

Учредитель: Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Научный журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" публикует оригинальные научные статьи, краткие сообщения и обзорные статьи по направлениям журнала на русском и английском языках, ранее не публиковавшиеся и не представленные для публикации в других изданиях. Все статьи проходят рецензирование членами редакционной коллегии журнала и внешними рецензентами.

#### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**БУЗМАКОВА М. М.**, к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**МАЛАНИН В. В.**, д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**БАРУЛИНА М. А.**, д. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**НУРБАКОВА Д. М.**, PhD in Computer Science; Национальный институт прикладных наук Лион (National Institute of Applied Sciences of Lyon), Лион, Франция.

#### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**БУЗМАКОВА М. М.**, к. ф.-м. н., доцент, **главный редактор**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**РУСАКОВА О. Л.**, к. ф.-м. н., доцент, **ответственный секретарь**; Пермь, Россия;

**АЛЕКСЕЕВ А. О.**, д.т.н., доцент; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

**АПТУКОВ В. Н.**, д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**АПУШКИНСКАЯ Д. Е.**, д. ф.-м.н.; Российский университет дружбы народов имени Патрика Лумумбы, Москва, Россия;

**БАРУЛИНА М. А.**, д. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**БИРЮКОВ А. Н.**, д.э.н., доцент; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;

**БОРИСОВ В. В.**, д.т.н., профессор; Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», Смоленск, Россия;

**ВЕЧТОМОВ Е. М.**, д. ф.-м. н., профессор; Вятский государственный университет, Киров, Россия;

**ГУСЕВ А. Л.**, д.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ДЕМИДОВ С. С.**, д. ф.-м. н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

**ИВАНОВ Д. В.**, д. ф.-м. н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

**ИСАЕВ К. П.**, д. ф.-м. н.; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ИШКИН Х. К.**, д. ф.-м. н.; доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**КРИВОШЕЕВА О. А.**, д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**КОССОВИЧ Л. Ю.**, д. ф.-м. н., профессор; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

**КУЗНЕЦОВ А. Г.**, к.т.н.; Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь, Россия;

**МАЛАНИН В. В.**, д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**МАТВЕЕНКО В. П.**, д.т.н., профессор, академик РАН; Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия;

**МАХНЕВ А. А.**, д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

**ПАПКОВА И. В.**, д. ф.-м. н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

**ПЕСТРЕНИН В. М.**, к. ф.-м. н., доцент; Пермь, Россия;

**ПОЛОСКОВ И. Е.**, д. ф.-м. н., доцент; Пермь, Россия;

**РУСАКОВ С. В.**, д. ф.-м. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**САВЧИН В. М.**, д. ф.-м. н., профессор; Российский университет дружбы народов имени Патрика Лумумбы, Москва, Россия;

**СЕЛЕТКОВ И. П.**, к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ТРУСОВ В. В.**, д. ф.-м. н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

**ХАЧАЙ М. Ю.**, д. ф.-м. н., профессор РАН, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

**ХЕННЕР Е. К.**, д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАО; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ФАЗУЛЛИН З. Ю.**, д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ЧЕРМНЫХ В. В.**, д. ф.-м. н., доцент; Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия;

**ЧЕРНИКОВ А. В.**, к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ЧИНЕНОВА В. Н.**, к. ф.-м. н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

**ШАХМАМЕТОВА Г. Р.**, д.т.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ШВАРЦ К. Г.**, д. ф.-м. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

**ЮМАГУЛОВ М. Г.**, д. ф.-м. н., профессор; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

**ЯСНИЦКИЙ Л. Н.**, д.т.н., профессор; Пермский филиал Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Пермь, Россия.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77-66787 от 08.08.2016.

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (приказ от 08.07.2024). Научные специальности: Вещественный, комплексный и функциональный анализ; Дифференциальные уравнения и математическая физика; Геометрия и топология; Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика; Вычислительная математика; Теоретическая механика, динамика машин; Механика деформируемого твердого тела; Механика жидкости, газа и плазмы; Искусственный интеллект и машинное обучение; Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; Теоретическая информатика, кибернетика; Системный анализ управления и обработка информации, статистика; Вычислительные системы и их элементы; Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования. Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ, eLIBRARY ID 28484).

**Founder:** Perm State University

The journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" publishes Full Articles, Short Communications Article and Review paper/perspectives on the journal's directions, which have not been previously published. The papers have been written in Russian and English. The papers are reviewed by the journal editorial board members and external reviewers.

**EDITORIAL COUNCIL**

**BUZMAKOVA M. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**MALANIN V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**BARULINA M. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**NURBAKOVA D. M.**, PhD in Computer Science; National Institute of Applied Sciences of Lyon, France.

**EDITORIAL BOARD**

**BUZMAKOVA M. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Editor-in-Chief**; Perm State University, Perm, Russia;  
**RUSAKOVA O. L.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Executive Secretary**; Perm, Russia;  
**ALEKSEEV A. O.**, Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;  
**APUKOV V. N.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**APUSHKINSKAYA D. E.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;  
**BARULINA M. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**BIRUKOV A. N.**, Doctor of Science in Economics, Associate Professor; Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;  
**BORISOV V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Smolensk Branch of National Research University "MEI", Smolensk, Russia;  
**VECHTOMOV E. M.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Vyatka State University, Kirov, Russia;  
**GUSEV A. L.**, Doctor of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**DEMIDOV S. S.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;  
**IVANOV D. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**ISEAEV K. P.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**ISHKIN H. K.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**KRIVOSHEEVA O. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**KOSOVICH L. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**KUZNECOV A. G.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State Humanitarian and Pedagogical University, Perm, Russia;  
**MALANIN V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**MATVEENKO V. P.**, Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician of RAS; Institute of Continuous Media Mechanics, UrD RAS, Perm, Russia;

**MAHNEV A. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS;  
**PAPKOVA I. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**PESTRENNIN V. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm, Russia;  
**POLOSKOV I. E.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm, Russia;  
**RUSAKOV S. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**SAVCHIN V. M.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;  
**SELETKOV I. P.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**TRUSOV P. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;  
**HACHAI M. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of RAS, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS, Yekaterinburg, Russia;  
**HENNER E. K.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAO; Perm State University, Perm, Russia;  
**FAZULLIN Z. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**CHERMYNYH V. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia;  
**CHERNIKOV A. V.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**CHINENOVA V. N.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;  
**SHAHMAMETOVA G. R.**, Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**SHVARTS K. G.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**UMAGULOV M. G.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**YASNICKIY L. N.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm Branch of the National Research University Higher School of Economics, Perm, Russia.

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor). Certificate of registration of the mass media PI No. FS 7 -66787 dated 08.08.2016.

The journal is included in the peer-reviewed scientific publications list for the main research results should be published (Candidate of Sciences and Doctor of Sciences, order dated 07/08/2024). Scientific specialties: Real, complex and functional analysis; Differential equations and mathematical physics; Geometry and topology; Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics; Computational Mathematics; Theoretical mechanics, dynamics of machines; Mechanics of deformable solids; Mechanics of liquid, gas and plasma; Artificial intelligence and machine learning; Mathematical modeling, numerical methods and software packages; Theoretical Computer science, cybernetics; System analysis, information management and processing, statistics; Computer systems and their elements; Computer modeling and design automation. The journal is included in the national information and analytical system "Russian Science Citation Index" (eLIBRARY ID 28484).

## Содержание

### МАТЕМАТИКА

<b>Мансимов К. Б., Наджафова М. Я.</b> Об одной дискретной задаче оптимального управления системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра	5
<b>Нагиева И. Ф., Мансимов К. Б.</b> Об оптимальности квазиособых управлений в одной задаче оптимального управления, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением с нетиповым функционалом	16

### МЕХАНИКА

<b>Мохирева К. А., Свистков А. Л.</b> Визуализация вращения материала при простом сдвиге: компьютерная графика и операторный подход в механике сплошных сред	29
<b>Прокопьев Л. А., Максимова Е. М., Андреев Я. М., Лукин Е. С., Семенов С. О.</b> Моделирование зависимости характера разрушения образца от коэффициента жесткости напряженного состояния у вершины трещины	46
<b>Фагалов А. Р., Беляев А. Ю., Поморцева Т. Н.</b> Температурный режим каркаса рефлектора космического аппарата в условиях солнечно-синхронной орбиты	60

### КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

<b>Смирнов Д. Б., Фролов И. А., Воротников А. А., Гринь А. А., Левченко О. В.</b> Моделирование кинематики медицинского манипуляционного робота типа SCARA с учетом непараллельности осей вращения и мануального рабочего органа с четырьмя степенями свободы	76
<b>Правила подачи и оформления рукописей</b>	87

## **C o n t e n t s**

### **MATHEMATICS**

<b>Mansimov K. B., Najafova M. Ya.</b> About Optimal Control Discrete Problem of the Volterra Type of Two-Dimensional Difference Equations System	5
<b>Nagiyeva I. F., Mansimov K. B.</b> About the Quasi-Singular Controls Optimality in a Single Optimal Control Problem Described by an Ordinary Differential Equation With an Atypical Functional	16

### **MECHANICS**

<b>Mokhireva K. A., Svistkov A. L.</b> Visualization of Material Rotation in Simple Shear: An Operator-Based Approach in Continuum Mechanics Implemented With Computer Graphics	29
<b>Prokopyev L. A., Maksimova E. M., Andreev Ya. M., Lukin E. S., Semenov S. O.</b> Modeling of the Fracture Behavior Sample Dependence on the Stress State Stiffness Coefficient at the Crack Tip	46
<b>Fagalov A. R., Beliaev A. Yu., Pomortseva T. N.</b> Thermal Balance of the Spacecraft Reflector Frame in Sun-Synchronous Orbit	60

### **COMPUTER SCIENCE**

<b>Smirnov D. B., Frolov I. A., Vorotnikov A. A., Grin' A. A., Levchenko O. V.</b> Kinematic Modeling of a SCARA-Type Medical Manipulation Robot Accounting for Non-Parallelism of Rotational Axes and a Manual End-Effecter With Four Degrees of Freedom	76
<b>Rules for submission and structure of manuscripts</b>	87

## МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 517.977.56

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-5-15

<https://elibrary.ru/ooessc>



## Об одной дискретной задаче оптимального управления системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра

**Камил Байрамали оглы Мансимов<sup>1</sup>, Малахат Яшар кызы Наджафова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

<sup>1,2</sup>Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана

<sup>1</sup>[kamilbmansimov@gmail.com](mailto:kamilbmansimov@gmail.com)

<sup>2</sup>[nacafova.melahat@mail.ru](mailto:nacafova.melahat@mail.ru)

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального управления, дискретным процессом описываемая системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра и функционалом типа Больца при предположении, что начальная функция является решением одномерного нелинейного разностного уравнения типа Вольтерра. Области управления являются ограниченными и замкнутыми множествами. Используя дискретный аналог игольчатого типа вариаций, вычислено специальное приращение функционала качества. Учитывая выражение специального приращение функционала качества, доказан дискретный аналог принципа максимума Понтрягина.

**Ключевые слова:** разностное уравнение типа Вольтерра; дискретная задача оптимального управления; области управления; допустимое управление; формула приращения; необходимое условие оптимальности; дискретный аналог принципа максимума Понтрягина.

**Для цитирования:** Мансимов К. Б., Наджафова М. Я. Об одной дискретной задаче оптимального управления системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 4(71). С. 5–15. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-5-15. <https://elibrary.ru/ooessc>.

Статья поступила в редакцию 30.04.2025; одобрена после рецензирования 17.10.2025; принята к публикации 08.12.2025.



© 2025 Мансимов К. Б., Наджафова М. Я. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## MATHEMATICS

Research article

# About Optimal Control Discrete Problem of the Volterra Type of Two-Dimensional Difference Equations System

**Kamil B. Mansimov<sup>1</sup>, Malahat Ya. Najafova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Baku State University, Baku, Azerbaijan

<sup>1,2</sup>Institute of Control System of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan

<sup>1</sup>kamilbmansimov@gmail.com

<sup>2</sup>nacafova.melahat@mail.ru

**Abstract.** An optimal control problem is considered for a discrete process described by a system of two-dimensional Volterra-type difference equations and a Bolza-type cost functional, assuming that the initial function is a solution to a one-dimensional nonlinear Volterra-type difference equation. The control domains are bounded and closed sets. Using a discrete analogue of the needle-type variation, a special increment of the cost functional is calculated. Based on this expression, a discrete version of Pontryagin's maximum principle is established.

**Keywords:** *Volterra type difference equation; discrete optimal control problem; control domains; admissible control; increment formula; necessary optimality condition; discrete analogue of the Pontryagins maximum principle.*

**For citation:** Mansimov, K. B. and Najafova, M. Ya. (2025), "About Optimal Control Discrete Problem of the Volterra Type of Two-Dimensional Difference Equations System", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 4(71), pp. 5–15, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-5-15, <https://elibrary.ru/ooesc>.

*The article was submitted 30.04.2025; approved after reviewing 17.10.2025; accepted for publication 08.12.2025.*

### Введение

В работах [1, 2] исследованы различные задачи оптимального управления, представляющее собой дискретный аналог непрерывной задачи оптимального управления, рассмотренной в работе [3].

В статье [4] рассмотрена задача оптимального управления системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра, представляющих собой обобщение задачи оптимального управления, из работ [1, 2]. В этой работе получен ряд необходимых условий оптимальности при предположении открытости областей управления.

В предлагаемой работе рассматривается задача оптимального управления, аналогичная задаче управления из [4], которая исследуется при предположении ограниченности и замкнутости областей управления.

При определенных предположениях на данные задачи управления доказан дискретный аналог принципа максимума Л. С. Понtryагина [5].

Рассматриваемую задачу оптимального управления можно интерпретировать как граничную задачу оптимального управления дискретными системами с распределенными параметрами.

Отметим, что некоторые задачи оптимального управления дискретными процессами, описываемые обыкновенными разностными уравнениями и разностными уравнениями типа Вольтерра исследованы в работах [6–12].

## 1. Постановка задачи оптимального управления

Предположим, что управляемый дискретный процесс описывается системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра:

$$z(t+1, x) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x, z(\tau, x), u(\tau)), \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \quad x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\} \quad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X, \quad (2)$$

где  $n$ -мерная вектор-функция  $a(x)$  является решением дискретного аналога задачи Коши:

$$a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x g(x, s, a(s), v(s)), \quad x \in X \setminus x_1, \quad (3)$$

$$a(x_0) = a_0. \quad (4)$$

Здесь  $f(t, \tau, x, z, u)$  ( $g(x, s, a, v)$ ) – заданная,  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $z(a)$ ,  $a_0$  – заданный постоянный вектор,  $t_0, x_0, t_1, x_1$  – заданные натуральные числа,  $u(t)$  ( $v(x)$ ) –  $r$  ( $q$ )-мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значением из заданного ограниченного и замкнутого множества  $U(V)$ , т.е.

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, \quad t \in T, \\ v(x) &\in V \subset R^q, \quad x \in X \setminus x_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Такие управляющие функции назовем *допустимыми*.

Экстремальная задача заключается в минимизации функционала типа Больца:

$$S(u, v) = \varphi(a(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G(z(t_1, x)) \quad (6)$$

при ограничениях (1)–(5).

Здесь  $\varphi(a)$  и  $G(z)$  – заданные, непрерывно дифференцируемые, скалярные функции, допустимые управления  $u(t)$  и  $v(x)$  доставляющие минимальное значение функционала (6) при ограничениях (1)–(5) назовем *оптимальным управлением*.

Целью работы является получение необходимых условий оптимальности в рассматриваемой экстремальной задаче.

## 2. Формула приращения функционала и оценка норм приращений решений задач типа Коши (1)–(2) и (3)–(4)

Построим формулу приращения функционала качества. Пусть  $(u^0(t), v^0(x))$  – некоторое допустимое управление. Через  $(\bar{u}(t) = u^0(t) + \Delta u(t), \bar{v}(x) = v^0(x) + \Delta v(x))$  – обозначим произвольное допустимое управления.

Решения задач (1)–(2) и (3)–(4), отвечающие допустимым управлениюм  $(u^0(t), v^0(x))$  и  $(\bar{u}(t), \bar{v}(x))$  обозначим соответственно через  $(z^0(t, x), a^0(x))$  и  $(\bar{z}(t, x), \bar{a}(x))$ .

Из введенных обозначений следует, что приращения,  $\Delta z(t, x)$  и  $\Delta a(x)$  являются решениями аналогов задач Коши:

$$\Delta z(t + 1, x) = \sum_{\tau=t_0}^t [f(t, \tau, x, \bar{z}(\tau, x), \bar{u}(\tau)) - f(t, \tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau))], \quad (7)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta a(x), \quad (8)$$

$$\Delta a(x + 1) = \sum_{s=x_0}^x [g(x, s, \bar{a}(s), \bar{v}(s)) - g(x, s, a^0(s), v^0(s))], \quad (9)$$

$$\Delta a(x_0) = 0. \quad (10)$$

Введем скалярные функции типа Гамильтона–Понтрягина

$$H(t, x, z(t, x), u(t), \psi^0(t, x)) = \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi^{0'}(\tau, x) f(\tau, t, x, z(\tau, x), u(\tau)),$$

$$M(x, a(x), v(x), p^0(x)) = \sum_{s=x}^{x_1-1} p^{0'}(s) g(s, x, a(x), v(x)).$$

Здесь  $\psi^0(t, x)$  и  $p^0(x)$  пока произвольные дискретные и ограниченные вектор-функции, а штрих – операция транспонирования.

Из тождеств (7) и (9), используя дискретный аналог теоремы Фубини (см. например, работы [13, 14]) доказывается, что

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t, x) \Delta z(t + 1, x) = \\ &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t), \psi^0(t, x)) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))], \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x) \Delta a(x + 1) = \\ &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(x, \bar{a}(x), \bar{v}(x), p^0(x)) - M(x, a^0(x), v^0(x), p^0(x))]. \quad (12) \end{aligned}$$

Учитывая тождества (11) и (12), приращение функционала (6) представляется в виде:

$$\begin{aligned} S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^0, v^0) &= \varphi(\bar{a}(x_1)) - \varphi(a^0(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [G(\bar{z}(t_1, x)) - G(z^0(t_1, x))] - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}(t), \psi^0(t, x)) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(x, \bar{a}(x), \bar{v}(x), p^0(x)) - M(x, a^0(x), v^0(x), p^0(t, x))] + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t, x) \Delta z(t+1, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x) \Delta a(x+1). \tag{13}
 \end{aligned}$$

Используя формулу Тейлора и учитывая начальные условия (8) и (10), формула приращения (13) представляется в виде

$$\begin{aligned}
 S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^0, v^0) &= \frac{\partial \varphi'(a(x_1))}{\partial a} \Delta a(x_1) + o_1(\|\Delta a(x_1)\|) + p^{0'}(x_1) \Delta a(x_1) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x-1) \Delta a(x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(x, a^0(x), \bar{v}(x), p^0(x)) - M(x, a^0(x), v^0(x), p^0(t, x))] - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'(x, a^0(x), v^0(x), p^0(t, x))}{\partial a} \Delta a(x) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \frac{\partial M(x, a^0(x), \bar{v}(x), p^0(x))}{\partial a} - \frac{\partial M(x, a^0(x), v^0(x), p^0(t, x))}{\partial a} \right]' \Delta a(x) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_2(\|\Delta a(x)\|) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G'(z^0(t_1, x))}{\partial z} \Delta z(t_1, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_3(\|\Delta z(t_1, x)\|) + \\
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t_0-1, x) \Delta a(x) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, z^0(t, x), \bar{u}(t), \psi^0(t, x)) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))] + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t-1, x) \Delta z(t, x) \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))}{\partial z} \Delta z(t, x) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \frac{\partial H(t, x, z^0(t, x), \bar{u}(t), \psi^0(t, x))}{\partial z} - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))}{\partial z} \right]' \Delta z(t, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta z(t, x)\|). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Здесь, и в дальнейшем,  $\|y\|$  норма вектора  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ , определяемая формулой  $\|y\| = \sum_{i=1}^n |y_i|$ , а  $o(\alpha)$  — величина более высокого порядка, чем  $\alpha$ , т.е.  $o(\alpha)/\alpha \rightarrow 0$ , при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Предположим, что вектор-функции  $\psi^0(t, x)$ ,  $p^0(x)$  являются решениями линейных дискретных задач Коши

$$\begin{aligned}
 \psi^0(t-1, x) &= \frac{\partial H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))}{\partial z}, \\
 \psi^0(t_1-1, x) &= -\frac{\partial G(z^0(t_1, x))}{\partial z}, \\
 p^0(x-1) &= \frac{\partial M(x, a^0(x), v^0(x), p^0(t, x))}{\partial a} + \psi^0(t_0-1, x), \\
 p^0(x_1-1) &= -\frac{\partial \varphi(a(x_1))}{\partial a}.
 \end{aligned}$$

Тогда формула приращения (14) функционала примет вид

$$\begin{aligned}
 S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^0, v^0) &= - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(x, a^0(x), \bar{v}(x), p^0(x)) - M(x, a^0(x), v^0(x), p^0(t, x))] - \\
 &\quad - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, z^0(t, x), \bar{u}(t), \psi^0(t, x)) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))] - \\
 &\quad - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \frac{\partial M(x, a^0(x), \bar{v}(x), p^0(x))}{\partial a} - \frac{\partial M(x, a^0(x), v^0(x), p^0(t, x))}{\partial a} \right]' \Delta a(x) - \\
 &\quad - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ \frac{\partial H(t, x, z^0(t, x), \bar{u}(t), \psi^0(t, x))}{\partial z} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))}{\partial z} \right]' \Delta z(t, x) + o_1(\|\Delta a(x_1)\|) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_2(\|\Delta a(x_1)\|) + \\
 &\quad + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_3(\|\Delta z(t_1, x)\|) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta z(t, x)\|). \tag{15}
 \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки для  $\|\Delta a(x)\|$  и  $\|\Delta z(t, x)\|$ .

В силу задачи (9)–(10) ясно, что

$$\Delta z(t+1, x) = \sum_{\tau=t_0}^t [\Delta z(\tau+1, x) - \Delta z(\tau, x)] + \Delta z(t_0, x).$$

Поэтому, используя дискретный аналог леммы Фубини (см. например, [13, 14]), получаем справедливость тождества:

$$\begin{aligned}
 \Delta z(t+1, x) &= \sum_{\tau=t_0}^t \left[ \sum_{\alpha=\tau}^t [f(\alpha, \tau, x, \bar{z}(\tau, x), \bar{u}(\tau)) - f(\alpha, \tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau))] - \Delta z(\tau, x) \right] + \\
 &\quad + \Delta a(x).
 \end{aligned}$$

Из этого тождества, переходя к норме и учитывая непрерывно-дифференцируемость, вектор-функции  $f(t, \tau, z, u)$ , по  $z$  приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|\Delta z(t+1, x)\| &\leq L_1 \sum_{\tau=t_0}^t \|\Delta z(\tau, x)\| + \|\Delta a(x)\| + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{\alpha=\tau}^t \|f(\alpha, \tau, x, z^0(\tau, x), \bar{u}(\tau)) - f(\alpha, \tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau))\|, \end{aligned}$$

где  $L_1 = \text{const} > 0$  некоторая постоянная.

Применяя к последнему неравенству дискретный аналог леммы Гронуолла–Беллмана (см., например, [15]) получаем, что

$$\begin{aligned} \|\Delta z(t, x)\| &\leq L_2 [\|\Delta a(x)\| + \\ &+ \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{\alpha=\tau}^t \|f(\alpha, \tau, x, z^0(\tau, x), \bar{u}(\tau)) - f(\alpha, \tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau))\|]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $L_2 = \text{const} > 0$  некоторая постоянная.

Далее задача (9)–(10) может быть представлено в виде

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x \left[ \sum_{\beta=s}^x [g(\beta, s, \bar{a}(s), \bar{v}(s)) - g(\beta, s, a^0(s), v^0(s))] - a(s) \right].$$

Из этого тождества, после некоторых преобразований, применяя дискретный аналог леммы Гронуолла–Беллмана, получаем справедливость оценки:

$$\|\Delta a(x)\| \leq L_3 \sum_{s=x_0}^x \sum_{\beta=s}^x [g(\beta, s, a^0(s), \bar{v}(s)) - g(\beta, s, a^0(s), v^0(s))]. \quad (17)$$

Здесь  $L_3 = \text{const} > 0$  также некоторая постоянная.

### 3. Необходимые условия оптимальности

Введем в рассмотрение множества

$$f(t, \tau, x, z^0(\tau, x), U) = \{c; c = f(t, \tau, x, z^0(\tau, x), u(\tau)); u(\tau) \in U, \tau \in T\}, \quad (18)$$

$$g(x, s, a^0(s), V) = \{d; d = g(x, s, a^0(s), v(s)); v(s) \in V, s \in X \setminus x_1\}. \quad (19)$$

Предположим, что множества (18) и (19) выпуклы.

Теперь предположим, что  $\Delta v(x) = 0$  и специальное приращение допустимого управления определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = u(t; \varepsilon) - u^0(t), t \in T. \quad (20)$$

Здесь  $\varepsilon \in [0, 1]$  – произвольное число, а  $u(t; \varepsilon)$  произвольное допустимое управление, такое, что

$$\begin{aligned} f(t, \tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau) + \Delta u_\varepsilon(\tau)) - f(t, \tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau)) &\equiv \\ &\equiv \varepsilon f(t, \tau, x, z^0(\tau, x), u(\tau)) - f(t, \tau, x, z^0(\tau, x), u^0(\tau)), \end{aligned}$$

где  $u(t)$  – произвольное допустимое управление, соответствующее управлению  $u(t; \varepsilon)$ .

Через  $\Delta z_\varepsilon(t, x)$  обозначим специальное приращение решения  $z^0(t, x)$ .

Учитывая оценку (16) из формулы приращения (15) функционала, получаем, что

$$\begin{aligned}
 & S(u^0 + \Delta u, v^0) - S(u^0, v^0) = \\
 & = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, z^0(t, x), u(t), \psi^0(t, x)) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))] + \\
 & \quad + o(\varepsilon). \tag{21}
 \end{aligned}$$

Далее предполагая, что  $\Delta u(t) = 0$ , специальное приращение управления  $v^0(x)$  определим по формуле

$$\Delta v_\mu(x) = v(x; \mu) - v^0(x). \tag{22}$$

Здесь  $\mu \in [0, 1]$  – произвольное число, а  $v(x; \mu)$  произвольное допустимое управление, такое, что

$$\begin{aligned}
 & g(x, s, a^0(s), v(s; \mu)) - g(x, s, a^0(s), v^0(s)) = \\
 & = -\mu (g(x, s, a^0(s), v(s)) - g(x, s, a^0(s), v^0(s))). \tag{22}
 \end{aligned}$$

Здесь  $v(x)$  произвольное допустимое управление, соответствующее допустимому управлению  $v(x; \mu)$ .

Через  $\Delta z(t, x; \mu)$  и  $\Delta a(x; \mu)$  обозначим специальные приращения решения  $z^0(t, x)$  и  $a^0(x)$ , соответствующие специальному приращению (22) управления  $v^0(x)$ .

Из установленных оценок (16) и (17) при этом следует, что  $\|\Delta z(t, x; \mu)\|$  и  $\|\Delta a(x; \mu)\|$  имеют порядок малости  $\mu$ . Поэтому из формулы приращения (15) следует, что

$$\begin{aligned}
 & S(u^0(x), v^0(x) + \Delta v(x; \mu)) - S(u^0(x), v^0(x)) = \\
 & = -\mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(x, a^0(x), v(x), p^0(x)) - M(x, a^0(x), v^0(x), p^0(x))] + o(\mu). \tag{23}
 \end{aligned}$$

Из разложений (21) и (23) следует необходимое условие оптимальности.

**Теорема 1.** Если множества (18) и (19) выпуклы, то для оптимальности допустимых управлений  $u^0(t)$  и  $v^0(x)$  необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, z^0(t, x), u(t), \psi^0(t, x)) - H(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))] \leq 0, \tag{24}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(x, a^0(x), v(x), p^0(x)) - M(x, a^0(x), v^0(x), p^0(x))] \leq 0 \tag{25}$$

выполнялись для всех допустимых управлений  $u(t)$  и  $v(x)$  соответственно.

Неравенства (24) и (25) представляют собой аналог дискретного принципа максимума (см., например, [5, 13]) для рассматриваемой задачи.

Заметим, что необходимые условия оптимальности допускают упрощения. Используя произвольность допустимых управлений  $u(t)$  и  $v(x)$ , доказывается следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть множества (18) и (19) выпуклы. Тогда для оптимальности допустимых управлений  $u^0(t)$  и  $v^0(x)$  необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(\theta, x, z^0(\theta, x), u(\theta), \psi^0(\theta, x)) - H(\theta, x, z^0(\theta, x), u^0(\theta), \psi^0(\theta, x))] \leq 0, \quad (26)$$

$$M(\xi, a^0(\xi), v(\xi), p^0(\xi)) - M(\xi, a^0(\xi), v^0(\xi), p^0(t, \xi)) \leq 0 \quad (27)$$

выполнялось для всех  $\theta \in T, u \in U$  и  $\xi \in X \setminus x_1, v \in V$  соответственно.

**Замечание.** Можно показать, что результаты теорем 1 и 2 равносильны.

## Заключение

В статье рассмотрена одна дискретная задача оптимального управления при предположении, что процесс описывается двумерным разностным уравнением типа Вольтерра, а начальное условие, являясь управляемым, определяется из задачи Коши для нелинейного разностного уравнения Вольтерра. При предположении выпуклости аналогов множеств допустимых скоростей рассматриваемых уравнений доказано необходимое условие оптимального первого порядка в форме дискретного аналога принципа максимума Понtryгина.

## Список источников

1. Гараева Э. А., Мансимов К. Б. Об одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук. 2014. № 1. С. 40–49. URL: <http://static.bsu.az/w8/Xeberler%20Jurnalı/riyaz%20%202014%20%201/5-r-mansimov-qarayeva-2.pdf> (дата обращения: 30.09.2025).
2. Гараева Э. А., Мансимов К. Б. Достаточное условие оптимальности типа Кротова в одной дискретной задаче оптимального управления // Известия НАН Азербайджана, сер. физ.-мат. наук. 2016. № 3. С. 11–15.
3. Москаленко А. И. Об одном классе задач оптимального управления // Журнал Выч. Матем. и матем. физики. 1969. Т. 9, № 1. С. 68–95. URL: [https://www.math-net.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7176&option\\_lang=rus&ysclid=mi01lgxatw505873211](https://www.math-net.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7176&option_lang=rus&ysclid=mi01lgxatw505873211) (дата обращения: 30.09.2025).
4. Мансимов К. Б. Об одной дискретной двухпараметрической задаче управления // Вестник Томского гос. унив. 2025. № 70. С. 14–18. DOI 10.17223/19988605/70/2. EDN JVWVWIQ.
5. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич [и др.]. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с. ISBN 978-985-6981-52-7. EDN XTHIJL.
6. Мансимов К. Б., Керимова А. В. Линеаризованное необходимое условие оптимальности и исследование квазисобых управлений в одной ступенчатой дискретной задаче оптимального управления // Вестник ТГУ, сер. Управление, техн. и информ. 2014. Вып. 68. С. 14–27.
7. Мансимов К. Б., Керимова А. В. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной ступенчатой задаче управления, описываемой разностным и интегро-дифференциальным уравнением типа Вольтерра // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64, № 10. С. 1868–1880. DOI 10.31857/S0044466924100072. EDN KADJTN.
8. Мамедова Т. Ф., Аналог дискретного принципа максимума и необходимые условия оптимальности особых управлений в одной дискретной двухпараметрической задаче оптимального управления // Прикладная математика и вопросы управления. 2021. № 3. С. 7–34. DOI 10.15593/2499-9873/2021.03.01. EDN FPHVDR.
9. Мансимов К. Б., Масталиев Р. О. Оптимизация процессов, описываемых разностными уравнениями Вольтерра. LAP Lambert Publishing. RU, 2017. 263 с.

10. Агамалиева А. И. Необходимые условия оптимальности в одной дискретной граничной задаче управления динамикой популяции // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 5–13. DOI 10.17072/1993-0550-2022-2-5-13. EDN NITQOZ.
11. Гороховик В. В. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в задаче управления дискретной системой по нетранзитивному векторному показателю качества // Труды Института математики. 2014. В. 22, № 1. С. 35–50. URL: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=timb&paperid=207&option\\_lang=rus&ysclid=mi022zlc2h527631453](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=timb&paperid=207&option_lang=rus&ysclid=mi022zlc2h527631453) (дата обращения: 30.09.2025).
12. Hilscher R., Zeidan V. Discrete optimal control: second order optimality controls // Difference equations and Appl. 2002. No 8. P. 875–896.
13. Мансимов К. Б. Дискретные системы. Баку, Изд.-во БГУ, 2013. 151 с.
14. Souyousefain M., Leela S. Stability results for difference equations of Volterra type // Appl. Math. Comput. 1990. Vol. 36, № 1. P. 51–61.
15. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев М.: Наука, 1981. 400 с.

## References

1. Garayeva, E. A. and Mansimov, K. B. (2014), "On a Discrete Optimal Control Problem Bulletin of BSU", *Series of Phys. and Mathematical Sciences*, no 1, pp. 40–49. URL: <http://static.bsu.az/w8/Xeberler%20Jurnalı/riyaz%20%202014%20%201/5-r-mansimov-qarayeva-2.pdf> (accessed date: 30.09.2025).
2. Garayeva, E. A. and Mansimov, K. B. (2016), "A Sufficient Optimality Condition of Krotov Type in a Discrete Optimal Control Problem", *Bulletin of the NAS of Azerbaijan, Series of Phys. and Mathematical Sciences*, no 3, pp. 11–15.
3. Moskalenko, A. I. (1969), "On a Class of Optimal Control Problems", *Physics, mathematics and Mathematical Physics*, vol. 9, no 1, pp. 68–95. URL: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7176&option\\_lang=rus&ysclid=mi01lgxatw505873211](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7176&option_lang=rus&ysclid=mi01lgxatw505873211) (accessed date: 30.09.2025).
4. Mansimov, K. B. (2025), "On a Discrete Two-Parameter Control Problem", *Bulletin of Tomsk State University*, no 70, pp. 14–18.
5. Gabasov, R., Kirillova, F. M., Alsevich, V. V., et al. (2011), *Optimization Methods*, Chetyre Chetvert Publishing House, Minsk, Belarus, 472 p.
6. Mansimov, K. B. and Kerimova, A. V (2014), "Linearized Necessary Optimality Condition and Study of Quasi-Singular Controls in One Step-by-Step Discrete Optimal Control Problem", *Vestnik TSU, Ser. Управление, Техн. и Информ.*, vol. 68, pp. 14–27.
7. Mansimov, K. B. and Kerimova A. V. (2024), "Necessary optimality conditions of the first and second orders in a step control problem described by a difference and integro-differential equation of Volterra type", *Vychisl. Mat. i Matem. Phys.*, vol. 64, no 10, pp. 1868–1880.
8. Mamedova, T. F. (2021), "An analogue of the discrete maximum principle and necessary optimality conditions for singular controls in a discrete two-parameter optimal control problem", *Applied Mathematics and Control Issues*, no 3, pp. 7–34.
9. Mansimov, K. B. and Mastaliev, R. O. (2017), *Optimization of processes described by difference Volterra equations*, LAP Lambert Publishing, Russia, 263 p.

10. Agamalieva, A. I. (2022), "Necessary optimality conditions in a discrete boundary value problem of population dynamics control", *Bulletin of Perm University, Math., Mech, Corp. Sience*, issue 2(57), pp. 5–13.
11. Gorokhovik, V. V. (2014), "Necessary optimality conditions of the first and second orders in the problem of controlling a discrete system based on a non-transitive vector quality indicator", *Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, vol. 22, no 1, pp. 35–50. URL: [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=timb&paperid=207&option\\_lang=rus&ysclid=mi022zlc2h527631453](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=timb&paperid=207&option_lang=rus&ysclid=mi022zlc2h527631453) (accessed date: 30.09.2025).
12. Hilscher, R. and Zeidan, V. (2002), "Discrete optimal control: second-order optimality controls", *Difference equations and Appl*, no 8, pp. 875–896.
13. Mansimov, K. B. (2013), *Discrete systems*, Baku, BSU Publishing House, 151 p.
14. Souyousefain, M. and Leela, S. (1990), "Stability results for difference equations of Volterra type", *Appl. Math. Comput*, vol. 36, no. 1, pp. 51–61.
15. Vasiliev, F. P. (1981), *Methods for solving extremal problems*, Nauka, Moscow, Russia, 400 p.

**Информация об авторах:**

К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией "Методы управления в сложных динамических системах" института Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана (Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, д. 68), AuthorID247352;

М. Я. Наджафова – научный сотрудник лаборатории "Методы управления в сложных динамических системах" института Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана (Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, д. 68).

**Information about the authors:**

К. Б. Mansimov – Doctor of Sciences (Physical and Mathematical), Professor, Head of the Laboratory "Control in Complex Dynamical Systems" of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, AZ1141), AuthorID 247352;

M. Ya. Najafova – research fellow of the laboratory "Control Methods in Complex Dynamic Systems" of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, AZ1141).

Научная статья

УДК 517.977.56

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-16-28

<https://elibrary.ru/enaghd>

## Об оптимальности квазиособых управлений в одной задаче оптимального управления, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением с нетиповым функционалом

**Илаха Фирдовис кызы Нагиева<sup>1</sup>, Камил Байрамали оглы Мансимов<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана, Баку,  
Азербайджан

<sup>2</sup>Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

<sup>1</sup>[ilaahanagiyeva80@gmail.com](mailto:ilaahanagiyeva80@gmail.com)

<sup>2</sup>[kamilbmansimov@gmail.com](mailto:kamilbmansimov@gmail.com)

**Аннотация.** Рассматривается одна нетиповая задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений и общим многоточечным критерием качества. Область управления объектом является выпуклым ограниченным множеством. Вычислена формула второго порядка приращения функционала, соответствующая двум допустимым управлению. С помощью этого приращения впервые доказан аналог линеаризованного принципа максимума Л. С. Понтрягина. Далее исследован случай вырождения линеаризованного принципа максимума (квазиособый случай). Установлены интегральные поточечные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений, носящие конструктивный характер.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение; многоточечный функционал; область управления; допустимое управление; линеаризованный принцип максимума; квазиособое управление.

**Для цитирования:** Нагиева И. Ф., Мансимов К. Б. Об оптимальности квазиособых управлений в одной задаче оптимального управления, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением с нетиповым функционалом // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 4(71). С. 16–28. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-16-28. <https://elibrary.ru/enaghd>.

*Статья поступила в редакцию 30.04.2025; одобрена после рецензирования 18.10.2025; принята к публикации 08.12.2025.*



© 2025 Нагиева И. Ф., Мансимов К. Б. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

## About the Quasi-Singular Controls Optimality in a Single Optimal Control Problem Described by an Ordinary Differential Equation With an Atypical Functional

Ilaha F. Nagiyeva<sup>1</sup>, Kamil B. Mansimov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Institute of Control System of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

<sup>2</sup>Baku State University, Baku, Azerbaijan

<sup>1</sup>ilahanagiyeva80@gmail.com

<sup>2</sup>kamilbmansimov@gmail.com

**Abstract.** A non-standard optimal control problem governed by a system of ordinary differential equations with a general multi-point quality criterion is analyzed. The control domain represents a convex and bounded set. We derive a second-order formula for the increment of the functional associated with two admissible controls. This result allows us to prove an analogue of the linearized maximum principle introduced by L. S. Pontryagin. Furthermore, we investigate the case when this principle degenerates into what is known as the quasi-singular scenario. Finally, integral pointwise necessary conditions ensuring the optimality of such quasi-singular controls are formulated in a constructively applicable form.

**Keywords:** *differential equation; multipoint functional; control domain; admissible control; linearized maximum principle; quasi-singular control.*

**For citation:** Nagiyeva, I. F. and Mansimov, K. B. (2025), "About the Quasi-Singular Controls Optimality in a Single Optimal Control Problem Described by an Ordinary Differential Equation With an Atypical Functional", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 4(71), pp. 16–28, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-16-28, <https://elibrary.ru/enaghd>.

*The article was submitted 30.04.2025; approved after reviewing 18.10.2025; accepted for publication 08.12.2025.*

### Введение

В монографии [1] Н. Н. Моисеев рассмотрел задачу оптимального управления, динамика которой описывалась одной системой обыкновенных дифференциальных уравнений и нетиповым функционалом качества. Для рассматриваемой задачи оптимального управления он доказал необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Л. С. Понtryагина [2, 3].

В предлагаемой работе рассматривается аналогичная задача оптимального управления, но с более общим многоточечным функционалом качества, где область управления является выпуклым ограниченным множеством. Учитывая специфические особенности функционала качества, в отличие от известных работ (см., например, [1–5]), сопряженная функция введена как решение линейного интегрального уравнения типа Вольтерра, что позволила построить общую формулу приращения критерия качества при менее жестких ограничениях. Доказан аналог линеаризованного принципа максимума [4]. Отдельно рассмотрен случай его вырождения (квазиособый случай) [5–8]. Применяя аналог схему вывода необходимых условий оптимальности квазиособых управлений из работ [7, 8], получены интегральное и поточечное необходимые условия оптимальности квазиособых управлений, позволяющие сузить множество допустимых управлений, подозрительных на оптимальность.

## 1. Постановка задачи

Пусть управляемый непрерывный процесс на заданном отрезке времени  $T = [t_0, t_1]$  описывается задачей Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T, \quad (1.1)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

Предполагается, что заданная  $n$ -мерная вектор-функция  $f(t, x, u)$ , непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(x, u)$  до второго порядка включительно,  $x_0$  – заданный постоянный  $n$ -мерный вектор,  $u(t)$  –  $r$ -мерный, кусочно-непрерывный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества  $U \subset R^r$  (область управления), т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T. \quad (1.3)$$

Каждую управляющую функцию  $u(t)$ , удовлетворяющую этим требованиям, назовем *допустимым управлением*.

Считается, что при каждом заданном допустимом управлении задача Коши (1.1)–(1.2) имеет единственное непрерывное и кусочно-гладкое решение (т.е. производная решения задачи Коши кусочно-непрерывная вектор-функция с конечным числом точек разрыва первого рода).

Через  $T_i, i = \overline{1, k}$  ( $t_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k \leq t_1$ ) – обозначим заданные точки.

Пусть  $\varphi(x_1, \dots, x_k)$  – заданная, дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, а  $F(t, s, a, b)$  – заданная скалярная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(a, b)$  до второго порядка включительно.

На решениях задачи Коши (1.1)–(1.2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$J(u) = \varphi(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} F(t, s, x(t), x(s)) ds dt \quad (1.4)$$

и рассмотрим задачу о нахождении минимального значения функционала (1.4) при ограничениях (1.1)–(1.3).

Заметим, что некоторые практические задачи оптимального управления с нетиповым критерием качества перечислены в монографии [1]. В частности, задачи оптимального управления с нетиповым критерием качества возникают в задачах оптимального синтеза.

Некоторые задачи оптимального управления, с нетиповым функционалом качества исследованы в работах [9–11].

Допустимое управление  $u(t)$ , доставляющее минимальное значение функционалу (1.4), при ограничениях (1.1)–(1.3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс  $(u(t), x(t))$  – оптимальным процессом.

Задача заключается в нахождении необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в рассматриваемой задаче оптимального управления.

## 2. Специальная формула приращения второго порядка функционала

Пусть  $(u(t), x(t))$  и  $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$  – некоторые допустимые процессы.

Тогда приращение  $\Delta x(t)$  траектории  $x(t)$  будет решением следующей задачи Коши:

$$\Delta \dot{x}(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x(t), u(t)), \quad (2.1)$$

$$\Delta x(t_0) = 0. \quad (2.2)$$

Введем аналог функции Понtryгина:

$$H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u),$$

где штрих ('') операция транспонирования, а  $\psi(t)$  пока произвольная  $n$ -мерная вектор-функция.

Учитывая введенные обозначения и выражение аналога функции Понtryгина, приращение функционала (1.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) - J(u) &= \varphi(\bar{x}(T_1), \bar{x}(T_2), \dots, \bar{x}(T_k)) - \\ &- \varphi(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (F(t, s, \bar{x}(t), \bar{x}(s)) - F(t, s, x(t), x(s))) ds dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta \dot{x}(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t))] dt. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Используя формулу Тейлора, после некоторых преобразований, из формулы приращения (2.3) получаем, что

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) - J(u) &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial x_i} \Delta x(T_i) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \Delta x'(T_i) \frac{\partial \varphi'(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x(T_j) + o_1 \left( \left[ \sum_{i=1}^k \|\Delta x(T_i)\| \right]^2 \right) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta \dot{x}(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x} \Delta x(t) dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \Delta x'(t) \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} \Delta x(t) + \right. \\ &\left. + 2 \Delta u'(t) \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} \Delta x(t) + \Delta u'(t) \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u^2} \Delta u(t) \right] dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} o_2 [(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|)^2] dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial F'(t, s, x(t), x(s))}{\partial a} \Delta x(t) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial F'(t, s, x(t), x(s))}{\partial b} \Delta x(s) \right] ds dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \Delta x'(t) \frac{\partial F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a^2} \Delta x(t) + 2 \Delta x'(t) \frac{\partial F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a \partial b} \Delta x(s) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Delta x'(s) \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial b^2} \Delta x(s) \Big] ds dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} o_3([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(s)\|]^2) ds dt. \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^t \Delta \dot{x}(\tau) d\tau. \tag{2.5}$$

Из формулы (2.5) получаем, что

$$\Delta x(T_i) = \int_{t_0}^{t_1} \alpha_i(t) \Delta \dot{x}(t) dt. \tag{2.6}$$

Здесь  $\alpha_i(t)$  характеристическая функция отрезка  $[t_0, T_i]$ .

Используя формулы (2.5) и (2.6) формула приращения (2.4) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 J(\bar{u}) - J(u) = & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi'(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial x_i} \Delta \dot{x}(t) dt + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \Delta x'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x(T_j) + o_1 \left( \left[ \sum_{i=1}^k \|\Delta x(T_i)\| \right]^2 \right) + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \Delta \dot{x}(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} \frac{\partial H'(\tau, x(\tau), u(\tau), \psi(\tau))}{\partial x} d\tau \right] \Delta \dot{x}(t) dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u} \Delta u(t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} \Delta x(t) + \right. \\
 & \left. + 2 \Delta u'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} \Delta x(t) + \Delta u'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u^2} \Delta u(t) \right] dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} o_2([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} \frac{\partial F'(\tau, s, x(\tau), x(s))}{\partial a} d\tau \right] \Delta \dot{x}(t) ds dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} \frac{\partial F'(\tau, s, x(\tau), x(s))}{\partial b} d\tau \right] \Delta \dot{x}(t) ds dt + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \Delta x'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a^2} \Delta x(t) + 2 \Delta x'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a \partial b} \Delta x(s) + \right. \\
 & \left. + \Delta x'(s) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial b^2} \Delta x(s) \right] ds dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} o_3([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(s)\|]^2) ds dt. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Теперь предположим, что произвольная вектор-функция  $\psi(t)$  является решением линейного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \psi(t) = & - \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \varphi'(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial x_i} + \int_t^{t_1} \frac{\partial H(\tau, x(\tau), u(\tau), \psi(\tau))}{\partial x} d\tau - \\ & - \int_t^{t_1} \left[ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F(\tau, s, x(\tau), x(s))}{\partial a} ds \right] d\tau - \int_t^{t_1} \left[ \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F(s, \tau, x(s), x(\tau))}{\partial b} ds \right] d\tau. \end{aligned}$$

Тогда формула приращения (2.7) примет вид

$$\begin{aligned} J(\bar{u}) - J(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u} \Delta u(t) dt + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \Delta x'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x(T_j) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} \Delta x(t) + \right. \\ & \left. + 2 \Delta u'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} \Delta x(t) + \Delta u'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u^2} \Delta u(t) \right] dt - \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \Delta x'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a^2} \Delta x(t) + 2 \Delta x'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a \partial b} \Delta x(s) + \right. \\ & \left. + \Delta x'(s) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial b^2} \Delta x(s) \right] ds dt - \\ & + o_1 \left( \left[ \sum_{i=1}^k \|\Delta x(T_i)\| \right]^2 \right) - \int_{t_0}^{t_1} o_2 ([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|]^2) dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} o_3 ([\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x(s)\|]^2) ds dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя задачу (2.1)–(2.2) по аналогии с [6] можно доказать справедливость оценки

$$\|\Delta x(t)\| \leq L \int_{t_0}^t \|\Delta u(\tau)\| d\tau, \quad (2.9)$$

где  $L = \text{const} > 0$  – некоторая постоянная.

Далее, в силу гладкости правой части уравнения (1.1) выводится, что  $\Delta x(t)$  является решением линеаризованной задачи:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) = & f_x(t, x(t), u(t)) \Delta x(t) - f_u(t, x(t), u(t)) \Delta u(t) + \\ & + o_4(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|), t \in T, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\Delta x(t_0) = 0. \quad (2.11)$$

Так как по предложению, область управления  $U$  выпукло, то специальное приращение допустимого управления  $u(t)$  можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \varepsilon [v(t) - u(t)], \quad t \in T. \quad (2.12)$$

Здесь  $v(t)$  – произвольное допустимое управление, а  $\varepsilon \in [0, 1]$  произвольное число.

Через  $\Delta x_\varepsilon(t)$  обозначим, специальное приращение траектории  $x(t)$ , отвечающее специальному приращению (2.12) управления  $u(t)$ .

Учитывая оценку (2.9) и формулу (2.12), с помощью линеаризованной задачи (2.10)–(2.11) доказывается справедливость следующего разложения:

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon l(t) + o_5(\varepsilon; t). \quad (2.13)$$

Здесь  $l(t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция, являющаяся решением задачи

$$\dot{l}(t) = f_x(t, x(t), u(t)) l(t) - f_u(t, x(t), u(t)) [v(t) - u(t)], \quad t \in T, \quad (2.14)$$

$$l(t_0) = 0. \quad (2.15)$$

Учитывая формулы (2.12) и (2.13), из формулы приращения (2.8) получаем, что

$$\begin{aligned} J(u + \Delta u_\varepsilon) - J(u) &= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u} [v(t) - u(t)] dt + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k l'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial x_i \partial x_j} l(T_j) - \\ &- \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[ l'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} l(t) + \right. \\ &+ 2[v(t) - u(t)]' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} l(t) + \\ &+ \left. [v(t) - u(t)]' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u^2} [v(t) - u(t)] \right] dt + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[ l'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a^2} l(t) + 2l'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a \partial b} l(s) + \right. \\ &+ \left. l'(s) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial b^2} l(s) \right] ds dt + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

### 3. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков

Специальное разложение (2.16) функционала (1.4) позволяет получить ряд необходимых условий оптимальности первого и второго порядков.

Пусть  $u(t)$  оптимальное управление. Тогда из разложения (2.16) следует.

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  в задаче (1.1)–(1.4) необходимо, чтобы для всех  $v(t) \in U, t \in T$  выполнялось неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u} [v(t) - u(t)] dt \leq 0. \quad (3.1)$$

Неравенство (3.1) является аналогом линеаризованного принципа максимума (см., например, [3–6]).

Учитывая произвольность допустимого управления  $v(t)$ , и используя неравенство (3.1), можно доказать следующую теорему.

**Теорема 2.** Для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial H'(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta))}{\partial u} [v - u(\theta)] \leq 0 \quad (3.2)$$

выполнялось для всех  $\theta \in [t_0, t_1]$  и  $v \in U$ .

Доказательство. Пусть  $v \in U$  – произвольный вектор, а  $\varepsilon > 0$  – произвольное достаточно малое число.

Тогда произвольное допустимое управление  $v(t)$  можно определить по формуле

$$v(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ u(t), & t \in T \setminus [\theta, \theta + \varepsilon]. \end{cases}$$

Учитывая эту формулу в неравенстве (3.1) после несложных преобразований, получим, что

$$\varepsilon \frac{\partial H'(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta))}{\partial u} [v - u(\theta)] + o(\varepsilon) \leq 0.$$

Из этого неравенства, в силу произвольности  $\varepsilon > 0$  следует неравенство (3.2).

Здесь  $\theta \in [t_0, t_1]$  является произвольной точкой непрерывности управления  $u(t)$ .

Неравенство (3.2) является аналогом дифференциального принципа максимума (см., например, [3, 5]).

Можно показать, что неравенства (3.1) и (3.2) эквивалентны.

Перейдем к изучению вырождения аналога линеаризованного условия максимума.

**Определение 1.** Если для всех допустимых управлений  $v(t)$  выполняется соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u} [v(t) - u(t)] dt = 0,$$

то управление  $u(t)$  назовем квазиособым управлением в задаче (1.1)–(1.4).

Из разложения (2.16) следует утверждение

**Теорема 3.** Для оптимальности квазиособого управления  $u(t)$  необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k l'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial x_i \partial x_j} l(T_j) + \\ & \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \left[ l'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a^2} l(t) + 2l'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a \partial b} l(s) + \right. \\ & \left. + l'(s) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial b^2} l(s) \right] ds dt - \int_{t_0}^{t_1} \left[ l'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} l(t) + \right. \\ & \left. + 2[v(t) - u(t)]' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} l(t) + \right. \end{aligned}$$

$$+ [v(t) - u(t)]' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u^2} [v(t) - u(t)] \Big] dt \geq 0 \quad (3.3)$$

выполнялось для всех  $v(t) \in U, t \in T$ .

Неравенство (3.3) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Из него можно получить необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, выраженное через параметры рассматриваемой задачи управления.

Запишем представление задачи Коши (2.14)–(2.15):

$$l(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) f_u(\tau, x(\tau), u(\tau)) [v(\tau) - u(\tau)] d\tau. \quad (3.4)$$

Здесь  $\Phi(t, \tau)$  ( $n \times n$ ) матрица Коши, являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t, \tau) f_x(\tau, x(\tau), u(\tau)),$$

$$\Phi(t, t) = E,$$

где  $E$  – единичная матрица.

Введем обозначение

$$Q(t, \tau) = \Phi(t, \tau) f_u(\tau, x(\tau), u(\tau)).$$

Из представления (3.4) следует, что

$$l(T_i) = \int_{t_0}^{t_1} \alpha_i(\tau) Q(T_i, \tau) [v(\tau) - u(\tau)] d\tau. \quad (3.5)$$

Учитывая представление (3.4), получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^k l'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial x_i \partial x_j} l(T_j) = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [v(\tau) - u(\tau)]' Q'(T_i, \tau) \alpha_i(\tau) \frac{\partial^2 \varphi(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial x_i \partial x_j} \times \\ & \quad \times Q(T_j, s) \alpha_j(s) [v(s) - u(s)] ds d\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Далее, используя представление (3.4), доказываются тождества

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} [v(t) - u(t)]' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} l(t) dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{t_0}^t [v(t) - u(t)]' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} Q(t, \tau) [v(\tau) - u(\tau)] d\tau \right] dt, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} l'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} l(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [v(\tau) - u(\tau)]' \times \\ & \quad \times \left[ \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} Q'(t, \tau) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} Q(t, s) dt \right] [v(s) - u(s)] ds d\tau, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} l'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a^2} l(t) ds dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [v(\alpha) - u(\alpha)]' \times \\ \times \left[ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(t, \alpha) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a^2} Q(t, \beta) ds dt \right] [v(\beta) - u(\beta)] d\alpha d\beta, \quad (3.9)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} l'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a \partial b} l(s) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [v(\alpha) - u(\alpha)]' \times \\ \times \left[ \int_{\alpha}^{t_1} \int_{\beta}^{t_1} Q'(t, \alpha) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a \partial b} Q(s, \beta) ds dt \right] [v(\beta) - u(\beta)] d\alpha d\beta, \quad (3.10)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} l'(t) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial b \partial a} l(s) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [v(\alpha) - u(\alpha)]' \times \\ \times \left[ \int_{\alpha}^{t_1} \int_{\beta}^{t_1} Q'(t, \alpha) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial b \partial a} Q(s, \beta) ds dt \right] [v(\beta) - u(\beta)] d\alpha d\beta, \quad (3.11)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} l'(s) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial b^2} l(s) ds dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [v(\alpha) - u(\alpha)]' \times \\ \times \left[ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(s, \alpha) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial b^2} Q(s, \beta) ds dt \right] [v(\beta) - u(\beta)] d\alpha d\beta. \quad (3.12)$$

Здесь, как было отмечено

$$Q(t, \tau) = \Phi(t, \tau) \frac{\partial f(\tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial u}.$$

Введем обозначение

$$K(\alpha, \beta) = -Q'(x_1, \alpha) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} Q(x_1, \beta) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(t, \alpha) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a^2} Q(t, \beta) dt \right] ds - \\ - \int_{\alpha}^{t_1} \left[ \int_{\beta}^{t_1} Q'(t, \alpha) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial a \partial b} Q(s, \beta) ds \right] dt - \\ - \int_{\alpha}^{t_1} \left[ \int_{\beta}^{t_1} Q'(s, \alpha) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial b \partial a} Q(t, \beta) ds \right] dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(s, \alpha) \frac{\partial^2 F(t, s, x(t), x(s))}{\partial b^2} Q(s, \beta) ds \right] dt -$$

$$-\int_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q'(t, \alpha) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} Q(t, \beta) dt.$$

Учитывая введенное обозначение и тождество (3.7)–(3.12), неравенство (3.3) представляется в виде

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\nu(\alpha) - u(\alpha)]' K(\alpha, \beta) [\nu(\beta) - u(\beta)] d\alpha d\beta + \\ & + 2 \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{t_0}^t [\nu(t) - u(t)]' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u \partial x} Q(t, \tau) [\nu(\tau) - u(\tau)] d\tau \right] dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} [\nu(t) - u(t)]' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u^2} [\nu(t) - u(t)] dt \leq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 4.** Для оптимальности квазиособого управления  $u(t)$  в рассматриваемой задаче оптимального управления необходимо, чтобы неравенство (3.13) выполнялось для всех  $\nu(t) \in U, t \in T$ .

Как видно, неравенство (3.13) в отличие от неравенства (3.3), носит конструктивный характер. Из этого интегрального необходимого условия оптимальности, используя произвольность допустимого управления  $\nu(t)$ , можно получить относительно легко проверяемые поточечные необходимые условия оптимальности второго порядка.

Приведем один из них.

**Теорема 5.** Для оптимальности квазиособого управления  $u(t)$  рассматриваемой задаче необходимо, чтобы для всех  $\nu \in U$  и  $\theta \in [t_0, t_1]$  выполнялось неравенство

$$[\nu - u(\theta)]' \frac{\partial^2 H(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta))}{\partial u^2} [\nu - u(\theta)] \leq 0. \quad (3.14)$$

Заметим, что ряд необходимых условий оптимальности квазиособых управлений в задачах оптимального управления динамика, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, с терминальным критерием качества получены в работах [3–7].

### Заключение

В работе, при предположении выпуклости области управления, с помощью квазивариаций вычислено специальное приращение второго порядка функционала качества. Используя специального приращение функционала качества получены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме линеаризованного интегрального и дифференциального условия оптимальности.

Доказано общее необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, носящих конструктивный характер.

Изучен один частный случай (теорема 5).

### Список источников

1. Элементы теории оптимальных систем / Моисеев. Н. Н. М.: Наука, 1975. 528 с.
2. Принцип максимума в оптимальном управлении / Понtryгин Л. С. М.: URSS, 2024. 72 с.

3. *Методы оптимизации* / Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В. Минск: Издво "Четыре четверти", 2011. 472 с. ISBN: 978-985-6981-52-7. EDN XTHIJL.
4. *Принцип максимума в теории оптимального управления* / Габасов Р., Кириллова Ф. М. М.: URSS, 2018. 272 с.
5. *Особые оптимальные управления* / Габасов Р., Кириллова Ф. М. М: URSS, 2013. 256 с.
6. *Особые управлении в системах с запаздыванием* / Мансимов К. Б. Баку: ЭЛМ, 1999. 175 с.
7. *Мансимов К. Б. Многоточечные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений* // Автоматика и телемеханика. 1982. № 10. С. 53–58.
8. *Исмайлов Р. Р., Мансимов К. Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1674–1686.
9. *Нагиева И. Ф., Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности особых управлений в задаче управления типа Моисеева* // Проблемы управления и информатики. 2006. № 5. С. 52–63.
10. *Мансимов К. Б., Нагиева И. Ф. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной задаче оптимального управления с нетипичным критерием качества* // Вестник Томского унив. Управление, техника и информатика. 2023. № 64. С. 11–20. DOI 10.17223/19988605/64/2. EDN GHXADE.
11. *Mansimov K. B., Nagiyeva I. F. Analogue of Eulers equation and second order optimality conditions in one N. N. Mouseyev type control problems* // Informatics and control problems. 2023. Issue 2. P. 67–77.

## References

1. Moiseev, N. N. (1975), *Elements of the Theory of Optimal Systems*, Nauka, Moscow, 528 p.
2. Pontryagin, L. S. (2024), *The Maximum Principle in Optimal Control*, URSS, Moscow, 72 p.
3. Gabasov, R., Kirillova, F. M. and Alsevich, V. V. (2011), *Optimization Methods*, Four Quarters Publishing House, Minsk, 472 p.
4. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (2018), *The Maximum Principle in Optimal Control Theory*, URSS, Moscow, 272 p.
5. Gabasov, R. and Kirillova, F. M. (2013), *Special Optimal Controls*, URSS, Moscow, 256 p.
6. Mansimov, K. B. (1999), *Singular controls in systems with delay*, ELM, Baku, 175 p.
7. Mansimov, K. B. (1982), "Multipoint necessary optimality conditions for quasi-singular controls", *Automation and Telemechanics*, no 10, pp. 53–58.
8. Ismailov, R. R. and Mansimov, K. B., (2006), "On optimality conditions in one-step control problem", *Zhurn. Vychisl. Mat. i Mathematical Physics*, vol. 46, no 10, pp. 1674–1686.
9. Nagieva, I. F. and Mansimov, K. B. (2006), "Necessary optimality conditions for singular controls in a Moiseyev-type control problem", *Problems of Control and Informatics*, no 5, pp. 52–63.
10. Mansimov, K. B. and Nagieva, I. F. (2023) "Necessary optimality conditions of the first and second orders in one optimal control problem with an atypical quality criterion", *Bulletin of Tomsk University. Series: Management, Engineering and Informatics*, issue 64, pp. 11–20.

11. Mansimov, K. B. and Nagiyeva, I. F. (2023) "Analogue of Eulers equation and second-order optimality conditions in one N. N. Mouseyev type control problems", *Informatics and control problems*, issue 2, pp. 67–77.

**Информация об авторах:**

И. Ф. Нагиева – научный сотрудник лаборатории "Методы управления в сложных динамических системах" института Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана (Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, д. 68);  
К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией "Методы управления в сложных динамических системах" института Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана (Азербайджан, AZ 1141, г. Баку, ул. Бахтияра Вагабзаде, д. 68), AuthorID247352.

**Information about the authors:**

I. F. Nagiyeva – research fellow of the laboratory "Control Methods in Complex Dynamic Systems" of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, AZ1141);

К. Б. Mansimov – Doctor of Sciences (Physical and Mathematical), Professor, Head of the Laboratory "Control in Complex Dynamical Systems" of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, AZ1141), AuthorID 247352;

## МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 539.3, 514.743

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-29-45

<https://elibrary.ru/dtmrpk>**Визуализация вращения материала при простом сдвиге:  
компьютерная графика и операторный подход  
в механике сплошных сред****Ксения Александровна Мохирева<sup>1</sup>, Александр Львович Свистков<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия<sup>1</sup>lyadovaka@icmm.ru<sup>2</sup>svistkov@icmm.ru

**Аннотация.** В работе рассматривается применение компьютерной графики и операторной школы тензорного исчисления для наглядной визуализации используемых понятий и их физического смысла в механике деформируемых сред. Представленные в статье иллюстрации могут быть эффективным учебным материалом по нелинейной механике. Полученные с помощью специально разработанных программ изображения практически невозможно воспроизвести вручную. Они отражают точные геометрические преобразования, возникающие при конечных деформациях. Авторы считают, что для понимания физического смысла тензорных величин желательно не говорить о матрицах коэффициентов. Такие матрицы являются компонентами тензора, возникающими при представлении его с помощью диад из базисных векторов выбранной системы отсчета. Матрицы необходимы преимущественно для реализации вычислительных алгоритмов. Однако истинный физический смысл тензорных величин становится более понятным, когда их рассматривают как операторы, отображающие векторы в новые векторы трехмерного евклидова пространства. Такой подход лежит в основе данной работы. В качестве примера выбрана задача моделирования деформаций материала в условиях простого сдвига. Испытательная установка неподвижна. Жесткие пластины, которые деформируют материал, двигаются поступательно (без поворотов). Тем не менее, все малые области материала совершают вращательное движение, эквивалентное повороту абсолютно твердого тела. Для специалистов, решающих задачи в условиях малых деформаций, это явление может казаться парадоксальным. В то же время оно хорошо известно в теории конечных деформаций. Представленные в статье пояснения физического смысла тензоров и полученные на компьютере



© 2025 Мохирева К. А., Свистков А. Л. Лицензировано по CC BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

иллюстрации позволяют разрешить это кажущееся противоречие. Тем самым подчеркиваются преимущества операторного подхода в преподавании и изучении нелинейной теории конечных деформаций.

**Ключевые слова:** конечные деформации; простой сдвиг; градиент деформаций; вращательное движение материала; тензор вихря; тензор спина.

**Для цитирования:** Мохирева К. А., Свистков А. Л. Визуализация вращения материала при простом сдвиге: компьютерная графика и операторный подход в механике сплошных сред // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 4(71). С. 29–45. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-29-45. <https://elibrary.ru/dtmrpk>.

**Благодарности:** работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А20-120022590044-7).

*Статья поступила в редакцию 30.09.2025; одобрена после рецензирования 31.10.2025; принята к публикации 08.12.2025.*

## MECHANICS

Research article

# Visualization of Material Rotation in Simple Shear: An Operator-Based Approach in Continuum Mechanics Implemented With Computer Graphics

**Kseniiia A. Mokhireva<sup>1</sup>, Alexander L. Svistkov<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Institute of Continuous Media Mechanics, Perm, Russia

<sup>1</sup>lyadovaka@icmm.ru

<sup>2</sup>svistkov@icmm.ru

**Abstract.** In this paper, we develop a physically meaningful and visually grounded framework for understanding mechanics of deformable media by combining the operator-based formulation of tensor calculus with computer graphics. The resulting images presented can be used as a powerful educational tool for teaching nonlinear continuum mechanics and, additionally, these images are able to accurately depict complex geometric transformations induced by finite deformations. Being generated by specialized programs, they cannot be reproduced manually. We believe that a proper understanding of the physical meaning of tensors requires moving beyond their definition as simple “matrices of coefficients”, because matrices are only the components of a tensor that arise when it is expressed in terms of the dyadic products of basis vectors in a chosen coordinate system. Matrices are mainly used in computing. However, the true physical meaning of tensors becomes clear when they are interpreted as linear operators acting on vectors in three-dimensional Euclidean space. The operator-based approach lies at the core of the present work. As a representative example, we consider the deformation of a material under simple shear. The testing apparatus is fixed, and the rigid plates used to apply shear deformation move translationally, without any rotation. Nevertheless, each infinitesimal material element undergoes a rigid-body-like rotation. Although this behavior is well known in the context of finite deformation theory, it appears paradoxical to researchers accustomed to small strains. The physical interpretation of tensors in combination with computer-generated visualizations helps resolve this apparent contradiction. The paper clearly demonstrates the pedagogical advantages of the operator-based approach for teaching and understanding nonlinear theories of finite deformations.

**Keywords:** finite deformations; simple shear; deformation gradient; rotational motion; vorticity tensor; spin tensor.

**For citation:** Mokhireva, K. A. and Svistkov, A. L. (2025), " Visualization of Material Rotation in Simple Shear: An Operator-Based Approach in Continuum Mechanics Implemented With Computer Graphics", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 4(71), pp. 29–45, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-29-45, <https://elibrary.ru/dtmrpk>.

**Acknowledgments:** the work was carried out within the framework of the state task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (subject no AAAA-A20-120022590044-7).

*The article was submitted 30.09.2025; approved after reviewing 31.10.2025; accepted for publication 08.12.2025.*

## Введение

Операторная школа тензорного исчисления рассматривает тензоры второго ранга как векторы девятимерного пространства. С этой точки зрения тензоры интерпретируются как множество линейных операторов, действующих в трехмерном евклидовом пространстве и отображающих один вектор в другой. Композиция из нескольких операторов подразумевает то, что сначала выполняется одно преобразование, затем – другое, и так далее. В такой записи знак умножения между тензорными величинами опускается. Если осуществляется скалярное умножение девятимерных векторов, между ними ставится точка – знак скалярного умножения. Операторный подход применяется в механике сплошных сред, в частности в работах Труделла [1, 2], Гуртина [3], Свисткова [4] и других авторов.

При анализе поведения материалов в условиях больших деформаций центральную роль играет градиент деформации  $F$  [1–8]. Это тензор, преобразующий вектор, определяющий взаимное расположение двух близких точек в отсчетной конфигурации, в вектор их взаимного расположения в актуальной конфигурации. Для него справедливо полярное разложение  $F = RU = VR$ , где  $R$  – тензор поворота,  $U$  и  $V$  – правый и левый тензоры растяжения. Это разложение позволяет разделить локальное движение материала на деформацию и жесткое вращение (поворот как абсолютно твердого тела). Однако без наглядной визуализации такие абстрактные конструкции остаются малодоступными для восприятия, особенно для исследователей, не специализирующихся в нелинейной механике сплошных сред.

Простой сдвиг [1–3, 5–8] является одним из ярких примеров деформирования материала, в котором проявляются локальные вращения при отсутствии поворота всего образца. В линейной теории упругости простой сдвиг описывается исключительно сдвиговой деформацией в выбранной системе отсчета; при этом нормальные напряжения отсутствуют, и вращение материальных элементов деформируемой среды не учитывается. Однако при переходе к конечным деформациям картина существенно усложняется. Градиент деформации  $F$  указывает на два преобразования, которые совершаются с малыми элементами среды: растяжение/сжатие и их поворот (или наоборот, в зависимости от формы полярного разложения). Это позволяет четко различать и физически интерпретировать кинематические характеристики вращательного движения, например тензор вихря  $W$  и тензора спина  $W_R$  [1–3, 5–8].

В настоящей работе предлагается визуально-аналитический инструмент, объединяющий операторный подход в механике сплошных сред с наглядностью компьютерной графики. Полученные результаты могут быть полезны как при обучении основам нелинейной механики сплошных сред, так и при разработке и верификации моделей поведения материалов в условиях больших деформаций.

## 1. Градиент деформаций. Полярное разложение

В данной работе не ставилось задачи давать изложение основных понятий операторной школы тензорного исчисления и выкладок нелинейной механики деформируемых сред. Соответствующие определения и выводы подробно представлены, например, в работах [1–4]. Приведем в статье только некоторые важные пояснения. Отметим, что положение материальной точки в отсчетной конфигурации будем обозначать радиус-вектором  $\mathbf{x}_0$ . Опишем вокруг этой точки в отсчетной конфигурации сферическую поверхность с весьма малым радиусом так, чтобы сама точка находилась в ее центре. Эту поверхность образуют материальные точки, «вмороженные» в деформируемую среду и движущиеся вместе с ней. Пусть множество векторов  $\Delta\mathbf{x}_0$  исходит из выбранной точки, а их концы пробегают все точки сферической поверхности. В деформированном состоянии рассматриваемая область приобретает иную геометрию. При этом новая геометрия в малой окрестности точки может быть с высокой точностью описана с помощью линейного (аффинного) преобразования, обозначим его за  $\mathbf{F}$  (тензор второго ранга). Поверхность полученной геометрической фигуры задается множеством векторов  $\Delta\mathbf{x}$ , исходящих из той же материальной точки среды. Между векторами  $\Delta\mathbf{x}$  и  $\Delta\mathbf{x}_0$  существует связь

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{F}\Delta\mathbf{x}_0 + \dots \quad (1.0)$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости. Иными словами,  $\mathbf{F}$  представляет собой производную векторной функции по векторному аргументу:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} . \quad (1.1)$$

Тензор  $\mathbf{F}$  называется градиентом деформации. При этом положение материальных точек  $\mathbf{x}$  в текущий момент времени в формуле (1.1) должно быть функцией радиус-векторов  $\mathbf{x}_0$ , «вмороженных» в сплошную среду, и текущего момента времени  $t$ :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ .

Благодаря линейному преобразованию  $\mathbf{F}$ , сферическая окрестность в отсчетной конфигурации переходит в эллипсоид в текущей конфигурации (рис. 1). На иллюстрации приведены рисунки с использованием безразмерных геометрических величин. То есть все геометрические размеры поделены на радиус  $R$ , выделенной в материале малой сферы в отсчетном состоянии. У эллипсоида имеются три главные полуоси. Обозначим правую ортонормированную тройку векторов, определяющих их направления, символами  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  (рис. 1, б). Векторы, соединяющие центр эллипсоида с его вершинами равны  $\lambda_1 \mathbf{n}_1, \lambda_2 \mathbf{n}_2, \lambda_3 \mathbf{n}_3$ . Символами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  обозначены кратности удлинения. Они рассчитываются как отношения длин главных полуосей эллипсоида к радиусу исходной сферы  $R$  и являются безразмерными величинами.

Применяя обратное преобразование  $\mathbf{F}^{-1}$  к градиенту деформации  $\mathbf{F}$ , можно получить тройку векторов  $\mathbf{n}_1^0, \mathbf{n}_2^0, \mathbf{n}_3^0$ :

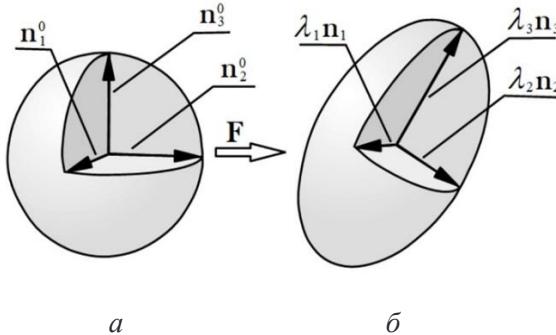
$$\mathbf{n}_1^0 = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{n}_2^0 = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{n}_3^0 = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{n}_3. \quad (1.2)$$

Эти векторы изображены на рис. 1, а. Данная иллюстрация подсказывает, как естественным образом ввести тензоры, описывающие как жесткие повороты малых областей среды, так и их деформации. Можно показать, что векторы  $\mathbf{n}_1^0, \mathbf{n}_2^0, \mathbf{n}_3^0$  также образуют ортонормированную тройку.

Известно, что градиент деформации всегда может быть представлен в виде:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i^0 \quad (1.3)$$

и справедливы выражения:  $\lambda_i \mathbf{n}_i = \mathbf{F} \mathbf{n}_i^0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $\mathbf{F}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{n}_i^0 \otimes \mathbf{n}_i$ .



а б

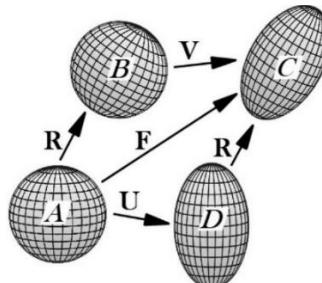
**Рис. 1.** Иллюстрация, поясняющая введение понятия градиента деформации. Сферическая область (рис. а) переходит в область, имеющую форму эллипсоида (рис. б). Геометрия изображена в безразмерных величинах: все размеры нормированы на радиус сферы  $R$  в отсчетной конфигурации

Действие оператора  $\mathbf{F}$  можно также проиллюстрировать с помощью рис. 2, отражающего фундаментальный принцип разделения движения сплошной среды на жесткое вращение и деформацию. Из отсчетного состояния  $A$  в текущее состояние  $C$  можно попасть двумя путями: через промежуточное состояние  $B$  или через промежуточное состояние  $D$ . Это означает, что можно сначала повернуть исходную сферу с помощью оператора поворота  $\mathbf{R}$  (переход в состояние  $B$ ), а затем растянуть полученный объект оператором  $\mathbf{V}$ . Либо сначала растянуть сферу оператором  $\mathbf{U}$ , получив эллипсоид, а затем повернуть его тем же оператором поворота  $\mathbf{R}$ .

Тензоры  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{R}$  имеют следующий вид:

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i^0, \mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i^0 \otimes \mathbf{n}_i^0, \mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i^0 \otimes \mathbf{n}_i, \quad (1.4)$$

скаляры  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  являются собственными значениями тензоров  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}$ , а соответствующие ортонормированные тройки векторов  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  и  $\mathbf{n}_1^0, \mathbf{n}_2^0, \mathbf{n}_3^0$  – их собственными векторами:  $\mathbf{V} \mathbf{n}_i = \lambda_i \mathbf{n}_i$ ,  $\mathbf{U} \mathbf{n}_i^0 = \lambda_i \mathbf{n}_i^0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ).



**Рис. 2.** Иллюстрация, поясняющая введение тензоров, описывающих деформацию и вращение сплошной среды

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что градиент деформации выражается через эти тензоры в виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U}. \quad (1.5)$$

Соотношение (1.5) называется полярным разложением градиента деформации. Тензор  $\mathbf{R}$  является тензором поворота. Он преобразует тройку векторов  $\mathbf{n}_1^0, \mathbf{n}_2^0, \mathbf{n}_3^0$  в тройку  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ , то есть  $\mathbf{n}_i = \mathbf{R}\mathbf{n}_i^0, (i = 1, 2, 3)$ .

## 2. Деформация материала в условиях простого сдвига

Очень наглядным для получения представлений об основных понятиях механики является пример деформирования материала в условиях простого сдвига. Его имеет смысл рассматривать на лекциях по нелинейной механике деформируемых сред. Иллюстрации, полученные с помощью компьютерных рисунков, дают наглядные картинки о действии основных операторов. Речь идет о тензоре поворота, тензоре растяжения, деформационном градиенте, тензоре скоростей деформирования, тензоре вихря, тензоре спина. При исследовании на простой сдвиг эластомерных материалов применяется конструкция, в которой четыре одинаковых образца приклеиваются к специально обработанным жестким пластинам. Эта конструкция показана на рис. 3а. В центральной части каждого образца реализуется практически однородное напряженно-деформированное состояние. Если пластины являются достаточно длинными, то области с неоднородным состоянием будут составлять малую часть и вносить погрешности, соизмеримые с погрешностями эксперимента.

Рассмотрим один из этих образцов. Он помещен между двумя горизонтальными жесткими пластинами испытательной установки (рис. 3, б) и прочно приклеен к ним. Для описания деформаций используется прямоугольная декартова система координат. Нижняя плата неподвижна, верхняя смещается в горизонтальной плоскости вдоль первой координатной оси. При этом расстояние между пластинами остается неизменным – это характерная особенность простого сдвига (в отличие от чистого сдвига, где это условие не выполняется). Качественной мерой сдвига служит параметр:

$$\gamma = a/b, \quad (2.0)$$

где  $a$  – горизонтальное смещение верхней пластины,  $b$  – начальное расстояние между пластинами.

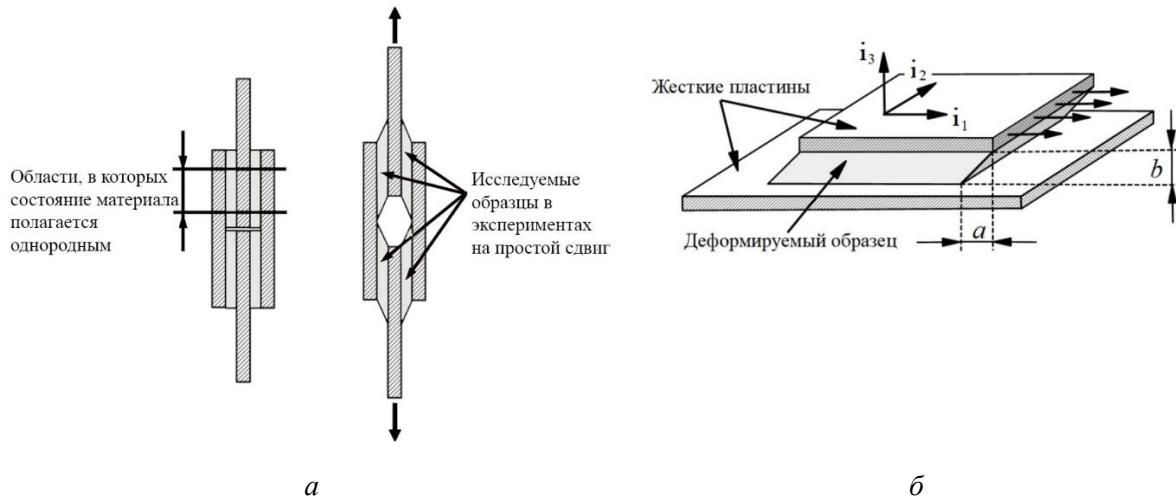


Рис. 3. Схемы деформирования эластомерного материала в условиях простого сдвига

В образце устанавливается однородное деформированное состояние. Особенности возникающих деформаций можно наглядно представить, проследив за превращением

сферической области, мысленно выделенной внутри образца (рис. 4, а). Для удобства на поверхность сферы нанесены меридианы и параллели. Градиент деформации в данном случае имеет вид:  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \gamma \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_3$ . Разлагая радиус-векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_0$  по базису прямоугольной декартовой системы, получаем изменения положения точек среды в однородно нагруженном образце

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

в виде зависимости:  $\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{i}_i = (\mathbf{I} + \gamma \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_3) \left( \sum_{i=1}^3 x_i^0 \mathbf{i}_i \right) = (x_1^0 + \gamma x_3^0) \mathbf{i}_1 + x_2^0 \mathbf{i}_2 + x_3^0 \mathbf{i}_3$ .

Таким образом, точки среды смещаются в горизонтальной плоскости в направлении вектора  $\mathbf{i}_1$ , причем величина смещения пропорциональна начальной координате  $x_3^0$ ; коэффициент пропорциональности равен  $\gamma$ .

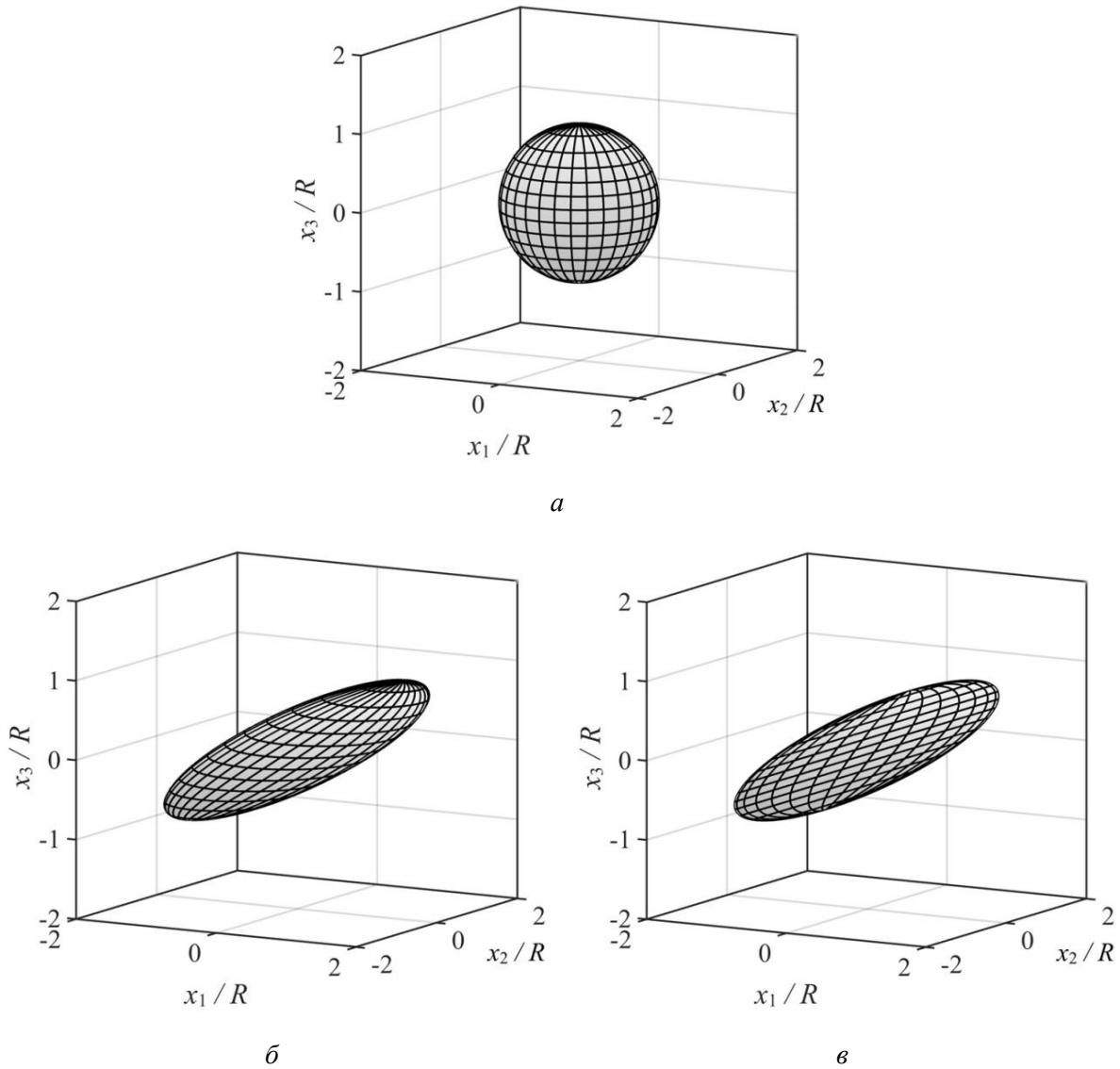
Далее приведены иллюстрации, построенные для значения  $\gamma = 1.5$ . Левый и правый тензоры растяжения, а также тензор поворота вычисляются по формулам:

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим малую сферическую область с центром в точке  $\mathbf{x}_0$ : начало векторов  $\Delta\mathbf{x}_0$  лежит в центре сферы, а их концы описывают сферическую поверхность (рис. 4, а). Под действием градиента деформации  $\mathbf{F}$  эта область преобразуется в эллипсоид, показанный на рис. 4, б. Можно также рассмотреть преобразование той же сферы с помощью левого тензора растяжения:  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{V}\Delta\mathbf{x}_0$ . Такое преобразование сферы дает эллипсоид, изображенный на рис. 4, в.

На первый взгляд оба эллипсоида выглядят одинаково, однако, это не так. В первом случае (рис. 4, б) параллели остаются в тех же горизонтальных плоскостях, что и до деформации; во втором случае (рис. 4, в) они оказываются на наклонных плоскостях. Следовательно, операторы  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{V}$  задают разные преобразования, несмотря на внешнее сходство очертаний границ. Чтобы получить полное совпадение, необходимо «вернуть» параллели и меридианы в правильное положение. Это достигается следующим образом: сначала поворачиваем исходную сферу с помощью тензора  $\mathbf{R}$  (рис. 2), а затем растягиваем полученный объект левым тензором растяжения  $\mathbf{V}$  (рис. 2). Так реализуется полярное разложение  $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$ . Можно поступить иначе: осуществить сначала растяжение, определяемое правым тензором растяжения  $\mathbf{U}$ , а затем поворот с помощью тензора  $\mathbf{R}$  (рис. 2). Указанные преобразования исходной сферической области осуществляются последовательно. Правый тензор растяжения  $\mathbf{U}$  также формирует эллипсоид той же формы, что и градиент деформации  $\mathbf{F}$ ; различие заключается лишь в ориентации полученного эллипсоида в пространстве.

Отметим, что материал, деформированное состояние которого однородно по всему объему образца, нагружается с помощью неподвижной экспериментальной установки. Реализуются условия простого сдвига. Закрепленный в ней образец не совершает вращения как абсолютно твердое тело: его верхняя и нижняя границы остаются строго горизонтальными (рис. 3). Тем не менее, малые материальные области внутри образца испытывают локальное вращение.



**Рис. 4.** Геометрии малой сферической области материала а) в отсчетном (недеформированном) состоянии и б), в) в условиях простого сдвига. Преобразование точек сферической области материала происходит с помощью: б) градиента деформаций ( $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{F}\Delta\mathbf{x}_0$ ) и в) левого тензора растяжений ( $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{V}\Delta\mathbf{x}_0$ )

### 3. Тензор скоростей деформации и тензор вихря

Материальная производная градиента деформации по времени  $\dot{\mathbf{F}}$  может быть выражена через производные главных растяжений и производные собственных векторов тензоров  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ , возникающих в полярном разложении согласно формуле (1.5). С более подробными выкладками можно ознакомиться в работах [1–4]. Соответственно, комбинация  $\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  естественным образом распадается на части, связанные с изменением длин (растяжений) и с вращением материальных элементов. Теперь рассмотрим скалярное произведение тензора  $\lambda_k \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k$  и тензора  $\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ :

$$\lambda_k \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \lambda_k \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k \cdot \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i + \sum_{i=1}^3 \dot{\mathbf{n}}_i \otimes \mathbf{n}_i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\lambda_i}{\lambda_j} (\dot{\mathbf{n}}_i^0 \cdot \mathbf{n}_j^0) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j \right) = \dot{\lambda}_k. \quad (3.0)$$

Разложим тензор  $\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  на симметричную  $\mathbf{D}$  и антисимметричную  $\mathbf{W}$  части:

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})^T \right)$  и  $\mathbf{W} = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} - (\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})^T \right)$ ,  $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$ , тогда выполняется:

$$\dot{\lambda}_k = \lambda_k \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \lambda_k \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{D}. \quad (3.2)$$

Тензор  $\mathbf{D}$  называется *тензором скоростей деформации* (первое название, используемое в работах [1–4]) или *тензор деформации скорости* (второе название, упоминаемое в работах [6–8]), а  $\mathbf{W}$  – *тензор вихря*. Важной особенностью тензоров  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{W}$  является их независимость от выбора отсчетной конфигурации [1–3, 7].

Пусть в отсчетный момент времени  $t_0$  положение материальных точек континуума определяется радиус-вектором  $\mathbf{x}_0$ . Определяемое в пространстве положение материальных точек сплошной среды будем называть *отсчетной конфигурацией*. В другой момент времени  $t_1$  положение материальных точек континуума определяется радиус-вектором  $\mathbf{x}_1$ . Считаем, что момент времени  $t_1$  наступает после момента времени  $t_0$ , то есть  $t_1 > t_0$ . Будем рассматривать момент времени  $t_1$  как момент, в котором задается новая конфигурация с помощью радиус-векторов материальных точек континуума  $\mathbf{x}_1$ . Будем называть ее *новой отсчетной конфигурацией*.

В текущий момент времени радиус-векторы материальных точек являются функциями времени  $t$  и радиус-векторов в одной из отсчетных конфигураций. При этом можно использовать как конфигурацию, связанную с моментом времени  $t_0$ , так и с моментом  $t_1$ . Должны существовать функции:  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}_0)$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ .

Рассмотрим две близко расположенные точки в начальный момент времени  $t_0$ , их взаимное расположение определяет вектор  $\Delta\mathbf{x}_0$ . Считаем, что текущий момент времени  $t$  наступает после момента времени  $t_1$ . Изменения положения в пространстве двух близко расположенных точек определяются градиентами деформации  $\mathbf{F}_0$  и  $\mathbf{F}_1$ :

$$\Delta\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}_1 \Delta\mathbf{x}_0, \quad \Delta\mathbf{x} = \mathbf{F}_1 \Delta\mathbf{x}_1 = \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_0 \Delta\mathbf{x}_0, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{F}_1 = \partial\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1) / \partial\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{F}_0 = \partial\mathbf{x}_1(t_1, \mathbf{x}_0) / \partial\mathbf{x}_0$ . Это означает, что градиент деформации, связывающий текущее положение точек с их положением в отсчетный момент времени  $t_0$ , имеет вид  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_0$ . При этом градиент деформации  $\mathbf{F}_0$  не зависит от времени  $t$ , то есть его материальная производная по времени равна нулю:  $\dot{\mathbf{F}}_0 = 0$ .

Разность скоростей  $\Delta\mathbf{v}$  двух близко расположенных материальных точек сплошной среды может быть представлена через градиент скорости в текущей (актуальной) конфигурации с точностью до величин второго порядка малости:

$$\Delta\mathbf{v} = \text{grad } \mathbf{v} \Delta\mathbf{x} + \dots = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \Delta\mathbf{x} + \dots, \quad (3.4)$$

где  $\Delta\mathbf{x}$  – расстояние между близко расположенными точками в момент времени  $t$  в текущей конфигурации.

Далее будем рассматривать формулы в новой отсчетной конфигурации, соответствующей расположению материальных точек в момент времени  $t_1$ . Обозначим через  $\Delta\mathbf{x}$  вектор, соединяющий две близкие точки деформируемой среды в момент

времени  $t$ , отделенной от момента времени  $t_1$  на малый отрезок  $\Delta t = t - t_1$ . На основании формул (3.1), (3.3), (3.4) и определения градиента деформации имеем

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta \mathbf{v} \Delta t = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \Delta \mathbf{x}_0 \Delta t = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_0 \Delta \mathbf{x}_0 \Delta t, \quad (3.5)$$

где  $\Delta \mathbf{x}_0$  – вектор, соединяющий те же точки в исходной отсчетной конфигурации момент  $t_0$ . Применим полярное разложение к градиенту деформации  $\Delta \mathbf{F}_1 = \mathbf{V}_1 \mathbf{R}_1$ .

Для вычисления тензоров скорости деформации и вихря рассмотрим выражение:

$$(\Delta \mathbf{F}_1)^\bullet \Delta \mathbf{F}_1^{-1} = (\dot{\mathbf{V}}_1 \mathbf{R}_1 + \mathbf{V}_1 \dot{\mathbf{R}}_1) (\mathbf{V}_1 \mathbf{R}_1)^{-1}. \quad (3.6)$$

Устремляя  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем значения тензоров

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{V}_1 = \mathbf{I}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{R}_1 = \mathbf{I}. \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор. В предельном переходе выражение (3.6) примет вид:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{F}_1)^\bullet \Delta \mathbf{F}_1^{-1} = \dot{\mathbf{V}}_1 + \dot{\mathbf{R}}_1. \quad (3.8)$$

С учетом формулы (3.1) и инвариантности тензоров  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{W}$  относительно выбора отсчетной конфигурации приходим к выводу, что

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 = \dot{\mathbf{V}}_1, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}_1 = 0.5 (\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_1^T) = \dot{\mathbf{R}}_1. \quad (3.9)$$

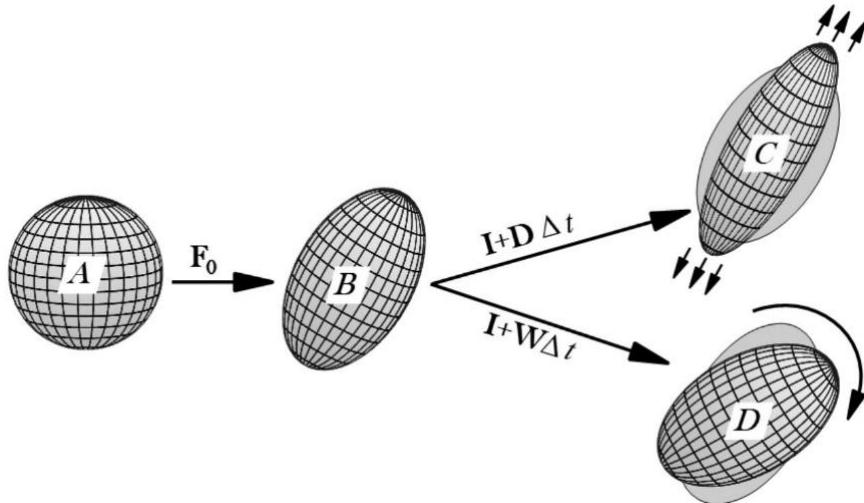
В формуле (3.9) учтено то, что тензор  $\dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_1^T$  является антисимметричным, и для малого интервала времени при  $\Delta t \rightarrow 0$ , выполняется равенство  $\mathbf{R}_1 \approx \mathbf{I}$ . Это означает антисимметричность тензора  $\mathbf{R}_1$ .

Полученный результат объясняет причину появления названия «тензор скоростей деформации» у оператора  $\mathbf{D}$ . Связано это с тем, что он является материальной производной по времени от тензора  $\mathbf{V}_1$ , который фиксирует изменение геометрии малых областей сплошной среды за интервал времени  $\Delta t$ . При этом изменение геометрии малых областей происходит в результате деформирования материала, а не его жесткого движения. В свою очередь, вращательное движение малых областей в данный момент времени характеризует тензор вихря  $\mathbf{W}$ . Если сплошная среда является идеальной или вязкой жидкостью, то к ней невозможно применить понятие деформации материала. Поэтому о вращательных движениях малых областей жидкости можно судить только с помощью тензора  $\mathbf{W}$ . Этот факт послужил основой для появления понятия «тензор вихря».

Иллюстрация изменений малой сферической области показана на рис. 5. В отсчетном состоянии выбираем малую сферическую область материала. Эта область отмечена на рисунке буквой  $A$ . Выбор области осуществляется в момент времени  $t_0$ . С помощью градиента деформации  $\mathbf{F}_0$  рассматриваемая сфера преобразуется в эллипсоид, отмеченный на рисунке буквой  $B$ . Эллипсоид представляет геометрию выбранной области в фиксированный момент времени  $t_1$ . Последующий за ним текущий момент времени  $t$  наступает далее через малый промежуток времени  $\Delta t$ . Отмеченные буквами  $C$  и  $D$  фигуры необходимы для иллюстрации особенностей перехода от геометрии выбранной области в момент времени  $t_1$  к геометрии в текущий момент времени  $t$ . Для сравнения за этими фигурами серым фоном показан контур области, который был в момент времени  $t_1$ .

Переход от геометрии в момент  $t_1$  к геометрии в момент времени  $t$  определяет градиент деформации  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{V}_1 \mathbf{R}_1$ . С учетом малости интервала времени  $\Delta t$  и равенств (3.9) имеем с точностью до величин второго порядка малости связь:  $\mathbf{F}_1 = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{V}_1 + \dot{\mathbf{V}}_1 \Delta t \right) \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{R}_1 + \dot{\mathbf{R}}_1 \Delta t \right) = (\mathbf{I} + \dot{\mathbf{V}}_1 \Delta t)(\mathbf{I} + \dot{\mathbf{R}}_1 \Delta t) = (\mathbf{I} + \mathbf{D}_1 \Delta t)(\mathbf{I} + \mathbf{W}_1 \Delta t)$ .

Буквой  $C$  на рис. 5 показана геометрия рассматриваемой области, которая получается при переходе фрагмента среды из состояния  $B$  в новое состояние с помощью оператора  $\mathbf{I} + \mathbf{D}\Delta t$ . Оператор  $\mathbf{D}\Delta t$  определяет изменение деформации за интервал времени  $\Delta t$ . В свою очередь, буквой  $D$  показана новая геометрия, которая получается при переходе из состояния  $B$  в новое состояние с помощью оператора  $\mathbf{I} + \mathbf{W}\Delta t$ . Оператор  $\mathbf{W}\Delta t$  определяет дополнительное вращение материала за интервал времени  $\Delta t$ .



**Рис. 5.** Изменение малого сферического объема сплошной среды. Показаны иллюстрации действия следующих операторов:  $\mathbf{F}_0$  – оператор, определяющий переход материала из отсчетного состояния в состояние, соответствующее моменту времени  $t_1$ ;  $\mathbf{I} + \mathbf{D}\Delta t$  – оператор, определяющий переход в новое деформированное состояние материала за малый интервал времени  $\Delta t$ ;  $\mathbf{I} + \mathbf{W}\Delta t$  – оператор, определяющий изменение положения области в результате поворота при переходе в новое состояние

#### 4. Тензор спина. Отличие от тензора вихря

Часто в формулах механики деформируемых сред используется тензор спина  $\mathbf{W}_R = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$  [7, 8]. Он возникает, когда вычисляется материальная производная от собственного вектора  $\mathbf{n}_i$  левого тензора растяжений  $\mathbf{V}$ . Используем для определения производной запись его с помощью тензора поворота  $\mathbf{R}$  и собственного вектора  $\mathbf{n}_i^0$  правого тензора растяжений  $\mathbf{U}$ . Выведем соответствующую формулу для скорости изменения вектора  $\mathbf{n}_i$ :

$$\dot{\mathbf{n}}_i = (\mathbf{R}\mathbf{n}_i^0)^\bullet = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{n}_i^0 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{n}}_i^0. \quad (4.0)$$

Учтем, что обратный тензор  $\mathbf{R}^{-1}$  к тензору поворота равен транспонированному  $\mathbf{R}^T$ :

$$\dot{\mathbf{n}}_i = (\mathbf{R}\mathbf{n}_i^0)^\bullet = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^T\mathbf{R})\mathbf{n}_i^0 + \mathbf{R}\dot{\mathbf{n}}_i^0 = (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)\mathbf{n}_i + \mathbf{R}\dot{\mathbf{n}}_i^0 = \mathbf{W}_R\mathbf{n}_i + \mathbf{R}\dot{\mathbf{n}}_i^0. \quad (4.1)$$

Таким образом, приходим к выводу, что имеются две причины изменения направления собственного вектора левого тензора растяжения  $\mathbf{n}_i$ . Это его вращение в результате поворота (слагаемое  $\mathbf{W}_R \mathbf{n}_i$  в формуле (4.1)) и изменение направления деформирования материала (слагаемое  $\mathbf{R} \dot{\mathbf{n}}_i^0$ ), которое определяется в отсчетной конфигурации правым тензором растяжений  $\mathbf{U}$ .

Важно отметить еще одну особенность. Снова рассмотрим новую отсчетную конфигурацию, которая определяется в момент времени  $t_1$  с помощью радиус-векторов материальных точек континуума  $\mathbf{x}_1$ . Поворот среды, который отражается с помощью тензора спина, можно представить последовательностью двух поворотов. Учитывается это формулой:  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_0$ , где  $\mathbf{R}_1$  – тензор спина, учитывающий поворот малой области материала за интервал времени от  $t_1$  до  $t$ ;  $\mathbf{R}_0$  – тензор спина, учитывающий поворот малой области материала за интервал времени от  $t_0$  до  $t_1$ . При этом тензор  $\mathbf{R}_1$  является функцией текущего момента времени  $t$  и радиус-вектора центра выбранной области в отсчетном состоянии  $\mathbf{x}_0$ . В свою очередь, тензор  $\mathbf{R}_0$  является функцией момента времени  $t_1$  и радиус-вектора центра выбранной области в отсчетном состоянии  $\mathbf{x}_0$ :

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1(t, \mathbf{x}_0), \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0(t_1, \mathbf{x}_0). \quad (4.2)$$

Поэтому материальная производная от тензора  $\mathbf{R}_0$  по времени равна нулю:  $\dot{\mathbf{R}}_0 = 0$ . Это означает выполнение равенства:

$$\mathbf{W}_R = (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_0)^\bullet (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_0)^T = (\dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_0) (\mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_1^T) = \dot{\mathbf{R}}_1 \mathbf{R}_1^T = \mathbf{W}_R^1. \quad (4.3)$$

Следовательно, тензор спина  $\mathbf{W}_R$ , так же, как и тензор скоростей деформации  $\mathbf{D}$  и тензор вихря  $\mathbf{W}$ , не зависит от выбора отсчетной конфигурации. В этом их отличие от тензоров, определяющих деформации материала. Левый  $\mathbf{V}$  и правый  $\mathbf{U}$  тензоры растяжений, левый  $\mathbf{B}$  и правый  $\mathbf{C}$  тензоры растяжений Коши–Грина [1–8] определяют искажение геометрии фрагментов сплошной среды относительно начального состояния.

Однако при моделировании упругопластических и вязко-упругопластических сред отсчет для упругих деформаций выполняется относительно конфигурации с накопленными пластическими деформациями. То есть, речь идет о конфигурации, изменяющейся во времени. В этом случае тензор поворота  $\mathbf{R}_{pl}$  в полярном разложении градиента пластических деформаций зависит от времени. Поэтому тензор пластического спина:  $\mathbf{W}_R^{pl} = \dot{\mathbf{R}}_{pl} \mathbf{R}_{pl}^T$  может отличаться от тензора спина  $\mathbf{W}_R$ .

Два тензора дают информацию об особенностях вращений сплошной среды – это тензор вихря  $\mathbf{W}$  и тензор спина  $\mathbf{W}_R$ . Связь между тензором задается формулой [1–3, 7]:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_R + \Delta \mathbf{W}, \quad (4.4)$$

где в качестве удобства обозначения принимается  $\Delta \mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{R} (\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}}) \mathbf{R}^T$ .

Приведенное соотношение (4.4) позволило показать существенное отличие между тензором вихря  $\mathbf{W}_R$  и тензором спина  $\mathbf{W}$ . Для лучшего понимания связи между этими тензорными величинами следует установить, в каких случаях тензоры совпадают. Происходит это в условиях, когда выполняются равенства:  $\dot{\mathbf{n}}_1^0 = \dot{\mathbf{n}}_2^0 = \dot{\mathbf{n}}_3^0 = 0$ . Это значит,

что собственные векторы правого тензора растяжений  $\mathbf{U}$  остаются неизменными. Меняются только собственные значения этого тензора. Используем представление правого тензора растяжений через собственные векторы и собственные значения. В рассматриваемом случае выполняется равенство:

$$\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}} = \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i^0 \otimes \mathbf{n}_i^0 \right) \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i^0 \otimes \mathbf{n}_i^0 \right)^{-1} - \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i^0 \otimes \mathbf{n}_i^0 \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i^0 \otimes \mathbf{n}_i^0 \right) = 0. \quad (4.5)$$

Поэтому формула (4.4) превращается в связь  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_R$ . В такой ситуации указанные тензоры определяют скорость вращения точек материала при жестком движении сплошной среды.

Как было отмечено ранее, согласно формуле (4.4), тензор вихря  $\mathbf{W}$  является суммой двух слагаемых, имеющих разный физический смысл. Одно слагаемое отражает особенности жесткого вращения малых фрагментов сплошной среды (тензор  $\mathbf{W}_R$ ). Второе слагаемое учитывает появление вращения в результате деформирования материала (тензор  $\Delta\mathbf{W}$ ). Возникает деформационное вращение в случае изменения во времени направлений собственных векторов  $\mathbf{n}_1^0, \mathbf{n}_2^0, \mathbf{n}_3^0$  правого тензора растяжений  $\mathbf{U}$ .

Далее рассмотрим примеры вращательного движения малой области, выделенной в материале, с помощью иллюстраций. Обратимся к деформированию образца в условиях простого сдвига. Использованы расчеты для значения параметра  $\gamma = 1.5$  (рис. 3, б) и его материальной производной по времени  $\dot{\gamma}\Delta t = 1.5$ . Рассматривается малая сфера, множество точек, поверхности которой пробегает вектор  $\Delta\mathbf{x}_*$ , выходящий из центра сферы и имеющий длину  $R$ . Выделение сферы осуществлено в уже деформированном состоянии в момент времени  $t_1$ . На рис. 6 показана иллюстрация действия тензора вихря  $\mathbf{W}$  и тензора спина  $\mathbf{W}_R$ . Из точек поверхности сферы отложены векторы  $\mathbf{s}$  согласно следующим формулам. Для иллюстраций действия тензора спина  $\mathbf{W}_R$  (рис. 6, а) и тензора вихря  $\mathbf{W}$  (рис. 6, б) использованы формулы:

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}_R \Delta t \Delta\mathbf{x}_* / R, \quad \mathbf{s} = \mathbf{W} \Delta t \Delta\mathbf{x}_* / R. \quad (4.6)$$

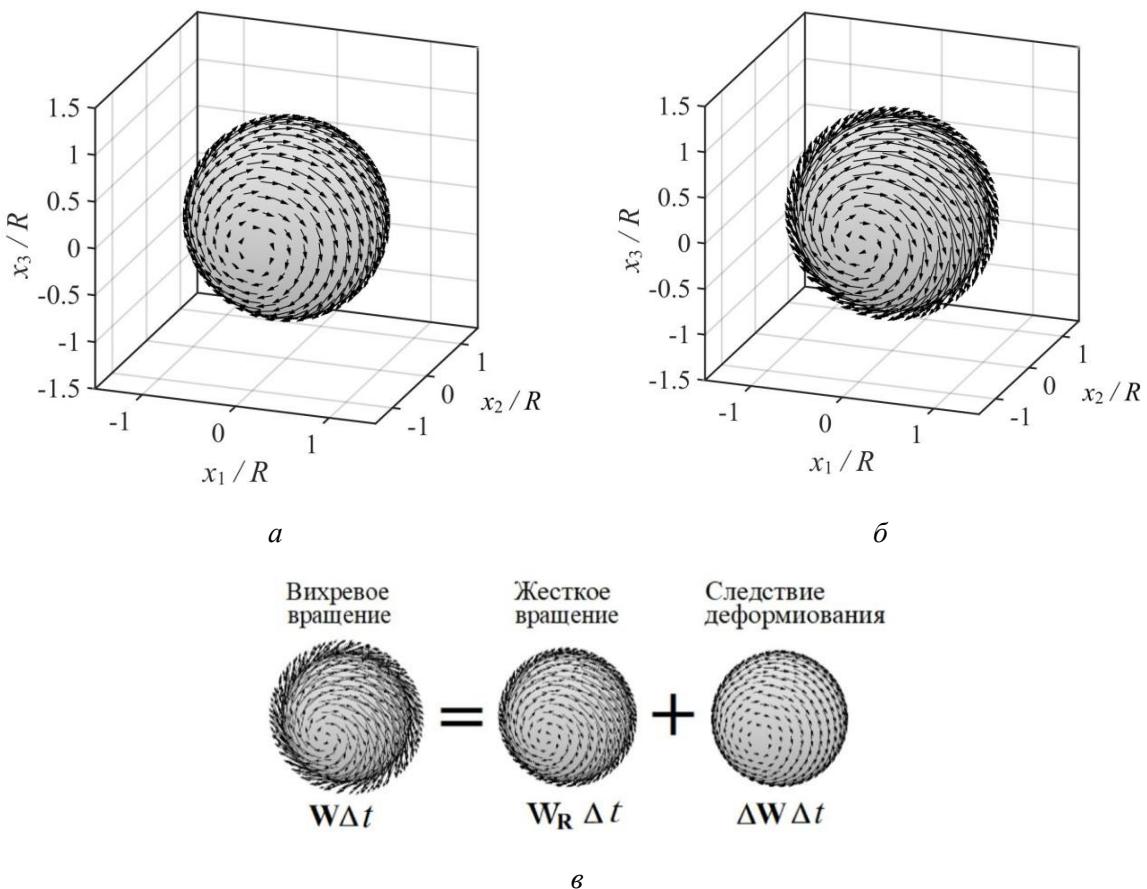
Пример представления тензора вихря  $\mathbf{W}$  в виде суммы тензоров вращательного жесткого движения (тензор  $\mathbf{W}_R$ ) и деформационного вращения (тензор  $\Delta\mathbf{W}$ ) показан на рис. 6, в. Все векторы  $\mathbf{s}$  располагаются в плоскости, перпендикулярной второй оси, обозначенной на рис. 3, б. При этом, как нетрудно доказать, векторы  $\mathbf{s}$  всегда перпендикулярны векторам  $\Delta\mathbf{x}_*$ . Следует это из антисимметричности тензоров  $\mathbf{W}$  и  $\Delta\mathbf{W}$  и правил тензорной алгебры:

$$\Delta\mathbf{x}_* \cdot \mathbf{W} \Delta\mathbf{x}_* = \mathbf{W}^T \Delta\mathbf{x}_* \cdot \Delta\mathbf{x}_* = -\mathbf{W} \Delta\mathbf{x}_* \cdot \Delta\mathbf{x}_*, \quad (4.7)$$

то есть  $\Delta\mathbf{x}_* \cdot \mathbf{W} \Delta\mathbf{x}_* = -\Delta\mathbf{x}_* \cdot \mathbf{W} \Delta\mathbf{x}_*$ . А это возможно только при условии

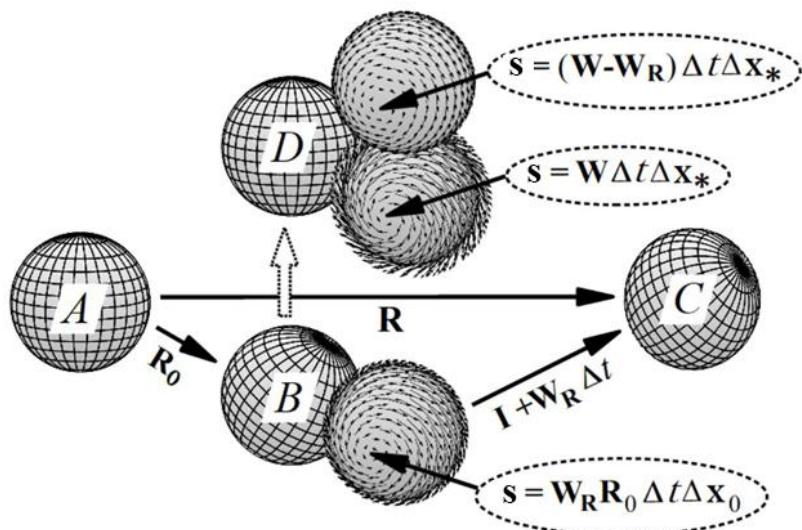
$$\Delta\mathbf{x}_* \cdot \mathbf{W} \Delta\mathbf{x}_* = 0. \quad (4.8)$$

Аналогично доказывается ортогональность и при рассмотрении случая использования тензора  $\mathbf{W}_R$ .



**Рис. 6.** Иллюстрация отличия тензоров  $\mathbf{W}_R$  и  $\mathbf{W}$  в условиях простого сдвига с помощью векторов  $\mathbf{s}$ , начала которых расположены на сферической поверхности. Для вычисления вектора  $\mathbf{s}$  применяются формулы: а)  $\mathbf{s} = \mathbf{W}_R\Delta t \Delta \mathbf{x}_*/R$  и б)  $\mathbf{s} = \mathbf{W}\Delta t \Delta \mathbf{x}_*/R$ . Схематичное изображение каждого из тензоров, использованных для вычисления векторов (рис. 6)

Более подробные пояснения даются на рис. 7. В начальный момент времени  $t_0$  выбрана область в виде малой сферы в материале. Положение точек ее поверхности относительно центра сферы определяет радиус-вектор  $\Delta\mathbf{x}_0$ . На сферу нанесены меридианы и параллели, чтобы фиксировать ее ориентацию в пространстве. В начальном состоянии положение сферы отмечено на рисунке символом  $A$ . С помощью оператора  $\mathbf{R}_0$  происходит поворот векторов  $\Delta\mathbf{x}_0$ . На рисунке это положение сферы, отмеченное символом  $B$ . Дальнейший поворот за малый интервал времени  $\Delta t$  осуществляется оператором  $\mathbf{I} + \mathbf{W}_R\Delta t$ . Все указанные повороты иллюстрируют последовательность формирования тензора  $\mathbf{R}$ , который входит в полярное разложение градиента деформации  $\mathbf{F}$ , то есть  $\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_R\Delta t)\mathbf{R}_0$ .



**Рис. 7. Иллюстрация поворотов малой сферической области материала в условиях простого сдвига.** При жестком движении осуществляется переход от состояния  $A$  к состоянию  $B$  и далее к  $C$ . Для иллюстрации вихревого вращения необходимо использовать другую сферу, которая выделяется в уже деформированном материале (состояние  $D$ ). Операторы, которые были использованы для вычисления векторов, подписаны около соответствующих изображений.

*Подробности в тексте*

Для иллюстрации действия оператора вихря  $W$  нужно использовать другую сферу. Она выделяется в уже деформированном материале в момент времени  $t_1$ . Это состояние отмечено на рисунке символом  $D$ . Чтобы стало понятно, что мы используем другую область, на ней нанесены другие параллели и меридианы. Радиус-вектор, определяющий поверхность сферы, обозначен символом  $\Delta x_*$ . Иллюстрация векторов, характеризующих скорости вращений, представлена набором стрелок. Для вычисления этих векторов использованы формулы, приведенные рядом с соответствующими изображениями.

Рассмотренная задача о простом сдвиге и приведенные иллюстрации могут служить полезным дополнением к формулам при объяснении физического смысла тензорных величин, используемых в механике сплошной среды.

## Выводы

В настоящей статье рассмотрена классическая задача простого сдвига – одно из ключевых напряженно-деформированных состояний, позволяющее наглядно продемонстрировать особенности поведения сплошной среды при конечных деформациях. Предложено пользоваться представлениями о тензорах, как об операторах (операторная школа тензорного исчисления) и раскрывать физический смысл тензоров на примерах преобразования малой сферической области материала, а также с помощью специально выбранных векторов на ее поверхности. Приведены примеры действия тензоров градиента деформации, поворота и растяжения. Компьютерные иллюстрации наглядно показывают интересное поведение материала. Испытательная установка стоит неподвижно. Образец деформируется без поворотов. Но все области материала образца испытывают вращение как абсолютно твердое тело.

При рассмотрении на примере процесса вращения малых областей материала в условиях простого сдвига выясняется физический смысл понятий «тензор скоростей деформации» и «тензор вихря». Компьютерные изображения позволяют продемонстрировать отличие тензора вихря от тензора спина. Тензор вихря указывает на

сумму скоростей вращения как абсолютно твердого тела и вращения, вызванного деформациями. Приведенные в статье иллюстрации представляют интерес для исследователей, изучающих нелинейную механику материалов. Их можно эффективно использовать в учебном процессе для наглядного объяснения и лучшего понимания задач математического моделирования поведения деформируемых сред.

### Список источников

1. *Truesdell K.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред; пер. с англ. под ред. А. И. Лурье. М.: Мир, 1975. 592 с.
2. *Truesdell C.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics / C. Truesdell, W. Noll. 3rd ed. Berlin; Heidelberg: Springer, 2004. 602 p.
3. *Gurtin M. E.* The Mechanics and Thermodynamics of Continua / M. E. Gurtin, E. Fried, L. Anand. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 696 p.
4. *Свистков А. Л.* Термодинамика сплошной среды. Операторная школа тензорного исчисления: учеб. пособие; Пермский государственный национальный исследовательский университет. Электрон. дан. Пермь, 2021. 88 с. URL: <https://elis.psu.ru/node/642495?fragment=page-3&language=ru> (дата обращения: 30.09.2025).
5. *Bechtel S. E.* Fundamentals of Continuum Mechanics: with Applications to Mechanical, Thermomechanical, and Smart Materials / S. E. Bechtel, R. L. Lowe. Amsterdam; Boston: Academic Press, 2015. 330 p.
6. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
7. *Роговой А. А.* Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Ч. 1: Основные соотношения механики сплошных сред. 2-е изд. М.: Изд-во ИКИ, 2021. 288 с.
8. *Роговой А. А.* Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Ч. 2: Упругие и термо-упруго-неупругие процессы при конечных деформациях. 2-е изд. М.: Изд-во ИКИ, 2023. 318 с.

### References

1. Truesdell, K. (1975), *A first course in rational continuum mechanics*. Translated from English by A.I. Lurie, Mir, Moscow, Russia, 592 p.
2. Truesdell, C. and Noll, W. (2004), *The non-linear field theories of mechanics*. 3rd ed. Springer, Berlin, Germany, 602 p.
3. Gurtin, M.E., Fried, E. and Anand, L. (2010), *The mechanics and thermodynamics of continua*, Cambridge University Press, Cambridge, 696 p.
4. Svistkov, A.L. (2021), *Continuum thermodynamics. Operator school of tensor calculus* [online], Perm State National Research University, Perm, Russia, 88 p.
5. Bechtel, S.E. and Lowe, R.L. (2015), *Fundamentals of continuum mechanics: with applications to mechanical, thermomechanical, and smart materials*, Academic Press, Amsterdam, 330 p.
6. Lurie, A.I. (1980), *Nonlinear theory of elasticity*, Nauka, Moscow, Russia, 512 p.
7. Rogovoy, A. A. (2021), *A formalized approach to constructing models of deformable solid mechanics. Part 1: Fundamental relations of continuum mechanics*, 2nd ed., IKI Publishing House, Moscow, Russia, 288 p.
8. Rogovoy, A. A. (2023), *A formalized approach to constructing models of deformable solid mechanics. Part 2: Elastic and thermo-elasto-inelastic processes under finite deformations*. 2nd ed., IKI Publishing House, Moscow, Russia, 318 p.

**Информация об авторах:**

К. А. Мохирева – младший научный сотрудник лаборатории микромеханики структурно-неоднородных сред Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1), AuthorID: 882444;

А. Л. Свистков – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией микромеханики структурно-неоднородных сред Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1), AuthorID: 3604.

**Information about the authors:**

K. A. Mokhireva – junior researcher of the laboratory of Micromechanics of structurally inhomogeneous media, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), AuthorID: 882444;

A. L. Svistkov – Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Head of the laboratory of Micromechanics of structurally inhomogeneous media, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), AuthorID: 3604.

Научная статья

УДК 539.42

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-46-59

<https://elibrary.ru/zyobkk>



## Моделирование зависимости характера разрушения образца от коэффициента жесткости напряженного состояния у вершины трещины

Леонид Александрович Прокопьев<sup>1</sup>, Екатерина Михайловна Максимова<sup>2</sup>,  
Яков Михайлович Андреев<sup>3</sup>, Евгений Саввич Лукин<sup>4</sup>, Семен Осипович Семенов<sup>5</sup>

<sup>1,2,3,4,5</sup>Федеральный исследовательский центр «Якутский научный центр СО РАН»,

Якутск, Россия

<sup>1</sup>[l.prokopyev@yandex.ru](mailto:l.prokopyev@yandex.ru)

<sup>2</sup>[maksimova\\_em85@mail.ru](mailto:maksimova_em85@mail.ru)

<sup>3</sup>[yakovmich@yandex.ru](mailto:yakovmich@yandex.ru)

<sup>4</sup>[lukines@iptpn.ysn.ru](mailto:lukines@iptpn.ysn.ru)

<sup>5</sup>[semens1993@mail.ru](mailto:semens1993@mail.ru)

**Аннотация.** В работе предложен алгоритм расчета распределения коэффициента жесткости вдоль фронта трещины. В работе представлен междисциплинарный подход к анализу процессов разрушения, сочетающий расчетные методы механики разрушения с традиционным материаловедческим анализом микроструктуры. Предложена новая методика оценки склонности материала к хрупкому или вязкому разрушению, основанная на введении и анализе коэффициента жесткости напряженного состояния, распределенного вдоль фронта трещины. Разработан алгоритм численного расчета данного параметра, что позволило установить его взаимосвязь с Т-напряжениями и радиусом зоны пластичности. Установлено, что при малом радиусе зоны пластичности и около-нулевых значениях Т-напряжений наблюдается повышение склонности к хрупкому разрушению, в то время как увеличенные значения этих параметров способствуют формированию «мягкого» напряженного состояния и переходу к вязкому характеру разрушения. Полученные результаты позволяют восполнить существующий методический разрыв между фрактографическим анализом и количественными методами механики разрушения и могут быть использованы при прогнозировании характера разрушения конструкционных материалов.

**Ключевые слова:** стеснение деформации; коэффициент жесткости напряженного состояния; Т-напряжения; напряженно-деформированное состояние; коэффициент интенсивности напряжений.

**Для цитирования:** Прокопьев Л. А., Максимова Е. М., Андреев Я. М., Лукин Е. С., Семенов С. О. Моделирование зависимости характера разрушения образца от коэффициента жесткости напряженного состояния. Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. № 4(71). С. 46-59.



© 2025 Прокопьев Л. А., Максимова Е. М., Андреев Я. М., Лукин Е. С., Семенов С. О. Лицензировано по СС BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

сти напряженного состояния у вершины трещины // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 4(71). С. 46–59. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-46-59. <https://elibrary.ru/zyobkk>.

*Статья поступила в редакцию 30.09.2025; одобрена после рецензирования 28.10.2025; принята к публикации 08.12.2025.*

Research article

## **Modeling of the Fracture Behavior Sample Dependence on the Stress State Stiffness Coefficient at the Crack Tip**

**Leonid A. Prokopyev<sup>1</sup>, Ekaterina M. Maksimova<sup>2</sup>, Yakov M. Andreev<sup>3</sup>,  
Evgeny S. Lukin<sup>4</sup>, Semen O. Semenov<sup>5</sup>**

<sup>1,2,3,4,5</sup>Federal Research Center "Yakut Scientific Center SB RAS", Yakutsk, Russia

<sup>1</sup>l.prokopyev@yandex.ru

<sup>2</sup>maksimova\_em85@mail.ru

<sup>3</sup>yakovmich@yandex.ru

<sup>4</sup>lukines@iptpn.ysn.ru

<sup>5</sup>semens1993@mail.ru

**Abstract.** This paper presents an interdisciplinary approach to fracture analysis, combining computational methods of fracture mechanics with traditional materials science analysis of microstructure. A new method for assessing a material's susceptibility to brittle or ductile fracture is proposed, based on the introduction and analysis of a stress stiffness coefficient distributed along the crack front. An algorithm for numerically calculating this parameter has been developed, which enables establishing its relationship with T-stresses and the radius of the plastic zone. It has been found that with a small plastic zone radius and near-zero T-stresses, there is an increased susceptibility to brittle fracture, whereas higher values of these parameters lead to the formation of a "softer" stress state and a transition to a ductile fracture mode. The obtained results help bridge the existing methodological gap between fractographic analysis and quantitative methods of fracture mechanics and can be utilized to predict the fracture behavior of structural materials.

**Keywords:** constraint effect; stress triaxiality; T-stress; stress-strain state; stress intensity factor.

**For citation:** Prokopyev, L. A., Maksimova, E. M., Andreev, Ya. M., Lukin, E. S. and Semenov, S. O. (2025) "Modeling of the Fracture Behavior Sample Dependence on the Stress State Stiffness Coefficient at the Crack Tip", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 4(71), pp. 46–59, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-46-59, <https://elibrary.ru/zyobkk>.

*The article was submitted 30.09.2025; approved after reviewing 28.10.2025; accepted for publication 08.12.2025.*

### **Введение**

Механика разрушения конструкционных материалов прошла значительный путь развития – от классических энергетических концепций к современным численным моделям, учитывающим сложное деформированное состояние в окрестности дефектов.

Развитие механики разрушения как самостоятельной научной дисциплины началось в середине XX века с работ, направленных на описание критических условий роста трещин в твердых телах. Одним из основополагающих этапов стало формулирование принципов линейной механики разрушения, в рамках которой были введены такие ключевые параметры, как энергетический критерий Гриффитса [1], коэффициент интенсив-

ности напряжений К [2]. Применение механики разрушения вошло в инженерную практику оценок трещиностойкости объекта под нагрузкой. Развитие нелинейной механики разрушения было основано на применении J-интеграла. В дальнейшем развитие получила нелинейная механика разрушения, включающая J-интеграл с целью исследования свойств концентрации пластических деформаций в окрестности вершины трещины [3, 4] и концепцию стеснения деформации, существенно влияющую на устойчивость материала к трещине [3].

Важным направлением в изучении предельных состояний материалов является разработка критериев разрушения, учитывающих жесткость напряженно-деформированного состояния. При этом для описания как хрупкого, так и вязкого разрушения эффективно используются критерии на основе напряжений. Хрупкое разрушение традиционно связывают с достижением критического нормального напряжения, в то время как вязкое (пластическое) разрушение, включающее стадию значительной пластической деформации, также может быть адекватно описано критерием на основе напряжений [5–7]. Это обусловлено тем, что дислокационные процессы, происходящие в зоне предразрушения, предшествующие квазихрупкому разрушению, зависят от локального напряженного состояния, в частности, от уровня гидростатического напряжения и интенсивности касательных напряжений.

Однако с течением времени стало очевидно, что однопараметрические модели не всегда адекватно отражают реальное поведение материалов, особенно при сложных схемах нагружения и геометрии трещины. Это стимулировало развитие двухпараметрических подходов, учитывающих помимо К или J, также несингулярные компоненты напряженного состояния, в частности Т-напряжение и параметры трехосного стеснения, такие как Q-параметр, параметр трехосности  $h$  [8–11].

На современном этапе активно развиваются направления, связанные с анализом пространственного распределения напряженного состояния вблизи фронта трещины, особенно в трехмерной постановке. В этом контексте особый интерес представляет коэффициент жесткости напряженного состояния, отражающий локальную реакцию материала на внешние воздействия и зависящий от параметров НДС.

Коэффициент жесткости напряженного состояния  $\Pi$  у вершины трещины представляет собой важную характеристику, отражающую соотношение между компонентами напряжений и определяющую тип локального деформирования – от плоского напряженного состояния до объемного. Исследования показывают, что распределение коэффициента жесткости вдоль фронта трещины может существенно влиять на характер разрушения – от хрупкого до вязкого. В работе [12] показано, что уровень локальной триаксиальности напряжений (например, через Т-напряжение, Q-параметр и другие характеристики) определяет, насколько материал склонен к хрупкому разрушению при наличии трещины.

Установлено, что при высоком стеснении (например, в толстых телах или при биаксиальном нагружении) снижается способность материала к пластической релаксации, и разрушение происходит более хрупко [13, 14].

Современные исследования демонстрируют перспективность использования данного параметра для описания вязко-хрупкого перехода [15–17].

Таким образом, изучение влияния коэффициента жесткости напряженного состояния на характер разрушения представляет собой актуальное научное направление, способствующее более точному описанию предельных состояний и надежности конструкционных материалов. Это особенно важно в контексте проектирования элементов, работающих в условиях сложного нагружения, где локальное поведение материала может существенно отличаться от среднестатистических характеристик.

Несмотря на значительное количество исследований, направленных на изучение влияния коэффициента интенсивности напряжений,  $J$ -интеграла и других параметров, вопрос о роли жесткости НДС в формировании траектории, скорости и формы зоны разрушения остается недостаточно раскрытым.

Однако, несмотря на значительный теоретический прогресс, остается недостаточно изученным количественное влияние схемы нагружения на распределение параметра  $P$  в окрестности вершины трещины и его связь с критическими условиями хрупкого разрушения при низких температурах.

Актуальность данной работы также обусловлена необходимостью более глубокого понимания взаимосвязи между локальными механическими условиями и макроскопическим сценарием разрушения, что имеет большое значение при проектировании конструкций, работающих в условиях сложного нагружения, в том числе динамического, циклического и ударного характера.

Таким образом, целью настоящей работы является разработка алгоритма оценки распределения коэффициента жесткости вдоль фронта трещины и в формировании подхода к прогнозированию характера разрушения материала на основе параметров напряженного состояния, включая радиус зоны пластичности и значения  $T$ -напряжений.

### **Критерий вязко-хрупкого перехода на основе распределения коэффициента жесткости**

Предлагаемый в настоящей работе критерий вязко-хрупкого перехода основан на анализе распределения коэффициента жесткости  $P$  вдоль фронта трещины. При этом расчет проводится в точке, соответствующей границе зоны пластичности вдоль линии продолжения трещины. Таким образом, формулируется следующая гипотеза: высокие значения коэффициента жесткости напряженного состояния  $P$  в зоне предразрушения вблизи границы пластической области обуславливают преобладание механизма хрупкого разрушения, характеризующегося зарождением и развитием микродефектов с образованием микротрещин. В данном случае распространение магистральной трещины происходит посредством слияния предсуществующих микротрещин. Напротив, при низких значениях параметра  $P$  в указанной зоне доминируют пластические механизмы деформирования, связанные с генерацией и движением дислокаций. Это приводит к реализации вязкого механизма распространения трещины, сопровождающегося образованием зоны пластичности у вершины трещины. Данная гипотеза основана на положении о том, что параметр жесткости напряженного состояния  $P$  является ключевым фактором, определяющим конкуренцию между хрупкими и вязкими механизмами разрушения в зоне предразрушения. Высокие значения  $P$  благоприятствуют локализации деформации и реализации механизмов хрупкого отрыва, в то время как низкие значения  $P$  способствуют активации дислокационных механизмов и развитию пластической деформации.

Для описания жесткости схемы напряженного состояния применяют различные показатели. Один из таких параметров, коэффициент жесткости  $P$ , является безразмерной величиной, характеризующей "трехосность" напряженного состояния. Его физическая интерпретация может быть дана через анализ условий пластичности. Согласно критерию Мизеса, пластическое течение начинается при достижении интенсивностью напряжений некоторого критического значения. Однако наличие гидростатической компоненты существенно влияет на процесс разрушения.

В работе [18] приводится коэффициент жесткости  $P$ , описываемый формулой (1):

$$P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i} , \quad (1)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – компоненты главных напряжений,  $\sigma_i$  – интенсивность напряженного состояния (2):

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{2} + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2} + \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}. \quad (2)$$

В механике разрушения точное описание полей напряжений в окрестности вершины трещины позволяет представить поля напряжений в виде ряда, где каждый последующий член уточняет описание на больших расстояниях от вершины трещины. Для применения формулы (1) необходимо выразить компоненты тензора напряжений и, соответственно, главные напряжения через параметры этого разложения. Считается [19, 20], что первые два члена ряда в большинстве задач исследования поля напряжений у вершины трещины достаточны. Поле напряжений в окрестности вершины трещины с учетом двух членов ряда в случае трещины нормального отрыва описывается уравнениями (3).

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + T_x \\ \sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases}, \quad (3)$$

где  $T_x$  – Т-напряжения, являющиеся первым несингулярным членом разложения [21].

Для анализа коэффициента жесткости  $\Pi$  на линии продолжения трещины  $\theta = 0$  уравнения (3) упрощаются:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} + T_x \\ \sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Компонента  $\sigma_z$  в зависимости от типа напряженного состояния (для плоского напряженного состояния, ПНС; и для плоского деформированного состояния, ПДС) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sigma_z = 0 \text{ для ПНС} \\ \sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) = \mu \left( \frac{2K_1}{\sqrt{2\pi r}} + T_x \right) \text{ для ПДС} \end{cases}. \quad (5)$$

Поскольку, согласно вышеописанной гипотезе, коэффициент жесткости необходимо рассчитать на границе зоны пластичности, перепишем уравнения (4) в терминах главных напряжений на расстоянии  $r_p$ . На линии продолжения трещины ( $\theta = 0$ ) касательные напряжения равны нулю, следовательно, компоненты  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  совпадают с главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

В случае положительных Т-напряжений получаем:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r_p}} + T_x \\ \sigma_2 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r_p}} \\ \sigma_3 = \mu \left( \frac{2K_1}{\sqrt{2\pi r_p}} + T_x \right) \text{ для ПДС, и } \sigma_3 = 0 \text{ для ПНС} \end{cases}. \quad (6)$$

Если уравнения (6) подставить в (1) и упростить, используя следующую замену:

$$T^* = T_x \sqrt{2\pi r_p}, \quad (7)$$

получим следующие выражения для коэффициента жесткости:

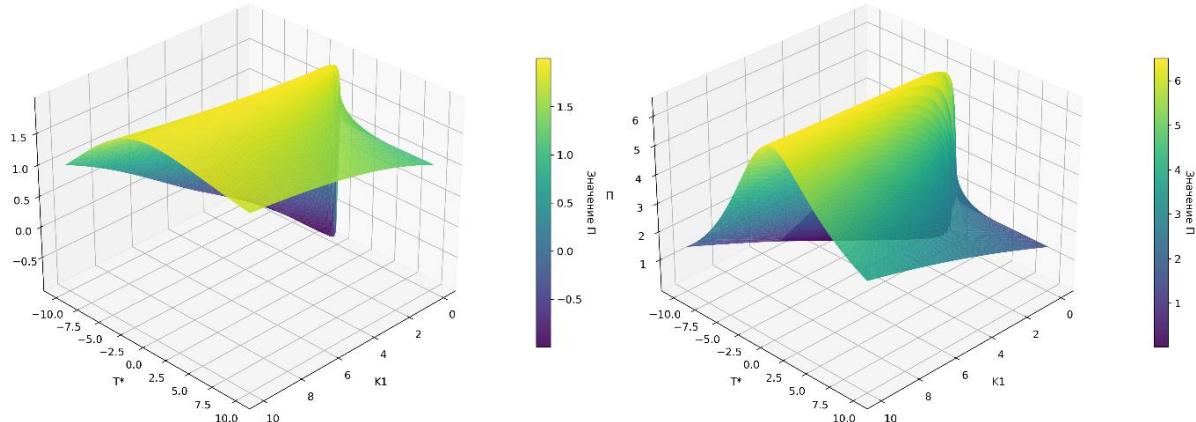
Для случая ПНС:

$$\Pi = \frac{2K_1 + T^*}{\sqrt{K_1^2 + K_1 T^* + T^{*2}}}. \quad (8)$$

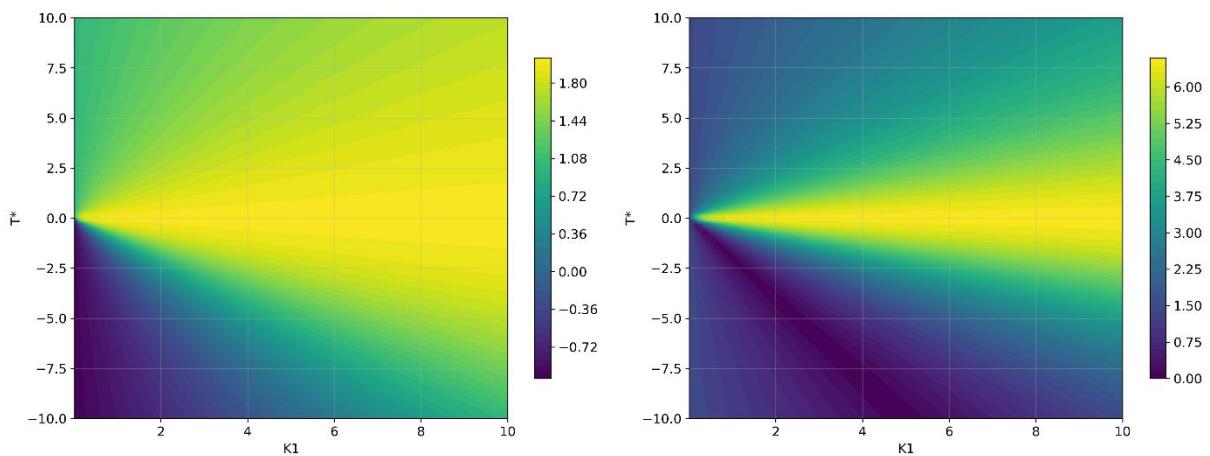
Для случая ПДС:

$$\Pi = \frac{1+\mu}{\sqrt{1+\mu(\mu-1) - \frac{3K_1(K_1+T^*)}{(2K_1+T^*)^2}}}. \quad (9)$$

Результаты расчетов по уравнениям (8) и (9) представлены в виде трехмерных поверхностей (рис. 1) и в виде полей коэффициента жесткости на контурных диаграммах (рис. 2). На рисунках показаны случаи плоского напряженного состояния (слева), описываемые уравнением (8), и плоской деформации (справа), описываемые уравнением (9).



**Рис. 1.** Трехмерное представление зависимости коэффициента жесткости  $\Pi$  от параметров напряженного состояния: слева – расчет для ПНС; справа – для ПДС



**Рис. 2.** Поле коэффициента жесткости напряженного состояния: слева – для ПНС, справа – для ПДС

Из рисунков 1 и 2 видно, что напряженное состояние с максимальными значениями коэффициента жесткости соответствуют линии  $T^* = 0$ , особенно для случая плоской деформации. Это может означать, что малый радиус зоны пластичности с одновременно около-нулевыми значениями Т-напряжений, действующих в условиях плоской деформации, может существенно повысить склонность материала хрупкому разрушению. И, напротив, больший радиус зоны пластичности и большие значения Т-напряжений, особенно в сторону отрицательных значений, обуславливают "мягкое" напряженное состояние, при котором наиболее вероятно вязкое разрушение.

В уравнениях (5) и (6) одним из переменных является радиус зоны пластичности  $r_p$ . Размеры пластической зоны на линии продолжения трещины ( $\theta = 0$ ) по условиям текучести Мизеса представлены в следующем виде [22]:

Для плоского напряженного состояния:

$$r_p = \frac{K_1^2}{2\pi\sigma_T^2}. \quad (10)$$

Для случая плоской деформации:

$$r_p = \frac{K_1^2}{18\pi\sigma_T^2}. \quad (11)$$

Подставив выражения (10) и (11) в уравнения (6), (7), и в конечном итоге в (1), получим возможность численного расчета коэффициента жесткости  $\Pi$  на конкретном примере. В качестве примера выбран образец на трехточечный изгиб. Реализация расчетов  $\Pi$  выполнена с помощью методов компьютерного программирования.

Коэффициенты интенсивности напряжений  $K_1$  и Т-напряжения рассчитывались на основе табличных данных для схемы трехточечного изгиба, представленной на рис. 3, полученных методом применения функции Грина [23].

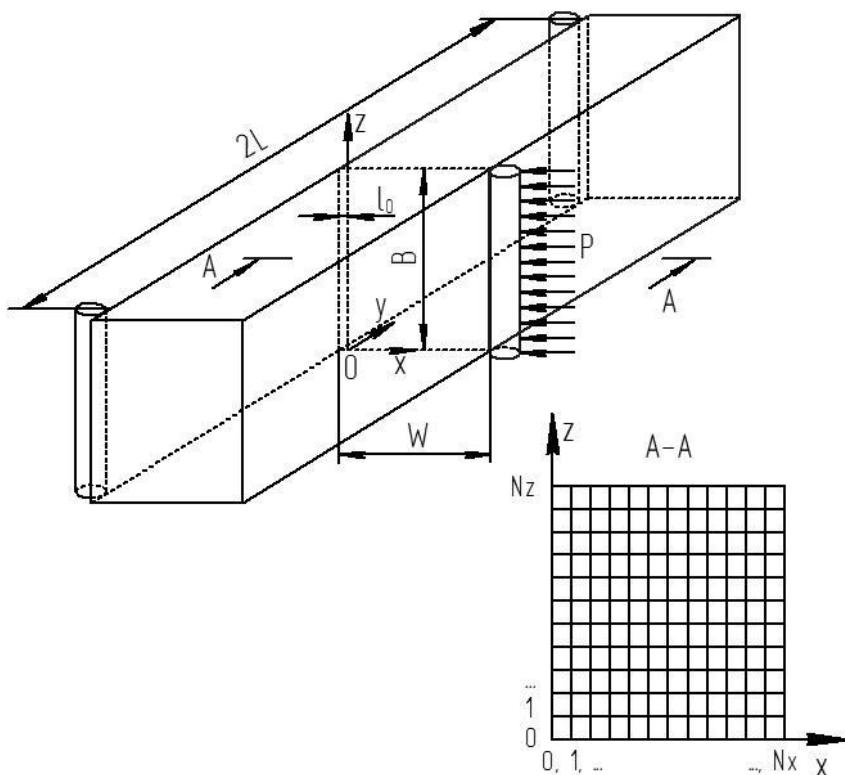


Рис. 3. Вид, размеры и схема разбиения сечения образца на расчетные элементы

Как видно из рис. 3, начало координат находится на вершине начальной трещины длиной  $l_0$ . Ширина образца по оси z – B, расстояние между упорами – 2L, глубина по оси x – W. Сечение образца по плоскости трещины A-A показано справа. Выполнено разбиение сечения на расчетную сетку с  $N_x$  элементами по оси x и  $N_z$  элементами по оси z. Алгоритм компьютерного расчета коэффициента жесткости напряженного состояния представлен на рис. 4.

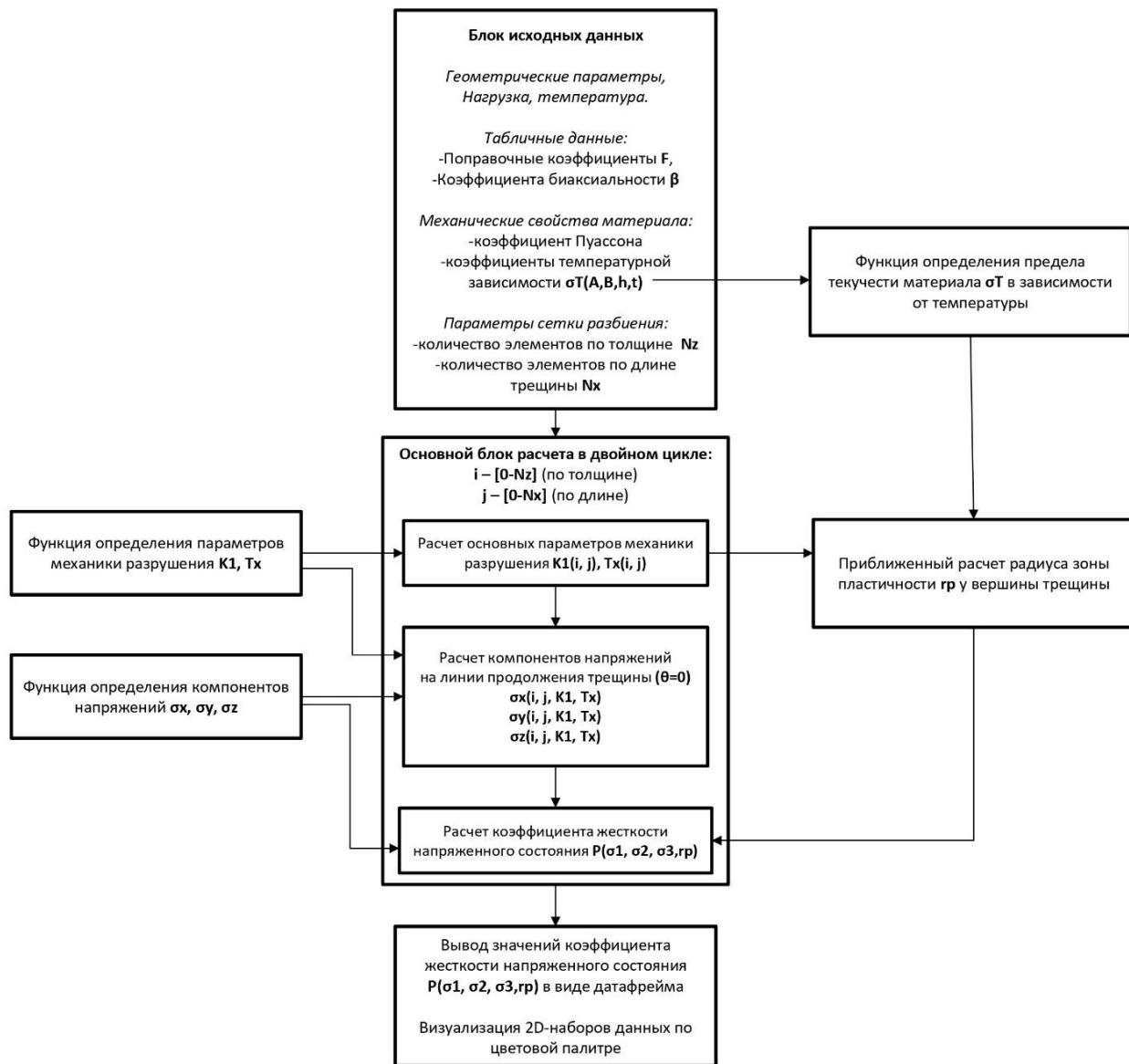


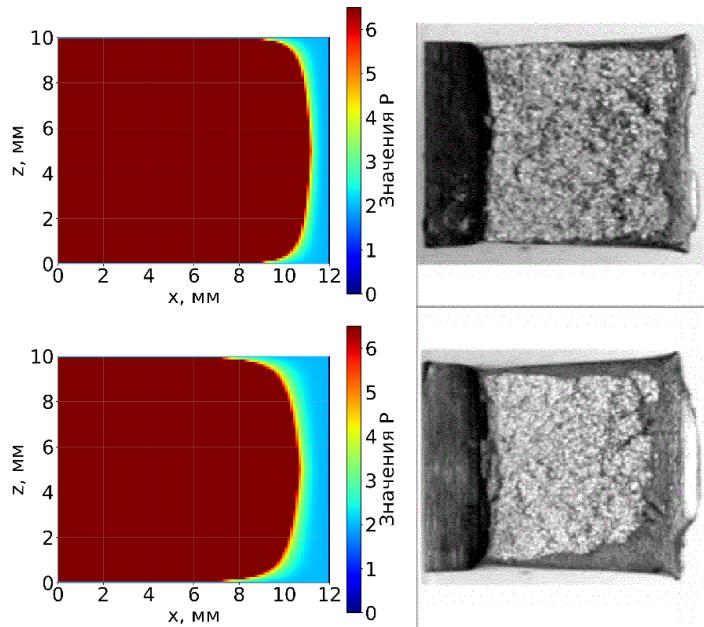
Рис. 4. Алгоритм расчета коэффициента жесткости напряженного состояния

Основной расчет проводится в двойном цикле по  $i$  (счетчик, привязанный к координатам по оси z) и  $j$  (счетчик, привязанный к координатам по оси x – длине трещины). Таким образом, последовательно рассчитывается значение  $P$  по всему сечению модели образца. На каждый элемент  $(i, j)$  в расчет берутся соответствующие значения длины трещины, коэффициента интенсивности напряжений, Т-напряжений, радиуса зоны пластичности, которые, в свою очередь, автоматически рассчитываются в виде выходных параметров соответствующих функций программы. Температура, как один из входных параметров в данном расчете, является параметром предела текучести материала, который

увеличивается при понижении температуры, и должна быть задана как функция программы в том или ином виде. Далее предел текучести напрямую влияет на размер зоны пластичности и, например, чем меньше радиус зоны пластичности, тем больше станут значения коэффициента жесткости напряженного состояния.

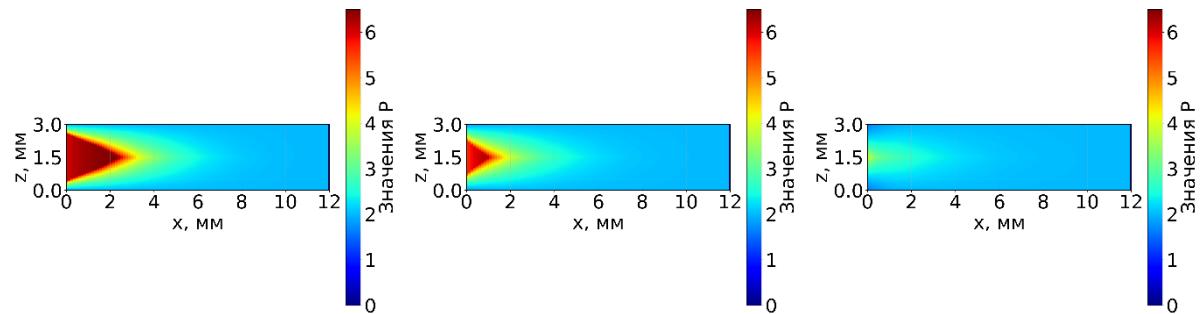
### Обсуждение результатов

На рисунках 5 и 6 представлены результаты расчетов значений коэффициента жесткости напряженного состояния моделей образцов с толщинами 10 мм и 3 мм, соответственно [24]. На правой части показаны изломы образцов, испытанных на ударную вязкость, с долей вязкой составляющей 20% и 40%.



**Рис. 5.** Результаты расчетов коэффициента жесткости напряженного состояния для модели образца, толщиной 10мм. Верхние – 20% вязкой составляющей излома, нижние – 40% вязкой составляющей излома

Следует отметить визуальное соответствие между результатами расчетного моделирования и экспериментальных данных. В частности, наблюдается сходство между прогнозируемым распределением вязких и хрупких зон в расчетной модели и фактической морфологией излома: области, характеризующиеся вязким разрушением в периферийных зонах и зоне окончательного долома, идентифицированные в ходе моделирования, согласуются с экспериментально наблюдаемыми участками вязкого разрушения.



**Рис. 6.** Результаты расчетов коэффициента жесткости напряженного состояния для образца толщиной 3 мм

Для образца толщиной 3 мм при идентичных условиях нагружения моделирование проводилось для материала с тремя разными значениями предела текучести: базовым значением  $\sigma_T$ , а также со сниженными значениями  $0.75\sigma_T$  и  $0.5\sigma_T$  (рис. 6). Во всех случаях формируется "мягкое" напряженное состояние. Результаты соответствуют известной закономерности, согласно которой для образцов малой толщины характерно преобладание механизмов вязкого разрушения, что обусловлено реализацией условий плоского напряженного состояния.

В контексте оценки ударной вязкости следует подчеркнуть определяющую роль пластической составляющей в общем балансе энергии разрушения. Учитывая, что процесс распространения трещины сопровождается непрерывной эволюцией параметров механики разрушения и характеристик пластических зон, а конечный результат традиционно характеризуется единственным параметром (KСU или KCV), представляется методологически обоснованным внедрение более совершенных подходов к оценке сопротивления хрупкому разрушению. Перспективным направлением представляется разработка методик, основанных на анализе коэффициента жесткости напряженного состояния, который обладает более высокой чувствительностью к особенностям кинетики разрушения и позволяет осуществлять дифференцированную оценку сопротивления материала распространению трещины на различных стадиях процесса разрушения.

Традиционные материаловедческие исследования, основанные на фрактографическом анализе изломов, как правило, не учитывают расчетные методы механики разрушения. Настоящее исследование предлагает междисциплинарный подход, интегрирующий количественные параметры механики разрушения, в частности коэффициент жесткости напряженного состояния, с качественным анализом микроструктуры. Разработанный критерий вязко-хрупкого перехода восполняет существующий методический разрыв и создает основу для комплексного анализа процессов разрушения, объединяющего материаловедческие и механико-математические методы исследования.

### **Заключение**

Разработан алгоритм расчета распределения коэффициента жесткости вдоль фронта трещины.

Предложен способ прогнозирования характера разрушения материала, основанный на анализе распределения коэффициента жесткости напряженного состояния Р вдоль фронта трещины.

Показано, что малый радиус зоны пластичности с одновременно около-нулевыми значениями Т-напряжений, действующих в условиях плоской деформации, может существенно повысить склонность материала хрупкому разрушению; и, напротив, больший радиус зоны пластичности и большие значения Т-напряжений обуславливают "мягкое" напряженное состояние, при котором наиболее вероятно вязкое разрушение.

### **Список источников**

1. *Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. 1921. Vol. 221(2). P. 163–198.*
2. *Irwin G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // Journal of Applied Mechanics 1957. Vol. 24(3). P. 361–364.*
3. *Rice J. R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35. P. 379–386.*
4. *Механика хрупкого разрушения / Черепанов Г. П. М.: Наука, 1974. 640 с.*
5. *Пластичность и разрушение / Колмогоров В. Л. М.: Металлургия, 1977. 336 с.*

6. *Напряжения, деформации, разрушение* / Колмогоров В. Л. М.: Металлургия, 1970. 229 с.
7. *Ресурс пластичности металлов при обработке давлением* / Богатов А. А., Мижирицкий О. И., Смирнов С. В. М.: Металлургия, 1984. 144 с.
8. Larsson S. G., Carlsson A. J. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials // J. Mech. Phys. Solids 1973. Vol. 21. P. 263–272.
9. Rice J. R. Limitations to the small yielding approximation for crack tipplasticity // Journ. Mech Phys. Solid. 1974. Vol. 22. P. 17–26.
10. *Модели и критерии механики разрушения* / Матвиенко Ю. Г. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 328 с. ISBN: 978-5-9221-0669-6. EDN: RXGSLT.
11. *Тенденции нелинейной механики разрушения в проблемах машиностроения* / Матвиенко Ю. Г. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. 56 с. ISBN: 978-5-4344-0271-2. EDN: VRAHVD.
12. O'Dowd N. P., Shih C. F. Family of crack tip fields characterized by a triaxiality Parameter // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1991. Vol. 39. P. 989–1015.
13. Anderson T. L. Elastic – plastic fracture mechanics // Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. CRC Press. 1995. P. 139–181.
14. Guo W. L. Three-dimensional analyses of plastic constraint for through-thickness cracked bodies. Eng. Fract. Mech. 1999. Vol. 62. P. 383–407. EDN: ACQSUN.
15. Wang P., Hao W., Xie J., He F., Wang F., Huo C. Stress Triaxial Constraint and Fracture Toughness Properties of X90 Pipeline Steel. Metals. 2022. Vol. 12. P. 72. URL: <https://doi.org/10.3390/met12010072>. DOI: 10.3390/met12010072 EDN: HBMJGI (дата обращения: 25.09.2025).
16. Tiago Sartor et al. Influence of stress triaxiality on the fracture behaviour of Ti6Al4V alloy manufactured by electron beam melting // Latin American Journal of Solids and Structures. 2022. Vol. 19(8). P. 1–19. URL: <https://doi.org/10.1590/1679-78257293>. DOI: 10.1590/1679-78257293. (дата обращения: 25.09.2025).
17. Букатый А. С., Букатый С. А. Расчёты деталей на прочность с учётом жёсткости напряжённого состояния // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2022. Т. 21, № 1. С. 34–41. DOI: 10.18287/2541-7533-2022-21-1-34-41. EDN: WNFYAJ.
18. Сопротивление материалов пластическому деформированию / Смирнов-Аляев Г. А. 3-е изд., Л.: Машиностроение, Ленингр. Отд-ние, 1978. 368 с.
19. Низомов Д. Н., Ходжисибоев А. А., Ходжисибоев О. А. Поля напряжений и перемещений вблизи вершины трещины в линейной теории упругости // ДАН РТ. 2010. № 11. С. 856–864. EDN: NCTJSD.
20. Астапов Н. С., Кургузов В. Д. Моделирование упругопластического разрушения компактного образца // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2024. № 87. С. 44–58. DOI: 10.17223/19988621/87/5. DOI: 10.17223/19988621/87/5. EDN: ZWPXII.
21. Жаббаров Р. М., Степанова Л. В. Сравнительный анализ полей напряжений у вершины трещины и боковых надрезов, полученных с помощью усеченных разложений Уильямса // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. № 4. С. 30–67. DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67. DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67. EDN: NERAKA.
22. Емельянов О.В., Пелипенко М.П. Оценка размера зоны пластических деформаций в вершине усталостной трещины при воздействиях перегрузок «Растяжение» //

- Вестник ЮУрГУ. Серия: Строительство и архитектура. 2014. № 4. С. 21–29. EDN: RDMSZF.
- 23. Fett T. Stress Intensity Factors - T-Stresses - Weight Functions. KIT Scientific Publishing, 2009. P. 380.
  - 24. Park T. C., Kim B. S., Son J. H., Yeo Y. K. A New Fracture Analysis Technique for Charpy Impact Test Using Image Processing // Korean Journal of Metals and Materials. 2021. Vol. 59 (1). P. 61–66. DOI: 10.3365/KJMM.2021.59.1.61. DOI: 10.3365/KJMM.2021.59.1.61. EDN: DYXIMB.

## References

1. Griffith, A. A. (1921), "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, vol. 221(2), pp. 163–198.
2. Irwin, G. R. (1957), "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24(3), pp. 361–364.
3. Rice, J. R. (1968), "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 35, pp. 379–386.
4. Cherepanov, G. P. (1974), *Brittle fracture mechanics*, Nauka, Moscow, Russia, 640 p.
5. Kolmogorov, V. L. (1977), *Plastichnost i razrushenie* [Plasticity and destruction], Metallurgiya, Moscow, Russia, 336 p.
6. Kolmogorov, V. L. (1970), *Napryazheniya, deformatsii, razrushenie* [Stresses, Deformations, Destruction], Metallurgiya, Moscow, Russia, 229 p.
7. Bogatov, A. A., Mzhiritskiy, O. I. and Smirnov, S. V. (1984), *Resurs plastichnosti metallov pri obrabotke davleniem* [Plasticity Resource of Metals in Pressure Processing], Metallurgiya, Moscow Russia, 144 p.
8. Larsson, S. G. and Carlsson, A. J. (1973), "Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials", *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 21, pp. 263–272.
9. Rice, J. R. (1974), "Limitations to the small yielding approximation for crack tip plasticity", *Journ. Mech Phys. Solid*, vol. 22, pp. 17–26.
10. Matvienko, Yu. G. (2006), *Models and criteria of fracture mechanics*, FIZMATLIT, Moscow, Russia, 328 p.
11. Matvienko, Yu. G. (2015), Trends in nonlinear fracture mechanics in mechanical engineering, Institute of Computer Research, Izhevsk, Russia, 56 p.
12. O'Dowd, N. P. and Shih, C. F. (1991), "Family of crack tip fields characterized by a triaxiality Parameter", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 39, pp. 989–1015.
13. Anderson, T. L. (1995), "Elastic – plastic fracture mechanics", *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*. CRC Press, pp. 139–181.
14. Guo, W. L. (1999), "Three-dimensional analyses of plastic constraint for through-thickness cracked bodies", *Eng. Fract. Mech.*, vol. 62, pp. 383–407.
15. Wang ,P., Hao, W., Xie, J., He, F., Wang, F. and Huo, C. (2022), "Stress Triaxial Constraint and Fracture Toughness Properties of X90 Pipeline Steel", *Metals*, vol. 12, p. 72, <https://doi.org/10.3390/met12010072>.
16. Tiago, S. and et al. (2022), "Influence of stress triaxiality on the fracture behaviour of Ti6Al4V alloy manufactured by electron beam melting", *Latin American Journal of Solids and Structure*, vol. 19(8), pp. 1–19, <https://doi.org/10.1590/1679-78257293>.

17. Bukaty, A. S. and Bukaty, S. A. (2022), "Strength calculations of parts taking into account the stiffness of the stress state", *Bulletin of Samara University. Aerospace engineering, technology and mechanical engineering*, vol. 21(1), pp. 34–41, DOI: 10.18287/2541-7533-2022-21-1-34-41.
18. Smirnov-Alyayev, G. A. (1978), *Soprotivleniye materialov plasticheskому деформированию*, 3-ye izd., Mashinostroyeniye, Leningr. Otd-nye, Leningrad, SSSR, 368 p.
19. Khodjiboev, D. N. and Khodjiboev, A. A. (2010), "Stress and displacement fields near the crack tip in the linear theory of elasticity", *DAN RT*, vol. 11, pp. 856–864.
20. Astapov, N. S. and Kurguzov, V. D. (2024), "Modeling of elastic-plastic fracture of a compact specimen", *Vestn. Tomsk. state University. Mathematics and mechanics*, no 87, pp. 44–58, DOI: 10.17223/19988621/87/5.
21. Zhabbarov, R. M. and Stepanova, L. V. (2021), "Comparative analysis of stress fields at the crack tip and side notches obtained using truncated Williams expansions", *Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, no 4, pp. 30–67, DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67.
22. Emelyanov, O. V. and Pelipenko, M. P. (2014), "Estimation of the size of the plastic deformation zone at the tip of a fatigue crack under the influence of overloads "Tension", *Bulletin of SUSU. Series «Construction Engineering and Architecture*, no 4, pp. 21–29.
23. Fett, T. (2009), "Stress Intensity Factors - T-Stresses - Weight Functions", *KIT Scientific Publishing*, 380 p.
24. Park, T. C., Kim, B. S., Son, J. H. and Yeo, Y. K. (2021), "A New Fracture Analysis Technique for Charpy Impact Test Using Image Processing", *Korean Journal of Metals and Materials*, vol. 59(1), pp. 61–66, DOI: 10.3365/KJMM.2021.59.1.61.

#### **Информация об авторах:**

Л. А. Прокопьев – научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр "Якутский научный центр СО РАН" (677000, Россия, Республика Саха (Якутия), г. Якутск, ул. Петровского, д. 2), AuthorID: 888916;

Е. М. Максимова – научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр "Якутский научный центр СО РАН" (677000, Россия, Республика Саха (Якутия), г. Якутск, ул. Петровского, д. 2), AuthorID: 982409;

Я. М. Андреев – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр "Якутский научный центр СО РАН" (677000, Россия, Республика Саха (Якутия), г. Якутск, ул. Петровского, д. 2), AuthorID: 617903;

Е. С. Лукин – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр "Якутский научный центр СО РАН" (677000, Россия, Республика Саха (Якутия), г. Якутск, ул. Петровского, д. 2), AuthorID: 144678;

С. О. Семенов – младший научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр "Якутский научный центр СО РАН" (677000, Россия, Республика Саха (Якутия), г. Якутск, ул. Петровского, д. 2), AuthorID: 1109162.

#### **Information about the authors:**

L. A. Prokopyev – Researcher, Federal Research Centre "The Yakut Scientific Centre of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences" (2, Petrovskogo Str., Yakutsk, Russia, 677000), AuthorID: 888916;

E. M. Maksimova – Researcher, Federal Research Centre "The Yakut Scientific Centre of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences" (2, Petrovskogo Str., Yakutsk, Russia, 677000), AuthorID: 982409;

Ya. M. Andreev – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Federal Research Centre "The Yakut Scientific Centre of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences" (2, Petrovskogo Str., Yakutsk, Russia, 677000), AuthorID: 617903;  
E. S. Lukin – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Federal Research Centre "The Yakut Scientific Centre of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences" (2, Petrovskogo Str., Yakutsk, Russia, 677000), AuthorID: 144678;  
S. O. Semenov – Junior Researcher, Federal Research Centre "The Yakut Scientific Centre of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences" (2, Petrovskogo Str., Yakutsk, Russia, 677000), AuthorID: 1109162.

Научная статья

УДК 520.2.072; 520.272.22

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-60-75

<https://elibrary.ru/qqfsuq>

## Температурный режим каркаса рефлектора космического аппарата в условиях солнечно-синхронной орбиты

Андрей Рамилевич Фагалов<sup>1</sup>, Антон Юрьевич Беляев<sup>2</sup>,Татьяна Николаевна Поморцева<sup>3</sup><sup>1,2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия<sup>3</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия<sup>1</sup>fagalovar@psu.ru<sup>2</sup>belyaev@icmm.ru<sup>3</sup>tata.lisica@yandex.ru

**Аннотация.** Тепловое отверждение полимеров представляет интерес для создания надувных космических конструкций на орбите Земли. Исследуется тепловое состояние каркаса, представленного набором полых слоистых цилиндрических структур, в условиях солнечно-синхронной орбиты. Приведен упрощенный вариант моделирования собственного и отраженного излучения Земли. Оптические характеристики внешнего покрытия оказывают большое влияние на итоговые температуры. Для достижения нужных температур используется продольная полоса поглощающего солнечный свет материала (меди). Построена зависимость стационарных температур от величины этой полосы и угла отклонения направления падения солнечных лучей от плоскости осевого сечения элемента каркаса.

**Ключевые слова:** тепловой баланс; лучистый теплообмен; композитный материал; солнечно-синхронная орбита; численное моделирование.

**Для цитирования:** Фагалов А. Р., Беляев А. Ю., Поморцева Т. Н. Температурный режим каркаса рефлектора космического аппарата в условиях солнечно-синхронной орбиты // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 4(71). С. 60–75. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-60-75. <https://elibrary.ru/qqfsuq>.

**Благодарности:** работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № АААА-А20-120022590044-7.

*Статья поступила в редакцию 25.09.2025; одобрена после рецензирования 27.10.2025; принята к публикации 08.12.2025.*



© 2025 Фагалов А. Р., Беляев А. Ю., Поморцева Т. Н. Лицензировано по СС BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, перейдите по ссылке <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Research article

## Thermal Balance of the Spacecraft Reflector Frame in Sun-Synchronous Orbit

Andrey R. Fagalov<sup>1</sup>, Anton Yu. Beliaev<sup>2</sup>, Tatyana N. Pomortseva<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

<sup>3</sup>Perm State University, Perm, Russia

<sup>1</sup>fagalovar@psu.ru

<sup>2</sup>belyaev@icmm.ru

<sup>3</sup>tata.lisica@yandex.ru

**Abstract.** Thermally curing polymer composites is an alternative method to produce inflatable structures in Earth orbit. This work studies thermal balance for framework of the orbital radar sounding probe in sun-synchronous orbit. The framework is composed of hollow layered cylindrical structures. Simplified model of Earth's infrared and albedo radiation is described. The outer coating's absorbing and reflective properties have profound value in resulting thermal balance. As a method of reaching desired temperatures, solar radiation absorbing stripe (made of copper foil) is used. By varying the size of said stripe for every cylindrical structure, the amount of absorbed solar flux can be changed. The resulting steady state temperatures are plotted for various stripe sizes and solar flux angles of incidence.

**Keywords:** *thermal balance; radiative heat transfer; composite material; sun-synchronous orbit; numerical modeling.*

**For citation:** Fagalov, A. R., Beliaev, A. Yu. and Pomortseva, T. N. (2025), "Thermal Balance of the Spacecraft Reflector Frame in Sun-Synchronous Orbit", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 4(71), pp. 60–75, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-60-75, <https://elibrary.ru/qqfsuq>.

**Acknowledgments:** the work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. AAAA-A20-120022590044-7.

*The article was submitted 25.09.2025; approved after reviewing 27.10.2025; accepted for publication 08.12.2025.*

### Введение

В новом тысячелетии человечество продолжает активно осваивать космическое пространство, совершенствуя технологии изготовления космических аппаратов (КА). На различных орbitах Земли на 2025 год уже находится более девяти тысяч спутников, большинство из которых обеспечивают телекоммуникационную связь, и их количество увеличивается с каждым годом. Исследователи и на текущий момент продолжают искать более практические способы вывода на орбиту, обеспечения работоспособности спутников, уменьшения их массы, повышения надежности. Появление новых материалов, в том числе композитных, во многом способствует исследованиям в этой области.

Идея использования в космосе надувных крупногабаритных конструкций из композиционного материала не теряет актуальности [1–3]. Такие конструкции обладают рядом преимуществ перед аналогами, созданными из металла [4, 5], в частности, они имеют высокий коэффициент упаковки и уменьшенный вес, обладают более высокой надежностью на этапе приведения складных конструкций в рабочее состояние. Все активнее в этой области исследований продолжает развиваться направление использования препрегов как основного строительного материала оболочки надувного изделия.

В последние годы изучается технология отверждения на орбите полимерных композитных материалов. Авторами работ [6, 7] предложена технология отверждения

препретов в лабораторных условиях, которые моделируют условия открытого космоса. В работе [8] рассматривается возможность создания крупногабаритной конструкции с отверждаемым каркасом из композиционного материала при поддержании внутреннего давления. Главным преимуществом надувной конструкции является возможность компактной упаковки большого объема, так как пропитанная связующим ткань (препрет) до отверждения является гибкой. После доставки в космос конструкция из этой ткани раздувается, принимая требуемую форму, затем связующее полимеризуется, образуя жесткую конструкцию из композитного материала.

В качестве связующего обычно применяются органические эпоксидные, фенольные, полизифирные смолы и их комбинации [9]. В матрицу, для улучшения механических свойств, добавляют различные добавки (минеральные порошки, углеродные нанотрубки и т.п.). В качестве армирования могут использоваться нити или ткани на основе углеродных, стеклянных, базальтовых или органических волокон [9, 11]. В качестве связующего в данной работе используется цианэфирная смола, которая разработана и изготавливается Всероссийским научно-исследовательским институтом авиационных материалов Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» (ВИАМ) – ВСТ 1208 [12,13]. Это связующее однокомпонентное, его химические составляющие заранее смешаны, но не вступают в активную реакцию без определенных условий. В таком случае пропитка ткани может быть проведена на Земле, и активный процесс отверждения на орбите протекает при нагреве смеси до определенной температуры. Такой способ отверждения позволяет избежать набора проблем, например, обеспечение равномерного смешения компонентов и пропитки ткани на орбите, характерных для двухкомпонентных связующих, в которых химические составляющие физически разделены, и химическая реакция между ними начинается сразу при их смешении. Выбранное связующее обладает рядом свойств, необходимых при составлении планируемого каркаса – низкое испарение в ходе реакции и возможность длительного (до 1 года) хранения [13].

В качестве исследуемой модели использовался описанный в статье [14] каркас рефлектора (рис. 5, а). Радиолокационное зондирование Земли является одним из перспективных направлений, использующих орбитальные спутники Земли. Об основных принципах и истории развития радиолокационного зондирования Земли можно найти информацию в работах [15,16]. Таким образом, рассматривается задача о тепловом балансе элементов конструкции космического аппарата для оценки возможности достижения требуемых температур. С использованием описанных позже допущений, основанных на работах [17–21], формулируется приближение теплового излучения Земли. Существует достаточно много источников, в которых рассматриваются подобные задачи [21–30].

## 1. Постановка задачи

Постановка задачи схожа с рассмотренной ранее в работе [31]. Элементы каркаса моделируются как вытянутая полая цилиндрическая конструкция, стенка которой составлена из нескольких слоев. Используемые свойства материалов приведены в табл. 1 [31, 32]. Препрет представляет собой ткань сатинового плетения, пропитанную связующим, его свойства определены численным методом с помощью Ansys Material Designer.

**Таблица 1. Свойства материалов**

Материал	Алюминиевая фольга	Медная фольга	Препрет	Силикон
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	2700	8900	2200	1230

Окончание табл.1.

Материал	Алюминиевая фольга	Медная фольга	Препрег	Силикон
Теплопроводность, Вт/(м К)	235	390	0.8	0.2
Теплоемкость $k$ Дж/(кг К)	920	400	923	0.84
Коэффи-т отражения $A_{rs}$	0.85	0.6	0.3	0.3
Коэффи-т излучения $\varepsilon = A_{aE}$	0.04	0.02	0.64	0.85

На рисунке 1 схематично изображены внешние тепловые потоки (длины векторов на рисунке не соответствуют модулям величин) и введены следующие обозначения:  $\varphi$  – угол цилиндрической системы координат;  $\mathbf{Q}_S$  – вектор падающего теплового потока Солнца,  $Q_S = 1367 \text{ Вт/м}^2$ ;  $\mathbf{Q}_E$  – вектор падающего теплового потока Земли,  $Q_E = Q_E(\varphi)$  – зависимость приведена ниже;  $\mathbf{Q}_{Rad}$  – вектор теплового потока, испускаемый поверхностью цилиндра за счет излучения в окружающий космос (зависит от локальной температуры в точке).

Для удобного учета направления падения излучения Солнца определим единичный вектор  $\boldsymbol{\tau}_S$  и разложим его на две составляющие:  $\boldsymbol{\tau}_S = \boldsymbol{\tau}_{Sn} + \boldsymbol{\tau}_{St}$ , такие что  $\boldsymbol{\tau}_{Sn}$  параллелен плоскости осевого сечения элемента конструкции, а  $\boldsymbol{\tau}_{St}$  перпендикулярен этой плоскости. Также определим вектор  $\mathbf{n}$  – единичную внешнюю нормаль к поверхности. Таким образом  $\mathbf{Q}_S = Q_S \boldsymbol{\tau}_S$ ,  $\mathbf{Q}_{Rad} = Q_{Rad}(\varphi) \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{Q}_E = Q_E(\varphi) (-\mathbf{n})$ . Для представления результатов вводится цилиндрическая система координат с углом  $\varphi$ , изображенная на рис. 2.

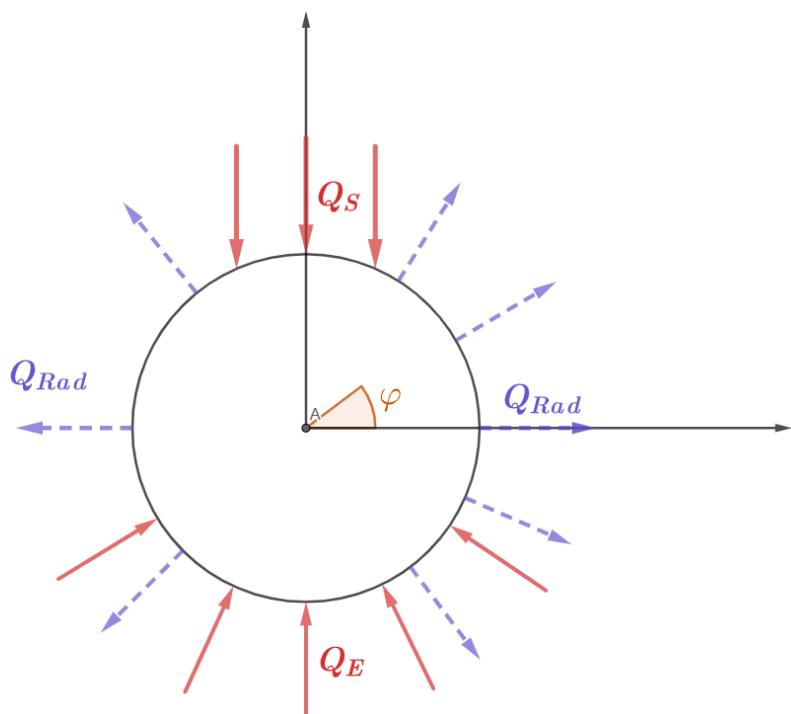
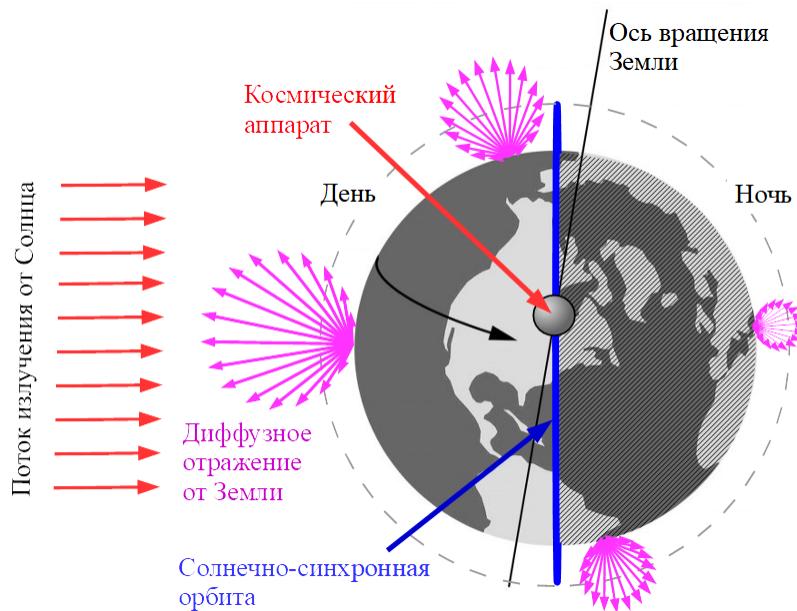
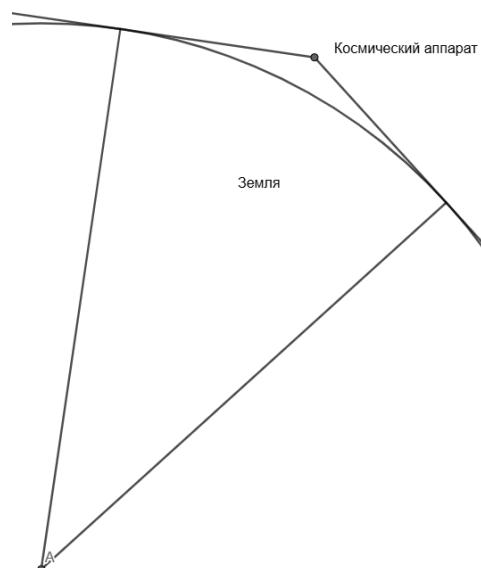


Рис. 1. Схема тепловых потоков на внешней границе



**Рис. 2.** Положение космического аппарата на солнечно-синхронной орбите и вид диффузного излучения Земли

На рисунке 3 показано в масштабе положение космического аппарата на орбите высотой 400 км. В работе [31] излучение Земли моделировалось как параллельно-направленный поток света, что подразумевает малость и удаленность источника света от приемника.

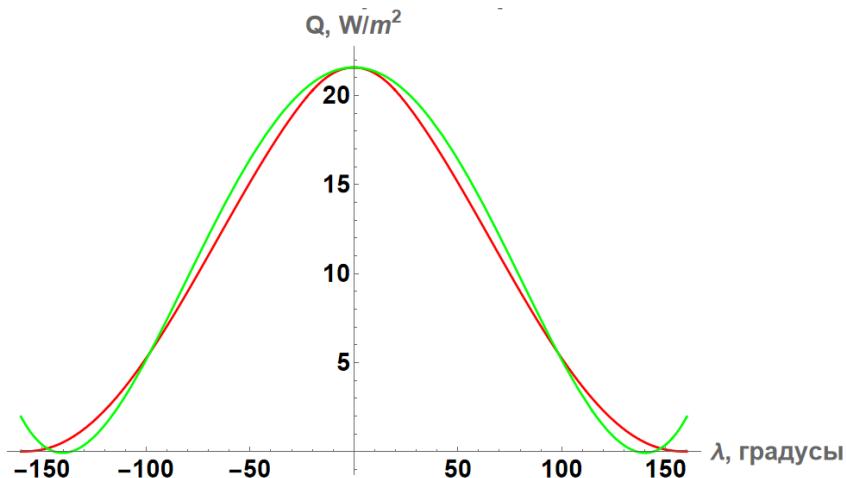


**Рис. 3.** Положение космического аппарата на орбите высотой 400 км, с сохранением масштабных отношений

Как видно из рис. 3, Земля по сравнению с космическим аппаратом, несмотря на большую высоту орбиты, не может быть приближена материальной точкой, поэтому излучение Земли будет определяться, исходя из нескольких допущений. Во-первых, Земля – сферическое тело, которое излучает собственное тепло со средней мощностью 341 Вт/м<sup>2</sup>. Это излучение диффузно, причем локальными отклонениями (которые могут быть

связаны с разницами температур, облачностью, типом земного покрова или океана и др. причинами) пренебрегаем, считая интенсивность излучения равномерной по всей поверхности (рис. 2). Во-вторых, помимо собственного теплового излучения, от Земли исходит поток отраженного солнечного излучения. Считается, что этот поток также распространяется диффузно, поэтому по форме зависимости собственного теплового и отраженного солнечного излучения совпадают, а величины соотносятся как  $\frac{q_a}{\alpha Q_S} : \frac{q_E}{Q_E} \cong \cos \theta$  [19]. В-третьих, альбето Земли определяется по таблицам из сборника [21], с учетом поправки, связанной с большим наклонением орбиты. Эффективные коэффициенты поглощения собственного излучения Земли  $A_{aE}$  и отраженного солнечного излучения  $A_{aS}$  различны и приведены выше.

Определив  $\lambda$  как угол между направлением к центру Земли и внешней нормалью малого элемента космического аппарата, получаем зависимость мощности излучения Земли (собственного и отраженного солнечного), поглощаемой этим малым элементом, от  $\lambda$ . На рисунке 4 приведены два графика – собственно описанная зависимость поглощаемого теплового потока (красным) и используемое при расчете численное приближение полиномом 4-й степени (зеленым).



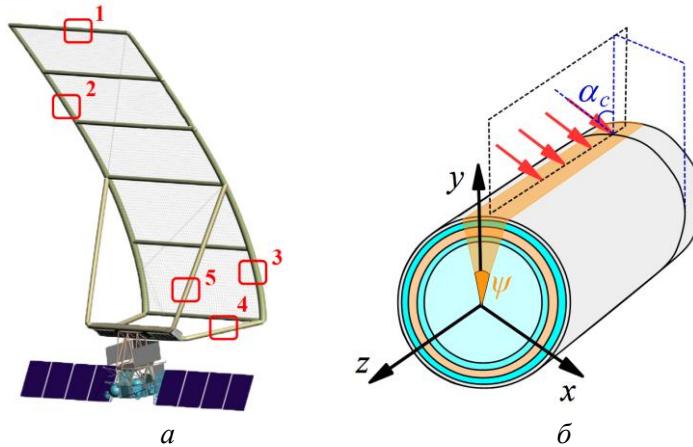
**Рис. 4.** Зависимость теплового потока Земли, поглощаемого малым плоским элементом границы космического аппарата, от угла между направлением к центру Земли и нормалью этого плоского элемента (красным). Используемое численное приближение (зеленым)

Приведем формулы, проиллюстрированные на графике на рис. 4. Подробно их вывод описан в работе [17], обобщения для других случаев можно найти в работе [17].

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{Ea} = Q_{Tot} \frac{\cos \lambda}{H^2}, \lambda + \varphi_m < \frac{\pi}{2} \\ Q_{Ea} = Q_{Tot} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \left[ \frac{(H^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{H \sin \lambda} \right] \right] + \\ + \frac{1}{2H^2} \left\{ \cos \lambda \arccos \left[ -(H^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\tan \lambda} \right] - (H^2 - 1)^{\frac{1}{2}} [1 - H^2 \cos^2 \lambda]^{\frac{1}{2}} \right\}, \\ \lambda + \varphi_m > \frac{\pi}{2} \\ Q_{Tot} = Q_E A_{aE} + Q_S A_{aS} \alpha \cos \theta, \end{array} \right.$$

$$H = \frac{R_{sat}}{R_E}, \varphi_m = \arcsin \frac{1}{H}$$

Стоит отметить, что полученное распределение зависит от оптических свойств материала внешней границы (эффективных коэффициентов поглощения  $A_{aE}, A_{aS}$ ), безразмерной высоты орбиты  $H$ , наклонения орбиты  $\theta$ . Можно еще раз подчеркнуть, что полученная функция, приведенная на рис. 4, справедлива для условий солнечно-синхронной орбиты с наклонением  $\theta = 94^\circ$ , радиусом орбиты  $R_{sat} = R_E + 400$  км, и для материала с оптическими свойствами  $A_{aE}, A_{aS}$  алюминия, приведенными в табл. 1. Кроме того, пренебрежение излучением Земли в данном случае (в связи с малыми  $A_{aE}$ ) приведет к достаточно малым (менее 10%) погрешностям. Как говорится, например, в работе [33], элементы космических аппаратов, активно излучающие инфракрасное излучение (как пример радиаторы), могут испытывать более значительный нагрев за счет излучения Земли.



**Рис. 5. а)** Выделенные в рефлекторе типы элементов с различной (по отношению к солнечным лучам) ориентацией

**б)** Ориентация элемента каркаса рефлектора, используемая система координат,

$\alpha_c$  – отклонение солнечных лучей от нормали,

$\psi$  – центральный угол, стягиваемый светопоглощающей полосой

По результатам работы [31], использование медной фольги в качестве материала внешнего покрытия приводит к перегреву, а использование только алюминиевой – наоборот, к недостаточному нагреву. Для достижения требуемых температур предлагается ввести светопоглощающую полосу – область внешней границы с отличными от остальной внешней границы оптическими свойствами (рис. 5, б). Это отличие может быть технически достигнуто различными способами (различные степени шероховатости, использование сплавов, различных светопоглощающих покрытий). В рамках данной работы, проведено исследование возможности достижения нужной температуры использованием различных материалов с известными свойствами, применение которых при создании конструкции целесообразно ввиду их доступности и стоимости. При моделировании считалось, что основной материал внешней границы – алюминиевая фольга, а светопоглощающая полоса выполнена из меди. Таким образом, для этих областей отличаются материальные константы  $A_{aE}, A_{aS}, \varepsilon, k$  (приведены в табл. 1). На рисунке 5, б показан центральный угол  $\psi$ , стягиваемый светопоглощающей полосой. Также на этом рисунке вводим угол  $\alpha_c$  – угол между направлением падения солнечного излучения и плоскостью осевого сечения цилиндра (между векторами  $\tau_s$  и  $\tau_{Sn}$ ). Для выделенных типов элементов (рис. 5, а) главным отличием являются различные углы падения солнечного света. Будем учитывать его с помощью различных  $\alpha_c$ . По результатам моделирования, изменение

ориентации земного излучения относительно моделируемого образца (смещение направления к центру Земли) приводит к небольшим смещениям в полях равновесных температур, но их минимальные и максимальные значения практически не изменяются (различия менее 1%). Поэтому при расчетах считаем, что Земля находится с противоположной от Солнца стороны. В таблице 2 приведем значения углов для различных выделенных типов элементов.

Установим геометрические параметры моделируемой конструкции. Элемент рефлектора представляем в виде полого составного цилиндра с высотой  $h = 1\text{м}$ ,  $r$  – внутренний радиус,  $R$  – внешний радиус,  $R_i$ ,  $i = \{1,2,3\}$  – радиус концентрической окружности, по которой проходит граница материалов (фольги, силикона либо препрета). Нумерация  $R_i$  производится в порядке возрастания (из центра круга).

**Таблица 2.** Углы  $\alpha_c$  между направлением падения солнечного излучения и осевой плоскостью цилиндра для различных типов элементов каркаса

Элемент №	$\alpha_c, {}^\circ$	$\cos \alpha_c$
1	0	1
2	0	1
3	25	0.9
4	41	0.75
5	60	0.5

Уточним связь между оптическими константами  $\varepsilon$  – коэффициент излучения (степень черноты),  $A_{aE} = \varepsilon$  – эффективный коэффициент поглощения земного излучения материалом внешней стенки цилиндра,  $A_{as}$  – эффективный коэффициент поглощения солнечного излучения материалом внешней стенки цилиндра,  $A_{rs}$  – эффективный коэффициент отражения солнечного света. Так как стенки цилиндра абсолютно непрозрачны, коэффициенты отражения и поглощения по определению связаны равенством  $A_a + A_r = 1$ . Следствием из закона Кирхгофа является соответствие (совпадение) степени серости  $\varepsilon$  и коэффициента поглощения  $A_a$  в случае поглощения монохромного света. Такое же соответствие выполняется в случае, когда поглощаемый и излучаемый поток имеют одинаковый (или в нашем случае приблизительно схожий) спектральный состав ( $A_{aE} = \varepsilon$ ). Для обеспечения долгосрочного требуемого режима работы космических аппаратов также применяются специальные покрытия, обладающие, как правило, низкими эффективными коэффициентами  $A_a$  и  $\varepsilon$  [33].

Излучение в окружающий космос происходит согласно закону Стефана–Больцмана:

$$Q_{Rad} = \sigma \varepsilon T^4,$$

где  $\sigma = 5.67 * 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$  – постоянная Стефана–Больцмана,  $\varepsilon$  – коэффициент излучения,  $T$  – локальная температура стенки цилиндра.

Нормальная составляющая теплового потока Солнца при достижении внешней границы частично отражается и частично поглощается. Учитывая, что поглощаемый поток не может быть отрицательным (в теневой области он нулевой), после преобразований получим:

$$Q_{Sa} = A_{as} Q_S (\boldsymbol{\tau}_S \cdot \boldsymbol{\tau}_{Sn}) \max(-\boldsymbol{\tau}_{Sn} \cdot \mathbf{n}, 0) = A_{as} Q_S \cos(\alpha_c) \max(-\boldsymbol{\tau}_{Sn} \cdot \mathbf{n}, 0),$$

Тепловой поток на внешней границе:

$$Q = Q_{Sa} + Q_{Ea} - Q_{Rad}. \quad (1)$$

Во внутренних областях составляющих цилиндров ставится классическая задача теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \Delta T = 0, \alpha = \frac{k}{\rho c},$$

где  $\rho, c, \alpha, k$  – плотность, теплоемкость, коэффициенты температуропроводности и теплопроводности материала соответственно,  $\Delta$  – оператор Лапласа. На границах двух сред накладывается условие на нормальную к поверхности составляющую теплового потока:

$$-k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{Q}_n \cdot \mathbf{n} = Q, \quad (2)$$

где  $\operatorname{grad} T$  – градиент температуры,  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль к внешней поверхности  $S_0$ ,  $\mathbf{Q}_n$  – полный вектор теплового потока,  $Q$  – величина нормально поглощаемого теплового потока. Можно отметить, что модуль вектора  $\mathbf{Q}_n$  и величина  $Q$  отличаются, так как в  $\mathbf{Q}_n$  входит помимо нормального еще и перенос тепла вдоль границы двух тел  $S_0$ . Для внешней стенки  $S_0$  величина  $Q$  определяется формулой (1).

Для соприкасающихся внутренних границ областей  $S_i$  задается идеальный тепловой контакт:

$$\begin{cases} T_1|_{S_i} = T_2|_{S_i} \\ \mathbf{Q}_{n1} \cdot \mathbf{n}_1|_{S_i} = -\mathbf{Q}_{n2} \cdot \mathbf{n}_2|_{S_i} \end{cases}$$

где  $S_i$  – поверхность контакта,  $T$  – температура,  $\mathbf{Q}_n$  – полный вектор теплового потока,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль, причем величины с индексами 1 и 2 относятся к различным телам на их общей границе. На внутренней границе  $S$  происходит лучистый теплообмен за счет теплового излучения внутренних стенок цилиндра. Подробный вывод формул приведен в работе [31], здесь приведем конечный результат:

$$Q = \varepsilon \left[ \int_S \left( \varepsilon \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon) Q_{\text{пад}1} \right) \frac{(\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}_1)(-\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}_2)}{\pi |\mathbf{l}|^4} dS - \sigma T_2^4 \right], \quad (3)$$

где  $Q$  – модуль нормальной составляющей вектора теплового потока, определяемый для точки внутренней границы,  $T_2$  – температура в этой точке, величины  $T_1, \mathbf{n}_1, Q_{\text{пад}1}$  относятся к промежуточной точке внутренней поверхности, которая пробегает всю границу  $S$  при интегрировании,  $Q_{\text{пад}1}$  – нормальный тепловой поток, падающий суммарно на 1 точку от всей внутренней поверхности  $S$ ,  $\mathbf{l}$  – вектор, соединяющий первую точку со второй. Так как это выражение содержит внутри интеграла по внутренней поверхности  $Q_{\text{пад}1}$ , которое также определяется интегрально, для разрешения при численном моделировании используют дискретный аналог приведенной выше формулы (3), при этом тепловые потоки определяются итерационным образом (метод Ньютона–Рафсона). Реализация этого метода выполняется встроенным в пакет Ansys модулем Radiosity.

Решение стационарной задачи не зависит от начальных условий, но так как мы реализуем численно итерационный поиск, то сформулируем начальные условия для полноты постановки. Во всей расчетной области задается начальная температура  $T(x) = 20^\circ\text{C}$ .

## 2. Реализация в пакете Ansys и результаты вычислений

Поставленная задача решалась численно с использованием вычислительного пакета Ansys. Численное моделирование имеет смысл использовать, так как запуск опытного образца в космос требует больших затрат, и с помощью численного эксперимента можно получить предварительную оценку результата.

Рассматривается набор связанных соосных цилиндрических элементов, особенности которых подробно изложены в работе [31]. Внутренняя цилиндрическая полость имеет радиус 84 мм, затем идут: слой силикона толщиной 1 мм, слой препрега толщиной 2 мм, слой силикона 1 мм, слой фольги снаружи 0,03 мм ( $r = 84, R_1 = 85, R_2 = 87, R_3 = 88, R = 88.03$  мм).

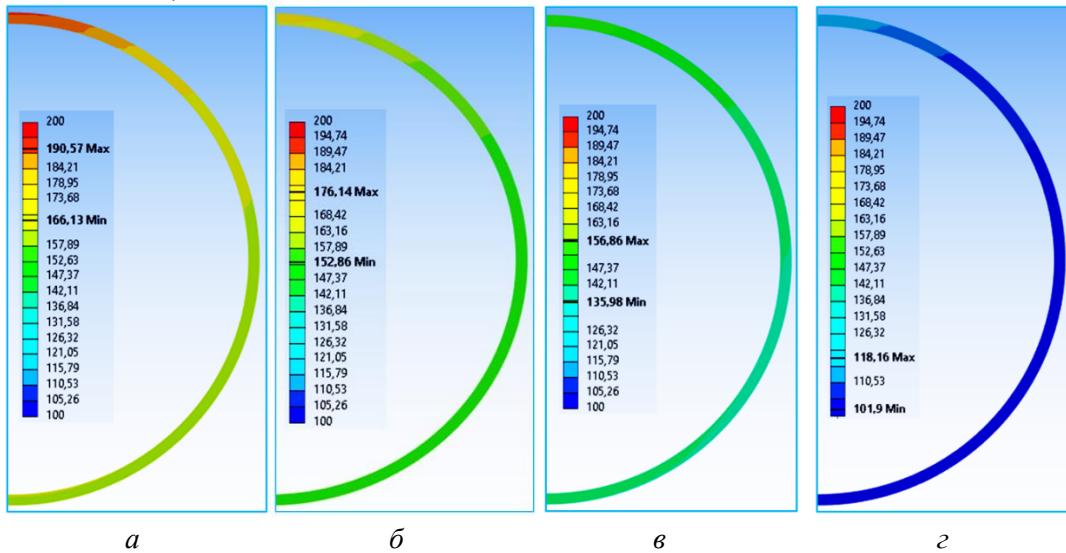


Рис. 6. Распределение температур в элементах различных типов,  $^{\circ}\text{C}$   
(1,2 тип – а, 3-б, 4-в, 5-г), в случае  $\psi=30^{\circ}$

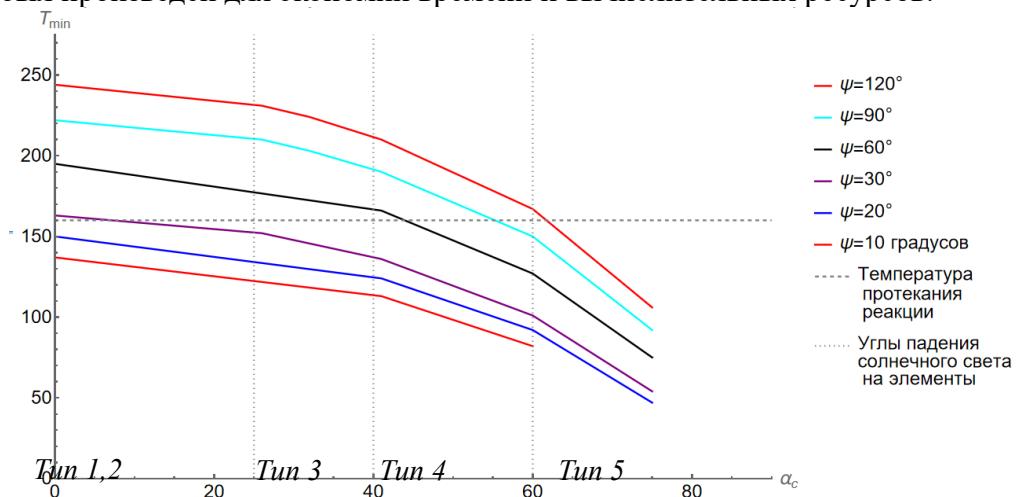
Слои силикона введены для предотвращения слипания структуры из препрега и уменьшения возможных испарений, составляющих при протекании реакции полимеризации. Малая толщина внешнего слоя фольги приводит к необходимости использования достаточно мелких конечных элементов, размеры которых сопоставимы с толщиной этого слоя (0.03 мм). Была проведена проверка сходимости, отличие результатов используемого разбиения от более мелкого менее 1%.

На рисунке 6 приведены результаты вычислений для случая, когда все типы элементов имеют одинаковую величину поглощающей полосы  $\psi = 30^{\circ}$ . Так как достаточной для протекания реакции мы считаем температуру в  $160^{\circ}\text{C}$ , можно сделать вывод, что элементы 1, 2, 3 типов в таком случае достаточно хорошо прогреты, но элементы 4 и особенно 5 типа нагреваются недостаточно сильно. Для отверждения всех элементов потребуется либо увеличить размеры  $\psi$  светопоглощающей полосы на требуемых элементах (в соответствии с графиками на рис. 7), либо повернуть всю конструкцию так, чтобы на элементы нужных типов солнечный свет падал под углом, более близким к нормальному (приблизительный минимум  $70^{\circ}$ ).

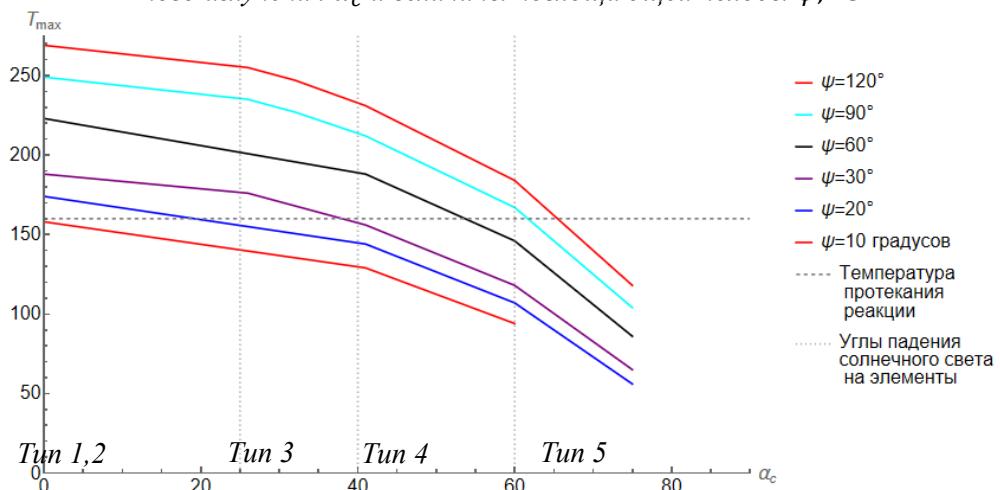
Для регулирования стационарных температур предлагалось изменять размеры светопоглощающей полосы, были построены графики зависимостей минимальных и максимальных стационарных температур конструкции от угла падения солнечного света и величины поглощающей полосы (рис. 7, 8).

На графиках (рис. 7, 8) вертикальными пунктирными линиями обозначены значения  $\alpha_c$ , соответствующие выделенным типам элементов (табл. 2), а горизонтальной пунктирной линией – требуемая температура для полноценного протекания реакции отверждения. Исходя из графиков, для каждого типа элементов можно подобрать соответствующую величину светопоглощающей полосы, достаточную для достижения требуемых температур. Также возможно проконтролировать величину максимальных температур, которые могут в определенных случаях превышать допустимые значения ( $>200^{\circ}\text{C}$ ), что нежелательно, так как может привести к разрушению составляющих конструкции.

На основании проведенных расчетов сделан вывод о том, что в случае  $\alpha_c=75^\circ$  и  $\psi = 10^\circ$  температура будет существенно ниже требуемой. В связи с этим расчет для данного случая не был произведен для экономии времени и вычислительных ресурсов.



**Рис. 7. Минимальные температуры в цилиндре, в зависимости от направления солнечного излучения  $\alpha_c$  и величины поглощающей полосы  $\psi$ ,  $^\circ\text{C}$**



**Рис. 8. Максимальные температуры в цилиндре, в зависимости от направления солнечного излучения  $\alpha_c$  и величины поглощающей полосы  $\psi$ ,  $^\circ\text{C}$**

Одним из возможных плюсов данной конструкции является возможность регулировать получаемый от Солнца тепловой поток, изменяя ориентацию конструкции относительно Солнца. Так, поворот поглощающей полосы в затемненную область приведет к сильному уменьшению статических температур.

## Заключение

Рассмотрено статическое температурное состояние каркаса рефлектора космического радиолокатора в условиях солнечно-синхронной орбиты. Оценено влияние Земного излучения на элементы каркаса. С помощью предложенного способа изменения внешнего покрытия можно добиться температур, достаточных для протекания реакции полимеризации. Если по техническим причинам создание светопоглощающей полосы нежелательно, возможно оценить температуры для поэтапного отверждения конструкции, путем поочередного ориентирования на солнечную сторону отдельных элементов.

Описанная методика может быть применена для проектирования конструкций из различных композитных материалов, имеющих другие температурные режимы отверждения.

Таким образом, отверждение пневматически раздуваемых в космосе опорных конструкций за счет нагрева солнечным светом представляется возможным, при использовании описанных в работе материалов внешнего покрытия для достижения нужных температур. Такие конструкции могут быть использованы для создания крупногабаритных разворачиваемых антенн, рефлекторов и других конструкций, требующих жесткого опорного каркаса. Исследуемый материал (ВСТ-1208) обладает рядом положительных свойств, позволяющих использовать его в качестве связующего для проектируемой конструкции. Он способен достаточно долгое время находиться на взлетной площадке, не отверждаясь в ожидании запуска. В ходе реакции практически отсутствует испарение летучих компонентов.

### Список источников

1. *Kondyurin A. V.* Building the shells of large space stations by the polymerisation of epoxy composites in open space // International Polymer Science and Technology. 1998. Vol. 25, № 4. P. 78–80.
2. *Kondyurina I., Kondyurin A., Lauke B., Figiel L., Vogel R., Reuter U.* Polymerisation of composite materials in space environment for development of a Moon base // Advances in Space Research. 2006. Vol. 37. P. 109–115.
3. *Shevtsov S., Zhilyaev I. V., Tarasov I., Wu J. K., Snejhina N. G.* Model-based multi-objective optimization of cure process control for a large CFRP panel // Engineering Computations. 2018. Vol. 35. P. 1085–1097. DOI: 10.1108/ec-09- 2017-0354.
4. *Пестренин В. М., Пестренина И. В., Русаков С. В., Кондюрин А. В.* Разворачивание крупногабаритных оболочечных конструкций внутренним давлением // Механика композитных материалов. 2015. Т. 51, № 5. С 889–898.
5. *Поморцева Т. Н., Комар Л. А.* О возможности создания крупногабаритных конструкций в условиях открытого космоса // Вестник Пермского Университета. Математика. Информатика. 2023. Вып. 3 (62). С. 64–75.
6. *Гилев В. Г., Русаков С. В., Пестренин В. М., Пестренина И. В.* Оценка жесткости развертываемой внутренним давлением цилиндрической композитной оболочки на начальном этапе полимеризации связующего // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 1. С. 93–99. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.08. EDN: QNPUJY.
7. *Осоргина И. В., Свистков А. Л., Пелевин А. Г., Чудинов В. С., Терпугов В. Н.* Особенности отверждения эпоксидных смол в вакууме // Вестник Пермского университета. Химия. 2017. Т. 7, № 4. С. 483–491.
8. *Babuscia A., Corbin B., Knapp M., Jensen-Clem R., Loo M. V., Seager S.* Inflatable antenna for cubesats: Motivation for development and antenna design // Acta Astronautica. 2013. Vol. 91. P. 322–332.
9. *Abd El-baky M. A.* Evaluation of mechanical properties of jute/glass/carbon fibers reinforced hybrid composites // Fibers and Polymers. 2017. Vol. 18, № 2. P. 2417–2432.
10. *De Azevedo A.R.G. et al.* Natural fibers as an alternative to synthetic fibers in reinforcement of geopolymers matrices: A comparative review // Polymers. 2021. Vol. 13. No 15.
11. *Lalit R., Mayank P., Ankur K.* Natural fibers and biopolymers characterization: A future potential composite material // Strojnický Casopis. 2018. Vol. 68. No. 1. DOI:10.2478/scjme-2018-0004.
12. *Каблов Е. Н., Чурсова Л. В., Бабин А. Н., Мухаметов Р. Р., Панина Н. Н.* Разработки ФГУП «ВИАМ» в области расплавных связующих для полимерных

- композиционных материалов // Полимерные материалы и технологии. 2016. Т. 2. № 2. С. 37–42. EDN: WCDGYH.
13. ВИАМ «Термореактивные связующие» [Электронный ресурс] URL: [https://viam.ru/sites/default/files/upload/booklet/pdf/rk\\_term\\_svyazuyushchie\\_.pdf](https://viam.ru/sites/default/files/upload/booklet/pdf/rk_term_svyazuyushchie_.pdf) (дата обращения 26.09.2025).
  14. Демин Д. С., Кононенко П. И., Лебеденко В. И. Концепция бортового радиолокатора на основе АФАР с использованием рефлектора с отверждаемым пневмокаркасом // Труды МАИ. 2021. № 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-12 EDN: TOWEUA
  15. Лопатин А. В., Рутковская М. А. Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн (часть 2) // Сибирский аэрокосмический журнал. 2007. №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obzor-konstruktsiy-sovremennyh-transformiruemyh-kosmicheskikh-antenn-chast-2> (дата обращения: 15.11.2025).
  16. Балдина Е. А., Чеснокова О. А. Радиолокационное зондирование Земли для географических исследований // Вестник Московского университета. Серия 5. География. 2011. № 1. EDN: OIPRQT.
  17. Sasaki K., Sznajder M. Analytical view factor solutions of a spherical cap from an infinitesimal surface // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. Vol. 163. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120477. EDN: XONHQP.
  18. Cunningham F. G. Power input to a small flat plate from a diffusely radiating sphere, with application to Earth satellites // Publications of Goddard Space Flight Center 1959–1962. P. 146–156.
  19. Watts R. G. Radiant heat transfer to earth satellites // J. Heat Transf. 1965. Vol. 87(3). P. 369–373. doi:10.1115/1.3689118.
  20. Meseguer J., Pérez-Grande I., Sanz-Andrés A. Spacecraft Thermal Control, 2 - Space environment // Woodhead Publishing. 2012. P. 26–29.
  21. Gilmore, D.G. Spacecraft Thermal Control Handbook // The Aerospace Press. 2002. Vol. I: Fundamental Technologies. 2nd Edition, El Segundo. P. 26–29.
  22. Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Rusakov S. V., Kondyurin A. V. Curing of large prepreg shell in solar synchronous Low Earth Orbit: Precession flight regimes // Acta Astronautica. 2018. Vol. 151. P. 342–347.
  23. Баева Ю. В., Лаповок Е. В., Ханков И. С. Аналитическая методика расчета тепловых потоков в околоземном пространстве, формирующих тепловой режим космических телескопов // Оптический журнал. 2013. Т. 80, № 5. С. 30–37.
  24. Elweteedy, Ahmed Elmaisy, Ali Elhefnawy, Ahmed Small Satellite Operational Phase Thermal Analysis and Design: A Comparative Study // INCAS BULLETIN 2021. Vol. 13. P. 59–74. 10.13111/2066-8201.2021.13.4.6.
  25. Design and fabrication of large polymer constructions in space / Kondyurin Alexey: Elsevier. 2023. ISBN: 978-0-12-816803-5.
  26. Денисова Л. В., Калинин Д. Ю., Резник С. В. Теоретические и экспериментальные исследования тепловых режимов сетчатых рефлекторов космических антенн // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия Машиностроение. 2011. № 1(82). С. 92–105. EDN NDXJKV.
  27. Казаковцев В. П., Корянов В. В., Просунцов П. В., Топорков А. Г. Расчет условий освещенности в процессе выведения космического аппарата на геостационарную орбиту // Инженерный журнал: наука и инновации. 2016. № 12(60). С. 4. DOI 10.18698/2308-6033-2016-12-1568. EDN XEQDWL.
  28. Тулин Д. В., Финченко В. С. Теоретико-экспериментальные методы проектирования систем обеспечения теплового режима космических аппаратов // Проектирование автоматических космических аппаратов для фундаментальных научных исследований. 2014. Т. 3. С. 1320–1437. EDN VNSMWX.

29. Пономарев В. С., Пономарев С. В., Халиманович В. И. Термомеханический анализ крупногабаритного сетчатого рефлектора космического назначения // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева. 2016. Т. 17, № 2. С. 343–358. EDN XAYYZX.
30. Асланян Р. О., Анисимов Д. И., Марченко И. А., Пантелейев В. И. Имитаторы солнечного излучения для термовакуумных испытаний космического аппарата // Сибирский журнал науки и технологий. 2017. Т. 18, № 2. С. 323–327. EDN YMASCUC.
31. Фагалов А. Р. Моделирование стационарного теплового режима цилиндрического элемента каркаса на орбите // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. № 4(67). С. 78–94. DOI 10.17072/1993-0550-2024-4-78-94. EDN QZXOIZ.
32. Терехов С. В. Тепловые свойства металлов // Справочник. Донецк: ГБУ «Донецкий физико-технический институт им. А. А. Галкина». 2023. 184 с.
33. Страполова В. Н. Разработка терморегулирующего покрытия, содержащего наночастицы оксидов металлов: дис. ... канд. хим. наук. М.: РХТУ им. Д. И. Менделеева, 2017.

## References

1. Kondyurin, A. V. (1998), "Building the shells of large space stations by the polymerisation of epoxy composites in open space", *International Polymer Science and Technology*, vol. 25, no 4, pp. 78–80.
2. Kondyurina, I., Kondyurin, A., Lauke, B., Figiel, L., Vogel, R. and Reuter, U. (2006), "Polymerisation of composite materials in space environment for development of a Moon base", *Advances in Space Research*, vol. 37, pp. 109–115.
3. Shevtsov, S., Zhilyaev, I. V., Tarasov, I., Wu, J. K. and Snejzhina, N. G. (2018), "Model-based multi-objective optimization of cure process control for a large CFRP panel", *Engineering Computations*, vol. 35, pp. 1085–1097, DOI: 10.1108/EC-09-2017-0354.
4. Pestrenin, V. M., Pestrenina, I. V., Rusakov, S. V. and Kondyurin, A. V. (2015), "Razvertyvanie krupnogabarinnykh obolochchnykh konstruktsiy vnutrennim davleniem", *Mekhanika kompozitnykh materialov*, vol. 51, no 5, pp. 889–898.
5. Pomortseva, T. N. and Komar, L. A. (2023), "O vozmozhnosti sozdaniya krupnogabarinnykh konstruktsiy v usloviyakh otkrytogo kosmosa", *Vestnik Permskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, iss. 3 (62), pp. 64–75.
6. Gilev, V. G., Rusakov, S. V., Pestrenin V. M. and Pestrenina, I. V. (2018), "Otsenka zhestkosti razvertyvaemoy vnutrennim davleniem tsilindricheskoy kompozitnoy obolochki na nachal'nom etape polimerizatsii svyazyvayushchego", *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, no 1, pp. 93–99.
7. Osorgina, I. V., Svistkov, A. L., Pelevin, A. G., Chudinov, V. S. and Terpugov, V. N. (2017), "Osobennosti otverzhdeniya epoksidnykh smol v vakuum", *Vestnik Permskogo universiteta. Khimiya*, vol. 7, no 4, pp. 483–491.
8. Babuscia, A., Corbin, B., Knapp, M., Jensen-Clem, R., Loo, M. V. and Seager, S. (2013), "Inflatable antenna for cubesats: Motivation for development and antenna design", *Acta Astronautica*, vol. 91, pp. 322–332.
9. Abd El-baky, M. A. (2017), "Evaluation of mechanical properties of jute/glass/carbon fibers reinforced hybrid composites", *Fibers and Polymers*, vol. 18, no 12, pp. 2417–2432.
10. De Azevedo, A. R. G. et al. (2021), "Natural fibers as an alternative to synthetic fibers in reinforcement of geopolymers matrices: A comparative review", *Polymers*, vol. 13, no 15, DOI: 10.3390/polym13152493.

11. Lalit, R., Mayank, P. and Ankur, K. (2018), "Natural fibers and biopolymers characterization: A future potential composite material", *Strojnicky Casopis*, vol. 68, no 1, DOI: 10.2478/scjme-2018-0004.
12. Kablov, E. N., Chursova, L. V., Babkin, A. N., Mukhametov, R. R. and Panina, N. N. (2016), "Razrabotki FGUP "VIAM" v oblasti rasplavnykh svyazyvayushchikh dlya polimernykh kompozitsionnykh materialov", *Polimernye materialy i tekhnologii*, vol. 2, no 2, pp. 37–42.
13. VIAM, *Termoreaktivnye svyazyvayushchie* [Electronic resource]. URL: [https://viam.ru/sites/default/files/upload/booklet/pdf/rk\\_term\\_svyazuyushchie\\_.pdf](https://viam.ru/sites/default/files/upload/booklet/pdf/rk_term_svyazuyushchie_.pdf) (accessed 26.09.2025).
14. Demin, D. S., Kononenko, P. I. and Lebedenko, V. I. (2021), "Kontseptsiya bortovogo radiolokatora na osnove AFAR s ispol'zovaniem reflektora s otverzhaemym pnevmokarkasom", *Trudy MAI*, no 119, DOI: 10.34759/trd-2021-119-12.
15. Lopatin, A. V. and Rutkovskaya, M. A. (2007), "Obzor konstruktsiy sovremennykh transformiruemых kosmicheskikh antenn (chast' 2)", *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika M. F. Reshetneva*, no 3 (16), pp. 78–81.
16. Baldina, E. A. and Chesnokova, O. A. (2011), "Radiolokatsionnoe zondirovaniye Zemli dlya geograficheskikh issledovaniy", *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 5. Geografiya*, no 1.
17. Sasaki, K. and Sznajder, M. (2020), "Analytical view factor solutions of a spherical cap from an infinitesimal surface", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 163, <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120477>.
18. Cunningham, F. G. (1962), "Power input to a small flat plate from a diffusely radiating sphere, with application to Earth satellites", *Publications of Goddard Space Flight Center*, pp. 146–156.
19. Watts, R. G. (1965), "Radiant heat transfer to earth satellites", *Journal of Heat Transfer*, vol. 87, no 3, pp. 369–373, DOI: 10.1115/1.3689118.
20. Meseguer, J., Pérez-Grande, I. and Sanz-Andrés, A. (2012), "Spacecraft Thermal Control, 2 – Space environment", *Woodhead Publishing*, pp. 26–29, ISBN 9781845699963, <https://doi.org/10.1533/9780857096081.15>.
21. Gilmore, D. G. (2002), *Spacecraft Thermal Control Handbook, Vol. I: Fundamental Technologies*. 2nd ed, El Segundo: The Aerospace Press, pp. 26–29, <https://doi.org/10.2514/4.989117>.
22. Pestrenin, V. M., Pestrenina, I. V., Rusakov, S. V. and Kondyurin, A. V. (2018), "Curing of large prepreg shell in solar synchronous Low Earth Orbit: Precession flight regimes", *Acta Astronautica*, vol. 151, pp. 342–347.
23. Baeva, Yu. V., Lapovok, E. V. and Khankov, S. I. (2013), "Analiticheskaya metodika rascheta teplovyykh potokov v okolozemnom prostranstve, formiruyushchikh teplovoy rezhim kosmicheskikh teleskopov", *Opticheskiy zhurnal*, vol. 80, no 5, pp. 30–37, EDN: TQNXNZ.
24. Elweteedy, A., Elmaihy, A. and Elhefnawy, A. (2021), "Small Satellite Operational Phase Thermal Analysis and Design: A Comparative Study", *INCAS Bulletin*, vol. 13, pp. 59–74, DOI: 10.13111/2066-8201.2021.13.4.6.
25. Kondyurin, A. (2023), *Design and fabrication of large polymer constructions in space*, Elsevier, ISBN 978-0-12-816803-5.
26. Denisova, L. V., Kalinin, D. Yu. and Reznik, S. V. (2011) "Teoreticheskie i eksperimental'nye issledovaniya teplovyykh rezhimov setchatykh reflektorov kosmicheskikh antenn", *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Baumana. Seriya Mashinostroenie*, no 1(82), pp. 92–105, EDN NDXJKV.

27. Kazakovtsev, V. P., Koryanov, V. V., Prosuntsov, P. V. and Toporkov, A. G. (2016), "Raschet usloviy osveshchennosti v protsesse vyvedeniya kosmicheskogo apparata na geostatsionarnuyu orbitu", *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii*, no 12(60), pp. 4, DOI: 10.18698/2308-6033-2016-12-1568, EDN XEQDWL.
28. Tulin, D. V. and Finchenko, V. S. (2014), "Teoretiko-eksperimental'nye metody proektirovaniya sistem obespecheniya teplovogo rezhima kosmicheskikh apparatov", *Proektirovaniye avtomaticheskikh kosmicheskikh apparatov dlya fundamental'nykh nauchnykh issledovaniy*, vol. 3, pp. 1320–1437, EDN VNSMWX.
29. Ponomarev, V. S., Ponomarev, S. V. and Khalimanovich, V. I. (2016), "Termomechanicheskiy analiz krupnogabaritnogo setchatogo reflektora kosmicheskogo naznacheniya", *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika M. F. Reshetneva*, vol. 17, no 2, pp. 343–358, EDN XAYYZX.
30. Aslanyan, R. O., Anisimov, D. I., Marchenko, I. A. and Panteleev, V. I. (2017), "Imitatory solnechnogo izlucheniya dlya termovakuumnykh ispytaniy kosmicheskogo appara", *Sibirskiy zhurnal nauki i tekhnologiy*, vol. 18, no 2, pp. 323–327, EDN YMAMCUC.
31. Fagalov, A. R. and Belyaev, A. Yu. (2024), "Modelirovaniye statsionarnogo teplovogo rezhima tsilindricheskogo elementa karkasa na orbite", *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, no 4(67), pp. 78–94, DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-78-94, EDN QZZOIZ.
32. Terekhov, S. V. (2023), *Teplovye svoystva metallov: Handbook*, State Budget Institution, Donetsk, 184 p.
33. Strapalova, V. N. (2017), "Razrabotka termoreguliruyushchego pokrytiya, soderzhashchego nanochastitsy okcidov metallov", *Cand. chem. sci. diss.* Moscow: D. I. Mendelev University of Chemical Technology of Russia.

#### **Информация об авторах:**

А. Р. Фагалов – инженер лаборатории Микромеханики структурно-неоднородных сред, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1), ORCID: 0009-0009-9331-4626, Scopus ID: 58312938900;  
А. Ю. Беляев – младший научный сотрудник лаборатории Микромеханики структурно-неоднородных сред, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1), ORCID: 0000-0002-0966-5979, WoS ID: F-6708-2017, Scopus ID: 57190124627, ID РИНЦ: 584106;  
Т. Н. Поморцева – ассистент, заведующий лабораторией структурно-механических исследований материалов на микро- иnanoуровне Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), ORCID: 0009-0004-4157-4673.

#### **Information about the authors:**

A. R. Fagalov – Engineer, Laboratory of Micromechanics of Structurally Inhomogeneous Media, Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of RAS (1 Akademika Koroleva St., Perm, 614013, Russia), ORCID: 0009-0009-9331-4626, Scopus ID: 58312938900;  
A. Yu. Beliaev – Junior Researcher, Laboratory of Micromechanics of Structurally Inhomogeneous Media, Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of RAS (1 Akademika Koroleva St., Perm, 614013, Russia), ORCID: 0000-0002-0966-5979, WoS ID: F-6708-2017, Scopus ID: 57190124627;  
T. N. Pomortseva – an assistant and head of the Laboratory of Structural and Mechanical Studies of Materials at the Micro- and Nanolevel at Perm State University (15 Bukireva Street, Perm, 614068, Russia), ORCID: 0009-0004-4157-4673.

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Научная статья

УДК 610.28:621.865.8:531.8

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-76-86

<https://elibrary.ru/nfpfrh>

**Моделирование кинематики медицинского  
манипуляционного робота типа SCARA  
с учетом непараллельности осей вращения  
и мануального рабочего органа  
с четырьмя степенями свободы**

Дмитрий Борисович Смирнов<sup>1</sup>, Илья Александрович Фролов<sup>2</sup>,  
Андрей Александрович Воротников<sup>3</sup>, Андрей Анатольевич Гринь<sup>4</sup>,  
Олег Валерьевич Левченко<sup>5</sup>

<sup>1,2,3,4,5</sup>ФГБОУ ВО "Российский Университет Медицины" Минздрава России НИИ "ТЕХНОБИО-МЕД", Москва, Россия

<sup>4</sup>Научное отделение неотложной нейрохирургии НИИ СП им. Н. В. Склифосовского, Москва, Россия

<sup>5</sup>Департамент здравоохранения города Москвы, Москва, Россия

<sup>1</sup>smirnov2000.dmitry@yandex.ru

<sup>2</sup>frol.451@yandex.ru

<sup>3</sup>aavorotnikov90@gmail.com

<sup>4</sup>aagreen@yandex.ru

<sup>5</sup>levchenko-ov@msmsu.ru

**Аннотация.** В работе представлен кинематический анализ двухзвенного манипуляционного робота типа SCARA с учетом непараллельности осей и мануального рабочего органа с четырьмя степенями свободы. Построена кинематическая модель с учетом рабочего органа, решена обратная задача кинематики. Рассмотрен пример медицинского манипуляционного робота для применения полученной модели в проведении операции по транспедикулярной фиксации позвоночника.

**Ключевые слова:** медицинский манипуляционный робот; кинематический анализ; непараллельность осей; обратная задача кинематики.

**Для цитирования:** Смирнов Д. Б., Фролов И. А., Воротников А. А., Гринь А. А., Левченко О. В. Моделирование кинематики медицинского манипуляционного робота типа SCARA с учетом непараллельности осей вращения и мануального рабочего органа с четырьмя степенями свободы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. № 4(70). С. 76–86. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-76-86. <https://elibrary.ru/nfpfrh>.



© 2025 Смирнов Д. Б., Фролов И. А., Воротников А. А., Гринь А. А., Левченко О. В. Лицензировано по СС BY 4.0. Чтобы ознакомиться с условиями этой лицензии, посетите сайт <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Благодарности:** исследование выполнено при финансовой поддержке ФГБОУ ВО "Российский Университет Медицины" Минздрава России.

*Статья поступила в редакцию 15.09.2025; одобрена после рецензирования 15.11.2025; принята к публикации 08.12.2025.*

## COMPUTER SCIENCE

Research article

# **Kinematic Modeling of a SCARA-Type Medical Manipulation Robot Accounting for Non-Parallelism of Rotational Axes and a Manual End-Effector With Four Degrees of Freedom**

**Dmitry B. Smirnov<sup>1</sup>, Ilya A. Frolov<sup>2</sup>, Andrey A. Vorotnikov<sup>3</sup>, Andrey A. Grin<sup>4</sup>, Oleg V. Levchenko<sup>5</sup>**

<sup>1,2,3,4,5</sup>FSBEI HE "ROSUNIMED" of MOH of Russia, Research Institute "TECHNOBIOMED", Moscow, Russia

<sup>4</sup>N. V. Sklifosovsky Research Institute for Emergency Medicine of Health Department of Moscow, Moscow, Russia

<sup>4</sup>Department of Healthcare of Moscow City, Moscow, Russia

<sup>1</sup>smirnov2000.dmitry@yandex.ru

<sup>2</sup>frol.451@yandex.ru

<sup>3</sup>aavorotnikov90@gmail.com

<sup>4</sup>aagreen@yandex.ru

<sup>5</sup>levchenko-ov@msmsu.ru

**Abstract.** This paper presents a kinematic analysis of a two-joint SCARA-type medical manipulation robot, accounting for non-parallelism of the rotational axes and incorporating a manual end-effector with four degrees of freedom. A kinematic model integrating the end-effector is developed, and the inverse kinematics problem is solved. The proposed approach is demonstrated on a medical manipulation robot designed for transpedicular spinal fixation procedures.

**Keywords:** *medical manipulation robot; kinematic analysis; non-parallel axes; inverse kinematics problem (IKP).*

**For citation:** Smirnov, D. B., Frolov, I. A., Vorotnikov, A. A., Grin', A. A. and Levchenko, O. V. (2025), "Kinematic Modeling of a SCARA-Type Medical Manipulation Robot Accounting for Non-Parallelism of Rotational Axes and a Manual End-Effector With Four Degrees of Freedom", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no 4(70), pp. 76–86, DOI: 10.17072/1993-0550-2025-4-76-86, <https://elibrary.ru/nfpfrh>.

**Acknowledgments:** the study was carried out with financial support by the FSBEI HE "ROSUNIMED" OF MOH OF RUSSIA.

*The article was submitted 15.09.2025; approved after reviewing 15.11.2025; accepted for publication 08.12.2025.*

### **Введение**

Роботы обладают геометрическими погрешностями, которые являются следствием неточного изготовления деталей и сборке узлов. Для компенсации данных погрешностей могут применяться различные методы калибровки (например, с использованием оптических измерительных систем, таких как лазерный трекер) [1]. Традиционные модели, не

учитывающие фактические длины звеньев и их относительное расположение, не пригодны для задач медицинской робототехники.

Вопрос сравнения движений хирурга и роботизированной системы активно исследуется в последние годы. В работах [2–5] показано, что роботизированные комплексы обеспечивают сравнительно лучшие показатели по критериям скорости резания, отклонения от заданной траектории и повторяемости движений. Однако эти исследования сосредоточены на полностью активных системах. В случае гибридных архитектур, сочетающих роботизированное позиционирование с мануальным введением инструмента, подобные критерии требуют пересмотра, поскольку финальная фаза вмешательства остается под контролем хирурга.

В настоящее время существуют решения, где робот управляет хирургом с помощью удаленного пульта управления [6, 7]. Также в современных роботизированных системах для транспедикулярной фиксации, таких как ROSA Spine, ExcelsiusGPS и Mazor X, робот выполняет точное позиционирование направляющей втулки в соответствии с предоперационным планом, после чего хирург вручную вводит инструмент или винт по заданной траектории [8–10]. Здесь же предлагается несколько иной подход, где ориентация задается не роботом программно, а хирургом мануально.

В данной работе рассматривается двухзвеный манипуляционный робот типа SCARA, модифицированный для медицинских задач, с явным учетом непараллельности осей вращения звеньев – фактора, обычно, игнорируемого в традиционных моделях. Особое внимание уделяется интеграции мануального рабочего органа, устанавливаемого через сферический шарнир, который позволяет осуществлять ориентирование рабочий органа вручную, что особенно ценно в условиях операционной.

Целью настоящей работы является разработка и верификация алгоритма решения обратной задачи кинематики (ОЗК) для указанной системы с учетом относительного расположения звеньев и мануального рабочего органа.

### **Описание конструкции медицинского манипуляционного робота**

В данной работе рассматривается медицинский манипуляционный робот, который обладает четырьмя степенями подвижности, предназначенный для проведения операций по транспедикулярной фиксации позвоночника. Его конструкция приведена на рис. 1. Первая и вторая степени подвижности используются для позиционирования в плоскости перпендикулярной оси вращения первого звена, третья и четвертая – для ориентации рабочего органа. Введение хирургического инструмента обеспечивается хирургом мануально в целях повышения безопасности пациента.

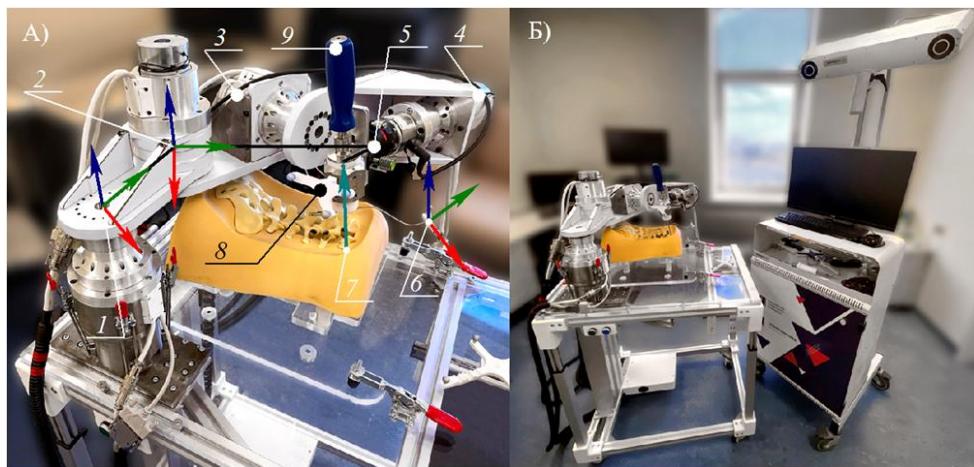
С целью упрощения управления и позиционирования манипулятора предлагается не использовать третью и четвертую степени подвижности, с фокусом на первых двух. Так как на механический интерфейс устанавливается рабочий орган со сферическим шарниром, обеспечивающий три степени свободы для задания требуемой ориентации инструменту. Это компенсирует неиспользование третьей и четвертой степеней подвижности. Подобный подход позволяет использовать упрощенную кинематическую модель в виде двухзвенного манипулятора с непараллельностью осей.

### **Кинематическая модель двухзвенного манипуляционного робота с учетом непараллельности осей вращения**

Представлена модифицированная кинематическая схема SCARA-манипулятора, где ось вращения второго звена наклонена под углом  $\alpha$  относительно оси первого звена на

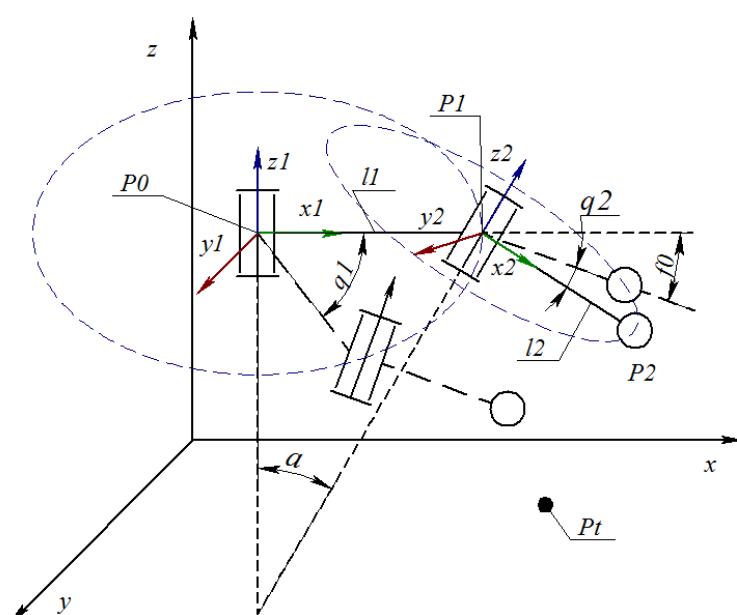
рис. 2. Поскольку первая ось вращения также может быть наклонена относительно вертикали вследствие особенностей конструкции (погрешности установки и/или изготовления), то этот случай математически эквивалентен повороту всей мировой системы координат. Для направления оси вращения первого звена  $n1$  по  $z$ .

Ввиду этого рассматривается упрощенная модель с наклоном второй оси  $n2$  относительно  $n1$  (на углы  $a, f0$  ( $n1$  и  $n2$  скрещивающиеся прямые)). Центр первого звена находится в токе  $P0$ , длина первого и второго звена:  $l1$  и  $l2$  соответственно;  $q1$  и  $q2$  – обобщенные координаты.



**Рис. 1.** А) медицинский манипуляционный робот с четырьмя степенями подвижности: 1 – первая степень подвижности, 2 – вторая, 3 – третья, 4 – четвертая, 5 – сферический шарнир (часть рабочего органа), 6 – мировая система координат (рамка, закрепленная на позвонке), 7 – целевое положение на фантоме с заданной ориентацией, 8 – рамка со светоотражающими маркерами для определения ориентации и положения с помощью навигационной системы, 9 – инструмент, установленный в рабочем органе.

Б) Общий вид системы для проведения хирургических операций по транспедикулярной фиксации позвоночника: медицинский манипуляционный робот закреплен на столе, справа от него – навигационная система



**Рис. 2.** Кинематическая схема двухзвенного манипулятора с наклонной осью вращения

При  $q1 = 0$  первое звено направлено вдоль оси  $X$ . Положение второго шарнира можно выразить как:

$$P1(q1) = P0 + l1 \begin{bmatrix} \cos(q1) \\ \sin(q1) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $P0 = [x0, y0, z0]^T$ .

С вращением первого звена вектор вращения второго звена будет также изменяться:

$$n2(q1) = \begin{bmatrix} \sin(a) \cos(q1 + f0) \\ \sin(a) \sin(q1 + f0) \\ \cos(a) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Начальное направление второго звена (при  $q2 = 0$ ):

$$j2 = \begin{bmatrix} \cos(a) \cos(q1 + f0) \\ \cos(a) \sin(q1 + f0) \\ -\sin(a) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Положение конца второго звена может быть выражено с использованием формул (1)–(3):

$$P2 = P1(q1) + l2 \cdot j2(q1, q2), \quad (4)$$

где

$$j2(q1, q2) = \cos(q2) \cdot j2 + \sin(q2) \cdot (n2(q1) \times j2),$$

$$n2(q1) \times j2 = \begin{bmatrix} -\sin(q1 + f0) \\ \cos(q1 + f0) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обратная задача кинематики (ОЗК) для двухзвенного манипулятора с наклонной осью вращения второго звена. Для решения ОЗК используется формула для концевой точки  $P2$ , выведенная ранее (4). Для этого необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x = x0 + l1 \cos(q1) + l2(\cos(q2) \cos(a) \cos(q1 + f0) - \sin(q2) \sin(q1 + f0)) \\ y = y0 + l1 \sin(q1) + l2(\cos(q2) \cos(a) \sin(q1 + f0) + \sin(q2) \cos(q1 + f0)) \\ z = z0 - l2 \cos(q2) \sin(a) \end{cases} \quad (5)$$

Из последнего уравнения системы находим  $q2$ :

$$q2 = \arccos \left( \frac{z0 - z}{l2 \sin(a)} \right). \quad (6)$$

Обозначим  $\phi = q1 + f0$ , тогда система (5) примет вид:

$$\begin{cases} A = U \cos(\phi) + V \sin(\phi) \\ B = -V \cos(\phi) + U \sin(\phi) \\ \arccos\left(\frac{z0 - z}{l2 \sin(a)}\right) \end{cases}, \quad (7)$$

где

$$\cos(\phi - f0) = \cos(\phi) \cos(f0) + \sin(\phi) \sin(f0),$$

$$\sin(\phi - f0) = \sin(\phi) \cos(f0) - \cos(\phi) \sin(f0),$$

$$A = x - x0,$$

$$B = y - y0,$$

$$U = l1 \cos(f0) + l2 \cos(q2) \cos(a),$$

$$V = l1 \sin(f0) - l2 \sin(q2).$$

Тогда

$$q1 = \arctan\left(\frac{UB + AV}{AU - BV}\right) - f0. \quad (8)$$

### Мануальный рабочий орган: геометрическая декомпозиция

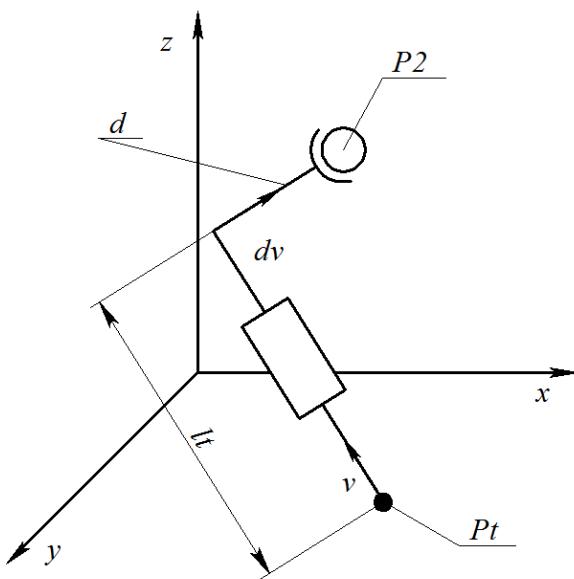
Поскольку мануальный рабочий орган вводится хирургом вручную, его выдвижение, ориентация могут быть выставлены до перемещения робота с помощью навигационной системы. Это возможно, так как целевая ориентация, положение конца рабочего органа, а также глубина погружения винта предопределены в ходе планирования. Это позволяет декомпозировать задачу.

На рисунке 3 представлена кинематическая схема мануального рабочего органа. Расстояние  $d$  между центром сферического шарнира и осью направляющей может быть определено экспериментально с использованием оптической навигационной системы: для этого регистрируются координаты двух точек, лежащих на оси направляющей, после чего вычисляется расстояние от центра шарнира до полученной прямой.

Поскольку на этапе предоперационного планирования заданы целевая точка  $Pt$ , единичный вектор требуемой ориентации инструмента  $v$ , а также расстояние  $d$ , задача сводится к однозначному определению положения точки  $P2$  точки крепления рабочего органа к манипулятору. Эта точка вычисляется геометрически как положение, из которого инструмент, ориентированный вдоль  $v$  и проходящий через направляющую, достигает целевой точки  $Pt$ .

Исходя из этого, можно однозначно получить точку  $P2$ . Используя рис. 3, имеем:

$$P2 = Pt - d \cdot dv - lt \cdot v. \quad (9)$$



**Рис. 3. Кинематическая схема мануального рабочий органа с четырьмя степенями свободы**

### Использование полученной модели для медицинского манипуляционного робота. Идентификация начальных параметров

Для определения фактических длин звеньев  $l1, l2$  и направления осей вращения  $n1, n2$  необходимо последовательно вращать звенья, собирая точки с помощью навигационной системы с меток, расположенных на рамке 8 на рис. 1 А). После того как точки получены, проводится аппроксимация плоскостями для каждой оси вращения, что позволяет определить направление векторов осей вращения. Далее аппроксимация окружностью, например, методом наименьших квадратов (МНК) [11, 12]. После чего можно определить центр основания  $P0$  и длины звеньев ( $l1, l2$ ).

Центр сферического шарнира определяется экспериментально. Для этого мануальный рабочий орган освобождается от фиксации, после чего в четырех и более различных положениях регистрируются координаты маркеров на рамке 8, с использованием оптической навигационной системы. Полученное множество точек аппроксимируется сферой методом наименьших квадратов; ее центр принимается за центр сферического шарнира.

Определение взаимного расположения направляющей и центра сферического шарнира определяется следующим образом: по двум положениям фиксации рабочего органа вдоль направляющей строится прямая, задающая ориентацию направляющей в пространстве, что позволяет установить её геометрическую связь с центром сферического шарнира. По двум положениям фиксации рабочего органа вдоль направляющей строится прямая, задающая ориентацию направляющей в пространстве, что позволяет установить её геометрическую связь с центром сферического шарнира.

Информация о целевой точке, требуемой ориентации инструмента и глубине его введения формируется хирургом на этапе предоперационного планирования на основе данных компьютерной томографии. Интраоперационная привязка плана к анатомии пациента осуществляется с помощью оптической навигационной системы, обеспечивающей отображение отклонений текущего положения инструмента от запланированной траектории.

Общий алгоритм применения предложенного метода включает следующие этапы:

1. Идентификация кинематических параметров манипулятора: определение длин звеньев, направлений осей вращения и положения основания с использованием навигационной системы.
2. Идентификация геометрии рабочего органа: определение центра сферического шарнира и ориентации направляющей.
3. Задание целевой конфигурации инструмента: установка требуемой ориентации и глубины выдвижения на основе предоперационного плана.
4. Расчет обобщенных координат манипулятора: решение обратной задачи кинематики и извлечение инструмента из направляющей для безопасного перемещения.
5. Позиционирование манипулятора: перемещение в расчетное положение.
6. Выполнение хирургической манипуляции: повторное введение инструмента в направляющую и его ручное введение в тело пациента в соответствии с запланированной траекторией.

## Заключение

В работе предложена и верифицирована кинематическая модель двухзвенного медицинского манипуляционного робота типа SCARA, учитывающая реальные геометрические особенности конструкции. Особенностью предложенной архитектуры является интеграция мануального рабочего органа, закрепленного на сферическом шарнире, обеспечивающим три степени свободы для ручной ориентации инструмента. Разработанный алгоритм решения обратной задачи кинематики учитывает, как геометрию манипулятора с непараллельными осями, так и параметры мануального инструмента, определяемые с использованием оптической навигационной системы. Процедура идентификации геометрических параметров, включая длины звеньев, направления осей вращения, положение центра сферического шарнира и ориентацию направляющей, реализована экспериментально и основана на стандартных методах аппроксимации (метод наименьших квадратов).

## Список источников

1. *Nubiola A., Bonev I. A.* Absolute calibration of an ABB IRB 1600 robot using a laser tracker // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2013. Vol. 29, № 1. P. 236–245. URL: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2012.06.004> (дата обращения: 23.08.2025).
2. *Chunikhin A. A., Bazikyan E. A., Poduraev Yu. A.* и др. Comparative experimental assessment of the accuracy of nanosecond laser surgery of the oral cavity when the instrument is moved by a robotic complex and a surgeon // Russian Open Medical Journal. 2019. Vol. 8, № 3. Art. e0307. URL: <https://doi.org/10.15275/rusomj.2019.0307> (дата обращения: 23.08.2025).
3. *Vorotnikov A. A., Buinov M. A., Bushuev S. V.* и др. Standard deviation from the average cutting velocity as a criterion for comparing robot trajectories and manual movements of a doctor for performing surgical operations in maxillofacial surgery // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. 2018. Vol. 7, № 3. P. 319–323. URL: <https://doi.org/10.18178/ijmerr.7.3.319-323> (дата обращения: 23.08.2025).
4. *Vorotnikov A. A., Klimov D. D., Melnichenko E. A.* и др. Criteria for comparison of robot movement trajectories and manual movements of a doctor for performing maxillofacial surgeries // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research. 2018. Vol. 7, № 4. P. 361–366. URL: <https://doi.org/10.18178/ijmerr.7.4.361-366> (дата обращения: 23.08.2025).
5. *Chunikhin A. A., Poduraev Yu. V., Vorotnikov A. A.* и др. Cutting velocity accuracy as a criterion for comparing robot trajectories and manual movements for medical industry //

- Mechanics & Industry. 2017. Vol. 18, № 7. Art. 712. URL: <https://doi.org/10.1051/meca/2017047> (дата обращения: 23.08.2025).
6. Grebenstein M. The DLR MiroSurge – A robotic system for surgery // 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2009. P. 3432–3438. URL: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2009.5152361> (дата обращения: 23.08.2025).
  7. Cepolina F., Razzoli R. P. An introductory review of robotically assisted surgical systems // The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery. 2022. Vol. 18, № 4. Art. e2409. URL: <https://doi.org/10.1002/rcs.2409> (дата обращения: 23.08.2025).
  8. Lefranc M., Peltier J. Evaluation of the ROSA™ Spine robot for minimally invasive surgical procedures // Expert Review of Medical Devices. 2016. Vol. 13, № 10. P. 899–906. URL: <https://doi.org/10.1080/17434440.2016.1236680> (дата обращения: 23.08.2025).
  9. Haik N. V. и др. Robotic systems in spinal surgery: a review of accuracy, radiation exposure, hospital readmission rate, cost, and adverse events // World Neurosurgery. 2025. Vol. 195. Art. 123721. URL: <https://doi.org/10.1016/j.wneu.2025.123721> (дата обращения: 23.08.2025).
  10. D'Souza M. и др. Robotic-assisted spine surgery: history, efficacy, cost, and future trends // Robotic Surgery: Research and Reviews. 2019. P. 9–23. URL: <https://doi.org/10.2147/rsrr.s190720> (дата обращения: 23.08.2025).
  11. Vorotnikov A. A., Poduraev Yu. V., Romash E. V. Estimation of error in determining the centers of rotation of links in a kinematic chain for industrial robot calibration techniques // Measurement Techniques. 2015. Vol. 58, № 8. P. 864–871. URL: <https://doi.org/10.1007/s11018-015-0809-9> (дата обращения: 23.08.2025).
  12. Vorotnikov A. и др. Uncertainty estimation of axes direction determination of industrial robot using an ellipsoid concentration model // Proceedings of the 27th DAAAM International Symposium on Intelligent Manufacturing and Automation. 2016. P. 0480–0486. URL: <https://doi.org/10.2507/27th.daaam.proceedings.072> (дата обращения: 23.08.2025).

## References

1. Nubiola, A. and Bonev, I. A. (2013), "Absolute calibration of an ABB IRB 1600 robot using a laser tracker", Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, vol. 29, no 1, pp. 236–245, URL: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2012.06.004> (accessed date: 23.08.2025).
2. Chunikhin, A. A., Bazikyan, E. A., Poduraev, Y. A. et al. (2019), "Comparative experimental assessment of the accuracy of nanosecond laser surgery of the oral cavity when the instrument is moved by a robotic complex and a surgeon", Russian Open Medical Journal, vol. 8, no 3, art. e0307, URL: <https://doi.org/10.15275/rusomj.2019.0307> (accessed date: 23.08.2025).
3. Vorotnikov, A. A., Buinov, M. A., Bushuev, S. V. et al. (2018), "Standard deviation from the average cutting velocity as a criterion for comparing robot trajectories and manual movements of a doctor for performing surgical operations in maxillofacial surgery", International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research, vol. 7, no 3, pp. 319–323, URL: <https://doi.org/10.18178/ijmerr.7.3.319-323> (accessed date: 23.08.2025).
4. Vorotnikov, A. A., Klimov, D. D., Melnichenko, E. A. et al. (2018), "Criteria for comparison of robot movement trajectories and manual movements of a doctor for perform-

- ing maxillofacial surgeries", International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research, vol. 7, no 4, pp. 361–366, URL: <https://doi.org/10.18178/ijmerr.7.4.361-366> (accessed date: 23.08.2025).
5. Chunikhin, A. A., Poduraev, Y. V., Vorotnikov, A. A. et al. (2017), "Cutting velocity accuracy as a criterion for comparing robot trajectories and manual movements for medical industry", Mechanics & Industry, vol. 18, no 7, art. 712, URL: <https://doi.org/10.1051/meca/2017047> (accessed date: 23.08.2025).
  6. Grebenstein, M. (2009), "The DLR MiroSurge – A robotic system for surgery", 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 3432–3438, URL: <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2009.5152361> (accessed date: 23.08.2025).
  7. Cepolina, F. and Razzoli, R. P. (2022), "An introductory review of robotically assisted surgical systems", The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery, vol. 18, no 4, art. e2409, URL: <https://doi.org/10.1002/rcs.2409> (accessed date: 23.08.2025).
  8. Lefranc, M. and Peltier, J. (2016), "Evaluation of the ROSA™ Spine robot for minimally invasive surgical procedures", Expert Review of Medical Devices, vol. 13, no 10, pp. 899–906, URL: <https://doi.org/10.1080/17434440.2016.1236680> (accessed date: 23.08.2025).
  9. Haik, N. V. et al. (2025), "Robotic systems in spinal surgery: a review of accuracy, radiation exposure, hospital readmission rate, cost, and adverse events", World Neurosurgery, vol. 195, art. 123721, URL: <https://doi.org/10.1016/j.wneu.2025.123721> (accessed date: 23.08.2025).
  10. D'Souza, M. et al. (2019), "Robotic-assisted spine surgery: history, efficacy, cost, and future trends", Robotic Surgery: Research and Reviews, pp. 9–23, URL: <https://doi.org/10.2147/rsrr.s190720> (accessed date: 23.08.2025).
  11. Vorotnikov, A. A., Poduraev, Y. V., Romash, E. V. (2015), "Estimation of error in determining the centers of rotation of links in a kinematic chain for industrial robot calibration techniques", Measurement Techniques, vol. 58, no 8, pp. 864–871, URL: <https://doi.org/10.1007/s11018-015-0809-9> (accessed date: 23.08.2025).
  12. Vorotnikov, A. et al. (2016), "Uncertainty estimation of axes direction determination of industrial robot using an ellipsoid concentration model", Proceedings of the 27th DAAAM International Symposium on Intelligent Manufacturing and Automation, pp. 0480–0486, URL: <https://doi.org/10.2507/27th.daaam.proceedings.072> (accessed date: 23.08.2025).

#### **Информация об авторах:**

Д. Б. Смирнов – младший научный сотрудник НИИ "ТЕХНОБИОМЕД" ФГБОУ ВО "Российский Университет Медицины" Минздрава России (127006, субъект Российской Федерации, г. Москва, вн.тер.г. Муниципальный Округ Тверской, ул. Долгоруковская, д. 4);

И. А. Фролов – научный сотрудник НИИ "ТЕХНОБИОМЕД" ФГБОУ ВО "Российский Университет Медицины" Минздрава России (127006, субъект Российской Федерации, г. Москва, вн.тер.г. Муниципальный Округ Тверской, ул. Долгоруковская, д. 4);

А. А. Воротников – старший научный сотрудник НИИ "ТЕХНОБИОМЕД" ФГБОУ ВО "Российский Университет Медицины" Минздрава России (127006, субъект Российской Федерации, г. Москва, вн.тер.г. Муниципальный Округ Тверской, ул. Долгоруковская, д. 4);

А. А. Гринь – член-корр. РАН, д. мед. наук; заведующий научным отделением неотложной нейрохирургии НИИ СП имени Н. В. Склифосовского (129090, Российская Федерация, г. Москва, Большая Сухаревская пл., д. 3); ведущий научный сотрудник

НИИ "ТЕХНОБИОМЕД" ФГБОУ ВО "Российский Университет Медицины" Минздрава России (127006, субъект Российской Федерации, г. Москва, вн.тер.г. Муниципальный Округ Тверской, ул Долгоруковская, д. 4); главный нейрохирург Департамента здравоохранения города Москвы (119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 14); О. В. Левченко – профессор РАН, д. мед. наук; проректор, заведующий кафедрой нейрохирургии ФГБОУ ВО "Российский Университет Медицины" Минздрава России, (127006, субъект Российской Федерации, г. Москва, вн.тер.г. Муниципальный Округ Тверской, ул Долгоруковская, д. 4).

**Information about the authors:**

D. B. Smirnov – Junior Researcher, Research Institute "Technobiomed", "Russian University of Medicine", Ministry of Healthcare of the Russian Federation (4 Dolgorukovskaya St., Tverskoy Municipal District, Moscow, Russian Federation, 127006);

I. A. Frolov – Researcher, Research Institute "Technobiomed", "Russian University of Medicine", Ministry of Healthcare of the Russian Federation (4 Dolgorukovskaya St., Tverskoy Municipal District, Moscow, Russian Federation, 127006);

A. A. Vorotnikov – Senior Researcher, Research Institute "Technobiomed", "Russian University of Medicine", Ministry of Healthcare of the Russian Federation (4 Dolgorukovskaya St., Tverskoy Municipal District, Moscow, Russian Federation, 127006);

A. A. Grin – Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Medical Sciences; Head of the Department of Emergency Neurosurgery, N. V. Sklifosovsky Research Institute for Emergency Medicine (3 Bolshaya Suharevskaya Square, Moscow, Russian Federation, 129090); Leading Researcher, Research Institute "Technobiomed", "Russian University of Medicine", Ministry of Healthcare of the Russian Federation (4 Dolgorukovskaya St., Tverskoy Municipal District, Moscow, Russian Federation, 127006); Chief Neurosurgeon of the Moscow City Healthcare Department (14 Leninsky Ave., Moscow, Russian Federation, 119071);

O. V. Levchenko – Professor of the Russian Academy of Sciences, Doctor of Medical Sciences; Vice-Rector, Head of the Department of Neurosurgery, "Russian University of Medicine", Ministry of Healthcare of the Russian Federation (4 Dolgorukovskaya St., Tverskoy Municipal District, Moscow, Russian Federation, 127006).

Научный периодический журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" зарегистрирован в 2007 г. как самостоятельное издание, являющееся продолжением серии журнала "Вестник Пермского университета", издаваемого с 1994 г. В каждом номере научного журнала автору разрешается опубликование в любом разделе не более одной статьи, в том числе в соавторстве.

Статьи, оформленные в соответствии с нижеизложенными правилами, должны быть отправлены через **личный кабинет автора на сайте журнала**. Статьи отправляются в двух форматах: текстовый документ и pdf-файл без данных об авторе (для организации слепого рецензирования). Вместе с рукописью отправляются контактные данные авторов в свободной форме в текстовом документе (ФИО, должность, место работы с указанием полного адреса, e-mail, номер телефона), сопроводительное письмо и экспертное заключение о возможности открытого опубликования. Для публикации статьи необходимо заполнить и подписать согласие на обработку персональных данных и лицензионный договор.

**Аннотация статьи** (на русском и английском языках) должна содержать основные краткие сведения: описание проблемы, включая цели и задачи исследования; методы исследования с указанием новизны, если имеется; полученные результаты и выводы. Объем аннотации примерно 250 слов

**Текст статьи** должен содержать разделы: Введение, Постановка задачи, Методы исследования, Результаты, Обсуждение, Заключение, **Благодарности** для русскоязычной статьи; Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgements для англоязычной статьи. Объем рукописи – не менее 6 страниц машинописного текста.

**Оформление.** Текст статьи необходимо оформить в **редакторе Word**. Формат листа, используемый для написания статьи – А4. Размеры верхнего и нижнего полей – 2.6 см, правого и левого – 2.5 см. Расстояние до верхнего и нижнего колонтитулов 1.25 см. Шрифтом Times New Roman Сиг, размер – 12 пт, межстрочный интервал – множитель 1.1. Подписи к рисункам и таблицам набираются курсивом, в конце заголовков и ячеек таблицы точка не ставится. Формулы набираются в редакторе формул.

#### Структура статьи

**Вид статьи** (научная, обзорная или др.).

**Название раздела** (математика, механика, компьютерные науки и информатика).

**УДК**

**DOI:**

**EDN**

**Название статьи на русском языке** (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

**Ф.И.О. автора (-ов) полностью** (Times New Roman – 12 pt, полужирный).

**Место работы (с указанием подразделения), город и страна** (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

**Аннотация на русском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Ключевые слова на русском языке:** 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

**Информация для цитирования** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Благодарности** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Даты поступления, одобрения и принятия рукописи** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Название статьи на английском языке** (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

**На английском языке Ф.И.О. автора (-ов) полностью** (шрифт Times New Roman – 12 pt, полужирный).

**Место работы (с указанием подразделения), город и страна** на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

**Аннотация на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Ключевые слова на английском языке:** 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

**Информация для цитирования на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Благодарности на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Даты поступления, одобрения и принятия рукописи на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Основной текст** статьи (шрифт Times New Roman – 12 pt) набирается в ширину страницы, абзацный отступ основного текста – 1.0 см (задается автоматически, не пробелами). Другие отступы не допускаются. Выравнивание текста по ширине.

**Список источников** оформляется в едином формате, в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018, без использования тире. Если в списке литературы используется источник из электронного ресурса, необходимо указать дату обращения. Ссылка на литературный источник указывается в тексте статьи в квадратных скобках после упоминания цитаты. Список использованных литературных источников необходимо представить на русском и английском языках (**References**). **Список литературы на латинице**, называемый References, готовится отдельно от Списка литературы и размещается сразу за указанным списком. Ссылки на зарубежные источники необходимо повторять в Списке литературы и References. В References недопустимо использовать российские ГОСТы. Необходимо следовать требованиям международных стандартов. Инструкция по оформлению списка литературы в латинице – References, стандарт "Harvard" находится по ссылке [http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-jurnal/metodicheskie\\_materialy/standart\\_Harvard.doc](http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-jurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc).

#### ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Все рукописи проходят двойное слепое рецензирование двумя специалистами в научной области исследования. При возникновении спорной ситуации назначается третий рецензент. Окончательное решение о публикации рукописи принимает главный редактор журнала.

Датой поступления статьи считается день ее отправки через личный кабинет на сайте журнала или по электронной почте журнала (главного редактора). Рукописи рассматриваются в порядке их поступления в течение одного месяца в зависимости от сложности ситуации и объема работы. Редакция оставляет за собой право без согласования с автором проводить литературную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла.

Одобренные статьи публикуются бесплатно. Полнотекстовая версия каждой рукописи выставляется на сайте журнала и в системе РИНЦ (e-library).

Scientific periodical journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" is published since 1994 in the series of the journal "Bulletin of Perm University". Then it was registered as an independent publication in 2007.

An author is allowed to publish no more than one article (also as co-author) in any section for each issue of the journal.

Article's structure should be accordant with the rules below and should be sent through the **author's personal account on the journal's website**. Articles should be sent in two formats: a text document and a pdf-file without information about the author(s) (for review). Authors contact data (name, position and place of work with address, e-mail, phone number in a text document), a cover letter and an expert letter on the open publication possibility should be sent with the manuscript. Author(s) must make and sign consent to the personal data processing and an agreement.

**Abstract** (in Russian and English) should contain main information of research: a problem including the goals and objectives of the study; research methods with novelty indication, if any; significant results and findings. The abstract size is approximately 250 words.

**Text** should contain sections: Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgments. The manuscript size is at least 6 typewritten pages.

An article text must be formatted in the editor Word. The sheet format is A4. The top and bottom margins are 2.6 cm, the right and left margins are 2.5 cm. The distances to the header and footer are 1.25 cm. Times New Roman Cyr font, size – 12 pt, single spacing. Legends for figures and tables are typed in *italics* style. Formulas are typed in the Equation editor.

### The structure of the article

#### Article's type

UDC

DOI

EDN

**TITLE in Russian** (Times New Roman font – 16 pt, bold).

**Name: author (s) name in full** (Times New Roman font – 12 pt).

**Place of work (with departments), city, country** (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**

**Abstract in Russian** (Times New Roman font – 11 pt).

**Keywords in Russian:** 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Information for citation in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Acknowledgments in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Submitted, approved, accepted dates of receipt in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**TITLE in English** (Times New Roman font – 16 pt, bold).

**In English author (s) name in full, place of work (with departments), city, country** (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**.

**Abstract in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Keywords in English:** 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt).

**Information for citation in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Acknowledgments in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Submitted, approved, accepted dates of receipt in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**The article text** (Times New Roman font – 12 pt) is typed the paragraph indent is 1.0 cm (set automatically, not spaces). No other indents are allowed. Justify the text in width (Times New Roman font – 16 pt)..

**References** are formed in a single format with using GOST R 7.0.100–2018 without a dash. If a source from an electronic resource is used, the author should indicate the request date. To indicate a source in text author uses square brackets after the quotation mention. References must be submitted **in Russian and English**.

**The References** list in Latin, called References, is prepared separately from the References List in Russian and placed below. Foreign sources references should be repeated in the References Lists in Russian and English. It is inadmissible to use Russian GOSTs in References. It is necessary to follow the requirements of international standards. Instructions on the References in Latin script design – References, Harvard standard can be found at [http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie\\_materialy/standart\\_Harvard.doc](http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc)

### REVIEW AND PUBLICATION OF ARTICLES

All manuscripts are double-blind peer-reviewed by two research scientists. If a disputable situation arises, a third reviewer is appointed. The final decision on the manuscript publication is made by the editor-in-chief of the journal.

The receipt date of the article is the day of its submission through the personal account on the journal's website or by e-mail of the journal (or editor-in-chief). Manuscripts are reviewed in the order they are received within one month, review period may be changed depending on a situation complexity and a works amount. The journal editors can to edit the article text without basic meaning change.

Approved articles are published free. The full-text version of each manuscript is posted on the journal's website and in the RSCI system (e-library).

Научное издание

ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Математика. Механика. Информатика

Выпуск 4(71)

2025

Адрес учредителя и издателя

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Адрес редакции

614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Физико-математический институт

e-mail: [vestnik\\_mmi@psu.ru](mailto:vestnik_mmi@psu.ru)

Редактор Е. В. Шумилова

Корректор В. Е. Пирожкова

Компьютерная верстка: А. А. Силина

Подписано в печать 17.12.2025. Выход в свет 19.12.2025

Формат 60×84/8. Усл. печ. л. 10,35. Тираж 500 экз. Заказ 141

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Управление издательской деятельности

614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15. Тел. (342) 239-66-36

Отпечатано в типографии ПГНИУ.

Тел. (342) 239-65-47

Подписной индекс журнала

«Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика»

в онлайн-каталоге «Урал-Пресс» –015010

[https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase\\_id=396133](https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase_id=396133)

Распространяется бесплатно и по подписке