board [5]. Since there is no consensus on the best forecasting methods, data teams and strategists need to be aware of the limitations and features of their computerized models. [5]. Data cleaning and timestamping are critical for accurate forecasting since they help one to determine the changes and trends in prior data. In addition to being able to parse fluctuations and discern trends from cyclical patterns, analysts need to detect outliers and fluctuations due to random events. It is believed that accurate predictions will shed light on the direction that these changes are likely to take in the future; looking at the progression of the time series analysis, it is possible to see a gradual evolution in people's perception of the world [5].

Machine learning presents a compelling alternative for time series forecasting, demonstrating a superior capacity to identify intricate, non-linear relationships that often challenge conventional statistical models. Among these advanced techniques, Long Short-Term Memory (LSTM) networks have gained prominence for sequence prediction due to their designed ability to capture and learn from long-range temporal dependencies. Machine learning algorithms are a source of several functions [6] such as sampling, classification, regression, and replication.

### **Research Problem and Methodological Gaps**

The East African IT job market presents unique forecasting challenges due to its dynamic nature and limited research coverage. Previous studies in labor market analysis exhibit several methodological limitations that our research addresses. Existing works often rely on single data sources, such as particular online job portals or Google Trends queries, which provide fragmented market perspectives and introduce source-specific bias [3, 8]. Many analyses remain predominantly retrospective, utilizing historical datasets that may not capture real-time market shifts driven by rapid technological adoption in the region. A significant research gap exists in a transparent rigorous comparison between modern machine learning approaches and established statistical benchmarks. While previous studies have applied advanced algorithms like Long Short-Term Memory (LSTM) networks, they often lack systematic evaluation against robust methods such as ARIMA and SARIMA for multi-step IT job forecasting [7, 9]. Furthermore, there is limited research focusing specifically on the East African context, where labor market dynamics differ substantially from developed economies. This study aims to address these gaps by developing a comprehensive forecasting framework that simultaneously ensures data comprehensiveness through multisource aggregation, enables transparent model comparison across different algorithmic families, and provides specific insights into the East African IT labor market.

### **Research Novelty and Contribution**

The primary objective of this research is to develop and validate a robust forecasting framework for the IT job market in East Africa through comparative analysis of statistical and machine learning models. The specific objectives include:

- acquisition and pre-processing of a large-scale, multi-source dataset of IT job postings from platforms including HeadHunter, LinkedIn, and regional job boards across Kenya, Uganda, and Tanzania;

- implementation of diverse forecasting approaches, including statistical methods (ARIMA, Seasonal ARIMA, Holt's linear trend) and deep learning models (LSTM);
- a rigorous comparative analysis using established error metrics (MAE, MSE, RMSE, MAPE, NRMSE) to objectively identify optimal forecasting approaches;
- extraction and analysis of the interpretable components trend, seasonality, and residuals within the East African IT job market dynamics.

The scientific novelty of this research lies in its integrated methodological approach that addresses multiple prior limitations simultaneously. The practical significance includes providing educational institutions with insights for curriculum development, enabling organizations to optimize talent acquisition strategies, and supporting policymakers in designing effective workforce development programs for the region's growing digital economy.

## **Methods and Materials**

### **Data collection and geographical scope**

This study utilizes a comprehensive dataset of 1,048,576 IT job postings collected from multiple online platforms between January 2020 and December 2023. Primary data sources include Indeed, LinkedIn, and regional job portals across East Africa, with specific focus on Kenya, Uganda, and Tanzania (East Africa). The dataset encompasses detailed job parameters including position titles, required skills, company information, location data, salary ranges, and posting dates. Data preprocessing followed the Pareto principle (80/20 rule) for feature selection and resource allocation [7]. The preprocessing pipeline included data cleaning, handling missing values, outlier management, timestamp normalization, and feature engineering to capture temporal patterns and regional characteristics specific to East African labor markets.

### **Forecasting methods**

#### **a. Long Short-Term Memory**

In the Train-Test Split phase, data is divided based on the sequence and rolling cross-validation. Model selection is the process of choosing the most suitable model when solving a particular problem. In model evaluation, different metrics, such as RMSE and MAE, are used to check the model's effectiveness. Where results contain confidence intervals. Model Deployment puts the generated model into practice in making real-time predictions, while monitoring and updating the model if necessary.

The modeling involved various algorithms such as LSTM, ARIMA, SARIMA, and Holt-Winter Multiplicative. This technique is based on the Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA), SARIMA, and the Exponential Smoothing models, which are very popular in analysis [7]. Since ARIMA models are particularly designed to capture temporal dependencies in data, they are suited to capture time-varying information such as job openings in a field like information technology. On the other hand, the complexity of Information Technology Business requires an enhanced approach based on improved methodology. The integration of a machine learning algorithm with the ARIMA model could act as a potent feature since the technology has the potential to learn from patterns. Neural networks endow the model with the ability to learn from experience and see patterns that are not discernable to a statistical model [5, 7].

#### **b. ARIMA and SARIMA**

These are two of the most commonly used models. One significant advantage of SARIMA is the ability to take seasonality into account in the received data. While SARIMA extends the basic ARIMA elements of the structure by adding seasonality and forming a decomposition of seasonally differenced values along with an autoregressive and moving average component, ARIMA essentially features only a simple form of the difference structure, as well as autoregressive and moving average components geared more towards non-seasonal data [9], [10]. This allows ARIMA to process co-variance better for the cases where seasonality changes over

time, making SARIMA invaluable for historical data that massively change during the year, for example, monthly retail sales or financial indicators for the quarters [8].

### **c. The Holt-Winter Multiplicative**

This method is one of the most popular forecasting techniques that is used in cases where trend and seasonality factors come into play categorized in two variants: additive and multiplicative variations. This forecasting method often goes by the name of the Holt-Winter technique and is a prevalent technique under the umbrella of exponential smoothing techniques. The reason for its popularity, however, lies in its simplicity, minimal space requirements, and the fact that its lender can be fully automated. However, in the Holt-Winter Multiplicative method, seasonality is handled as a relative factor or percentage rather than an absolute value, allowing seasonality to scale proportionally with the trend. Referring to LSTM as a type of RNN, the author notes that LSTM networks are "designed to overcome the difficulties of conventional RNNs with capturing long-term time dependencies" [11]. LSTMs use memory cells to store data for extended durations and control gates for data entry and output within the memory cells [12]. This architecture puts LSTMs in charge of processing repetitive tasks where temporal context is helpful [13]. For this reason, LSTMs are fitting for complex sequence prediction problems since these models and storage. Long Short-Term Memory (LSTM) is a popular artificial neural network technique that is being used a lot [11].

## **Results and Experiments**

### **Experiment description**

The model was trained using four different models, as shown in Table 1, with a dataset of 1,048,576 job records and was evaluated using different metrics including MAE, RMSE, NRMSE, MAE, and MAPE. Understanding patterns, regularity, and fluctuations in data is a crucial factor for making efficient decisions. The primary goal of forecasting when it comes to IT demand for jobs is to accurately predict the future market trends in employment based on previous information. By developing robust models that capture the essence of routine and cyclical activities, this research endeavors to provide reliable forecasts that inform consumers about strategic planning and informed decision-making. Accurate employment forecasting remains critical for ensuring that curricula, human capital development plans, and organizational hiring strategies in the IT field align with the required supply, thus minimizing imbalances in the job market.

The primary purpose of this research is to enhance the capability of the computing industry to improve both the responsiveness and the latency of forecasting functions within organizations. A key objective is to develop a system with the ability to approximate future values based on past data.

This involved the development of predictive models that capture the underlying characteristics of the data itself, thus producing accurate forecasts that are useful for decision-making. The construction of the predictive model involved the use of ARIMA, SARIMA, LSTM, and Holt-Winter Multiplicative methods. The dataset contains 1,048,576 jobs, and every job is presented through more than 15 fields. The proposed method was tested against three metrics, including MAE, MSE, and RMSE.

### **Experiment results**

The evaluation of the forecasting models has revealed distinct performance differences, quantified by standard error metrics. The results can be interpreted as follows: a lower value for all metrics (MAE, MSE, RMSE, MAPE, NRMSE) indicates a more accurate forecast; MAE (Mean Absolute Error) represents the average magnitude of the errors, in the same units as the original data, for instance, the volume of job postings; MSE (Mean Squared Error) and RMSE (Root Mean Squared Error) penalize larger errors more severely. RMSE is also in the same units as the data, which makes it more interpretable than MSE.

MAPE (Mean Absolute Percentage Error) expresses the error as a percentage of the actual values, providing a scale-independent measure of accuracy. NRMSE (Normalized Root Mean Squared Error) allows for comparison between datasets with different scales. As shown in Table 1, the LSTM model demonstrated superior performance, achieving the lowest scores across all key metrics (MAE: 2.75, MSE: 15.90, RMSE: 3.99). This indicates that the LSTM predictions were, on average, closer to the actual values and contained fewer large errors compared to other models. For instance, its RMSE of 3.99 suggests its forecasts were typically within about 4 jobs of the actual value. While SARIMA was the best among the statistical models (MAE: 3.40, RMSE: 4.62), it was consistently outperformed by the LSTM. The traditional Holt's and ARIMA models showed the weakest results in this comparison.

**Table 1.** *Models used and the metric values*

<b>Model</b>	<b>MAE</b>	<b>MSE</b>	<b>RMSE</b>	<b>MAPE</b>	<b>NRMSE</b>
ARIMA	3.80	24.60	4.96	0.0835	8.4498
SARIMA	3.40	21.30	4.62	0.8952	6.7381
LSTM	2.75	15.90	3.99	0.0762	5.4832
Holt's	3.60	23.80	4.88	0.9153	3.4523

**a. Holt's Additive Model**

Holt's Model includes the following measures: MAE was 3.60, MSE was 23.80, and RMSE was 4.88, as in Table 1 above. The values provide the estimated accuracy of the model and the magnitude of prediction errors.

**b. ARIMA Forecast**

The performance indicators for the ARIMA model using the formula below had a mean absolute error of 3.80, mean squared error of 24.60, and root of mean squared error of 4.96, as demonstrated in Table 1.

**c. SARIMA**

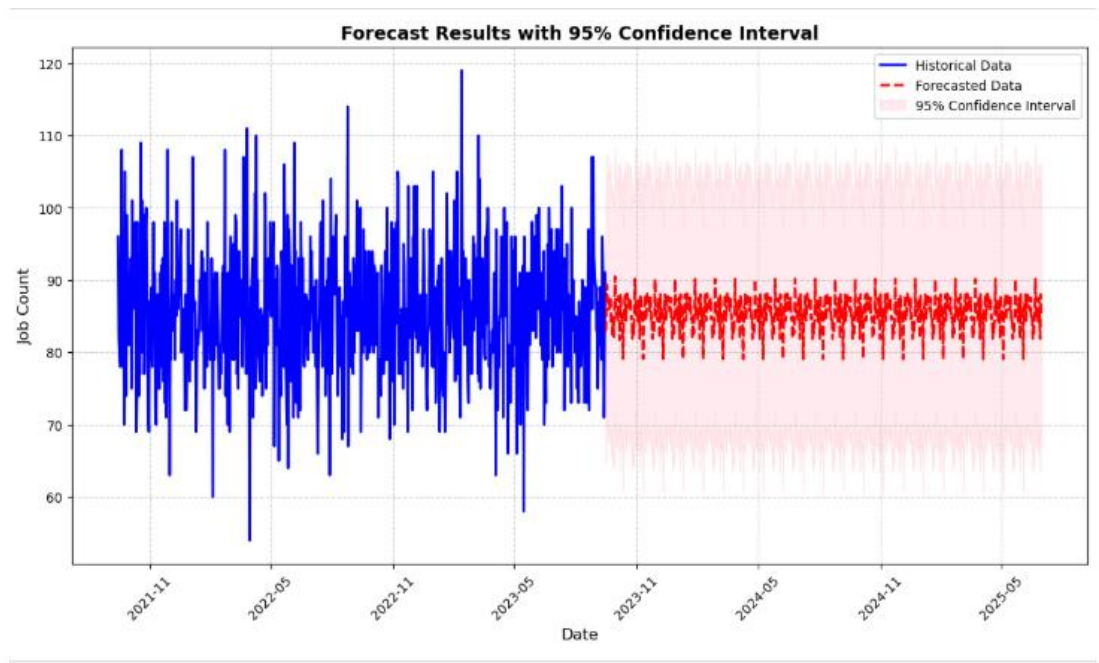
The SARIMA model had an MAE of 3.40, 21.30 MSE, and 4.62 RMSE. The metrics describe how accurate the model is in its predictions as well as the degree of error. The model shows improved values as compared to ARIMA, as observed in Table 1 above. Although the SARIMA model achieves reasonable accuracy, it is still possible to fine-tune its predictive capability for future fluctuations.

**d. LSTM Forecast with 100 Epochs**

Over 100 epochs, the LSTM method showed the training loss in gradual decline from 0.0320 before stabilizing at 0.0201. The training data set and the experimental data set had a smaller yield, which indicates the effectiveness of the training process with improved loss and reasonable generalization ability on unseen data. The model also yielded 2.75 MAE, 15.90 MSE and 3.99 RMSE, as seen in Table 1.

**Forecast Results**

The forecast for the next 6 months from the last observed date, as illustrated in Fig. 1, involved a study of the historical datasets on the trends and seasonality and shows the forecast area, the forecasted data, and the historical data section.



**Fig. 1.** Forecast results from the last observed data

## Conclusion

This research work establishes a comprehensive framework for IT job market forecasting in East Africa through a rigorous comparison of statistical and machine learning approaches. The demonstrated superiority of LSTM models in capturing complex market dynamics provides valuable methodology for labor market analysis in the region. The findings hold significant practical implications across multiple domains. Educational institutions can leverage these forecasting capabilities to align curriculum development with evolving regional industry demands. Organizations can benefit from enhanced workforce planning and talent acquisition strategies tailored to East African markets. Policymakers can gain valuable insights for regional development planning and educational policy formulation. Job seekers can make more informed decisions concerning skill development and career paths within the local context. Future research directions include implementation of sliding window techniques for enhanced model adaptability, development of hybrid modeling approaches combining statistical and machine learning methods, and extensive validation across other East African countries. Further investigations will explore real-time forecasting capabilities and integration of regional economic indicators for improved prediction accuracy to emerging economies.

## References

1. Senthurvelautham, S. and Senanayake, N. (2023), "A Machine Learning-Based Job Forecasting And Trend Analysis System To Predict Future Job Markets Using Historical Data", *IEEE 8th International Conference for Convergence in Technology (I2CT)*, Lonavla, India, pp. 1–7, doi: 10.1109/I2CT57861.2023.10126233.
2. Li, W. and Law, K. L. E., (2024), "Deep Learning Models for Time Series Forecasting: A Review", *IEEE Access*, vol. 12, pp. 92306–92327, doi: 10.1109/ACCESS.2024.3422528.
3. Ray, S., Lama, A., Mishra, P., Biswas, T., Sankar Das, S. and Gurung, B. (2023), "An ARIMA-LSTM model for predicting volatile agricultural price series with random forest technique", *Appl Soft Comput*, vol. 49, p. 110939, doi: 10.1016/J.ASOC.2023.110939.
4. "Introduction to ARIMA models", (2024), URL: <https://people.duke.edu/~rnau/411arim.htm> (accessed: 02.04.2025).

5. Alrweili, H., Probab, H. F.-J. S. A. and undefined (2024), "Forecasting crude oil prices using an ARIMA-ANN hybrid model", *digitalcommons.aaru.edu.jo*, URL: <https://digitalcommons.aaru.edu.jo/cgi/viewcontent.cgi?article=1505&context=jsap> (accessed: 02.04.2025).
6. Sarker, I. H., (2021), "Machine Learning: Algorithms, Real-World Applications and Research Directions", *SN Comput Sci*, vol. 2, no 3, pp. 1–21, May 2021, doi: 10.1007/S42979-021-00592-X/FIGURES/11.
7. C. D.-I. J. of E. E. and Policy and undefined (2024), "The performance of hybrid ARIMA-GARCH modeling and forecasting oil price", *zbw.eu*, URL: <https://www.zbw.eu/econis-archiv/bitstream/11159/2094/1/1028123450.pdf> (accessed: 02.04.2025).
8. Lim, B. and Zohren, S. (2021), "Time-series forecasting with deep learning: A survey", *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences*, vol. 379, no 2194, doi: 10.1098/RSTA.2020.0209.
9. Hoong Lem, K. "The STL-ARIMA approach for seasonal time series forecast: a preliminary study", doi: 10.1051/itmconf/20246701008.
10. Tihi, N. and Popov, S. (2024), "The Higher Education Technical School of Professional Studies in Novi Sad, a comparison of Arima and random forest time series models for urban drought prediction", *Computer Science, and Data Science*, doi: 10.15308/Sinteza-2024-51-56.
11. Casolaro, A., Capone, V., Iannuzzo, G. and Camastra, F. (2023), "Deep Learning for Time Series Forecasting: Advances and Open Problems", *Information 2023*, Vol. 14, Page 598, vol. 14, no 11, p. 598, doi: 10.3390/INFO14110598.
12. Nazir, A. *et al.*, (2024), "A deep learning-based novel hybrid CNN-LSTM architecture for efficient detection of threats in the IoT ecosystem", *Ain Shams Engineering Journal*, vol. 15, no 7, p. 102777, doi: 10.1016/J.ASEJ.2024.102777.
13. Zhu, W. *et al.*, (2023), "An optimized long short-term memory (LSTM)-based approach applied to early warning and forecasting of ponding in the urban drainage system", *Hydrol Earth Syst Sci*, vol. 27, no 10, pp. 2035–2050, May 2023, doi: 10.5194/HESS-27-2035-2023.

**Information about the authors:**

R. Ndungi – Postgraduate student, St. Petersburg State University (7/9 University Embankment, St. Petersburg, Russia, 199034), ORCID: 0000-0002-0389-9758, Scopus Author ID: 58106191000, ResearcherID: RID66654;

I. S. Blekanov – Candidate of Technical Sciences; Associate Professor at St. Petersburg State University, Head of the Programming Technology Department, St. Petersburg State University (35/267 Universitetsky Prospekt, Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), SPIN-code: 7473-1900, AuthorID: 700009, Scopus Author ID 56149559700, ORCID 0000-0002-7305-1429, ResearcherID G-8844-2015.

**Информация об авторах:**

Р. Ндунги – аспирант Санкт-Петербургского государственного университета (199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, д. 7/9), ORCID: 0000-0002-0389-9758, Scopus Author ID: 58106191000, ResearcherID: RID66654;

И. С. Блеканов – кандидат технических наук; доцент Санкт-Петербургского государственного университета, заведующий кафедрой технологии программирования (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский проспект, д. 35, ком. 267), SPIN-код: 7473-1900, AuthorID: 700009, Scopus Author ID 56149559700, ORCID 0000-0002-7305-1429, ResearcherID G-8844-2015.

Обзорная статья

УДК 519.71 : 519.21 : 004.93

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-100-117

<https://elibrary.ru/bpojeg>



## Современные методы моделирования динамики и отслеживания траектории систем с высокой степенью свободы

Илья Иванович Коваленко<sup>1</sup>, Евгения Александровна Ахременко<sup>2</sup>,  
Александр Игоревич Андреев<sup>3</sup>, Марина Александровна Барулина<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

<sup>1</sup>[ilyaandko@ya.ru](mailto:ilyaandko@ya.ru)

<sup>2</sup>[ahremencko.ev@yandex.ru](mailto:ahremencko.ev@yandex.ru)

<sup>3</sup>[i@mniium.ru](mailto:i@mniium.ru)

<sup>4</sup>[mab@psu.ru](mailto:mab@psu.ru)

**Аннотация.** Работа посвящена анализу ключевого методологического сдвига в количественной оценке поведения био-объектов: перехода от классификации отдельных поведенческих актов к анализу их динамической структуры. Постановка проблемы заключается в наличии методологического разрыва: традиционные методы трекинга упрощают поведение до траектории центра масс, а современные алгоритмы глубокого обучения, обеспечивая высокую точность распознавания поз, часто игнорируют временной контекст и являются вычислительно затратными "черными ящиками". Цель работы – анализ существующих подходов к видеообработке и обоснование гибридной методологии, объединяющей детализацию нейросетевого анализа с системным подходом к динамике. Задачи включают обзор методов от ручного аннотирования до трансформерных архитектур и выявление их ограничений в задачах долгосрочного прогнозирования. Методы исследования базируются на сравнительном анализе алгоритмов компьютерного зрения, глубокого обучения и стохастического моделирования в контексте обработки видеоданных экспериментов с лабораторными животными. Основные результаты показывают, что нейросети оптимизированы преимущественно для локальной классификации. В работе предложена методологическая основа, интегрирующая классификацию на уровне кадров с построением интерпретируемых стохастических моделей (матриц вероятностей переходов). Главные выводы свидетельствуют о том, что использование марковских представлений в дискретных пространствах состояний позволяет эффективно выявлять устойчивые поведенческие режимы (аттракторы) и аномалии, создавая надежную базу для систем поддержки принятия решений без избыточных вычислительных мощностей.

**Ключевые слова:** динамический анализ; многомерные системы; системы высокой степени свободы; компьютерное зрение; глубокое обучение; нейронные сети; отслеживание объектов без маркеров; классификация состояний; матрицы вероятностей переходов; марковские модели.

**Для цитирования:** Коваленко И. И., Ахременко Е. А., Андреев А. И., Барулина М. А. Современные методы моделирования динамики и отслеживания траектории систем с высокой степенью



© Коваленко И. И., Ахременко Е. А., Андреев А. И., Барулина М. А., 2026  
Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

свободы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 100–117. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-100-117. <https://elibrary.ru/bpojeg>.

Статья поступила в редакцию 15.01.2025; одобрена после рецензирования 27.02.2025; принята к публикации 20.03.2026.

Review article

## Modern Methods for Dynamics and Trajectory Tracking Modeling of High-Degree-of-Freedom Systems

Илья I. Kovalenko<sup>1</sup>, Eugenia A. Ahremenko<sup>2</sup>, Alexander I. Andreev<sup>3</sup> Marina A. Barulina<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Perm State University, Perm, Russia

<sup>1</sup>ilyaandko@ya.ru

<sup>2</sup>ahremencko.ev@yandex.ru

<sup>3</sup>i@mniium.ru

<sup>4</sup>mab@psu.ru

**Abstract.** The study is devoted to analyzing a key methodological shift in the quantitative assessment of bio-object behavior: the transition from classifying individual behavioral acts to analyzing their dynamic structure. The problem statement lies in the existence of a methodological gap: traditional tracking methods simplify behavior to the center-of-mass trajectory, while modern deep learning algorithms, providing high pose recognition accuracy, often ignore the temporal context and function as computationally expensive "black boxes". The aim of the work is to analyze existing approaches to video processing and substantiate a hybrid methodology that combines the detail of neural network analysis with a systemic approach to dynamics. The objectives include reviewing methods ranging from manual annotation to transformer architectures and identifying their limitations in long-term forecasting tasks. The research methods are based on a comparative analysis of computer vision algorithms, deep learning, and stochastic modeling in the context of processing video data from laboratory animal experiments. The main results show that neural networks are optimized primarily for local classification. The paper proposes a methodological framework integrating frame-level classification with the construction of interpretable stochastic models (transition probability matrices). The main conclusions indicate that using Markov representations in discrete state spaces allows for the effective identification of stable behavioral modes (attractors) and anomalies, creating a reliable basis for decision support systems without excessive computational requirements.

**Keywords:** *dynamic analysis; multidimensional systems; high-degree-of-freedom systems; computer vision; deep learning; neural networks; markerless object tracking; state classification; transition probability matrices; Markov models.*

**For citation:** Kovalenko, I. I., Ahremenko, E. A., Andreev, A. I. and Barulina, M. A. (2026), "Modern Methods for Dynamics and Trajectory Tracking Modeling of High-Degree-of-Freedom Systems", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 100–117. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-100-117, <https://elibrary.ru/bpojeg>.

*The article was submitted 15.01.2025; approved after reviewing 27.02.2025; accepted for publication 20.03.2026.*

### Введение

Анализ поведения лабораторных животных, или в общем смысле – био-объектов, является основой исследований в широком спектре наук о жизни, включая фармакологию, нейробиологию, этологию и генетику. В доклинических исследованиях поведенче-

ские тесты на лабораторных животных служат ключевым инструментом для оценки эффективности и безопасности новых лекарственных препаратов, изучения патогенеза заболеваний центральной нервной системы, а также для выявления функций генов [1]. Объективность, достоверность и воспроизводимость данных, получаемых в ходе таких экспериментов, напрямую влияют на принятие решений о дальнейшей разработке терапевтических подходов, что определяет высокую значимость и актуальность совершенствования методов поведенческого анализа.

С точки зрения системного анализа, поведение биологического объекта представляет собой выходной сигнал сложной динамической системы, характеризующейся стохастичностью, нелинейностью и наличием множества взаимосвязанных внутренних состояний [2]. Адекватное описание такой системы требует не просто фиксации отдельных поведенческих актов, но и анализа их последовательности, длительности, вероятностей переходов между ними и иных свойств. Именно временной контекст и динамические паттерны несут в себе критически важную информацию о функциональном состоянии организма [3]. Следовательно, ключевой научной задачей является разработка таких методов анализа, которые способны преобразовывать непрерывный поток видеоданных в информативную модель, сохраняющую ключевые динамические характеристики поведения для их последующей количественной оценки.

Исторически анализ поведения опирался на ручную обработку видеозаписей экспертами, что, несмотря на глубину экспертной оценки, сопряжено с рядом системных ограничений, таких как высокая трудоемкость, низкая пропускная способность и, что наиболее важно, элемент субъективности, снижающий воспроизводимость результатов [4]. Появление автоматизированных систем видео-трекинга частично решило эти проблемы, предоставив объективные метрики, такие как пройденная дистанция или время, проведенное в определенных зонах. Однако эти традиционные подходы, как правило, редуцируют сложное поведение биообъекта до анализа траектории центра масс его тела, игнорируя при этом богатый репертуар поз и коротких поведенческих актов [5]. В последние годы ведущими методами в данной области стали методы, основанные на машинном и, в частности, глубоком обучении. Современные архитектуры нейронных сетей позволяют с высокой точностью отслеживать множество точек на теле животного и классифицировать сложные поведенческие состояния с детализацией, ранее недоступной для автоматизированных систем трекинга [6, 7]. Тем не менее, эти мощные инструменты приводят к новым ограничениям: они часто требуют значительных вычислительных ресурсов, больших размеченных наборов данных для обучения и могут представлять собой "черные ящики", затрудняя интерпретацию полученных результатов и интеграцию временного контекста на длительных промежутках времени.

Таким образом, на текущем этапе развития технологий анализа поведения сформировался "научный пробел" между простыми, но ограниченными в пропускной способности или информативности традиционными методами, и мощными, но вычислительно сложными современными подходами. Существует острая потребность в разработке комплексных методов, которые обеспечивали бы баланс между детализацией анализа, способностью эффективно интегрировать временной контекст и вычислительной производительностью.

Целью данного обзора является проведение анализа существующих подходов к обработке видеoinформации о поведении быстродвижущихся биообъектов в стандартизированном экспериментальном пространстве. В ходе анализа будут выявлены их ключевые методологические и системные ограничения, что позволит обосновать необходимость разработки новых моделей и методов, а также определить наиболее перспективные направления для создания комплексных систем поддержки принятия решений в докли-

нических исследованиях. Для достижения поставленной цели был проведен анализ современных методов моделирования высокоразмерных систем с акцентом на машинное обучение и методы извлечения знаний. В работе предлагается методологическая база, объединяющая актуальные технологии распознавания с моделями, точно отражающими динамику исследуемых систем. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Проанализированы традиционные методы, основанные на траекториях и классических алгоритмах компьютерного зрения, а также современные архитектуры глубокого обучения, применяемые для безмаркерной оценки поз и классификации поведения. Были рассмотрены ключевые предположения относительно динамики поведения и врожденные ограничения каждой методики в рамках системного подхода.
2. Выявлен методологический разрыв между точной локальной классификацией и комплексным системным анализом динамики. Особое внимание уделено отсутствию систематической структуры, позволяющей интегрировать последовательности меток с моделями общей структуры пространства состояний и динамики переходов.
3. Представлена четырехступенчатая структура динамического извлечения знаний, включающая высокоуровневое наблюдение, обучение позам или признакам, дискретизацию пространства состояний, а также стохастическое моделирование переходов с применением матриц вероятностей переходов и моделей Маркова.
4. Предложен исследовательский план, направленный на создание эффективных и интерпретируемых вычислительных методов, объединяющих технологии глубокого обучения с марковскими моделями и графовыми подходами к анализу поведения. Разрабатываемые методы обладают значительным потенциалом для применения в сферах механических систем, робототехники и фенотипизации поведения.

Данный подход ориентирован на переход от улучшения метрик классификации к разработке комплексных сквозных рабочих процессов, обеспечивающих преобразование исходных данных сенсоров в структурированные и интерпретируемые аналитические сведения о динамике сложных систем.

### **1. Традиционные методы поведенческого анализа и их ограничения**

До широкого распространения глубокого обучения инструменты для анализа динамики сложных объектов были представлены двумя основными категориями: прямое наблюдение экспертами и ранние автоматизированные системы, основанные на классическом алгоритме компьютерного зрения и обработки сигналов. Эти традиционные методы стали основой для количественного описания динамических процессов и на протяжении многих лет широко использовались в экспериментальной механике и видеоанализе. Тем не менее, эти подходы имеют ряд системных ограничений. Анализ этих ограничений необходим для понимания того, почему современные методы развивались именно так.

#### **1.1 Ручное аннотирование: золотой стандарт и его ограничения**

Долгое время основным методом анализа сложной динамики было прямое наблюдение и ручное протоколирование (аннотирование) событий квалифицированным экспертом. Исследователь анализировал видеозаписи и, основываясь на заранее определенном классификаторе состояний, фиксировал моменты начала и окончания, а также частоту каждого динамического события [8]. Этот подход до сих пор считается "золотым стандартом" для верификации автоматизированных систем, поскольку человек способен

улавливать нюансы и контекстуальные детали движения, недоступные простым алгоритмам. Например, эксперт может отличить целевое функциональное движение от хаотического или сбойного режима на основе сложно формализуемых различий в кинематике. Именно такие детальные, длительные наблюдения позволяют выявлять специфические феноменологические особенности динамики, как, например, в задачах диагностики систем с накоплением усталостных повреждений или деградацией параметров, где специфические особенности поведения объекта обнаруживаются лишь при длительном мониторинге в штатных режимах эксплуатации [9].

Несмотря на свою информационную ценность, ручное аннотирование обладает критическими системными ограничениями, которые препятствуют его широкому применению в современных исследованиях с большими объемами данных.

**Субъективность и низкая воспроизводимость:** Оценка динамики человеком неизбежно несет в себе элемент субъективности. Воспроизводимость результатов существенно зависит от согласованности между разными экспертами – межэкспертная надежность, и даже от стабильности оценок одного и того же специалиста в разное время – внутриэкспертная надежность [10, 11]. Усталость, изменение фокуса внимания и разная интерпретация пограничных случаев приводят к вариативности данных [12], что является серьезной проблемой для стандартизации исследований.

**Низкая пропускная способность и высокая трудоемкость:** Процесс ручного аннотирования чрезвычайно медленный. Анализ одного часа видеозаписей может занимать время, кратно превышающее длительность записи, в зависимости от сложности классификатора и опыта эксперта [13]. Это делает данный подход практически неприменимым для крупномасштабных экспериментов, анализа длительных временных рядов или задач, включающих взаимодействие множества объектов в группе [14].

**Ограниченная детализация:** как правило, эксперт фиксирует лишь категориальные данные (тип режима/события) и их временные характеристики (длительность, частота). При этом теряется информация о тонкой кинематике: точные траектории движения отдельных элементов системы, мгновенные скорости, ускорения и плавность переходов. Эти параметры могут нести важную диагностическую информацию о состоянии системы, но их точная количественная оценка при ручном анализе невозможна.

## **1.2 Автоматизированный видео-трекинг в стандартизированных установках**

Стремление преодолеть ограничения ручного аннотирования привело к созданию автоматизированных систем видео-трекинга, которые стали стандартом де-факто в задачах кинематического анализа подвижных объектов [5]. Эти системы, как правило, применяются в тандеме со стандартизированными экспериментальными полигонами, представляющими собой ограниченные двумерные или трехмерные области, геометрия которых накладывает граничные условия на динамику исследуемой системы [15].

Принцип работы таких систем заключается в редукции сложного многокомпонентного объекта к одной материальной точке – его центру масс (центроиду) или геометрическому центру проекции, с последующим анализом траектории этой точки в пространстве и времени. Программное обеспечение, такое как EthoVision XT [5] или ANY-maze [16], в режиме реального времени определяет координаты объекта на основе контраста с фоном (например, темный объект на светлой подложке). На основе полученных временных рядов координат рассчитывается набор объективных и легко интерпретируемых кинематических инвариантов:

1. Локомоторные метрики: длина траектории, векторы мгновенных скоростей и ускорений, распределение периодов движения и покоя.

2. Пространственно-топологические характеристики: время пребывания в заданных подмножествах конфигурационного пространства (зонирование), частота пересечения границ зон, параметры взаимодействия со стенками.
3. Событийные метрики: количество дискретных событий, определяемых пересечением виртуальных триггеров или достижением целевых областей пространства.

Главным достоинством такого подхода является объективность, воспроизводимость и высокая пропускная способность. Анализ проводится по детерминированным алгоритмам, исключая ошибку оператора, и позволяет обрабатывать большие массивы данных, что критически важно для моделирования.

Однако с точки зрения системного анализа динамики многомерных систем, такой подход является примером глубокого информационного редуционизма. Вся сложность фазового пространства системы, обладающей множеством внутренних степеней свободы (например, шарнирные механизмы, деформируемые тела), сводится к анализу проекции на плоскость движения центра масс. Это порождает фундаментальное ограничение: система не способна различать динамические режимы, которые реализуются в одной и той же точке пространства при нулевой скорости центра масс. Например, объект может находиться в стационарном состоянии (нулевая трансляционная скорость), но при этом испытывать сложные внутренние перестроения (вращение, вибрация, изменение конфигурации) или находиться в состоянии полного покоя. Для классических трекинг-систем эти принципиально разные термодинамические или механические состояния будут классифицированы одинаково – как "иммобильность" в заданной зоне [17]. Таким образом, теряется критически важная информация о внутренней динамике и фазовых переходах системы, что может приводить к неверной идентификации режимов функционирования.

### **1.3 Ранние подходы компьютерного зрения для расширенного анализа**

Для частичного преодоления ограничений центроидного трекинга были предприняты попытки использовать более сложные, но все еще "классические" методы компьютерного зрения и обработки сигналов, не требующие применения глубоких нейронных сетей. Эти методы позволили перейти от анализа материальной точки к анализу распределенных характеристик объекта.

#### **Вычитание фона**

Этот метод является базисом для большинства систем видеоаналитики и детекции движения. Алгоритм формирует эталонную модель статической сцены (фона), а затем из каждого последующего кадра вычитает этот фон. Оставшиеся ненулевые пиксели интерпретируются как объекты переднего плана [18]. Главный недостаток метода – высокая чувствительность к нестационарности условий: изменениям освещенности, появлению динамических теней или медленному дрейфу параметров фона, например, при вибрации камеры, что приводит к существенным ошибкам сегментации и появлению артефактов [19].

#### **Анализ силуэта**

После сегментации объекта методом вычитания фона становится возможным анализ не только положения центра масс, но и геометрии его проекции (силуэта). Такие дескрипторы формы, как площадь, периметр, коэффициент эксцентриситета (вытянутость) или компактность, позволяют с некоторой долей вероятности классифицировать простые конфигурационные состояния системы. Например, изменение ориентации вытянутого объекта относительно вертикальной оси или переход из компактного состояния в развернутое характеризуется значимым изменением эксцентриситета и площади проекции [20]. Тем не менее, данный метод обладает низкой селективностью: он сильно зависит от ра-

курса наблюдения (проекционные искажения) и часто не способен различить кинематически разные состояния, имеющие схожие проекционные площади – например, отличить вращение симметричного объекта от его покоя [21].

### **Оптический поток**

Этот метод оценивает поле скоростей видимого движения на изображении путем вычисления векторов смещения пикселей или их групп между последовательными кадрами на основе гипотезы постоянства яркости [22]. Анализ векторного поля оптического потока позволяет детектировать наличие движения и оценивать его интенсивность даже без явной сегментации границ объекта. Метод успешно применялся для детекции высокочастотных низкоамплитудных колебаний (микровибрации, дрожь) и кратковременных импульсных возмущений. Однако оптический поток плохо справляется с задачей семантической сегментации сложных динамических режимов, чувствителен к проблеме апертуры – неоднозначность движения в однородных текстурах, и сильно зашумлен в условиях реальных экспериментов с изменяющимся освещением [23].

#### **1.4 Системные ограничения традиционных подходов**

Подводя итог анализу традиционных методов исследования динамики, можно заключить, что они, несмотря на существенный вклад в стандартизацию экспериментальных методик, обладают общим системным недостатком: исследователь сталкивается с выбором между низкой воспроизводимостью экспертных оценок и объективностью, достигаемой ценой кардинального упрощения модели (информационного редукционизма). Рассмотрение сложной многокомпонентной системы как материальной точки или обобщенного геометрического примитива ("силуэта") приводит к игнорированию кинематической структуры объекта и сложной временной топологии переходов между динамическими режимами.

Попытки извлечь дополнительную информацию с помощью классических детерминированных алгоритмов компьютерного зрения оказались недостаточно робастными к вариациям условий эксперимента и плохо масштабируемыми для задач высокой размерности. Эта фундаментальная неспособность традиционных подходов эффективно и объективно реконструировать внутреннюю структуру динамики, ограничиваясь лишь интегральными пространственно-временными характеристиками, послужила главным стимулом для поиска принципиально новых решений, ставших доступными с развитием методов машинного обучения и нейросетевого моделирования [24].

## **2. Современные подходы на основе машинного и глубокого обучения**

Радикальные ограничения традиционных методов анализа динамики послужили катализатором поиска принципиально новых подходов, ставших возможными благодаря стремительному развитию машинного обучения и, в особенности, глубоких нейронных сетей. Этот переход ознаменовал смену парадигмы в инженерном анализе и техническом зрении: от анализа одномерных траекторий центроидов и простых геометрических примитивов к детальному многомерному описанию конфигураций и кинематики распределенных систем. Современные методы позволяют автоматизировать не только трекинг, но и идентификацию сложных динамических режимов с точностью, сопоставимой с экспертной оценкой, открывая новые горизонты для диагностики механических систем, робототехники и биомеханики [4].

### **2.1. Революция в оценке позы: безмаркерный трекинг ключевых точек**

Ключевым технологическим прорывом, позволившим преодолеть проблему информационного редукционизма классического трекинга, стало появление инструментов для безмаркерной оценки позы (markerless pose estimation). Вместо редукции сложного объекта к материальной точке, эти системы позволяют с высокой точностью восстанавливать

кинематику многозвенных механизмов, отслеживая координаты множества заранее определенных ключевых узлов (например, шарниров манипулятора, точек крепления деформируемых конструкций или суставов биомеханических моделей), фактически реконструируя "скелетную" модель объекта в каждом кадре видеопотока [25].

В основе этих инструментов лежат глубокие сверточные нейронные сети (CNN) [26], в частности архитектуры с остаточными связями (ResNet) [27], предварительно обученные на масштабных наборах данных, таких как ImageNet [28]. За счет механизма трансферного обучения (transfer learning) эти сети способны адаптироваться к новым задачам на основе относительно небольших выборок (100–200 кадров), размеченных вручную. Это позволяет с высокой точностью предсказывать положение узловых точек на новых изображениях даже в условиях сложного фона и меняющегося освещения.

Одним из наиболее известных инструментов, адаптированных для широкого спектра задач динамики, является библиотека DeepLabCut [6]. Ее архитектура сделала технологию оценки кинематики доступной для лабораторий, не специализирующихся на глубоком обучении. DeepLabCut позволяет пользователю гибко определять топологию отслеживаемой системы, что обеспечивает применимость как для анализа биологических объектов, так и для диагностики промышленных роботов или испытаний механических узлов. Дальнейшее развитие инструментария позволило перейти к трехмерной реконструкции движения и анализу взаимодействия нескольких объектов в едином рабочем пространстве [7, 29].

Другим мощным инструментом является SLEAP (Social LEAP Estimates Animal Poses), архитектура которого изначально оптимизирована для задач мультиобъектного трекинга, включая сценарии с перекрытиями взаимодействующих агентов [30]. Современные версии SLEAP демонстрируют высокую скорость инференса, что делает их предпочтительным выбором для обработки высокоскоростных видеопотоков в реальном времени.

Получение временных рядов координат ключевых точек кардинально меняет уровень доступной информации. Исследователи получают доступ к полному фазовому портрету системы: углам в сочленениях, угловым скоростям, фазовым сдвигам между элементами и деформациям. Это позволяет перейти от вопроса "где находится объект?" к вопросам "в каком режиме он функционирует?" и "наблюдаются ли признаки деградации кинематической цепи?", открывая возможности для предиктивной диагностики и анализа тонкой структуры движения [31].

## **2.2. Автоматическая классификация поведения**

Наличие высокоточных данных о конфигурации системы является основой для следующего шага – автоматической идентификации динамических режимов и диагностики состояний. Здесь доминируют подходы на основе машинного и глубокого обучения, которые методологически можно разделить на две категории.

Первый подход является двухэтапным. Сначала с помощью систем типа DeepLabCut или SLEAP из видеопотока извлекаются временные ряды координат ключевых узлов. Затем эти кинематические данные, а также их производные (скорости, ускорения, углы), используются как векторы признаков для классических моделей обучения с учителем. Эксперт размечает временные интервалы, соответствующие различным режимам работы (например, "штатный режим", "дисбаланс", "переходный процесс"), и на этих данных обучается классификатор, такой как метод опорных векторов (SVM) [32], случайный лес (Random Forest) [33] или градиентный бустинг (Gradient Boosting) [34, 35]. Этот метод обладает хорошей интерпретируемостью, так как позволяет оценить вклад каждого кинематического параметра в принятие решения, но его точность критически зависит от полноты сформированного пространства признаков.

Более современные подходы стремятся к созданию сквозных (end-to-end) моделей, обучающихся классифицировать состояния системы непосредственно из "сырых" сенсорных данных (пикселей видео или сигналов датчиков), минуя этап явного конструирования признаков [36]. Это позволяет модели самостоятельно выделять скрытые нелинейные паттерны, которые могут быть неочевидны для эксперта-человека.

#### **Анализ отдельных кадров с помощью CNN**

Простейший вариант реализации – использование стандартных сверточных архитектур (например, ResNet, Inception) для классификации состояния системы в каждом отдельном кадре [37]. Модель обучается распознавать статические конфигурации, характерные для того или иного режима. Однако этот подход имеет фундаментальное ограничение: он игнорирует временной контекст. Многие дефекты, например, такие как, низкочастотная модуляция, прецессия вала, являются динамическими процессами и не могут быть идентифицированы по мгновенному снимку.

#### **Анализ последовательностей с помощью рекуррентных и трансформерных сетей**

Для преодоления ограничений статического анализа необходимо использование архитектур, способных обрабатывать последовательности. Исторически для этого применялись рекуррентные нейронные сети (RNN) [38] и их модификации LSTM [39], обладающие "памятью" о предыстории процесса [40]. Однако в последние годы доминирующей архитектурой для анализа временных рядов в механике стали трансформеры (Transformers) [41]. Модели, использующие механизм внимания (Attention) [42], позволяют эффективно взвешивать значимость различных временных отсчетов и улавливать как краткосрочные импульсные возмущения, так и долгосрочные тренды деградации. Это дает им значительное преимущество в задачах прогнозирования отказов и диагностики сложных нелинейных систем [43].

### **2.3. Применение и методологические инновации**

Современные методы глубокого обучения уже доказали свою эффективность при решении задач идентификации состояний в системах с высокой стохастичностью. Показательным примером может служить количественная оценка специфических высокочастотных паттернов, в частности, актов грызения, у лабораторных биомоделей линии 5xFAD [44]. Применение нейросетевых алгоритмов позволило формализовать и объективно измерить поведенческий фенотип, характеризующийся сложной микроструктурой движений, который ранее оставался недоступным для фиксации традиционными интегральными методами. Этот результат демонстрирует потенциал метода не только в биологии, но и как универсального инструмента для детектирования тонких динамических аномалий в любых сложных системах.

Тем не менее, высокая вычислительная сложность трансформерных моделей ограничивает их применение в аппаратных системах реального времени. В связи с этим перспективным направлением является разработка эффективных методов предобработки данных, кодирующих временную динамику в компактные статические представления. Примером такого подхода является метод пространственно-селективного временного цветокодирования (ЦВК) [45], который преобразует последовательность кадров движения в единое композитное изображение, где цветовые каналы кодируют изменение состояния системы во времени. Такая предобработка позволяет сохранить информацию о фазовой траектории, существенно снижая требования к вычислительным ресурсам классификатора.

### **2.4. Новые возможности и новые вызовы**

Подводя итог, можно утверждать, что методы на основе глубокого обучения кардинально расширили инструментарий системного анализа динамики, обеспечив высокий

уровень автоматизации и объективности. Они позволяют не просто регистрировать факты отказов, а количественно описывать изменение динамических состояний, открывая путь к предиктивной аналитике.

Вместе с тем, эти мощные инструменты порождают и новые вызовы. К ним относятся потребность в больших, качественно размеченных наборах данных для обучения, высокая требовательность к вычислительным ресурсам, а также проблема "черного ящика", когда принятое моделью решение сложно интерпретировать с физической точки зрения, а попытки post-hoc объяснения могут быть ненадежными [46]. Анализ этих ограничений и поиск путей их преодоления (Explainable AI, XAI) является ключевой задачей на современном этапе развития вычислительной механики и диагностики.

### **3. Анализ ограничений современных подходов**

Внедрение методов глубокого обучения, существенно изменило область анализа поведения, предоставив исследователям инструменты для детальной и объективной количественной оценки. Однако, как и любая технология, методы глубокого обучения обладают собственным набором системных ограничений и компромиссов. Простого стремления к повышению метрик точности классификации недостаточно для построения адекватных моделей сложных динамических систем. Критический анализ выявляет ряд фундаментальных проблем, которые препятствуют полному раскрытию потенциала современных подходов и формируют "научный пробел" данной области.

#### **3.1. Проблема временного горизонта и потеря долгосрочной динамики**

Одним из наиболее существенных ограничений является неспособность большинства современных моделей эффективно анализировать динамику в долгосрочной перспективе. Архитектуры, основанные на анализе отдельных кадров (CNN), по своей сути инвариантны к временному контексту. Более продвинутые модели, такие как RNN или трансформеры, решают эту проблему, но лишь в рамках ограниченного временного окна – как правило, от долей секунды до нескольких секунд [47].

Однако функционирование сложной системы – это не просто сумма независимых событий секундной или субсекундной длительности. Это структурированная последовательность, обладающая собственной внутренней логикой и иерархией временных масштабов [31]. Долгосрочные эксплуатационные стратегии, медленные тренды деградации параметров (дрейф), циклы накопления усталости и, что особенно важно, переходные процессы между режимами – все это остается за рамками анализа коротких временных отрезков. Таким образом, происходит потеря информации на макроуровне системной динамики, что не позволяет ответить на вопросы о том, как организована глобальная структура фазового пространства и как она трансформируется под влиянием внешних факторов или внутренних изменений параметров системы.

#### **3.2. Вычислительная сложность как барьер для практического применения**

Стремление уловить более сложные пространственно-временные зависимости напрямую ведет к другой системной проблеме – высокой вычислительной сложности. Модели, демонстрирующие наилучшую точность (SOTA), особенно 3D-CNN и видеотрансформеры, требуют для обучения и инференса значительных вычислительных ресурсов: мощных графических процессоров (GPU) и существенного времени на обработку [48]. Это ограничение имеет несколько критических практических следствий:

1. Барьер для внедрения: Высокие требования к аппаратному обеспечению затрудняют интеграцию этих методов в промышленные системы мониторинга и встроенные системы диагностики с ограниченным энергопотреблением.
2. Невозможность анализа в реальном времени: обработка данных часто происходит в режиме post-processing и может занимать время, превышающее длительность

ность самого процесса. Это исключает возможность создания адаптивных систем управления с обратной связью, где управляющее воздействие должно корректироваться в зависимости от мгновенного состояния объекта.

3. Проблема масштабируемости: Анализ длительных временных рядов (например, ресурсных испытаний или непрерывного мониторинга) становится вычислительно неразрешимой задачей, что ограничивает исследования кумулятивных эффектов и редких событий.

### **3.3. Проблема "черного ящика" и дефицит интерпретируемости**

Глубокие нейронные сети часто характеризуются как "черные ящики". Несмотря на высокую точность аппроксимации, внутренняя логика принятия решений моделью остается непрозрачной [46]. Модель может научиться классифицировать режимы, основываясь на артефактах сигнала или фона, а не на физически значимых кинематических инвариантах. Это создает риск получения формально точных, но физически некорректных результатов и подрывает доверие к автоматизированной системе диагностики. Для инженерных приложений и задач обеспечения надежности критически важна не только точность детекции, но и понимание того, на каких именно признаках (физических параметрах) модель основывает свой вывод.

### **3.4. Смещение фокуса с анализа системы на точность классификации**

Вышеперечисленные ограничения приводят к общей методологической проблеме: большинство современных работ в области машинного обучения фокусируются на решении локальной задачи – достижении максимальной точности классификации отдельных состояний. Публикации часто ограничиваются демонстрацией высоких значений F1-метрики. Однако, с точки зрения системного анализа, классификация – это не конечная цель, а лишь этап предварительной обработки: преобразование сырых данных в символичный временной ряд (последовательность состояний).

Истинная научная задача начинается дальше – с анализа этого ряда для понимания топологии и динамики системы как единого целого. Ключевой шаг от дискретной классификации к системному анализу заключается в смещении фокуса с самих состояний на динамику переходов между ними. Иллюстративным примером такого подхода является использование матриц переходных вероятностей (Transition Probability Matrices) как инструмента для описания динамического "портрета" системы. Анализ спектральных свойств таких матриц позволяет количественно оценить вероятности переключений между режимами, выявить устойчивые циклы и аттракторы, и, самое главное, объективно сравнить эти динамические паттерны для различных состояний системы (например, "норма" или "дефект"). Этот подход позволяет извлечь информацию о внутренней организации процессов, которая полностью теряется при анализе лишь интегральных статистик пребывания в состояниях [49].

Таким образом, существующий "научный пробел" заключается не столько в недостаточной точности классификаторов, сколько в отсутствии методологического моста между результатом их работы и инструментами для последующего системного анализа динамической структуры процессов.

### **Заключение**

В настоящем обзоре прослежена эволюция методологии количественного анализа динамики систем с большим числом степеней свободы: от интерпретируемых, но редуционистских классических подходов (ручное аннотирование, центроидный трекинг) до современных методов глубокого обучения, которые обеспечивают высокую детализацию описания конфигурации, но ограничены вычислительной сложностью и слабой объяснимостью. Ключевой выявленный методологический разрыв заключается в отсутствии устойчивых процедур перехода от последовательности локальных классификационных

решений к объектно-ориентированному системному анализу динамики, опирающемуся на глобальную структуру фазового пространства. Для его преодоления мы предлагаем рассматривать современные классификаторы не как конечную цель, а как первый шаг в pipeline извлечения знаний: "высокоразмерный сенсорный поток → оценка позы/признаков → дискретизация пространства состояний → оценка матриц переходных вероятностей и марковских моделей → анализ устойчивости, аттракторов и аномалий".

В контексте машинного обучения и извлечения знаний такой взгляд определяет несколько приоритетных направлений дальнейших исследований.

1. Компактное кодирование временной динамики. Разработка методов преобразования длинных временных рядов в информативные статические представления, сохраняющие структуру переходов между состояниями и пригодные для обучения легких классификаторов и регрессоров.
2. Совместное обучение состояний и переходов. Построение гибридных архитектур, в которых модели глубокого обучения для распознавания позы и состояний оптимизируются совместно с марковскими моделями, отражающими ожидаемую структуру переходов, что должно повысить устойчивость к шуму и увеличить интерпретируемость.
3. Интеграция с Explainable AI. Использование графов состояний, матриц переходных вероятностей и производных от них метрик (энтропии, времён первого возврата, устойчивых циклов) в качестве глобальных объяснений поведения сложных моделей и основы для диагностических показателей, понятных эксперту инженеру.
4. Масштабируемые алгоритмы анализа динамики. Разработка вычислительно эффективных процедур оценки и регуляризации переходных матриц для длинных временных рядов, включая обработку редких событий, нестационарность и иерархические уровни описания.
5. Мультидоменная валидация. Систематическое тестирование предложенного фреймворка на задачах из механики, робототехники и поведенческой биологии с сопоставлением вариантов разбиения пространства состояний и различных семейств стохастических моделей.

Развитие этих направлений позволит перейти от узко ориентированных систем распознавания отдельных событий к комплексным, вычислительно эффективным и физически интерпретируемым системам динамического анализа, замыкающим цикл от извлечения признаков и классификации до извлечения знаний о глобальной структуре поведения многомерных объектов и поддержки принятия инженерных решений.

#### Список источников

1. *Schiehlen W.* Multibody system dynamics: roots and perspectives // *Multibody system dynamics*. 1997. V. 1, no 2. P. 149–188.
2. *Strogatz S. H.* Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Chapman and Hall/CRC, 2024.
3. *Rabiner L. R.* A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // *Proceedings of the IEEE*. 2002. V. 77, no 2. P. 257–286.
4. *Berman G. J.* Measuring behavior across scales // *BMC biology*. 2018. V. 16, no 1. P. 23.
5. *Noldus L. P. J. J., Spink A. J., Tegelenbosch R. A. J.* EthoVision: a versatile video tracking system for automation of behavioral experiments // *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers*. 2001. V. 33, no 3. P. 398–414.
6. *Mathis A. et al.* DeepLabCut: markerless pose estimation of user-defined body parts with deep learning // *Nature neuroscience*. 2018. V. 21, no 9. P. 1281–1289.

7. *Nath T. et al.* Using DeepLabCut for 3D markerless pose estimation across species and behaviors // *Nature protocols*. 2019. V. 14, no 7. P. 2152–2176.
8. *Dawkins M. S., Martin P., Bateson P.* Measuring Behaviour. An Introductory Guide // *Journal of Animal Ecology*. 1994. V. 63, no 3. P. 746.
9. *Ушакова А. А. и др.* Некоторые поведенческие особенности сенильных животных 5XFAD, выявляемые при длительных наблюдениях в домашних клетках // *Вестник Пермской государственной фармацевтической академии "Кромеровские чтения 2023"*. 2023. С. 95–98.
10. *Tuytens F. A. M. et al.* Observer bias in animal behaviour research: can we believe what we score, if we score what we believe? // *Animal Behaviour*. 2014. V. 90. P. 273–280.
11. *Fort K., Nazarenko A., Rosset S.* Modeling the complexity of manual annotation tasks: a grid of analysis // *International conference on computational linguistics*. 2012. P. 895–910.
12. *Ahmadzadeh A. et al.* A Guide for Manual Annotation of Scientific Imagery: How to Prepare for Large Projects // *arXiv preprint arXiv:2508.14801*. 2025.
13. *Thakur A., Arya S.* Comparative analysis of manual and programmed annotations for crowd assessment and classification using artificial intelligence // *Data Science and Management*. 2024. V. 7, no 4. P. 340–348.
14. *Dell A. I. et al.* Automated image-based tracking and its application in ecology // *Trends in ecology & evolution*. 2014. V. 29, no 7. P. 417–428.
15. *Seibenhener M. L., Wooten M. C.* Use of the open field maze to measure locomotor and anxiety-like behavior in mice // *Journal of visualized experiments: JoVE*. 2015. No 96. P. 52434.
16. *Lim C. J. M. et al.* Comparison of automated video tracking systems in the open field test: ANY-Maze versus EthoVision XT // *Journal of Neuroscience Methods*. 2023. V. 397. P. 109940.
17. *Escalona J. L., Urda P., Muñoz S.* A track geometry measuring system based on multi-body kinematics, inertial sensors and computer vision // *Sensors*. 2021. V. 21, no 3. P. 683.
18. *Piccardi M.* Background subtraction techniques: a review // *2004 IEEE international conference on systems, man and cybernetics (IEEE Cat. No. 04CH37583)*. IEEE, 2004. V. 4. P. 3099–3104.
19. *Bouwman T.* Traditional and recent approaches in background modeling for foreground detection: An overview // *Computer science review*. 2014. V. 11. P. 31–66.
20. *Bobick A. F., Davis J. W.* The recognition of human movement using temporal templates // *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*. 2002. V. 23, no 3. P. 257–267.
21. *Haro G.* Shape from silhouette consensus and photo-consistency // *2014 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. IEEE, 2014. P. 4837–4841.
22. *Barron J. L., Fleet D. J., Beauchemin S. S.* Performance of optical flow techniques // *International journal of computer vision*. 1994. V. 12, no 1. P. 43–77.
23. *Baker S. et al.* A database and evaluation methodology for optical flow // *International journal of computer vision*. 2011. V. 92, no 1. P. 1–31.
24. *Brunton S. L., Noack B. R., Koumoutsakos P.* Machine learning for fluid mechanics // *Annual review of fluid mechanics*. 2020. V. 52, no 1. P. 477–508.
25. *Pereira T. D. et al.* SLEAP: A deep learning system for multi-animal pose tracking // *Nature methods*. 2022. V. 19, no 4. P. 486–495.
26. *LeCun Y. et al.* Gradient-based learning applied to document recognition // *Proceedings of the IEEE*. 2002. V. 86, no 11. P. 2278–2324.

27. He K. et al. Deep residual learning for image recognition // Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. 2016. P. 770–778.
28. Deng J. et al. Imagenet: A large-scale hierarchical image database // 2009 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (CVPR 2009). 2009. P. 248–255.
29. Lauer J. et al. Multi-animal pose estimation, identification and tracking with DeepLabCut // Nature Methods. 2022. V. 19, no 4. P. 496–504.
30. Pereira T. D. et al. Fast animal pose estimation using deep neural networks // Nature methods. 2019. V. 16, no 1. P. 117–125.
31. Wiltschko A. B. et al. Mapping sub-second structure in mouse behavior // Neuron. 2015. V. 88, no 6. P. 1121–1135.
32. Cortes C., Vapnik V. Support-vector networks // Machine learning. 1995. V. 20, no 3. P. 273–297.
33. Breiman L. Random forests // Machine learning. 2001. V. 45, no 1. P. 5–32.
34. Friedman J. H. Greedy function approximation: a gradient boosting machine // Annals of statistics. 2001. P. 1189–1232.
35. Kabra M. et al. JAABA: interactive machine learning for automatic annotation of animal behavior // Nature methods. 2013. V. 10, no 1. P. 64–67.
36. Zhang L. et al. A nearly end-to-end deep learning approach to fault diagnosis of wind turbine gearboxes under nonstationary conditions // Engineering applications of artificial intelligence. 2023. V. 119. P. 105735.
37. Sturman O. et al. Deep learning-based behavioral analysis reaches human accuracy and is capable of outperforming commercial solutions // Neuropsychopharmacology. 2020. V. 45, no 11. P. 1942–1952.
38. Sherstinsky A. Fundamentals of recurrent neural network (RNN) and long short-term memory (LSTM) network // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2020. V. 404. P. 132306.
39. Graves A. Long short-term memory // Supervised sequence labelling with recurrent neural networks. 2012. P. 37–45.
40. Graves A., Mohamed A., Hinton G. Speech recognition with deep recurrent neural networks // 2013 IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing. Ieee, 2013. P. 6645–6649.
41. Ashish V. Attention is all you need // Advances in neural information processing systems. 2017. V. 30. P. 1.
42. Bertasius G., Wang H., Torresani L. Is space-time attention all you need for video understanding? // Icml. 2021. V. 2, no 3. P. 4.
43. Nascimento E. G. S. et al. T4PdM: A deep neural network based on the transformer architecture for fault diagnosis of rotating machinery // arXiv preprint arXiv:2204.03725. 2022.
44. Ushakova A. et al. Assessment of Gnawing Behavior in 5xFAD Mice // International Perm Forum Science and Global Challenges of the 21st Century. Cham : Springer Nature Switzerland, 2022. P. 493–498.
45. Barulina M. et al. Method for preprocessing video data for training deep-learning models for identifying behavioral events in bio-objects // Mathematics. 2024. V. 12. no 24. P. 3978.
46. Rudin C. Stop explaining black box machine learning models for high stakes decisions and use interpretable models instead // Nature machine intelligence. 2019. V. 1, no 5. P. 206–215.
47. Carreira J., Zisserman A. Quo vadis, action recognition? a new model and the kinetics dataset // proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2017. P. 6299–6308.

48. Tran D. et al. Learning spatiotemporal features with 3d convolutional networks // Proceedings of the IEEE international conference on computer vision. 2015. P. 4489–4497.
49. Shirobokova S. et al. Application of Transition Matrices as Selective Descriptors for Behavioral Phenotyping of Young 5xFAD Animals // International Perm Forum Science and Global Challenges of the 21st Century. Cham: Springer Nature Switzerland, 2022. P. 499–506.

## References

1. Schiehlen, W. (1997), "Multibody system dynamics: roots and perspectives", *Multibody System Dynamics*, 1(2), pp. 149–188.
2. Strogatz, S.H. (2024), *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Chapman and Hall/CRC.
3. Rabiner, L.R. (2002), "A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition", *Proceedings of the IEEE*, 77(2), pp. 257–286.
4. Berman, G.J. (2018), "Measuring behavior across scales", *BMC Biology*, 16(1), p. 23.
5. Noldus, L.P.J.J., Spink, A.J. and Tegelenbosch, R.A.J. (2001), "EthoVision: a versatile video tracking system for automation of behavioral experiments", *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers*, 33(3), pp. 398–414.
6. Mathis, A. et al. (2018), "DeepLabCut: markerless pose estimation of user-defined body parts with deep learning", *Nature Neuroscience*, 21(9), pp. 1281–1289.
7. Nath, T. et al. (2019), "Using DeepLabCut for 3D markerless pose estimation across species and behaviors", *Nature Protocols*, 14(7), pp. 2152–2176.
8. Dawkins, M.S., Martin, P. and Bateson, P. (1994), "Measuring Behaviour. An Introductory Guide", *Journal of Animal Ecology*, 63(3), p. 746.
9. Ushakova, A.A. et al. (2023), "Some behavioral features of senile 5XFAD animals identified during long-term observations in home cages", in *Vestnik Permskoy gosudarstvennoy farmatsevticheskoy akademii "Kromerovskie chteniya 2023"*, pp. 95–98.
10. Tuytens, F.A.M. et al. (2014), "Observer bias in animal behaviour research: can we believe what we score, if we score what we believe?", *Animal Behaviour*, 90, pp. 273–280.
11. Fort, K., Nazarenko, A. and Rosset, S. (2012), "Modeling the complexity of manual annotation tasks: a grid of analysis", in *International Conference on Computational Linguistics*, pp. 895–910.
12. Ahmadzadeh, A. et al. (2025), "A Guide for Manual Annotation of Scientific Imagery: How to Prepare for Large Projects", *arXiv preprint arXiv:2508.14801*.
13. Thakur, A. and Arya, S. (2024), "Comparative analysis of manual and programmed annotations for crowd assessment and classification using artificial intelligence", *Data Science and Management*, 7(4), pp. 340–348.
14. Dell, A.I. et al. (2014), "Automated image-based tracking and its application in ecology", *Trends in Ecology & Evolution*, 29(7), pp. 417–428.
15. Seibenhener, M.L. and Wooten, M.C. (2015), "Use of the open field maze to measure locomotor and anxiety-like behavior in mice", *Journal of Visualized Experiments: JoVE*, (96), p. e52434.
16. Lim, C.J.M. et al. (2023), "Comparison of automated video tracking systems in the open field test: ANY-Maze versus EthoVision XT", *Journal of Neuroscience Methods*, 397, p. 109940.
17. Escalona, J.L., Urda, P. and Muñoz, S. (2021), "A track geometry measuring system based on multi-body kinematics, inertial sensors and computer vision", *Sensors*, 21(3), p. 683.
18. Piccardi, M. (2004), "Background subtraction techniques: a review", in *2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. IEEE, Vol. 4, pp. 3099–3104.

19. Bouwmans, T. (2014), "Traditional and recent approaches in background modeling for foreground detection: An overview", *Computer Science Review*, 11, pp. 31–66.
20. Bobick, A.F. and Davis, J.W. (2002), "The recognition of human movement using temporal templates", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(3), pp. 257–267.
21. Haro, G. (2014), "Shape from silhouette consensus and photo-consistency", in *2014 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. IEEE, pp. 4837–4841.
22. Barron, J.L., Fleet, D.J. and Beauchemin, S.S. (1994), "Performance of optical flow techniques", *International Journal of Computer Vision*, 12(1), pp. 43–77.
23. Baker, S. et al. (2011), "A database and evaluation methodology for optical flow", *International Journal of Computer Vision*, 92(1), pp. 1–31.
24. Brunton, S.L., Noack, B.R. and Koumoutsakos, P. (2020), "Machine learning for fluid mechanics", *Annual Review of Fluid Mechanics*, 52(1), pp. 477–508.
25. Pereira, T.D. et al. (2022), "SLEAP: A deep learning system for multi-animal pose tracking", *Nature Methods*, 19(4), pp. 486–495.
26. LeCun, Y. et al. (2002), "Gradient-based learning applied to document recognition", *Proceedings of the IEEE*, 86(11), pp. 2278–2324.
27. He, K. et al. (2016), "Deep residual learning for image recognition", in *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 770–778.
28. Deng, J. et al. (2009), "Imagenet: A large-scale hierarchical image database", in *2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. IEEE, pp. 248–255.
29. Lauer, J. et al. (2022), "Multi-animal pose estimation, identification and tracking with DeepLabCut", *Nature Methods*, 19(4), pp. 496–504.
30. Pereira, T.D. et al. (2019), "Fast animal pose estimation using deep neural networks", *Nature Methods*, 16(1), pp. 117–125.
31. Wiltschko, A.B. et al. (2015), "Mapping sub-second structure in mouse behavior", *Neuron*, 88(6), pp. 1121–1135.
32. Cortes, C. and Vapnik, V. (1995), "Support-vector networks", *Machine Learning*, 20(3), pp. 273–297.
33. Breiman, L. (2001), "Random forests", *Machine Learning*, 45(1), pp. 5–32.
34. Friedman, J.H. (2001), "Greedy function approximation: a gradient boosting machine", *Annals of Statistics*, pp. 1189–1232.
35. Kabra, M. et al. (2013), "JAABA: interactive machine learning for automatic annotation of animal behavior", *Nature Methods*, 10(1), pp. 64–67.
36. Zhang, L. et al. (2023), "A nearly end-to-end deep learning approach to fault diagnosis of wind turbine gearboxes under nonstationary conditions", *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 119, p. 105735.
37. Sturman, O. et al. (2020), "Deep learning-based behavioral analysis reaches human accuracy and is capable of outperforming commercial solutions", *Neuropsychopharmacology*, 45(11), pp. 1942–1952.
38. Sherstinsky, A. (2020), "Fundamentals of recurrent neural network (RNN) and long short-term memory (LSTM) network", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 404, p. 132306.
39. Graves, A. (2012), "Long short-term memory", in *Supervised Sequence Labelling with Recurrent Neural Networks*, pp. 37–45.
40. Graves, A., Mohamed, A. and Hinton, G. (2013), "Speech recognition with deep recurrent neural networks", in *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. IEEE, pp. 6645–6649.
41. Ashish, V. (2017), "Attention is all you need", *Advances in Neural Information Processing Systems*, 30, p. 1.

42. Bertasius, G., Wang, H. and Torresani, L. (2021), "Is space-time attention all you need for video understanding?", *ICML*, 2(3), p. 4.
43. Nascimento, E.G.S. et al. (2022), "T4PdM: A deep neural network based on the transformer architecture for fault diagnosis of rotating machinery", *arXiv preprint arXiv:2204.03725*.
44. Ushakova, A. et al. (2022), "Assessment of Gnawing Behavior in 5xFAD Mice", in *International Perm Forum Science and Global Challenges of the 21st Century*. Cham: Springer Nature Switzerland, pp. 493–498.
45. Barulina, M. et al. (2024), "Method for preprocessing video data for training deep-learning models for identifying behavioral events in bio-objects", *Mathematics*, 12(24), p. 3978.
46. Rudin, C. (2019), "Stop explaining black box machine learning models for high stakes decisions and use interpretable models instead", *Nature Machine Intelligence*, 1(5), pp. 206–215.
47. Carreira, J. and Zisserman, A. (2017), "Quo vadis, action recognition? A new model and the kinetics dataset", in *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 6299–6308.
48. Tran, D. et al. (2015), "Learning spatiotemporal features with 3d convolutional networks", in *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, pp. 4489–4497.
49. Shirobokova, S. et al. (2022), "Application of Transition Matrices as Selective Descriptors for Behavioral Phenotyping of Young 5xFAD Animals", in *International Perm Forum Science and Global Challenges of the 21st Century*. Cham: Springer Nature Switzerland, pp. 499–506.

**Информация об авторах:**

И. И. Коваленко – аспирант, заведующий лабораторией Центра искусственного интеллекта Физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, г. Пермь, ул. Букирева, д.15), eLibrary Author ID: 1161522, Scopus AuthorID: 57878997400, ORCID: 0000-0003-4450-1184, SPIN-код: 5738-0770;

Е. А. Ахременко – аспирант, научный сотрудник Центра искусственного интеллекта Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, г. Пермь, ул. Букирева, д.15), eLibrary Author ID: 1072291, Scopus AuthorID: 57217008504, ORCID: 0000-0003-0757-064X, SPIN-код: 8315-9400;

А. И. Андреев – заведующий Лабораторией экспериментальной фармакологии Химического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, г. Пермь, ул. Букирева, д.15), eLibrary Author ID: 718454, Scopus AuthorID: 55973997200, ORCID: 0000-0002-3718-4830, SPIN-код: 2892-7750;

М. А. Барулина – доктор физико-математических наук, доцент; директор Физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, г. Пермь, ул. Букирева, д.15), eLibrary Author ID: 174006, Scopus AuthorID: 51161080800, ORCID: 0000-0003-3867-648X, SPIN-код: 1987-9965.

**Information about the authors:**

I. I. Kovalenko – Postgraduate Student, Head of the Laboratory of the Artificial Intelligence Center, Institute of Physics and Mathematics, Perm State University (15 Bukireva St., Perm, 614068, Russia), eLibrary Author ID: 1161522, Scopus AuthorID: 57878997400, ORCID: 0000-0003-4450-1184, SPIN-code: 5738-0770;

E. A. Ahremenko – Postgraduate Student, Researcher at the Artificial Intelligence Center, Perm State University (15 Bukireva St., Perm, 614068, Russia), eLibrary Author

ID: 1072291, Scopus AuthorID: 57217008504, ORCID: 0000-0003-0757-064X, SPIN-code: 8315-9400;

A. I. Andreev – Head of the Laboratory of Experimental Pharmacology, Faculty of Chemistry, Perm State University (15 Bukireva St., Perm, 614068, Russia), eLibrary Author ID: 718454, Scopus AuthorID: 55973997200, ORCID: 0000-0002-3718-4830, SPIN-code: 2892-7750;

M. A. Barulina – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; Director of the Institute of Physics and Mathematics, Perm State University (15 Bukireva St., Perm, 614068, Russia), eLibrary Author ID: 174006, Scopus AuthorID: 51161080800, ORCID: 0000-0003-3867-648X, SPIN-code: 1987-9965.

Научная статья

УДК 004.9

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-118-130

<https://elibrary.ru/bsgybb>



## Модель интеграции геймифицированного обучающего модуля в процесс изучения алгоритмов сортировки

Сергей Владимирович Сидоров<sup>1</sup>, Валентина Андреевна Черкасова<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева, Астрахань, Россия

<sup>1</sup>[galserge.sidorov@gmail.com](mailto:galserge.sidorov@gmail.com)

<sup>2</sup>[valyc@mail.ru](mailto:valyc@mail.ru)

**Аннотация.** Целью исследования является разработка и апробация модели интеграции геймифицированного обучающего модуля в процесс изучения алгоритмов сортировки. Разработанное веб-приложение ориентировано на учащихся старших классов, студентов младших курсов, включая гуманитарные направления подготовки, а также лиц, осваивающих программирование самостоятельно. Теоретическую основу составила теория поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина. Новизна подхода заключается в использовании классической дидактической теории при разработке геймифицированного ресурса и применении технологий искусственного интеллекта для его реализации. Эффективность модели оценивалась в пилотном эксперименте с участием 24 студентов: измерялся уровень удовлетворенности процессом обучения. Выявлены статистически значимые различия в пользу экспериментальной группы ( $U = 143.5$ ,  $p < 0.001$ ,  $r = 0.84$ ). Полученные данные свидетельствуют в пользу того, что предложенная модель может способствовать повышению удовлетворенности и вовлеченности студентов на этапе первичного знакомства с алгоритмами для малых групп.

**Ключевые слова:** геймификация; алгоритмы сортировки; визуализация алгоритмов; теория Гальперина; искусственный интеллект; практический эксперимент; веб-технологии.

**Для цитирования:** Сидоров С. В., Черкасова В. А. Модель интеграции геймифицированного обучающего модуля в процесс изучения алгоритмов сортировки // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 118–130. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-118-130. <https://elibrary.ru/bsgybb>.

Статья поступила в редакцию 20.01.2026; одобрена после рецензирования 06.03.2026; принята к публикации 20.03.2026.



© Сидоров С. В., Черкасова В. А., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

## A Model for Gamified Learning Module Integrating Into the Sorting Algorithms Study

Sergey V. Sidorov<sup>1</sup>, Valentina A. Cherkasova<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Astrakhan State University name of V.N Tatishcheva, Astrakhan, Russia

<sup>1</sup>galserge.sidorov@gmail.com

<sup>2</sup>valyc@mail.ru

**Abstract.** The aim of the study is to develop and test a model for integrating a gamified learning module into the process of teaching sorting algorithms. The developed web application is aimed at high school students, undergraduate students (including those in humanities), and individuals learning programming independently. The theoretical framework is based on Galperin's theory of the stage-by-stage formation of mental actions. The novelty of the approach lies in the use of classical didactic theory in the development of a gamified resource and the application of artificial intelligence technologies for its implementation. The effectiveness of the model was evaluated in a pilot experiment involving 24 students, measuring the level of satisfaction with the learning process. Statistically significant differences in favor of the experimental group were revealed ( $U=143.5$ ,  $p<0.001$ ,  $r=0.84$ ). The obtained evidence suggests that the proposed model may contribute to increasing student satisfaction and engagement during the initial stage of learning algorithms in small groups.

**Keywords:** *gamification, sorting algorithms; algorithm visualization; Galperin's theory; artificial intelligence; pilot experiment; web technologies.*

**For citation:** Sidorov, S. V. and Cherkasova, V. A. (2026), "A Model for Gamified Learning Module Integrating Into the Sorting Algorithms Study", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 118–130. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-118-130, <https://elibrary.ru/bsgybb>.

*The article was submitted 20.01.2026; approved after reviewing 06.03.2026; accepted for publication 20.03.2026.*

### Введение

Алгоритмы сортировки являются одной из фундаментальных тем в курсах информатики и программирования. Однако их абстрактность, оперирование формальными структурами данных и циклическими процессами создают значительные трудности для учащихся на этапе первичного освоения. Типичными проблемами являются формальное заучивание шагов без понимания сути и смешение логики различных алгоритмов [1]. В этой связи актуальной задачей является разработка нового программного обеспечения для улучшения эффективности процесса обучения.

Применение принципов активного обучения и геймификации способно повысить мотивацию и вовлеченность обучающихся. Современные веб-технологии позволяют создавать интерактивные среды, где абстрактные процессы получают конкретное визуальное и деятельностное воплощение. В последние годы активно исследуется потенциал геймификации в обучении программированию, а также возможности искусственного интеллекта для создания образовательного контента. Однако работы, объединяющие эти направления в рамках единой модели, опирающейся на классическую теорию усвоения знаний, практически отсутствуют.

Целью данной работы является разработка и описание геймифицированного веб-приложения для изучения алгоритмов сортировки, а также определение возможных направлений его применения в образовательном процессе для различных категорий

обучающихся. В данной статье представлена модель, основанная на использовании разработанного веб-ресурса "Путь Магистра Алгоритмических Искусств".

Разработанное веб-приложение "Путь Магистра Алгоритмических Искусств" представляет собой специализированное программное обеспечение, предназначенное для визуализации и интерактивного освоения базовых алгоритмов сортировки.

В качестве теоретико-методологической основы для разработки веб-приложения была выбрана теория поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина [2].

### **Теоретический обзор**

Исследования в области визуализации алгоритмов и интерактивных методов обучения программированию проводятся довольно давно и представлены значительным количеством научных работ. Анализ современных публикаций позволяет выделить несколько главных направлений, относящихся к теме разработки программного обеспечения для изучения алгоритмов сортировки.

Первое направление связано с созданием специализированных систем визуализации алгоритмов. Еще в 1980–1990-х годах было разработано первое программное обеспечение из серии пассивного наблюдения, такие как Balsa и Zeus, позволяющие следить за работой алгоритмов в режиме реального времени. Современные исследования в этой области направлены на интеграции алгоритмической визуализации в веб-среды и LMS-платформы. В работах ряда авторов отмечается, что визуализация абстрактных структур данных является ключевым фактором для понимания логики работы алгоритмов, особенно на этапе первичного знакомства с темой [3]. Однако пассивное наблюдение за анимацией без активного вовлечения обучающегося в процесс часто оказывается недостаточно эффективным.

Второе направление – применение геймификации в обучении программированию. В современной литературе геймификация рассматривается как инструмент повышения вовлеченности в образовании, при этом выделяются три уровня: мотивационная надстройка (баллы, значки), деятельностная геймификация (обучение через практику) и средовая геймификация (обучение в игровом пространстве) [4]. Для задач освоения алгоритмов наиболее перспективным представляется второй подход, когда игровая механика не просто мотивирует, но и моделирует логику выполнения алгоритмических операций.

Третье направление связано с применением современных веб-технологий для создания образовательных ресурсов. В научной литературе подробно рассматриваются особенности современных методов создания веб-ресурсов, включая применение объектно-ориентированного подхода в JavaScript, асинхронное программирование и современные технологии верстки CSS Grid и Flexbox [5]. Эти технологии обеспечивают кроссплатформенность и адаптивность образовательных приложений, что очень важно для их использования на различных устройствах. В контексте обучения алгоритмам особый интерес представляет возможность реализации пошагового выполнения операций с асинхронной анимацией, что позволяет студенту видеть не только результат, но и процесс работы алгоритма.

Примеры деятельностной геймификации подробно анализируются в работах, посвященных внедрению адаптивных образовательных игр в цифровую образовательную среду [6]. Авторы подчеркивают, что адаптивность игровых механик к уровню подготовки обучающегося является критическим фактором эффективности таких средств.

Еще одно современное направление – использование искусственного интеллекта при разработке образовательного контента. В научных исследованиях рассматриваются

возможности применения генеративного искусственного интеллекта для создания образовательных ресурсов по информатике [7]. Отмечается, что современные языковые модели могут выступать в роли ассистента разработчика, позволяя преподавателям-методистам, не являющимся профессиональными программистами, создавать функциональные прототипы образовательных приложений.

В контексте теории обучения алгоритмам важное значение имеет понятие ориентировочной основы действия. Анализируя теорию П. Я. Гальперина, исследователи подчеркивают, что качество формируемого действия напрямую зависит от полноты ориентировочной основы, на которую опирается обучающийся при его выполнении [8]. В применении к обучению алгоритмам это означает необходимость создания такой программной среды, где каждая операция (сравнение, обмен, выбор минимума) была бы представлена в материализованной форме и сопровождалась пооперационным контролем.

Примеры реализации деятельностного подхода в образовательных средах можно найти в работах, анализирующих применение геймификации в электронной образовательной среде вуза [9]. Более широкий контекст применения симуляции и геймификации в современном образовательном пространстве рассматривается в исследованиях, посвященных формированию практических навыков [10].

Статистические методы обработки данных практических экспериментов подробно рассматриваются в литературе, где обосновывается применение непараметрических критериев при малых объемах выборок и порядковой природе данных [11]. Модели оценивания результатов обучения, включая модель Киркпатрика, подробно проанализированы в работах, выделяющих четыре уровня оценки: реакция, усвоение, поведение, результаты [12].

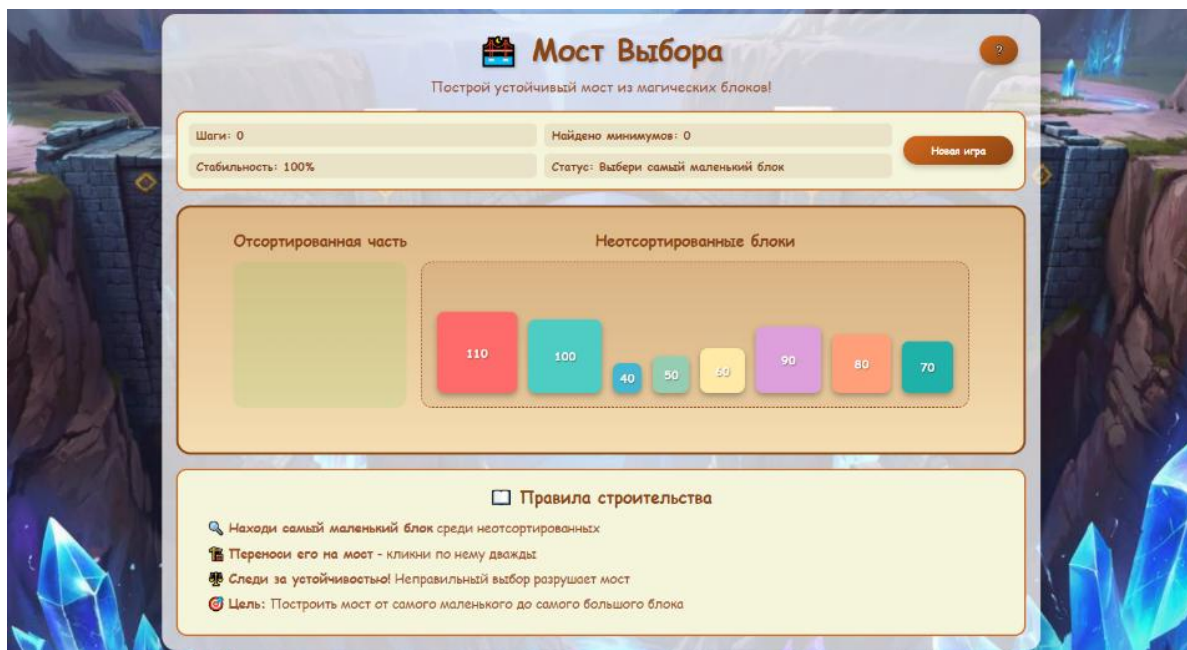
Анализ зарубежных исследований показывает, что в мировой практике активно развивается направление Algorithm Visualization (AV) и Program Visualization (PV). Современные работы в этой области сосредоточены на интеграции визуализации с технологиями машинного обучения для адаптации сложности материала под индивидуальные особенности обучающегося. Однако, как отмечается в обзорах, большинство существующих систем ориентированы на пассивное наблюдение и не обеспечивают полноценного деятельностного включения студента в выполнение алгоритмических операций.

Разработка веб-приложения для обучения алгоритмам сортировки, объединяющего современные технологии программирования, методы геймификации и теоретически обоснованный дидактический дизайн, является актуальной задачей, лежащей в основе вычислительной математики, теоретической информатики и технологий разработки программного обеспечения. При этом ключевыми требованиями к такому приложению выступают: визуализация абстрактных операций, деятельностный характер взаимодействия, пооперационный контроль, адаптивность интерфейса и доступность на различных устройствах.

### **Проектирование игровых механик на основе теории поэтапного формирования действий**

Разработка структуры уровней и игровых механик веб-приложения "Путь Магистра Алгоритмических Искусств" опирается на теорию поэтапного формирования умственных действий П. Я. Гальперина [8]. Согласно этой теории, всякое умственное действие формируется извне через развернутую материальную форму, в которой объект и последовательность операций представлены обучающемуся непосредственно. В разработанном приложении данная функция реализуется через игровую метафору:

абстрактный массив данных материализуется в виде визуальных объектов – лягушек на кувшинках, блоков моста, магических кристаллов или отряда воинов (рис. 1).



**Рис. 1.** Снимок экрана уровня 2 "Мост выбора" (сортировка выбором). Поле справа – неотсортированная последовательность, поле слева – формируемая отсортированная последовательность

Операции сравнения, обмена, выбора минимума или разделения выполняются пользователем как прямые действия с этими объектами. Такой подход согласуется с современными исследованиями в области проектирования цифровых образовательных средств, где подчеркивается важность визуализации абстрактных понятий [3, 8].

Разработанное веб-приложение ориентировано на широкий круг пользователей, осваивающих алгоритмы сортировки. Основными целевыми группами являются: учащиеся старших классов общеобразовательных школ (14–17 лет) при изучении темы "Алгоритмизация и программирование" в курсе информатики; студенты младших курсов высших учебных заведений, обучающиеся по направлениям, не связанным с углубленным изучением программирования (гуманитарные, социально-экономические специальности), для которых визуализация абстрактных понятий является критически важной; а также лица, осваивающие основы программирования самостоятельно в рамках дополнительного образования. Для каждой из указанных групп приложение может использоваться на этапе первичного знакомства с алгоритмами для формирования базовых представлений о логике их работы.

Приложение может быть использовано в различных формах организации учебной деятельности. В рамках аудиторной работы ресурс может применяться для демонстрации работы алгоритмов преподавателем с помощью проектора, а также для индивидуальной работы студентов на практических или лабораторных занятиях при закреплении теоретического материала. В условиях самостоятельной работы приложение доступно обучающимся для повторения и самоконтроля во внеаудиторное время благодаря размещению на платформе GitHub Pages. При дистанционном обучении ресурс может быть интегрирован в электронные курсы (например, Moodle) в качестве интерактивного тренажера для самостоятельного освоения темы.

Структура приложения включает четыре уровня, каждый из которых моделирует конкретный алгоритм сортировки: пузырьковую, выбором, вставками и быструю. Выбор

именно этих алгоритмов обусловлен их фундаментальностью в курсах дискретной математики и информатики [1]. На каждом уровне реализована система пооперационного контроля: среда реагирует на каждое действие пользователя, подтверждая корректность операции. Когда пользователь выделяет пару лягушек для сравнения, подсвечиваются именно те элементы, которые должны быть сопоставлены. При попытке вставить кристалл в неподходящую позицию маркер не активируется. Такой подход соответствует гальперинскому принципу контроля по ходу выполнения каждой операции, а не только по конечному результату [8].

В ресурсе ориентировочная основа выстраивается многоуровнево. Архимаг Алактик (рис. 2) выполняет функцию наставника: от постановки задачи к инструкции и последующей рефлексии. Расширенная справка от Профессора Сортиуса дает развернутое теоретическое описание алгоритма.

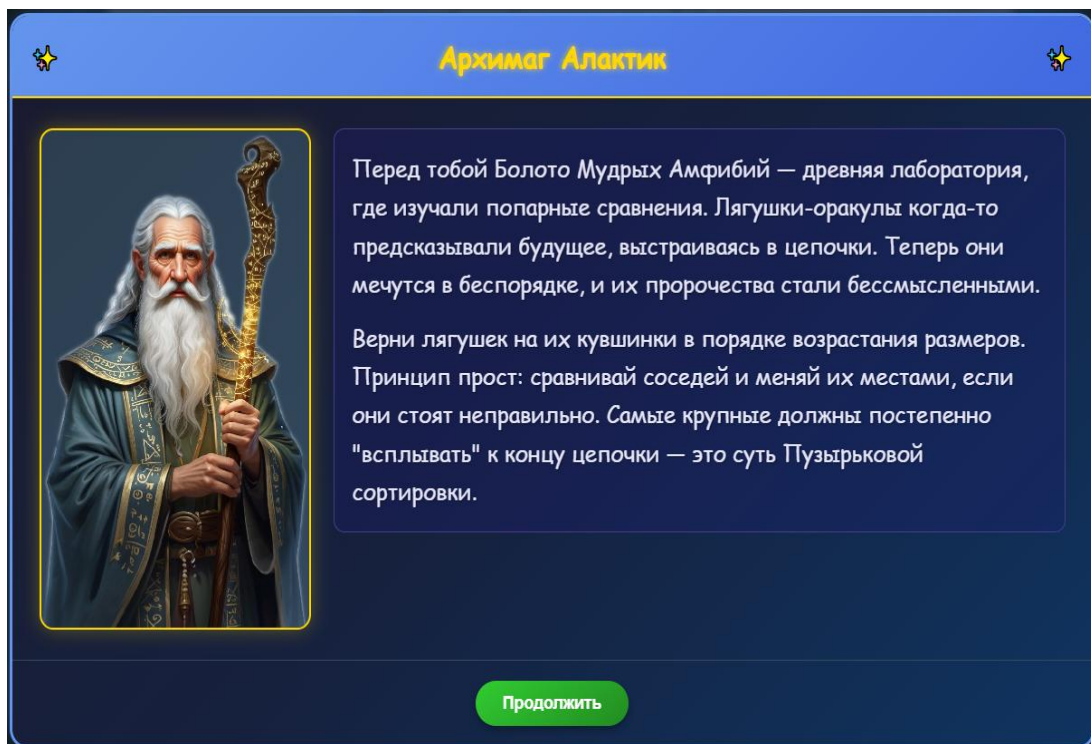


Рис. 2. Диалоговое окно с Архимагом Алактик (инструкция к уровню)

**Уровень 1 "Пузырьковый ручей"** моделирует пузырьковую сортировку.

Пусть  $A[0..n-1]$  исходный массив. Алгоритм пузырьковой сортировки выполняет последовательные проходы по массиву, сравнивая и при необходимости обменивая соседние элементы:

```
for i = 0 to n-2
  for j = 0 to n-2-i
    if A[j] > A[j+1] then
      swap(A[j], A[j+1])
```

В худшем случае ( $A$  отсортирован по убыванию) выполняется  $\frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$  сравнений и столько же обменов. В лучшем случае ( $A$  уже отсортирован)  $n-1 = O(n)$  сравнение и 0 обменов (при оптимизации с флагом).

Пользователь последовательно сравнивает пары соседних лягушек на кувшинках и при необходимости выполняет обмен. Каждое действие соответствует элементарной операции алгоритма.

### **Уровень 2 "Мост выбора".**

Алгоритм сортировки выбором делит массив на отсортированную часть  $A[0..i-1]$  и неотсортированную  $A[i..n-1]$ . На каждом шаге  $i$  от 0 до  $n-2$  в неотсортированной части ищется минимальный элемент и меняется местами с  $A[i]$ :

```
for i = 0 to n-2
  minIndex = i
  for j = i+1 to n-1
    if A[j] < A[minIndex] then
      minIndex = j
  swap(A[i], A[minIndex])
```

Число сравнений всегда равно  $O(n^2)$  независимо от исходных данных. Число обменов равно  $O(n)$ . После  $i$  шагов ( $i$  от 0 до  $n-1$ ) первые  $i$  элементов массива содержат  $i$  наименьших элементов исходного массива, упорядоченных по возрастанию, и находятся на своих окончательных позициях.

Уровень реализует сортировку выбором через механику строительства башни из минимальных блоков. Пользователь ищет наименьший блок в неотсортированной части и перемещает его на башню. Интерфейс визуально разделяет отсортированную и неотсортированную области, что наглядно демонстрирует инвариант алгоритма.

### **Уровень 3 "Магия вставок".**

Сортировка вставками строит отсортированную последовательность, последовательно вставляя элементы из неотсортированной части в правильную позицию среди уже отсортированных:

```
for i = 1 to n-1
  key = A[i]
  j = i-1
  while j >= 0 and A[j] > key
    A[j+1] = A[j]
    j = j-1
  A[j+1] = key
```

Сложность  $O(n^2)$  в среднем и худшем,  $O(n)$  в лучшем. Алгоритм сохраняет относительный порядок элементов с одинаковыми значениями (свойство устойчивости).

Уровень моделирует сортировку вставками через последовательный перенос кристаллов на алтарь. Система динамических маркеров визуализирует процесс сравнения и сдвига элементов.

### **Уровень 4 "Быстрые врата"** реализует быструю сортировку.

Быстрая сортировка рекурсивный алгоритм типа "разделяй и властвуй". На каждом шаге выбирается опорный элемент, массив переупорядочивается относительно него, после чего алгоритм рекурсивно применяется к левой и правой частям.

В среднем случае выполняется  $O(n \log n)$  сравнений и обменов. В худшем случае (например, на уже отсортированном массиве при неудачном выборе опорного элемента) сложность  $O(n^2)$ .

Пользователь выбирает опорного воина и распределяет остальных по левым и правым вратам, после чего открываются новые врата для каждой группы, визуализируя рекурсивный спуск.

С технической точки зрения приложение представляет собой клиентское веб-приложение, реализованное на HTML5, CSS3 и JavaScript (ES6+). Архитектура построена на объектно-ориентированном подходе с использованием классов ES6. Каждый игровой уровень представлен отдельным классом, инкапсулирующим состояние и методы обработки событий. Для управления анимацией применяется асинхронное программирование на основе промисов (Promise) и конструкций

async/await. Например, в методе confirmSelection() сначала элементу присваивается класс CSS, запускающий анимацию, затем выполнение приостанавливается на заданное время с помощью await this.delay(1000), и только после завершения анимации происходит фактическое изменение структуры данных. Это обеспечивает синхронизацию визуальных эффектов с логикой алгоритма [5].

Обработка пользовательских взаимодействий осуществляется через события DOM (Document Object Model). Для сложных сценариев применяются комбинированные события, например подтверждение выбора минимального элемента через двойной клик. Интерфейс построен на технологиях CSS Grid и Flexbox, что гарантирует адаптивность отображения на устройствах с различным разрешением экрана [5].

Приложение размещено на платформе GitHub Pages, обеспечивающей постоянный бесплатный хостинг и доступность без серверной инфраструктуры. Данное решение демонстрирует пользователям практический пример того, как созданные на HTML, CSS и JavaScript ресурсы могут быть легко развернуты в глобальной сети.

Выбранный технологический стек обеспечивает кроссплатформенность, автономность функционирования и отсутствие зависимости от серверной инфраструктуры, что очень важно для использования в образовательной среде с различным уровнем технического оснащения.

### Пилотное исследование приложения

С целью предварительной оценки функциональности разработанного веб-приложения и выявления направлений его дальнейшего совершенствования было проведено пилотное исследование с участием 24 студентов 4 курса направления подготовки 44.03.05 "Педагогическое образование" (профили "Физика" и "Информатика"). Обе подгруппы (по 12 человек) изучили одинаковый теоретический материал по алгоритмам сортировки, после чего экспериментальная группа (ЭГ) работала с приложением "Путь Магистра Алгоритмических Искусств", а контрольная группа (КГ) закрепляла знания по традиционным учебным материалам (текстовое описание с GIF-анимацией).

В качестве зависимых переменных рассматривались удовлетворенность процессом обучения, субъективная понятность материала и эмоциональное отношение к теме. Измерение проводилось с помощью опросника, составленного на основе модели удовлетворенности и вовлеченности Киркпатрика [10]. Опросник включал 13 утверждений, оцениваемых по 5-балльной шкале.

Результаты статистического анализа показали, что студенты экспериментальной группы (ЭГ,  $n = 12$ ), работавшие с новым ресурсом, продемонстрировали значительно более высокий уровень удовлетворенности ( $M = 4.34, SD = 0.12$ ), по сравнению с контрольной группой (КГ,  $n = 12$ ), изучавшей те же алгоритмы по традиционным материалам ( $M = 3.72, SD = 0.23$ ). Сводные статистики приведены в таблице.

**Таблица.** Сводные статистические показатели по группам

Группа	Средний балл	Стандартное отклонение	Медиана
ЭГ	4.34	0.69	4.0
КГ	3.72	1.13	4.0

Различия между группами оказались статистически значимыми согласно U-критерию Манна–Уитни ( $U = 143.5, p < 0.001$ ). Ввиду малого объема выборок и порядковой природы данных, использовался непараметрический критерий Манна–

Уитни. При этом стоит отметить, что критерий Шапиро–Уилка не выявил формальных оснований для отклонения гипотезы о нормальности в обеих группах ( $p > 0.05$ ) [11].

Равенство медиан в обеих группах ( $Me = 4.0$ ) не противоречит наличию статистически значимых различий, а свидетельствует о специфике опроса по модели Киркпатрика. Размер эффекта ( $r = 0.843$ ) превышает пороговое значение для большого эффекта ( $r \geq 0.5$  по Коэну), что может свидетельствовать о высокой практической значимости выявленных различий [11].

Полученные данные позволяют сформулировать гипотезу о том, что использование разработанного приложения может способствовать повышению удовлетворенности студентов на этапе первичного знакомства с алгоритмами сортировки. Однако необходимо отметить существенные ограничения проведенного исследования:

- малый объем выборки ( $n=12$  в каждой группе) не позволяет делать статистически обоснованные выводы о генеральной совокупности,
- измерение субъективных показателей без оценки объективной успеваемости,
- отсутствие отсроченного контроля знаний.

Для подтверждения эффективности приложения требуется проведение расширенного исследования с включением большей выборки, объективных показателей успеваемости и отсроченного контроля знаний. В рамках данной статьи результаты пилотного исследования рассматриваются как предварительные и служат основой для формулирования направлений дальнейшей работы.

### **Обсуждение результатов**

Проведенное пилотное исследование позволяет предварительно оценить функциональность разработанного веб-приложения и определить направления его дальнейшего совершенствования. Полученные данные о более высокой удовлетворенности пользователей экспериментальной группы согласуются с теоретическими положениями о роли интерактивной визуализации в освоении алгоритмических структур, однако ввиду ограниченности выборки данные результаты следует рассматривать как предварительные, а основную ценность работы составляет описание архитектуры и технической реализации приложения.

С технологической точки зрения разработанное приложение демонстрирует эффективность применения объектно-ориентированного подхода и асинхронного программирования для создания образовательных интерактивных сред. Использование нативного JavaScript без дополнительных библиотек и фреймворков обеспечивает легкость развертывания, кроссплатформенность и отсутствие зависимости от серверной инфраструктуры. Размещение на платформе GitHub Pages делает приложение доступным для широкого круга пользователей без затрат на хостинг и администрирование, что особенно важно для образовательных учреждений с ограниченными техническими ресурсами.

### **Заключение**

Предложенная модель проектирования игровых механик на основе теории поэтапного формирования действий показала свою реализуемость в рамках современных веб-технологий. Материализация абстрактных операций сравнения, обмена и рекурсивного разделения в виде визуальных объектов и действий с ними может быть полезна для начального этапа освоения алгоритмов, при этом техническая реализация таких механик не требует сложных программных решений и может быть выполнена силами преподавателей-методистов с привлечением генеративных языковых моделей.

Анализ результатов пилотного исследования позволяет выделить несколько направлений дальнейшего развития приложения. Первое направление связано с расширением функциональности путем добавления визуализации дополнительных алгоритмов, таких как сортировка слиянием и пирамидальная сортировка, а также реализации возможности сравнения их работы на одних и тех же исходных данных. Следующее направление предполагает интеграцию с системами управления обучением через разработку соответствующего API, что позволит автоматически учитывать результаты работы студентов в таких платформах, как Moodle или OpenEdX. В дальнейшем, в качестве совершенствования веб-приложения, необходимо добавить использование искусственного интеллекта для автоматической генерации индивидуальных вариантов исходных данных и проверки правильности выполнения алгоритмов, что особенно актуально в условиях массового обучения. После добавления совершенствований веб-разработки необходимо проведение полноценного эксперимента с участием не менее ста респондентов из разных образовательных учреждений, включение объективных показателей успеваемости и отсроченного контроля знаний для проверки выдвинутой гипотезы.

Необходимо отметить ограничения проведенного исследования. Помимо малого объема выборки, в рамках данной работы не оценивалась непосредственно эффективность формирования алгоритмического мышления, измерялась лишь субъективная удовлетворенность процессом обучения.

Особую значимость разработанное приложение может представлять для школьных учителей информатики при изучении темы «Алгоритмы сортировки» в старших классах, а также для преподавателей, работающих со студентами гуманитарных направлений подготовки, у которых визуализация абстрактных понятий и деятельностный подход способствуют формированию базовых алгоритмических представлений. В этих условиях приложение выступает не как замена традиционным методам, а как эффективное дополнение, позволяющее сделать первые шаги в освоении алгоритмизации более наглядными и доступными. Таким образом, разработанное веб-приложение представляет собой рабочий прототип, демонстрирующий возможность сочетания классической дидактической теории с современными веб-технологиями. Дальнейшие исследования должны быть направлены как на техническое совершенствование приложения, так и на проведение более масштабных практических экспериментов для проверки выдвинутой гипотезы о потенциальной эффективности предложенного подхода.

#### Список источников

1. Лапчик М. П., Рагулина М. И., Семакин И. Г., Хеннер Е. К. Методика обучения информатике: учеб. пособие для вузов / под ред. М. П. Лапчик. 4-е изд. СПб.: Лань, 2025. 392 с.
2. Подольский А. И. Нет ничего практичней... // Национальный психологический журнал. 2006. № 1. С. 54–57. URL: <https://npsyj.ru/articles/article/3962/> (дата обращения: 17.01.2026).
3. Зубков А. Д. Геймификация в реализации индивидуальных иноязычных образовательных траекторий в электронной среде вуза // Мир науки, культуры, образования. 2024. № 3 (106). С. 43–46. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/gamification-in-implementation-of-foreign-language-learning-individual-trajectories-in-a-university-s-electronic-environment> (дата обращения: 17.01.2026).
4. Иванова Ю. В. От игр к знаниям: геймификация как инструмент повышения вовлечённости в образовании // Вестник науки. 2025. № 5 (86). С. 782–787.

- URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ot-igr-k-znaniyam-geymifikatsiya-kak-instrument-povysheniya-vovlechyonnosti-v-obrazovanii> (дата обращения: 17.01.2026).
5. Малахов Д. В. Особенности современных методов создания и оформления сайтов // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2024. № 11-3 (98). С. 194–200. DOI: 10.24412/2500-1000-2024-11-3-194-200.
  6. Федорчук Ю. М. Стратегическое направление цифровой трансформации образовательного процесса – внедрение адаптивных образовательных игр // Человек и образование. 2025. № 2 (83). С. 129–141. DOI: 10.54884/1815-7041-2025-83-2-129-141.
  7. Ружников М. С. Возможности применения генеративного искусственного интеллекта для создания образовательных ресурсов по информатике в основной школе // Вестник МГПУ. Серия "Информатика и информатизация образования". 2025. № 4 (74). С. 34–46. DOI: 10.24412/2072-9014-2025-474-34-46.
  8. Гальперин П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Исследования мышления в советской психологии. М.: Наука, 1966. С. 259–276.
  9. Тихонович Т. И. Симуляция и геймификация в современном образовательном пространстве в системе преподавания РКИ // Kant. 2021. № 1 (38). С. 348–354. DOI: 10.24923/2222-243X.2021-38.72.
  10. Ерофеева М. А., Кузнецов М. Ю. Сравнительная характеристика моделей и методов оценивания результатов обучения (по материалам англоязычных исследований XX века) // Вестник Санкт-Петербургского университета МВД России. 2025. № 3 (107). С. 198–208. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnaya-harakteristika-modeley-i-metodov-otsenivaniya-rezultatov-obucheniya-po-materialam-angloyazychnyh-issledovaniy-hh-veka> (дата обращения: 17.01.2026).
  11. Голанова А. В., Голикова Е. И., Трегубенко И. А. Отбор статистических методов обработки данных педагогического эксперимента // Вестник Череповецкого государственного университета. 2021. № 5 (104). С. 167–178. DOI: 10.23859/1994-0637-2021-5-104-14.
  12. Конарева Л. А. Структура затрат на обеспечение качества продукции и услуг в компаниях стран с развитой рыночной экономикой // Методы менеджмента качества. 2001. № 10. С. 12–18.

## References

1. Lapchik, M. P., Ragulina, M. I., Semakin, I. G. and Henner, E. K. (2025), *Metodika obucheniya informatike* [Methods of teaching informatics]: textbook for universities / ed. by M. P. Lapchik. 4th ed. Lan', Saint Petersburg, 392 p.
2. Podolsky, A. I. (2006), "Net nichego praktichney..." [Nothing is more practical...], *Natsional'nyy psikhologicheskii zhurnal* [National Psychological Journal], no 1, pp. 54–57, URL: <https://npsyj.ru/articles/article/3962/> (accessed: 17.01.2026).
3. Zubkov, A. D. (2024), "Geymifikatsiya v realizatsii individual'nykh inoyazychnykh obrazovatel'nykh traektoriy v elektronnoy srede vuza" [Gamification in the implementation of individual foreign language educational trajectories in the electronic environment of a university], *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya* [World of Science, Culture, Education], no. 3 (106), pp. 43–46, URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/gamification-in-implementation-of-foreign-language-learning-individual-trajectories-in-a-university-s-electronic-environment> (accessed: 17.01.2026).

4. Ivanova, Yu. V. (2025), "Ot igr k znaniyam: geymifikatsiya kak instrument povysheniya vovlechyonnosti v obrazovanii" [From games to knowledge: gamification as a tool for increasing engagement in education], *Vestnik nauki* [Bulletin of Science], no 5 (86), pp. 782–787, URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ot-igr-k-znaniyam-geymifikatsiya-kak-instrument-povysheniya-vovlechyonnosti-v-obrazovanii> (accessed: 17.01.2026).
5. Malakhov, D. V. (2024), "Osobennosti sovremennykh metodov sozdaniya i oformleniya saytov" [Features of modern methods of creating and designing websites], *Mezhdunarodnyy zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk* [International Journal of Humanities and Natural Sciences], no 11-3 (98), pp. 194–200, doi: 10.24412/2500-1000-2024-11-3-194-200.
6. Fedorchuk, Yu. M. (2025), "Strategicheskoe napravlenie tsifrovoy transformatsii obrazovatel'nogo protsessa – vnedrenie adaptivnykh obrazovatel'nykh igr" [Strategic direction of digital transformation of the educational process – implementation of adaptive educational games], *Chelovek i obrazovanie* [Man and Education], no 2 (83), pp. 129–141, doi: 10.54884/1815-7041-2025-83-2-129-141.
7. Ruzhnikov, M. S. (2025), "Vozmozhnosti primeneniya generativnogo iskusstvennogo intellekta dlya sozdaniya obrazovatel'nykh resursov po informatike v osnovnoy shkole" [Possibilities of using generative artificial intelligence to create educational resources in informatics for secondary school], *Vestnik MGPU. Seriya "Informatika i informatizatsiya obrazovaniya"* [MCU Bulletin. Series "Informatics and Informatization of Education"], no 4 (74), pp. 34–46, doi: 10.24412/2072-9014-2025-474-34-46.
8. Galperin, P. Ya. (1966), "Psikhologiya myshleniya i uchenie o poetapnom formirovanii umstvennykh deystviy" [Psychology of thinking and the theory of step-by-step formation of mental actions], in *Issledovaniya myshleniya v sovetskoy psikhologii* [Studies of thinking in Soviet psychology], Nauka, Moscow, pp. 259–276.
9. Tikhonovich, T. I. (2021), "Simulyatsiya i geymifikatsiya v sovremennom obrazovatel'nom prostranstve v sisteme prepodavaniya RKI" [Simulation and gamification in the modern educational space in the system of teaching Russian as a foreign language], *Kant*, no 1 (38), pp. 348–354, doi: 10.24923/2222-243X.2021-38.72.
10. Erofeeva, M. A. and Kuznetsov, M. Yu. (2025), "Sravnitel'naya kharakteristika modeley i metodov otsenivaniya rezul'tatov obucheniya (po materialam angloyazychnykh issledovaniy XX veka)" [Comparative characteristics of models and methods for assessing learning outcomes (based on materials from English-language studies of the 20th century)], *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta MVD Rossii* [Bulletin of the Saint Petersburg University of the Ministry of Internal Affairs of Russia], no 3 (107), pp. 198–208, URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitel'naya-harakteristika-modeley-i-metodov-otsenivaniya-rezultatov-obucheniya-po-materialam-angloyazychnykh-issledovaniy-hh-veka> (accessed: 17.01.2026).
11. Golanova, A. V., Golikova, E. I. and Tregubenko, I. A. (2021), "Otbor statisticheskikh metodov obrabotki dannykh pedagogicheskogo eksperimenta" [Selection of statistical methods for processing data of a pedagogical experiment], *Vestnik Cherepovetskogo gosudarstvennogo universiteta* [Cherepovets State University Bulletin], no 5 (104), pp. 167–178, doi: 10.23859/1994-0637-2021-5-104-14.
12. Konareva, L. A. (2001), "Struktura zatrat na obespechenie kachestva produktsii i uslug v kompaniyakh stran s razvitoy rynochnoy ekonomikoy" [Cost structure for ensuring the quality of products and services in companies of countries with developed market economies], *Metody menedzhmenta kachestva* [Quality Management Methods], no 10, pp. 12–18.

**Информация об авторах:**

С. В. Сидоров – студент-магистрант направления Педагогическое образование. Профиль "Информатика, информационные технологии в образовании", кафедра информационной безопасности Астраханского государственного университета им. В. Н. Татищева (414056, Россия, г. Астрахань, ул. Татищева, д. 20а);

В. А. Черкасова – кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой информационной безопасности, старший научный сотрудник научной лаборатории "Математическое моделирование и информационные технологии в науке и образовании" Астраханского государственного университета им. В. Н. Татищева (414056, Россия, г. Астрахань, ул. Татищева, д. 20а).

**Information about the authors:**

S. V. Sidorov — Master's degree student in Pedagogical Education, specialization "Informatics, Information Technologies in Education", Department of Information Security, Astrakhan State University named after V.N. Tatishchev (20a Tatishchev St., Astrakhan, Russia, 414056);

V. A. Cherkasova — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor; Head of the Department of Information Security, Senior Researcher at the Scientific Laboratory "Mathematical Modeling and Information Technologies in Science and Education", Astrakhan State University named after V.N. Tatishchev (20a Tatishchev St., Astrakhan, Russia, 414056).

Обзорная статья

УДК 004.89

DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-131-143

<https://elibrary.ru/byttag>



## Методы и технологии полуавтоматического структурирования и оценки текста научной статьи: обзор и перспективы разработки информационной системы

Александр Александрович Толстенко<sup>1</sup>, Екатерина Владимировна Исаева<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Национальный исследовательский технологический университет МИСИС, Москва, Россия

<sup>2</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

<sup>1</sup>[alexandro-tolstenko@mail.ru](mailto:alexandro-tolstenko@mail.ru)

<sup>2</sup>[ekaterinaisae@gmail.com](mailto:ekaterinaisae@gmail.com)

**Аннотация.** В статье описывается проблема получения своевременной и качественной обратной связи по научной статье от рецензентов и рассматривается целесообразность применения ИИ для ее решения. Приводится системное описание существующих коммерческих и исследовательских решений для структурирования и оценки качества текста (Writefull, Grammarly, Quillbot, ChatGPT и др.), анализируются их преимущества и недостатки. Изучаются различные подходы и архитектуры и выполняется сравнение эффективности их использования в задаче структурирования и оценки текста научной работы. В качестве целевой структуры научной статьи выбрана IMRAD, обладающая универсальностью, гибкостью и возможностью применения в различных областях. На основе выполненного анализа сформулированы требования к системе структурирования и оценки текста научной статьи. Предлагается модульная секционно-ориентированная архитектура информационной системы, интегрируемой в текстовый редактор. Система состоит из четырех модулей: "Шаблоны предложений", "Оценка структуры текста", "Оценка стиля текста" и "Оценка понятности и логичности текста". Особенностью архитектуры является использование ИИ-агентов (экземпляры большой языковой модели) для анализа отдельных аспектов текста с сохранением контекста каждого раздела структуры IMRAD (введение, методы, результаты, обсуждение). Обсуждаются технические и методологические ограничения реализации подобных систем. Представленное исследование может стать основой для разработки информационной системы, которая может быть полезна образовательным учреждениям для обучения академическому письму.

**Ключевые слова:** структурирование и оценка качества текста; обработка естественного языка (NLP); большие языковые модели (LLM); академическое письмо; искусственный интеллект.

**Для цитирования:** Толстенко А. А., Исаева Е. В., Методы и технологии полуавтоматического структурирования и оценки текста научной статьи: обзор и перспективы разработки информационной системы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2026. № 1(72). С. 131–143. DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-131-143. <https://elibrary.ru/byttag>.

Статья поступила в редакцию 23.01.2026; одобрена после рецензирования 16.02.2026; принята к публикации 20.03.2026.



© Толстенко А. А., Исаева Е. В., 2026

Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Review article

## Methods and Techniques for Semi-Automatic Structuring and Evaluation of the Text of a Scientific Article: Review and Prospects for the Development of Information System

Aleksandr A. Tolstenko<sup>1</sup>, Ekaterina V. Isaeva<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>National University of Science and Technology MISIS, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Perm State University, Perm, Russia

<sup>1</sup>alexandro-tolstenko@mail.ru

<sup>2</sup>ekaterinaisae@gmail.com

**Abstract.** The article describes the problem of obtaining timely and high-quality feedback on scientific articles from peer-reviewers and considers the feasibility of using AI to solve it. A systematic description of existing commercial and research solutions for structuring and text quality evaluation (Writefull, Grammarly, Quillbot, ChatGPT, etc.) is provided, their advantages and disadvantages are analyzed. Various approaches and architectures are studied, and their effectiveness in structuring and evaluating scientific texts is compared. IMRAD was chosen as the target structure for scientific articles due to its versatility, flexibility, and applicability in various fields. Based on the analysis, requirements for a system for structuring and evaluation of the scientific article text were formulated. A modular section-based architecture of an information system integrated into a text editor is proposed. The system includes four modules: "Sentence Templates", "Text Structure Evaluation", "Text Style Evaluation", and "Text Clarity and Logic Evaluation". A distinctive feature of the proposed architecture is the use of AI agents (instances of a large language model) to analyze individual aspects of the text while taking into account the context between sections of the IMRAD structure (introduction, methods, results, discussion). Technical and methodological limitations of implementing such systems are discussed. The presented study can serve as a basis for the development of an information system.

**Keywords:** *structuring and evaluation of the text; natural language processing (NLP); large language models (LLM); academic writing, artificial intelligence.*

**For citation:** Tolstenko, A. A. and Isaeva, E. V. (2026), "Methods and Techniques for Semi-Automatic Structuring and Evaluation of the Text of a Scientific Article: Review and Prospects for the Development of Information System", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 1(72), pp. 131–143, DOI: 10.17072/1993-0550-2026-1-131-143, <https://elibrary.ru/bytlag>.

*The article was submitted 23.01.2026; approved after reviewing 16.02.2026; accepted for publication 20.03.2026.*

### Введение

Академическое письмо является одним из самых важных навыков в научной сфере наравне с профильными дисциплинами. Без умения четко, ясно и аргументированно описать проведенное исследование невозможно донести полученные результаты до широкой аудитории. Освоение данного навыка студентом или аспирантом – достаточно длительный процесс, так как требует не только постоянной практики, но и обратной связи от научного руководителя, преподавателя и рецензентов. И если объем практики зависит напрямую от студента/аспиранта, то получение конструктивной и развивающей обратной связи, особенно от рецензентов, может сильно растянуться во времени. Связано это в первую очередь с увеличением количества отправляемых научных работ. Например, по официальному заявлению организаторов конференции "Neural Information Processing Systems" в 2025 году было подано 21575 статей, в то время как в 2020 году заявок было всего 9467 [1]. Если учесть, что каждую статью проверяют три рецензента в

течение минимум одного часа, то получается, что на проверку всех отправленных в 2025 году работ было затрачено не меньше семи лет экспертного времени. Очевидно, что в таких условиях у рецензентов нет возможности быстро дать обратную связь.

Решением данной проблемы может стать искусственный интеллект (ИИ), который является одной из самых популярных и быстро развивающихся технологий нашего времени. Нейронные сети, а особенно большие языковые модели (LLM), находят применение не только в повседневной жизни, но и в научной деятельности. Наиболее показательным примером является программа на основе ИИ "AlphaFold", которую использовали для решения задачи предсказания структуры белка. Данный подход стал революционным в структурной биологии и материаловедении, и открыл новые возможности для создания лекарств [2, с. 5].

Помимо решения узкоспециализированных задач активно исследуется возможность использования ИИ в академическом письме. Например, Weixin Liang и др. использовали GPT-4 для рецензирования научных статей и определили, что "обратная связь, сгенерированная большой языковой моделью схожа с той, что исследователь может получить от рецензентов" [3, с. 4]. Телицына А. Ю в обзорной статье приходит к выводу, что "инструменты, основанные на ИИ, могут анализировать написанный текст и предлагать улучшения, например, по структуре, ясности изложения и устранению повторов" [4, с. 225]. К похожим выводам пришли Adam Cheng и др.: "Наиболее этичным применением ChatGPT является изменение структуры ранее написанного текста или существующих идей, включая грамматику и орфографию, понятность и перевод на другой язык" [5, с. 5]. Всё это позволяет предположить, что на основе большой языковой модели можно построить систему, которая будет выступать в роли помощника-рецензента при работе с текстом научной работы.

В данной статье предпринимается попытка системного описания методов для анализа структуры и качества текста научных работ и определения возможности создания систем, способных выступать в роли рецензентов. Таким образом, целью статьи является обзор современных методов и технологий для автоматической структурно-стилистической оценки научных работ и формирования рекомендаций по улучшению текста статей. Для достижения данной цели решаются следующие задачи:

- 1) определение целевой структуры текста научной работы;
- 2) формализация задач, решаемых системой оценки текста научных работы;
- 3) анализ существующих моделей и инструментов, применяемых для анализа и улучшения качества и структуры текста;
- 4) описание архитектуры возможной информационной системы;
- 5) выявление ограничений существующих технологий и определение направлений дальнейшего развития.

Реализация этих задач позволит сформулировать требования к информационным системам оценки текстов научных работ, определить возможности и ограничения практического применения в обучении и научной деятельности.

### **Определение целевой структуры научной статьи**

Соблюдение строгой структуры научной работы – это базовое требование. Рецензенты и редакторы сильно ограничены во времени и ожидают определенного стандарта от анализируемой работы. Четкая структура статьи упрощает чтение, помогает быстро находить нужную информацию и критически оценивать каждую часть работы по-отдельности: оценить методы, валидировать полученные результаты и обоснованность выводов.

Одним из общепринятых и универсальных стандартов структуры научных работ является IMRAD. В 1980-х гг. данный формат был самым распространенным и

фактически единственным стандартом в научных статьях [6]. Согласно исследованию Moskovitz С. и др. к 2024 году структуры IMRAD строго придерживаются почти во всех работах по биологии и медицине (94%) и примерно в половине статей в инженерных и социальных науках (40%) [7]. Таким образом, IMRAD остается одним из самых распространенных форматов академического письма в настоящее время. Популярность данного формата обусловлена его универсальностью и гибкостью, так как он задает логические правила структурирования текста, которые не зависят от области исследования. Единственным ограничением структуры IMRAD можно считать ее нацеленность на эксперименты, что с одной стороны обеспечивает воспроизводимость исследования, а с другой – ограничивает область применения STEM дисциплинами, т.е. относящимися к науке (Science), технологии (Technology), инженерии (Engineering) и математике (Mathematics).

Структура IMRAD состоит из четырех основных разделов: введение (Introduction), методы (Methods), результаты (Results) и обсуждение (Discussion). Классическая структура обычно дополняется аннотацией, заключением и списком использованных источников. Во *введении* необходимо обозначить проблему, обосновать актуальность исследования, сформулировать основную цель и четко обозначить что будет сделано. В разделе *методы* требуется описать использованные процедуры, инструменты, материалы, данные и методы обработки данных, чтобы читатель мог повторить эксперименты и получить такой же результат. Раздел *результаты* должен содержать полученные результаты (качественные и количественные показатели) исследования в удобном для изучения виде (графики, таблицы), но без развернутой интерпретации. В *обсуждении* приводится интерпретация полученных результатов в контексте обозначенной проблемы. В этом разделе также выполняется сравнение результатов с работами других исследователей, анализируются ограничения текущего исследования и формулируются предложения для будущих работ.

Как было отмечено ранее, в строгом виде данной структуры придерживаются в основном только в области биологии и медицины. В остальных доменах исследователи заменяют *методы* на несколько узкоспециализированных разделов, а *обсуждение* объединяют с *выводами/заключением* и/или выносят *ограничения* в отдельную главу. Важно отметить, что такие статьи все равно будут соответствовать требованиям IMRAD, пусть и в неявном виде, так как логика повествования от дробления разделов не меняется.

Таким образом, широкое распространение, независимость от области исследования и гибкость использования в сочетании с четко обозначенной логикой повествования позволяют выбрать структуру IMRAD в качестве целевой в информационной системе структурно-стилистической оценки текста научных работ.

### **Обзор методов анализа текста**

Текущий прогресс в области обработки естественного языка (NLP) предоставляет эффективный инструментарий для автоматизации процесса написания и редактирования текста, в том числе в академическом стиле. Большие языковые модели и инструменты на их основе позволяют перефразировать готовый текст и оценивать:

- 1) логичность повествования и соответствие определенной структуре;
- 2) понятность и легкость восприятия;
- 3) соответствие заданному стилю (академическому, юридическому, художественному и т. д.).

В рамках представленного далее обзора описаны существующие подходы и решения для автоматического анализа текста научных работ.

Одним из готовых инструментов для академического письма является Writefull. В основе данного инструмента лежат большие языковые модели, обученные на большом

количестве рецензируемых научных статей, находящихся в открытом доступе. Благодаря этому данный инструмент может выполнять следующие функции в контексте академического письма:

- 1) выполнять поиск грамматических и стилистических ошибок и опечаток;
- 2) перефразировать предложения, изменять стиль и тон текста;
- 3) генерировать аннотацию, ключевые слова и заголовок на основе аннотации и текста.

Несмотря на обширный функционал, разработанный специально для научного сообщества, данное решение проблематично использовать при написании статьи на русском языке, так как по следующим причинам:

- 1) LLM обучены только на англоязычных статьях и не учитывают специфику русского языка, особенно в научной литературе;
- 2) система обрабатывает текст на иностранных серверах, что ставит под угрозу конфиденциальность данных.

Помимо Writefull для работы с текстом активно используются и другие готовые инструменты: Grammarly, Quillbot и ChatGPT. Tokdemir Demirel проанализировал, какие функции данных сервисов студенты используют при написании текстов, и определил, что чаще всего ChatGPT, Grammarly и Quillbot используются для "исправления грамматических и орфографических ошибок (83,3% опрошенных), выбора более подходящих слов (68,1% опрошенных) и улучшения структуры предложения (58,3% опрошенных)" [8, с. 16]. Данная статистика подтверждается исследованием Khalifa M., согласно которому ИИ лучше всего справляется с задачами структурирования, редактирования (улучшение качества и исправление ошибок) и рецензирования текста [9]. Эффективность использования Grammarly и ChatGPT для структурирования текста, исправления грамматических ошибок и улучшения связности и стилистическое единообразие текста подтверждает и Granjeiro J. M. и др. [10]. Однако вместе с тем отмечается, что данные сервисы плохо справляются с узкоспециализированными научными терминами [10]. Как и Writefull, все перечисленные системы требуют отправки текста на их серверы, что ставит под сомнения безопасность их использования.

Одним из способов решить проблему с данными – самостоятельно разработать систему на основе обученной модели и разместить ее на собственном компьютере или сервере.

Примером создания системы на основе обученных моделей (ChatGPT-3 и ChatGPT-3.5-turbo) является Manubot AI Editor [11]. Pividori M. и Greene C. предложили секционно-ориентированный подход для анализа текста статьи и пришли к выводу, что "модели понимают основные идеи текста и вносят изменения, которые часто более четко и лаконично передают заложенный смысл" [11, с. 15]. Основная идея секционно-ориентированного подхода заключается в анализе каждого раздела статьи по отдельности: на вход модели подается текст секции и инструкция на естественном языке (промт) с подробным описанием того, что необходимо проанализировать и по каким критериям. Основным ограничением данного подхода авторы отмечают невозможность сохранения контекста между разделами: из-за того, что секции анализируются по отдельности, система, например, не учитывает контекст "Методов" при анализе "Результатов".

Современные решения не ограничиваются только большими языковыми моделями. Сейчас все большую популярность набирают решения на основе ИИ-агентов, такие как MARG [12], AgentReview [13] и Agent Laboratory [14]. В данных системах под агентом имеются в виду один экземпляр GPT-4 (может быть использована любая LLM) с отдельной историей сообщений и промптов. Основная идея заключается в том, что каждый агент специализируется на каком-то одном аспекте: дизайне экспериментов,

ясности изложения или новизне результатов. Использование нескольких агентов в рамках одной системы позволяет генерировать более точные и полезные комментарии. Авторы MARG таким образом добились снижения количества общих комментариев с 60% до 29% [12]. Основным недостатком агентных систем является вычислительная сложность и высокая стоимость, так как система генерирует в несколько раз больше токенов и увеличивает общее время обработки одной статьи.

Несмотря на заметную эффективность ИИ в работе над текстами научных работ, есть ряд ограничений и недостатков, которые необходимо учитывать при проектировании систем оценки текста.

Одной из таких проблем являются слишком поверхностные правки, которые не учитывают содержания абзаца/раздела/статьи. *Chen и др.* в своем исследовании продемонстрировали, что GPT-4o на запрос отредактировать абзац с проблемами в аргументации просто "улучшил читаемость текста, но не устранил проблему с логическим обоснованием выводов, оставив абзац все таким же неубедительным" [15, с. 2].

Также отмечают, что большинство ИИ-решений не учитывает итеративную природу работы с текстом, а, наоборот, предполагают однократное внесение изменений. Эффективность использования итеративного подхода с учетом вносимых изменений демонстрируется в работах [16, 17]. *Nguyen A. и др.* в рамках исследования определили, что студенты, применяющие итеративный подход при использовании ИИ для написания статей, демонстрируют значимо более высокие результаты [17].

Наибольшие опасения у исследователей вызывает снижение оригинальности и критического мышления при активном использовании искусственного интеллекта. *Promethi Das Deer и Yixin Chen* признают эффективность таких решений как Grammarly, QuillBot и ChatGPT, но в то же время обращают внимание на то, что "студенты становятся зависимыми от ИИ-инструментов, из-за чего пропадает необходимость развития собственных навыков" [18]. Поэтому ИИ в контексте работы с текстом должен восприниматься как вспомогательный инструмент, а не полная замена человека.

## Результаты

В результате анализа возможностей и ограничений современных инструментов и методов работы с текстами были сформулированы основные требования к системе оценки текстов научных работ:

- 1) система должна состоять из модулей, каждый из которых отвечает за один аспект оценки текста: структуру, соответствие стилю, качество, понятность и т. д. Каждый модуль может быть представлен ИИ-агентом на базе большой языковой модели;
- 2) система должна обнаруживать проблемы как в самом тексте, так и в его структуре, но не должна самостоятельно их исправлять. Результатом работы системы должен быть отчет с описанием каждой обнаруженной ошибки и рекомендациями по их исправлению. Важно, чтобы пользователь самостоятельно анализировал и исправлял найденные ошибки;
- 3) система должна анализировать текст по секциям, учитывая при этом контекст других секций. Например, при анализе "Результатов" или "Обсуждения" необходимо обязательно учитывать "Методы";
- 4) система должна предоставлять возможность пользователю итеративно работать с текстом, т. е. учитывать ранее обнаруженные и исправленные проблемы;
- 5) целевой структурой системы должна быть структура IMRAD;

- б) языковые модели, лежащие в основе системы, должны поддерживать русский язык и быть достаточно небольшими, для того чтобы их можно было использовать на собственном компьютере/сервере.

В соответствии с перечисленными требованиями была спроектирована архитектура системы оценки текстов научной работы, состоящая из 4 модулей. Систему предлагается реализовать в виде надстройки для текстового редактора, чтобы сразу интегрировать инструмент в процесс написания текста научной работы.

Модуль 1 "Шаблоны предложений" – русскоязычный аналог "Sentence Palette" из Writefull. Данный модуль содержит список предложений-шаблонов, отсортированных по разделам IMRAD. Система автоматически вставляет выбранный шаблон в место, где установлен курсор пользователя. Прототип данного модуля реализован в виде надстройки Microsoft Word. Внешний вид и пример работы надстройки представлены на Рис. 1. Модуль "Шаблоны предложений".

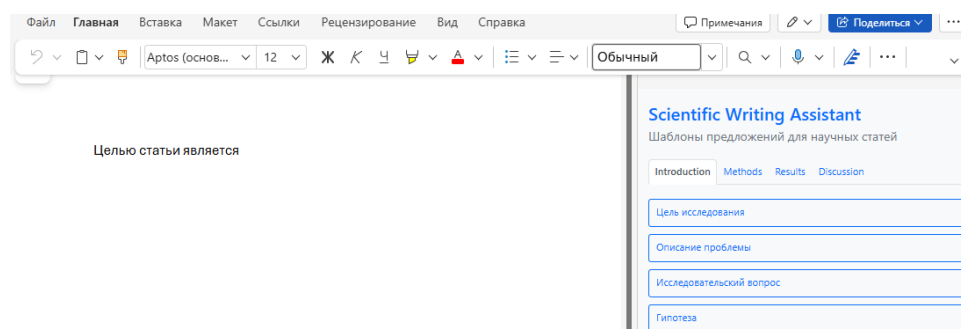


Рис. 1. Модуль "Шаблоны предложений"

Предполагается, что данный модуль будет использоваться на ранних этапах работы с текстом научной статьи. Как только пользователь решит, что текст статьи готов и его можно передавать на проверку, он может воспользоваться модулями 2–4.

Модуль 2 "Оценка структуры текста", модуль 3 "Оценка стиля текста" и модуль 4 "Оценка понятности и логичности текста" являются отдельными экземплярами большой языковой модели, т. е. агентами. Перед тем, как запустить какой-либо из этих модулей, система выполняет поиск разделов IMRAD по текущему тексту. В результате выполнения данного шага система определит, какие разделы текста какому элементу IMRAD соответствуют. Затем пользователь выбирает, оценка какого характера ему нужна: анализ стиля, структуры или логики повествования. От выбора пользователя зависит, какой модуль будет запущен.

Для оценки структуры текста запускается модуль 2, который последовательно анализирует каждый раздел на соответствие IMRAD. Анализ секций выполняется по порядку "введение – методы – результаты – обсуждение" для того, чтобы при анализе каждого следующего раздела учитывался контекст предыдущего, и все последующие рекомендации были сформированы с учетом уже сгенерированных. Для того чтобы работа модуля и критерии оценки были понятными для пользователей, и что не менее важно, чтобы результат оценки был воспроизводимым, предлагается составить список требований в формате чек-листа для каждого раздела IMRAD. Этот чек-лист необходимо использовать в промпте, который отправляется в модуль при его запуске вместе с текстом статьи. Приведем пример промпта для раздела "Обсуждение":

"Требуется:

1. Определить, присутствуют ли в тексте ключевые элементы обсуждения:
  - 1.1. интерпретация основных результатов и ответы на вопросы/гипотезы, заявленные во введении;

- 1.2. сравнение с результатами других исследований (сходства, различия, возможные причины);
- 1.3. обсуждение ограничений исследования;
- 1.4. предложения по направлениям дальнейших исследований;
2. Оценить, не содержит ли этот раздел "чистых" результатов, которые требуется перенести в секцию "Результаты";
3. Дать оценку полноты и качества "Обсуждения" и предложить конкретные шаги по улучшению структуры и содержания".

В ходе работы модуль сформирует отчет с результатами анализа структуры текста и рекомендациями по ее улучшению. Отчет состоит из 5 разделов: "Введение", "Методы", "Результаты", "Обсуждение" и "Общий вывод и оценка". В первых четырех секциях указано, каким требованиям IMRAD текст статьи соответствует, а каким нет и почему. В финальном разделе дается общая оценка в формате "плохо соответствует", "соответствует частично", "полностью соответствует" с коротким пояснением, описываются сильные стороны текущей структуры и основные проблемы, а также рекомендации по их устранению. Отчет выводится пользователю в отдельном окне.

Пользователь анализирует полученный отчет, вносит соответствующие правки в текст статьи и может запустить повторную проверку, которая учитывает результат предыдущей проверки и внесенные изменения. При повторном запуске в промпт автоматически добавляется фраза о необходимости учета предыдущих правок и изменений.

Модуль 3 и модуль 4 работают точно так же, как и модуль 2. Отличаются только промпты, требования в них, и, как следствие, наполнение отчета с результатами оценки и рекомендациями (структура отчета такая же). При необходимости можно запустить все три модуля одновременно, так как результаты их работы никак не зависят друг от друга.

Для наглядного представления структуры, компонентов и используемых методов на рис. 2 приведена блок-схема системы, включающей ключевые модули и механизмы взаимодействия с пользователем.

### **Обсуждение**

Несмотря на значительный прогресс в области обработки естественного языка, существующие решения и инструменты, все еще имеется ряд технических ограничений, которые предстоит решить в будущем.

Одним из очевидных ограничений на данный момент является недостаточная специализация предобученных LLM на академическом письме и предметной области. В первую очередь это проявляется в поверхностных комментариях, которые относятся к форме предложения, а не к его содержанию. Данную проблему можно решить, дообучив модель на специальном наборе данных. Однако сбор и разметка такого дата-сета, как и обучение большой языковой модели, являются очень дорогими и энергозатратными процессами.

Другим серьезным ограничением является дороговизна использования эксплуатации системы с несколькими агентами, так как необходимо одновременно содержать несколько экземпляров LLM. Каждый агент при этом последовательно обрабатывает все секции научной работы, из-за чего для обработки одной статьи требуется большее количество токенов и времени. Для решения данной проблемы можно попробовать использовать квантованные LLM, т. е. уменьшенные версии моделей. Так как при уменьшении модели качество и точность ее работы снижаются, требуется провести дополнительные исследования, чтобы определить максимально облегченную версию, способную качественно решать поставленную задачу.

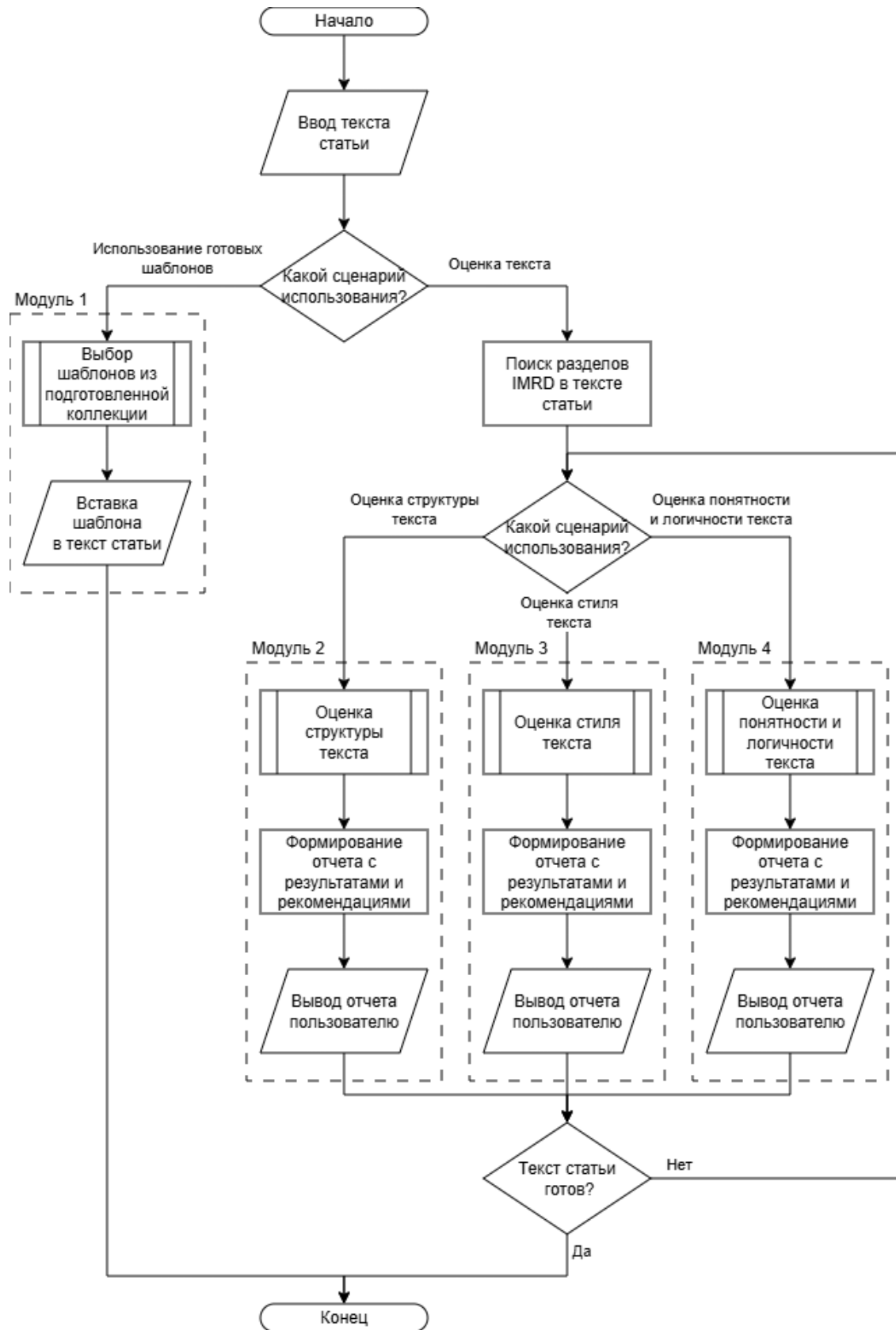


Рис. 2. Блок-схема прототипа предлагаемого решения

Одним из наиболее серьезных препятствий, которое необходимо преодолеть для решения поставленной задачи, является сложность количественной оценки корректности и качества работы системы. На данный момент нет общепринятой метрики, с помощью которой можно измерить работу системы и сравнить с аналогичными инструментами. В качестве решения данной проблемы можно попробовать использовать метрики из области машинного перевода. Например, BLEU, METEOR, ROUGE или TER. Для расчета данных метрик, помимо исходного текста и сгенерированной обратной связи от системы, необходима также эталонная обратная связь от экспертов. Подготовка такого набора данных также является препятствием для реализации системы.

Однако, даже с учетом всех перечисленных ограничений, предлагаемое решение может существенно повысить эффективность работы с текстом научной работы, в связи с представленными ниже обоснованиями:

- 1) система позволяет быстро и объективно оценить структуру, логику и понятность написанного текста и получить рекомендации по его доработке; важно, что она не исправляет работу за пользователя, а, наоборот, мотивирует его итеративно дорабатывать текст;
- 2) прозрачность и понятность критериев оценки ускоряет освоение и совершенствование академического письма пользователем;
- 3) интеграция решения в текстовый редактор делает процесс написания статьи плавным и "бесшовным", так как пользователю не нужно делать лишних действий: копировать текст, открывать другое приложение или сервис, вставлять в него статью и ждать ответа от приложения; то есть система позволяет полностью сосредоточиться над формой и содержанием работы и не рассеивать внимание на посторонние сервисы;
- 4) модуль "Шаблоны предложений" позволяет преодолеть внутренний барьер, который мешает начать работу ("боязнь чистого листа"), знакомит пользователя с устоявшимися и общепринятыми формулировками, а также задает нужный тон и стиль повествования.

Таким образом, разработка эффективной системы требует не просто интеграции большой языковой модели в текстовые редакторы, но еще и разработки методологии, в центре которой должно быть раскрытие потенциала исследователя, обеспечение прозрачности и улучшение качества научной коммуникации.

## **Выводы**

Текущий прогресс в области искусственного интеллекта уже сейчас делает возможной автоматизацию процесса оценки текста и структуры научных работ. Современные большие языковые модели с открытыми лицензиями, такие как DeepSeek-V3, Qwen-3 или Mistral, уже сейчас позволяют без дополнительного обучения решать задачи, которые не требуют глубокой экспертизы в рассматриваемой области. Например, оценивать структуру, стиль и понятность текста. Тем не менее, на данный момент LLM не могут полностью заменить рецензентов, особенно при оценке новизны и значимости исследования.

Однако перед широким внедрением систем оценки текста необходимо преодолеть существующие проблемы и ограничения: требования к вычислительным ресурсам для обучения и работы моделей, недостаток наборов данных на русском языке, отсутствие единого подхода к оценке качества работы модели. Перед использованием данных систем важно также учитывать и этические вопросы, связанные со сценарием использования и влиянием на критическое мышление в долгосрочной перспективе.

Решение данных вопросов требует дальнейших исследований и разработки методологии использования ИИ в академическом письме и образовательном процессе в целом.

Искусственный интеллект уже стал неотъемлемой частью нашей жизни, поэтому критически важно научиться максимально этично и эффективно использовать его в обучении и научной деятельности.

#### **Список источников**

1. *Reflections on the 2025 Review Process from the Program Committee Chairs* [Электронный ресурс]. URL: <https://blog.neurips.cc/2025/09/30/reflections-on-the-2025-review-process-from-the-program-committee-chairs/#:~:text=Like%20most%20AI%20conferences%2C%20NeurIPS,not%20only%20is%20a%20challenge> (дата обращения: 19.01.2026).
2. *Gottweis J. u др. Towards an AI co-scientist* [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/2502.18864> (дата обращения: 19.01.2026).
3. *Liang W. u др. Can Large Language Models Provide Useful Feedback on Research Papers? A Large-Scale Empirical Analysis* // NEJM AI. 2024. V. 1, No 8.
4. *Телицына А. Ю. Оптимизация научной деятельности через интеграцию ИИ: нейронные сети как инструмент в работе с академической литературой* // Мониторинг общественного мнения: экономические и социальные перемены. 2024. № 5.
5. *Cheng A., Calhoun A., Reedy G. Artificial intelligence-assisted academic writing: recommendations for ethical use* // Advances in Simulation. 2025. V. 10, No 1. P. 22.
6. *Sollaci L. B., Pereira M. G. The introduction, methods, results, and discussion (IMRAD) structure: a fifty-year survey.* // J. Med. Libr. Assoc. 2004. V. 92, No 3. P. 364–367.
7. *Moskovitz C., Harmon B., Saha S. The Structure of Scientific Writing: An Empirical Analysis of Recent Research Articles in STEM* // Journal of Technical Writing and Communication. 2024. V. 54, No 3. P. 265–281.
8. *Tokdemir Demirel E. The Use and Perceptions Towards AI Tools For Academic Writing Among University Students* // Innovations in Language Teaching Journal. 2024. V. 1, No 1. P. 1–20.
9. *Khalifa M., Albadawy M. Using artificial intelligence in academic writing and research: An essential productivity tool* // Computer Methods and Programs in Biomedicine Update. 2024. V. 5. P. 100145(11).
10. *Granjeiro J. M. u др. The Future of Scientific Writing: AI Tools, Benefits, and Ethical Implications* // Braz. Dent. J. 2025. V. 36. DOI: 10.1590/0103-644020256471.
11. *Pividori M., Greene C. S. A publishing infrastructure for AI-assisted academic authoring* // Journal of the American Medical Informatics Association (JAMIA). 2023. V. 31, No 9. P. 2103–2113.
12. *Arcy M. D. u др. MARG: Multi-Agent Review Generation for Scientific Papers* [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/2401.04259> (дата обращения: 19.01.2026).
13. *Jin Y. u др. AgentReview: Exploring Peer Review Dynamics with LLM Agents* [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/2406.12708> (дата обращения: 19.01.2026).
14. *Schmidgall S. u др. Agent Laboratory: Using LLM Agents as Research Assistants.* Association for Computational Linguistics (ACL), 2025. P. 5977–6043.
15. *Chen N. u др. XtraGPT: Context-Aware and Controllable Academic Paper Revision.* 2025 [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/pdf/2505.11336> (дата обращения: 19.01.2026).

16. Du W. *u òp*. Read, Revise, Repeat: A System Demonstration for Human-in-the-loop Iterative Text Revision // Proceedings of the First Workshop on Intelligent and Interactive Writing Assistants (In2Writing 2022). Stroudsburg, PA, USA: Association for Computational Linguistics, 2022. P. 96–108.
17. Nguyen A. *u òp*. Human-AI collaboration patterns in AI-assisted academic writing // Studies in Higher Education. 2024. V. 49, No 5. P. 847–864.
18. Deep P. Das, Chen Y. The Role of AI in Academic Writing: Impacts on Writing Skills, Critical Thinking, and Integrity in Higher Education // Societies. 2025. V. 15, No 9. P. 247.

## References

1. Reflections on the 2025 Review Process from the Program Committee Chairs (2025) [Online], URL: <https://blog.neurips.cc/2025/09/30/reflections-on-the-2025-review-process-from-the-program-committee-chairs/#:~:text=Like%20most%20AI%20conferences%2C%20NeurIPS,not%20only%20is%20a%20challenge> (accessed: 19.01.2026).
2. Gottweis, J. *et al.* (2025), *Towards an AI co-scientist* [Online], URL: <https://arxiv.org/pdf/2502.18864> (accessed: 19.01.2026).
3. Liang, W. *et al.* (2024), "Can Large Language Models Provide Useful Feedback on Research Papers? A Large-Scale Empirical Analysis", *NEJM AI*, vol. 1, no 8.
4. Telitsyna, A. Yu. (2024), "Optimizatsiya nauchnoy deyatel'nosti cherez integratsiyu II: neyronnye seti kak instrument v rabote s akademicheskoy literaturoy" [Optimization of scientific activity through AI integration: neural networks as a tool for working with academic literature], *Monitoring obshchestvennogo mneniya: ekonomicheskije i sotsial'nye peremeny* [Monitoring of Public Opinion: Economic and Social Changes], no 5.
5. Cheng, A., Calhoun, A. and Reedy, G. (2025), "Artificial intelligence-assisted academic writing: recommendations for ethical use", *Advances in Simulation*, vol. 10, no 1, p. 22.
6. Sollaci, L. B. and Pereira, M. G. (2004), "The introduction, methods, results, and discussion (IMRAD) structure: a fifty-year survey", *Journal of the Medical Library Association*, vol. 92, no 3, pp. 364–367.
7. Moskovitz, C., Harmon, B. and Saha, S. (2024), "The Structure of Scientific Writing: An Empirical Analysis of Recent Research Articles in STEM", *Journal of Technical Writing and Communication*, vol. 54, no 3, pp. 265–281.
8. Tokdemir Demirel, E. (2024), "The Use and Perceptions Towards AI Tools for Academic Writing Among University Students", *Innovations in Language Teaching Journal*, vol. 1, no 1, pp. 1–20.
9. Khalifa, M. and Albadawy, M. (2024), "Using artificial intelligence in academic writing and research: An essential productivity tool", *Computer Methods and Programs in Biomedicine Update*, vol. 5, p. 100145.
10. Granjeiro, J. M. *et al.* (2025), "The Future of Scientific Writing: AI Tools, Benefits, and Ethical Implications", *Brazilian Dental Journal*, vol. 36.
11. Pividori, M. and Greene, C. S. (2023), "A publishing infrastructure for AI-assisted academic authoring", *Journal of the American Medical Informatics Association (JAMIA)*, vol. 31, no 9, pp. 2103–2113.
12. D'Arcy, M. *et al.* (2024), "MARG: Multi-Agent Review Generation for Scientific Papers" [Online], URL: <https://arxiv.org/pdf/2401.04259> (accessed: 19.01.2026).
13. Jin, Y. *et al.* (2024), "AgentReview: Exploring Peer Review Dynamics with LLM Agents" [Online], URL: <https://arxiv.org/abs/2406.12708> (accessed: 19.01.2026).

14. Schmidgall, S. *et al.* (2025), "Agent Laboratory: Using LLM Agents as Research Assistants", *Proceedings of the Association for Computational Linguistics (ACL)*, pp. 5977–6043.
15. Chen, N. *et al.* (2025), "XtraGPT: Context-Aware and Controllable Academic Paper Revision" [Online], URL: <https://arxiv.org/pdf/2505.11336> (accessed: 19.01.2026).
16. Du, W. *et al.* (2022), "Read, Revise, Repeat: A System Demonstration for Human-in-the-loop Iterative Text Revision", *Proceedings of the First Workshop on Intelligent and Interactive Writing Assistants (In2Writing 2022)*, Stroudsburg, PA: Association for Computational Linguistics, pp. 96–108.
17. Nguyen, A. *et al.* (2024), "Human-AI collaboration patterns in AI-assisted academic writing", *Studies in Higher Education*, vol. 49, no 5, pp. 847–864.
18. Deep, P. D. and Das, C. Y. (2025), "The Role of AI in Academic Writing: Impacts on Writing Skills, Critical Thinking, and Integrity in Higher Education", *Societies*, vol. 15, no 9, p. 247.

**Информация об авторах:**

А. А. Толстенко – студент кафедры автоматизированных систем управления, Университет науки и технологий МИСИС (119049, Россия, Москва, Ленинский пр-т, д. 4, стр. 1.);

Е. В. Исаева – кандидат филологических наук, доцент; и.о. зав. кафедрой иностранных языков для специальных целей, Пермский государственный национальный исследовательский университет (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), доцент кафедры Автоматизированных систем управления, Университет науки и технологий МИСИС (119049, Россия, Москва, Ленинский пр-т, д. 4, стр. 1.), Scopus Author ID:57204498718, ResearcherID: O-6777-2015.

**Information about the authors:**

A. A. Tolstenko – Student, Department of Automated Control Systems, National University of Science and Technology MISIS (4, building 1, Leninsky Prospekt, Moscow, Russia, 119049);

E. V. Isaeva – Candidate of Philology Science, Associate Professor; Acting Head of the Department of Foreign Languages for Specific Purposes, Perm State University (15 Bukireva St., Perm, Russia, 614068), Associate Professor of the Department of Automated Control Systems, National University of Science and Technology MISIS (4, building 1, Leninsky Prospekt, Moscow, Russia, 119049), Scopus Author ID: 57204498718, ResearcherID: O-6777-2015.

Научный периодический журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" зарегистрирован в 2007 г. как самостоятельное издание, являющееся продолжением серии журнала "Вестник Пермского университета", издаваемого с 1994 г. В каждом номере научного журнала автору разрешается опубликование в любом разделе не более одной статьи, в том числе в соавторстве.

Статьи, оформленные в соответствии с нижеизложенными правилами, должны быть отправлены через **личный кабинет автора на сайте журнала**. Статьи отправляются в двух форматах: текстовый документ и pdf-файл без данных об авторе (для организации слепого рецензирования). Вместе с рукописью отправляются контактные данные авторов в свободной форме в текстовом документе (ФИО, должность, место работы с указанием полного адреса, e-mail, номер телефона), сопроводительное письмо и экспертное заключение о возможности открытого опубликования. Для публикации статьи необходимо заполнить и подписать согласие на обработку персональных данных и лицензионный договор.

**Аннотация статьи** (на русском и английском языках) должна содержать основные краткие сведения: описание проблемы, включая цели и задачи исследования; методы исследования с указанием новизны, если имеется; полученные результаты и выводы. Объем аннотации примерно 250 слов

**Текст статьи** должен содержать разделы: Введение, Постановка задачи, Методы исследования, Результаты, Обсуждения, Заключение, **Благодарности** для русскоязычной статьи; Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgements для англоязычной статьи. Объем рукописи – не менее 6 страниц машинописного текста.

**Оформление.** Текст статьи необходимо оформить **в редакторе Word**. Формат листа, используемый для написания статьи – А4. Размеры верхнего и нижнего полей – 2.6 см, правого и левого – 2.5 см. Расстояние до верхнего и нижнего колонтитулов 1.25 см. Шрифтом Times New Roman Сур, размер – 12 пт, межстрочный интервал – множитель 1.1 Подписи к рисункам и таблицам набираются курсивом, в конце заголовков и ячеек таблицы точка не ставится. Формулы набираются в редакторе формул.

#### Структура статьи

**Вид статьи** (научная, обзорная или др.).

**Название раздела** (математика, механика, компьютерные науки и информатика).

**УДК**

**DOI:**

**EDN**

**Название статьи на русском языке** (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

**Ф.И.О. автора (-ов) полностью** (Times New Roman – 12 pt, полужирный).

**Место работы (с указанием подразделения), город и страна** (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

**Аннотация на русском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Ключевые слова на русском языке:** 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

**Информация для цитирования** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Благодарности** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Даты поступления, одобрения и принятия рукописи** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Название статьи на английском языке** (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

**На английском языке Ф.И.О. автора (-ов) полностью** (шрифт Times New Roman – 12 пт, полужирный).

**Место работы (с указанием подразделения), город и страна на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

**Аннотация на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Ключевые слова на английском языке:** 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

**Информация для цитирования на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Благодарности на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Даты поступления, одобрения и принятия рукописи на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Основной текст** статьи (шрифт Times New Roman – 12 пт) набирается в ширину страницы, абзацный отступ основного текста – 1.0 см (задается автоматически, не пробелами). Другие отступы не допускаются. Выравнивание текста по ширине.

**Список источников** оформляется в едином формате, в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018, без использования тире. Если в списке литературы используется источник из электронного ресурса, необходимо указать дату обращения. Ссылка на литературный источник указывается в тексте статьи в квадратных скобках после упоминания цитаты. Список использованных литературных источников необходимо представить на русском и английском языках (**References**). **Список литературы на латинице**, называемый References, готовится отдельно от Списка литературы и размещается сразу за указанным списком. Ссылки на зарубежные источники необходимо повторять в Списке литературы и References. В References недопустимо использовать российские ГОСТы. Необходимо следовать требованиям международных стандартов. Инструкция по оформлению списка литературы в латинице – References, стандарт "Harvard" находится по ссылке [http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-hurnal/metodicheskie\\_materialy/standart\\_Harvard.doc](http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-hurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc).

#### ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Все рукописи проходят двойное слепое рецензирование двумя специалистами в научной области исследования. При возникновении спорной ситуации назначается третий рецензент. Окончательное решение о публикации рукописи принимает главный редактор журнала.

Датой поступления статьи считается день ее отправки через личный кабинет на сайте журнала или по электронной почте журнала (главного редактора). Рукописи рассматриваются в порядке их поступления в течение одного месяца в зависимости от сложности ситуации и объема работы. Редакция оставляет за собой право без согласования с автором проводить литературную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла.

Одобрённые статьи публикуются бесплатно. Полнотекстовая версия каждой рукописи выставляется на сайте журнала и в системе РИНЦ (e-library).

Scientific periodical journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" is published since 1994 in the series of the journal "Bulletin of Perm University". Then it was registered as an independent publication in 2007.

An author is allowed to publish no more than one article (also as co-author) in any section for each issue of the journal.

Article's structure should be accordant with the rules below and should be sent through the **author's personal account on the journal's website**. Articles should be sent in two formats: a text document and a pdf-file without information about the author(s) (for review). Authors contact data (name, position and place of work with address, e-mail, phone number in a text document), a cover letter and an expert letter on the open publication possibility should be sent with the manuscript. Author(s) must make and sign consent to the personal data processing and an agreement.

**Abstract** (in Russian and English) should contain main information of research: a problem including the goals and objectives of the study; research methods with novelty indication, if any; significant results and findings. The abstract size is approximately 250 words.

**Text** should contain sections: Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgments. The manuscript size is at least 6 typewritten pages.

An article text must be formatted in the editor Word. The sheet format is A4. The top and bottom margins are 2.6 cm, the right and left margins are 2.5 cm. The distances to the header and footer are 1.25 cm. Times New Roman Cyr font, size – 12 pt, single spacing. Legends for figures and tables are typed in italics style. Formulas are typed in the Equation editor.

### The structure of the article

#### Article's type

**UDC**

**DOI**

**EDN**

**TITLE in Russian** (Times New Roman font – 16 pt, bold).

**Name: author (s) name in full** (Times New Roman font – 12 pt).

**Place of work (with departments), city, country** (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**

**Abstract in Russian** (Times New Roman font – 11 pt).

**Keywords in Russian:** 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Information for citation in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Acknowledgments in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Submitted, approved, accepted dates of receipt in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**TITLE in English** (Times New Roman font – 16 pt, bold).

**In English author (s) name in full, place of work (with departments), city, country** (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**.

**Abstract in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Keywords in English:** 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt).

**Information for citation in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Acknowledgments in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Submitted, approved, accepted dates of receipt in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**The article text** (Times New Roman font – 12 pt) is typed the paragraph indent is 1.0 cm (set automatically, not spaces). No other indents are allowed. Justify the text in width (Times New Roman font – 16 pt)..

**References** are formed in a single format with using GOST R 7.0.100–2018 without a dash. If a source from an electronic resource is used, the author should indicate the request date. To indicate a source in text author uses square brackets after the quotation mention. References must be submitted **in Russian and English**.

**The References** list in Latin, called References, is prepared separately from the References List in Russian and placed below. Foreign sources references should be repeated in the References Lists in Russian and English. It is inadmissible to use Russian GOSTs in References. It is necessary to follow the requirements of international standards. Instructions on the References in Latin script design – References, Harvard standard can be found at [http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie\\_materialy/standart\\_Harvard.doc](http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc)

### REVIEW AND PUBLICATION OF ARTICLES

All manuscripts are double-blind peer-reviewed by two research scientists. If a disputable situation arises, a third reviewer is appointed. The final decision on the manuscript publication is made by the editor-in-chief of the journal.

The receipt date of the article is the day of its submission through the personal account on the journal's website or by e-mail of the journal (or editor-in-chief). Manuscripts are reviewed in the order they are received within one month, review period may be changed depending on a situation complexity and a works amount. The journal editors can to edit the article text without basic meaning change.

Approved articles are published free. The full-text version of each manuscript is posted on the journal's website and in the RSCI system (e-library).

Научное издание

ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Математика. Механика. Информатика

Выпуск 1(72)

2026

Адрес учредителя и издателя

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Адрес редакции

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Физико-математический институт

e-mail: vestnik\_mmi@psu.ru

Редактор Е. В. Шумилова

Корректор В. Е. Пирожкова

Компьютерная верстка: А. А. Силина

Подписано в печать 07.04.2026. Выход в свет 08.04.2026

Формат 60×84/8. Усл. печ. л. 16,97. Тираж 500 экз. Заказ 42

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Управление издательской деятельности

614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15. Тел. (342) 239-66-36

Отпечатано в типографии ПГНИУ.

Тел. (342) 239-65-47

Подписной индекс журнала

«Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика»

в онлайн-каталоге «Урал-Пресс» – 015010

[https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase\\_id=396133](https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase_id=396133)

Распространяется бесплатно и по подписке