

Учредитель: Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Научный журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" публикует оригинальные научные статьи, краткие сообщения и обзорные статьи по направлениям журнала на русском и английском языках, ранее не публиковавшиеся и не представленные для публикации в других изданиях. Все статьи проходят рецензирование членами редакционной коллегии журнала и внешними рецензентами.

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

БУЗМАКОВА М. М., к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
МАЛАНИН В. В., д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
БАРУЛИНА М. А., д. ф.-м. н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
НУРБАКОВА Д. М., PhD in Computer Science; Национальный институт прикладных наук Лиона (National Institute of Applied Sciences of Lyon), Лион, Франция.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

БУЗМАКОВА М. М., к. ф.-м. н., доцент, **главный редактор**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
РУСАКОВА О. Л., к. ф.-м. н., доцент, **ответственный секретарь**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
АПТУКОВ В. Н., д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
АЛЕКСЕЕВ А. О., к. э. н., доцент; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;
БАРУЛИНА М. А., д. ф.-м. н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
БИРЮКОВ А. Н., д. э. н., доцент; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;
БОРИСОВ В. В., д. т. н., профессор; Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», Смоленск, Россия;
ВЕЧТОМОВ Е. М., д. ф.-м. н., профессор; Вятский государственный университет, Киров, Россия;
ГУСЕВ А. Л., д. т. н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ДЕМИДОВ С. С., д. ф.-м. н., профессор; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
ИВАНОВ Д. В., д. ф.-м. н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия;
КРИВОШЕЕВА О. А., д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;
КУЗНЕЦОВ А. Г., к. т. н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
МАЛАНИН В. В., д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАТВЕЕНКО В. П., д. т. н., профессор, академик РАН; Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия;
МАХНЕВ А. А., д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
ПЕСТРЕНИН В.М., к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
РУСАКОВ С. В., д. ф.-м. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
СЕЛЕТКОВ И. П., к. т. н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ТРУСОВ П. В., д. ф.-м. н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;
ТЮРИН С. Ф., д. т. н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;
ХЕННЕР Е. К., д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАО; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ЧЕРНЫХ В. В., д. ф.-м. н., доцент; Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия;
ЧЕРНИКОВ А. В., к. т. н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ЧИНЕНОВА В. Н., к. ф.-м. н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
ШВАРЦ К. Г., д. ф.-м. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ЮМАГУЛОВ М. Г., д. ф.-м. н., профессор; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;
ЯКОВЛЕВ В. И., д. ф.-м. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ЯСНИЦКИЙ Л. Н., д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77 - 66787 от 08.08.2016.

Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ, eLIBRARY ID 28484).

Founder: Perm State University

The journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" publishes Full Articles, Short Communications Article and Review paper/perspectives on the journal's directions, which have not been previously published. The papers have been written in Russian and English. The papers are reviewed by the journal editorial board members and external reviewers.

EDITORIAL COUNCIL

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;

MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;

BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Perm State University, Perm, Russia;

NURBAKOVA D. M., PhD in Computer Science; National Institute of Applied Sciences of Lyon, France.

EDITORIAL BOARD

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Editor-in-Chief**; Perm State University, Perm, Russia;

RUSAKOVA O. L., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Executive Secretary**; Perm State University, Perm, Russia;

APTUKOV V. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;

ALEKSEEV A. O., Candidate of Science in Economics, Associate Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;

BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Perm State University, Perm, Russia;

BIRUKOV A. N., Doctor of Science in Economics, Associate Professor; Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;

BORISOV V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Smolensk Branch of National Research University "MEI", Smolensk, Russia;

VECHTOMOV E. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Vyatka State University, Kirov, Russia;

GUSEV A. L., Doctor of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;

DEMIDOV S. S., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;

IVANOV D. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;

KRIVOSHEEVA O. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;

KUZNECOV A. G., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;

MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;

MATVEENKO V. P., Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician of RAS; Institute of Continuous Media Mechanics, UrD RAS, Perm, Russia;

MAHNEV A. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAS; N.N. Krasovskiy Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS;

PESTRENIN V. M. Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;

RUSAKOV S. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;

SELETKOV I. P., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;

TRUSOV P. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;

TURIN S. F., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;

HENNER E. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAO; Perm State University, Perm, Russia;

CHERMNYH V. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia;

CHERNIKOV A. V., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;

CHINENOVA V. N., Candidate of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;

SHVARTS K. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;

UMAGULOV M. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;

YAKOVLEV V. I., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;

YASNICKIY L. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia.

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor). Certificate of registration of the mass media PI No. FS 77 - 66787 dated 08.08.2016.

The journal is included in the national information and analytical system "Russian Science Citation Index" (eLIBRARY ID 28484).

С о д е р ж а н и е

«Математика»

Алиева С.Т., Мансимов К.Б. Условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в задаче управления линейными разностными уравнениями дробного порядка	5
Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. <i>N</i> -кратное расщепление явной разностной схемы для уравнения вихря в вязкой несжимаемой жидкости.....	12
Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С. Исследование почти периодических решений дифференциальных уравнений	22
Мансимов К.Б., Сулейманова Ш.Ш. Аналог принципа максимума Понтрягина и линеаризованные необходимые условия оптимальности в одной нелинейной задаче управления системой Гурса–Дарбу с переменной структурой	36

«Механика»

Гаришин О.К., Шадрин В.В. Исследование механического поведения эластомерных нанокомпозитов в условиях двухосного нагружения.....	52
Ильин В.А., Суханов М.О. Математическое моделирование нелинейной электроконвекции идеального жидкого диэлектрика в переменном электрическом поле	60
Макеев Н.Н. К задаче приведения уравнений динамики твердого тела в гиперболическом пространстве	70
Фёдоров А.Ю., Галкина Е.Б., Слободинюк А.И. Экспериментальное исследование концентрации напряжений в окрестностях вершин V-образных трещин разной глубины при их заполнении различными материалами.....	80

«Информатика»

Кобяков Н.С. Разработка модели для оценки опасности деструктивных воздействий вредоносных утилит на автоматизированные системы специального назначения с использованием регрессионного анализа.....	89
Информация для авторов.....	96

C o n t e n t s

«Mathematics»

Alieva S.T., Mansimov K.B. Optimality Condition of the Pontryagin Maximum Principle Type in the Control Problem of Fractional Series Linear Difference Equations.....	5
Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastuhov D.F., Pastuhov Yu.F. Explicit Difference Scheme N -fold Splitting For the Vortex Equation in a Viscous Incompressible Fluid.....	12
Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S. Study of Almost Periodic Solutions of Differential Equations.....	22
Mansimov K.B., Suleymanova Sh.Sh. Pontryagin's Maximum Principle Analog and Linearized Necessary Conditions of Optimality in One Nonlinear Control Problem of a Gurs–Darboux System With a Variable Structure.....	36

«Mechanics»

Garishin O.K., Shadrin V.V. Studies of Elastomeric Nanocomposites Mechanical Behavior Under Biaxial Loading.....	52
Il'in V.A., Sukhanov M.O. Mathematical Modeling of Nonlinear Electroconvection of an Ideal Liquid Dielectric in an Alternating Electric Field.....	60
Makeev N.N. On the Problem of Reducing the Equations of Rigid Body Dynamics in Hyperbolic Space.....	70
Fedorov A.Yu., Galkina E.B., Slobodinyuk A.I. Experimental Study of Stress Concentration Near the Tips of V-shaped Cracks of Different Depths Filled With Various Materials.....	80

«Computer Science»

Kobyakov N.S. Model Development for Assessing the Danger of Malicious Utilities' Destructive Effects on Automated Special–Purpose Systems Using Regression Analysis	89
Information for authors	96

«Математика»

Научная статья

УДК 517.977

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11

Условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в задаче управления линейными разностными уравнениями дробного порядка**Саадат Тофик кызы Алиева¹, Камил Байрамали оглы Мансимов²**^{1, 2}Бакинский государственный университет, Институт систем управления НАН Азербайджана,

Баку, Азербайджан

¹saadata@mail.ru²kamilbmansimov@gmail.com

Аннотация. В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления системами линейных двухмерных разностных уравнений дробного порядка. Предполагается, что управляющая функция входит в граничное условие и функционал является линейным. Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума. В случае нелинейного, но выпуклого функционала качества доказано достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова: допустимое управление; оптимальное управление; открытое множество; разностное уравнение дробного порядка; дробный оператор; линеаризованный принцип максимума; дробная сумма; необходимое и достаточное условие

Для цитирования: Алиева С. Т., Мансимов К. Б. Условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в задаче управления линейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 5–11. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11.

Статья поступила в редакцию 13.07.2023; одобрена после рецензирования 10.09.2023; принята к публикации 28.11.2023.

«Mathematics»

Research article

Optimality Condition of the Pontryagin Maximum Principle Type in the Control Problem of Fractional Series Linear Difference Equations**Saadat T. Alieva¹, Kamil B. Mansimov²**^{1, 2}Baku State University, Institute of control system of Azerbaijan National academy of sciences,

Baku, Azerbaijan

¹saadata@mail.ru²kamilbmansimov@gmail.com

Abstract. The optimal control problem of fractional order linear two-dimensional difference equations systems is considered. It is assumed that the control function is included in the boundary condition, and the functional is linear. A necessary and sufficient optimality condition is proved in the discrete maximum principal form. A sufficient optimality condition is proved in the nonlinear but convex cost functional case.



Эта работа © 2023 Алиева С.Т., Мансимов К.Б. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Keywords: *admissible control; optimal control; open set; fractional order difference equation; fractional operator; linearized maximum principle; fractional sum; necessary and sufficient condition*

For citation: *Alieva S. T., Mansimov K. B. Optimality Condition of the Pontryagin Maximum Principle Type in the Control Problem of Fractional Series Linear Difference Equations. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):5-11. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11.*

The article was submitted 13.07.2023; approved after reviewing 10.09.2023; accepted for publication 28.11.2023.

Введение

В работе [1] получено представление решения краевой задачи, для системы линейных неоднородных двухмерных разностных уравнений дробного порядка.

В этой работе для рассматриваемого уравнения изучается задача оптимального управления при предположении, что управляющая функция входит в граничное условие, а функционал является линейным.

Доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума.

В случае нелинейного, но выпуклого функционала качества доказано достаточное условие оптимальности.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о минимуме линейного функционала

$$S(u) = c'a(x_1) + d'z(t_1, x_1) \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(x) \in U \subset R^r, x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha z(t+1, x+1) = \\ A(t, x)z(t, x) + B(t, x)z(t+1, x) \\ + C(t, x)z(t, x+1) + D(t, x), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z(t_0, x) = a(x), x \in X \cup x_1, \\ z(t, x_0) = b(t), t \in T \cup t_1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\} \\ a(x_0) = b(t_0) = a_0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta^\beta a(x+1) = K(x)a(x) + g(x, u(x)), \\ x \in X, \\ a(x_0) = a_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $K(x)$ заданные $(n \times n)$ -дискретные матричные функции, $D(t, x)$ – заданная n -мерная дискретная вектор-функция, $b(t)$ – заданная дискретная вектор-функция, a_0, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданы, $g(x, u)$ – заданная непрерывная по u при всех x , n -мерная вектор-функция, $u(x)$ – r -мерная

вектор-функция управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U (допустимое управление), c и d – заданные n -мерные постоянные векторы, а $\Delta^\alpha z(t, x)$, и $\Delta^\beta a(x)$, $0 < \alpha, \beta < 1$ дробные операторы порядка α и β (см., например, [2–7]), а операция $(')$ означает транспонирование.

Допустимое управление, доставляющее минимальное значение функционалу (1), при ограничениях (2)–(6) назовем оптимальным управлением.

Формула приращения функционала качества

Пусть $u(x), \bar{u}(x) = u(x) + \Delta u(x)$ – два допустимых управления. Через

$$\begin{aligned} (a(x), z(t, x)), (\bar{a}(x) = a(x) + \\ \Delta a(x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x)) \end{aligned}$$

обозначим соответствующие им решения системы (2)–(6).

Тогда приращение функционала (1) примет вид

$$\Delta S(u) = c'\Delta a(x_1) + d'\Delta z(t_1, x_1). \quad (7)$$

Здесь $\Delta a(x)$, $\Delta z(t, x)$ являются решениями задач:

$$\Delta^\beta \Delta a(x) = K(x)\Delta a(x) + \Delta_{\bar{u}(x)}g[x], \quad (8)$$

$$\Delta a(x_0) = 0. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha \Delta z(t+1, x+1) = \\ = A(t, x)\Delta z(t, x) + B(t, x)\Delta z(t+1, x) + \\ + C(t, x)\Delta z(t, x+1), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta a(x), x \in X \cup x_1, \quad (11)$$

$$\Delta z(t, x_0) = 0, t \in T \cup t_1, \quad (12)$$

соответственно, где по определению

$$\Delta_{\bar{u}(x)}g[x] = g(x, \bar{u}(x)) - g(x, u(x)).$$

Как видно уравнения, (8) и (10) являются системами линейных неоднородных разностных уравнений относительно $\Delta a(x)$ и $\Delta z(t, x)$ соответственно.

Имеет место (см. [9]).

Теорема 1. Решение $y(t)$ системы линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка

$$\Delta^\alpha y(t+1) = A(t)y(t) + g(t)$$

с начальными условиями

$$y(t) = y_0$$

допускает представление

$$\begin{aligned} y(t) = & y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, j)A(j)] + \\ & + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, j)f(j) \times \\ & \times \prod_{k=j+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, k)A(k)], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$R_\alpha(t, j) = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j}.$$

А биномиальный коэффициент $\binom{a}{n}$ определяется по формуле

$$\binom{a}{n} = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)\Gamma(n+1)}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Здесь для любого $x, y \in R$, $x^{(y)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-y)}$, где Γ – гамма функция, для которой выполняется тождество $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

По теореме 1, решение уравнения (8) с начальными условиями (9) представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta a(x) = & \sum_{j=x_0}^{x-1} R_\beta(x-1, j)\Delta_{\bar{u}(j)}g[j] \times \\ & \times \prod_{m=j+1}^{x-1} [1 + R_\beta(x-1, m)K(m)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем следующее обозначение

$$\begin{aligned} \Phi(x, j) = & R_\beta(x-1, j) \times \\ & \times \prod_{m=j+1}^{x-1} [1 + R_\beta(x-1, m) \times \\ & \times K(m)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда

$$\Delta a(x) = \sum_{j=x_0}^{x-1} \Phi(x, j)\Delta_{\bar{u}(j)}g[j]. \quad (16)$$

Из результата же работы [1] следует

Теорема 2. Решение $z(t, x)$ краевой задачи (3)–(5) для системы линейных 2D разностных уравнений дробного порядка допускает представление в следующем виде:

$$\begin{aligned} z(t, x) = & a(x_0) + \\ & + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, x-1; j, x_0-1) \times \\ & \times C(j, x_0-1)b(j) + \\ & + \sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t_0-1, x-1; t_0-1, s) \times \\ & \times B(t_0-1, s)a(s) + \\ & + \sum_{j=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1, j; s)D(j, s). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_\alpha(t-1, x-1; j, s) = \\ = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j} \binom{x-s+\alpha-1}{x-s}, \end{aligned}$$

где $R_\alpha(t-1, x-1; j, s)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} R_\alpha(t-1, x-1; j, s)A(j, s) = \\ = -R_\alpha(t-1, x-1; j-1, s)B(j-1, s) - \\ -R_\alpha(t-1, x-1; j, s-1)C(j, s-1), \\ j = t-1, \dots, t_0, s = x-1, \dots, x_0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$R_\alpha(t, x; t-1, x-1) = E.$$

Тогда ясно что,

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) = \\ = \sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1, x-1; t_0-1, s) \times \\ \times B(t_0-1, s)\Delta a(s). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (16) в (19) будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) = \\ = \sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1, x-1; t_0-1, s) \times \\ \times B(t_0-1, s)\Delta a(s) \\ = \sum_{s=x_0}^{x-1} R_\alpha(t-1, x-1; t_0-1, s) \times \\ \times B(t_0-1, s) \sum_{j=x_0}^{x-1} \Phi(x, j)\Delta_{\bar{u}(j)}g[j]. \end{aligned}$$

Полагая

$$Q_1(t, x, s) = \sum_{\tau=s+1}^{x-1} R_\alpha(t-1, x-1; t_0-1, \tau) \times B(t_0-1, \tau) \Phi(\tau, s), \quad (20)$$

получим, что

$$\Delta z(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t, x, s) \Delta_{\bar{u}(s)} g[s]. \quad (21)$$

Принимая во внимание соотношения (16), и (21) формулу приращения (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= c' \Delta a(x_1) + d' \Delta z(t_1, x_1) = \\ &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} c' \Phi(x_1, x) \Delta_{\bar{u}(x)} g[x] + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} d' Q_1(t_1, x_1, x) \Delta_{\bar{u}(x)} g[x] = \\ &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [c' \Phi(x_1, x) + \\ &+ d' Q_1(t_1, x_1, x)] \Delta_{\bar{u}(x)} g[x]. \quad (22) \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} p(x) &= - [c' \Phi(x_1, x) + d' Q_1(t_1, x_1, x)] \\ M'(x, u, p) &= p' g(x, u) \\ \Delta_{\bar{u}(x)} M[x] &= p' \Delta_{\bar{u}(x)} g[x], \end{aligned} \quad (23)$$

соотношение (22) записывается в виде

$$\Delta S(u) = - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(x)} M[x]. \quad (24)$$

Можно доказать, что вектор-функция $p(x)$ определяемая формулой (23) является решением уравнения

$$p(x-1) = - [c' \Phi(x_1, x-1) + d' Q_1(t_1, x_1, x-1)]. \quad (25)$$

Далее из (19) получаем, что

$$\begin{aligned} Q_1(t_1, x_1, x-1) &= \\ &= R_\alpha(t_1-1, x_1-1; t_0-1, x) Q_1(t_1, x_1, x). \end{aligned} \quad (26)$$

Принимая во внимание (15), (26) в (25), будем иметь

$$p(x-1) = p(x) + \psi(t_0-1, x) \times B'(t_0-1, x), \quad (27)$$

где по определению

$$\psi(t, x) = -R'_\alpha(t_1, x_1; t, x) d.$$

Из (25) следует, что

$$p(x_1-1) = -c. \quad (28)$$

Далее, используя (28), показывается, что $\psi(t, x)$, определяемая формулой

$$\psi(t, x) = -R'_\alpha(t_1-1, x_1-1; t, x) d,$$

является решением краевой задачи:

$$\begin{aligned} \psi(t-1, x-1) &= A'(t, x) \psi(t, x) + \\ &- B'(t, x) \psi(t-1, x) - \\ &- C'(t, x) \psi(t, x-1), \quad (29) \\ \psi(t_1-1, x-1) &= \\ &= B'(t_1-1, x) \psi(t_1-1, x), \\ \psi(t-1, x_1-1) &= \\ &= C'(t, x_1-1) \psi(t, x_1-1), \\ \psi(t_1-1, x_1-1) &= -d. \end{aligned}$$

Условие оптимальности

При помощи представления (24) доказывается

Теорема 3. Для оптимальности допустимого управления $u(x)$, $x \in X$ в задаче (1)–(5) необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\begin{aligned} \max_{v \in U} M(\xi, v, p(\xi)) &= \\ &= M(\xi, u(\xi), p(\xi)) \end{aligned} \quad (30)$$

выполнялось для всех $\xi \in X$.

Доказательство. Необходимость: Пусть $u(x)$ оптимальное управление. Тогда из формулы приращения (24) следует, что для любого допустимого управления $\bar{u}(x) = u(x) + \Delta u(x)$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(x)} M[x] \leq 0. \quad (31)$$

Используя произвольность $\bar{u}(x)$, определим его следующим образом:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} v, & x = \xi \in X, \\ u(x), & x \neq \xi \in X, \end{cases}$$

где $\xi \in X$ – произвольная точка, $v \in U$ произвольный вектор.

Тогда неравенство (31) примет вид:

$$\Delta_v M[\xi] \leq 0.$$

Отсюда, в силу произвольности $v \in U$ и $\xi \in X$, следует условие максимума (30).

Перейдем к доказательству достаточности условия максимума (30).

Предположим, что для допустимого управления $u(x)$ выполняется условие максимума Понтрягина (30). Из него следует, что для любого $\xi \in X$, $\bar{u}(\xi) = v \in U$, $\Delta_{\bar{u}(\xi)} M[\xi] \leq 0$.

Отсюда, в силу произвольности $\xi \in X$, следует, что

$$\sum_{\xi=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(\xi)} M[\xi] \leq 0.$$

С учетом этого неравенства из (24) получаем, что для любого допустимого управления $\bar{u}(x)$

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) \geq 0, \text{ т. е.} \\ S(\bar{u}) \geq S(u).$$

Из последнего соотношения следует, что управление $u(x)$ является оптимальным управлением. Этим достаточность дискретного условия максимума Понтрягина доказана.

Случай нелинейного выпуклого критерия качества

Изучим несколько более общий случай. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = \varphi_1(a(x_1)) + \varphi_2(z(t_1, x_1)) \quad (32)$$

при ограничениях (2)–(5).

Здесь $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(z)$ – заданные непрерывно дифференцируемые и выпуклые в R^n скалярные функции.

В случае задачи (1)–(5), (32) приращение функционала (32), соответствующее допустимым управлениям $u(x)$, $\bar{u}(x) = u(x) + \Delta u(x)$ при помощи формулы Тейлора можно записать в виде

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \\ = \frac{\partial \varphi_1(a(x_1))}{\partial a} \Delta a(x_1) + \\ + \frac{\partial \varphi_2(z(t_1, x_1))}{\partial z} \Delta z(t_1, x_1) + \\ + o_1(\|\Delta a(x_1)\|) + o_2(\|z(t_1, x_1)\|), \quad (33)$$

где величины $o_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ определяются из разложений

$$\varphi_1(\bar{a}(x_1)) - \varphi_1(a(x_1)) = \\ = \frac{\partial \varphi_1(a(x_1))}{\partial a} \Delta a(x_1) + \\ + o_1(\|\Delta a(x_1)\|), \\ \varphi_2(\bar{z}(t_1, x_1)) - \varphi_2(z(t_1, x_1)) = \\ = \frac{\partial \varphi_2(z(t_1, x_1))}{\partial z} \Delta z(t_1, x_1) + \\ + o_2(\|z(t_1, x_1)\|),$$

а $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$ определяется формулой

$$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

Используя представления (16), (21) формула приращения (33) преобразуется к виду:

$$\Delta S(u) = \\ = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial \varphi_1(a(x_1))}{\partial a} \Phi(x, x_1) \Delta_{\bar{u}(x)} g[x] + \\ + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial \varphi_2(z(t_1, x_1))}{\partial z} Q_1(t_1, x_1, x) \times \\ \times \Delta_{\bar{u}(x)} g[x] + o_1(\|\Delta a(x_1)\|) + \\ + o_2(\|z(t_1, x_1)\|) = \\ = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial \varphi_1(a(x_1))}{\partial a} \Phi(x, x_1) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi_2(z(t_1, x_1))}{\partial z} Q_1(t_1, x_1, x) \right] \Delta_{\bar{u}(x)} g[x] \\ + o_1(\|\Delta a(x_1)\|) + o_2(\|z(t_1, x_1)\|). \quad (34)$$

Полагая

$$p'(x) = - \left[\frac{\partial \varphi_1(a(x_1))}{\partial a} \Phi(x, x_1) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi_2(z(t_1, x_1))}{\partial z} Q_1(t_1, x_1, x) \right], \quad (35)$$

$$M(x, u, p) = p' g(x, u), \\ \psi(t, x) = -R'_a(t_1, x_1; t, x) \times \\ \times \frac{\partial \varphi_2(z(t_1, x_1))}{\partial z}, \quad (36)$$

формула приращения (34) записывается в виде

$$\Delta S(u) = - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(x)} M[x] + \\ + o_1(\|\Delta a(x_1)\|) + \\ + o_2(\|z(t_1, x_1)\|). \quad (37)$$

Из (35), (36), используя (15), (18), получим, что $p(x)$ и $\psi(t, x)$ являются решениями следующих задач соответственно:

$$p(x-1) = \\ = p(x) + \psi(t_0-1, x) \times \\ \times B'(t_0-1, x), \quad (38) \\ p(x_1-1) = - \frac{\partial \varphi_1(a(x_1))}{\partial a}.$$

$$\psi(t-1, x-1) = A'(t, x) \psi(t, x) - \\ - B'(t, x) \psi(t-1, x) - \\ - C'(t, x) \psi(t, x-1), \quad (39)$$

$$\psi(t_1-1, x-1) = \\ = B'(t_1-1, x) \psi(t_1-1, x), \\ \psi(t-1, x_1-1) = \\ = C'(t, x_1-1) \psi(t, x_1-1),$$

$$\psi(t_1 - 1, x_1 - 1) = -\frac{\partial \varphi_2(z(t_1, x_1))}{\partial z}.$$

В силу выпуклости функций $\varphi_1(a), \varphi_2(z)$ ясно, что (см. например [11, с. 164]).

$$o_1 \|\Delta a(x_1)\| \geq 0, o_2 \|z(t_1, x_1)\| \geq 0.$$

Поэтому из (37) следует неравенство

$$\Delta S(u) \geq -\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(x)} M[x]. \quad (40)$$

Из соотношения (40) следует

Теорема 4. Для оптимальности допустимого управления $u(x)$ в задаче (1)–(5), (32) достаточно, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M[x] \leq 0 \quad (41)$$

выполнялось для всех $v(x) \in U, x \in X$.

Доказательство. Пусть допустимое управление $u(x)$ удовлетворяет соотношению (41). Тогда из неравенства (40) следует, что для любого допустимого управления $v(x)$

$$S(v) - S(u) \geq 0.$$

1. Последнее соотношение означает оптимальность допустимого управления $u(x)$. Этим доказательство теоремы 4 завершено.

Таким образом, в двух случаях удалось доказать необходимое и достаточное условия оптимальности в форме дискретного принципа максимума Понтрягина.

Заключение

В работе изучается одна дискретная граничная задача управления, описываемая системой линейной двумерной разностных уравнений дробного порядка.

Используя представления решения рассматриваемой краевой задачи доказано необходимое и достаточное условие оптимальности типа дискретного принципа максимума.

В случае нелинейного по выпуклого критерия качества доказана достаточность условия максимума.

Список источников

1. Алиева С.Т. Представление решения системы линейных неоднородных двухмерных разностных уравнений дробного порядка α // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1(52). С. 4–8.

2. J. Jagan Mohan and G. V. S. R. Deekshitulu. Fractional Order Difference Equations // Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations Volume 2012, Article ID 780619, 11 pages. doi: 10.1155/2012/780619.
3. K. Miller, B. Ross. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: Wiley, 1993. 366 p.
4. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. 340 p.
5. Christopher Goodric, Allan C. Piterson. Discrete fractional calculus. Department of Mathematic University of Nebraska–Lincoln Lincoln, NE, USA. 2015.
6. Алиева С.Т. Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника. 2021. № 54. С. 4–11.
7. Алиева С.Т., Мансимов К.Б. Аналог линеаризованного принципа максимума для задачи оптимального управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2021. Вып. 1(52). С. 9–15.
8. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: Изд-во Бакинского гос. ун-та, 2002. 114 с.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 246 с.
10. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 2001. 400 с.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. и др. Методы оптимизации. Минск: Изд-во "Четыре четверти", 2011. 472 с.

References

1. Aliyeva S.T. Predstavleniye resheniya sistemy lineynykh neodnorodnykh dvukhmernykh raznostnykh uravneniy drobnogo poryadka α . Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2021;(52):4-8. (In Russ.).
2. J. Jagan Mohan and G. V. S. R. Deekshitulu. Fractional Order Difference Equations. Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations. Vol. 2012:11. doi: 10.1155/2012/780619.

3. *K. Miller, B. Ross.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: Wiley; 1993. 366 p.
4. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press; 1999. 340 p.
5. *Christopher Goodric, Allan C. Piterson.* Discrete fractional calculus. Department of Mathematic University of Nebraska–Lincoln. Lincoln: NE, USA; 2015.
6. *Aliyeva S.T.* Printsip maksimuma Pontryagina dlya nelineynykh raznostnykh uravneniy drobnogo poryadka. Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika. 2021;54:4-11. (In Russ.).
7. *Aliyeva S.T., Mansimov K.B.* Analog linearnizovannogo printsipa maksimuma dlya zadachi optimal'nogo upravleniya nelineynymi raznostnymi uravneniyami drobnogo poryadka. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2021;1(52):9-15. (In Russ.).
8. *Mansimov K.B.* Diskretnyye sistemy. Baku: Izd-vo Bakinskogo Gosudarstvennogo Universiteta; 2002. 114 p. (In Russ.).
9. *Gabasov R., Kirillova F.M.* Optimizatsiya lineynykh sistem. Baku: Izd-vo Bakinskogo Gosudarstvennogo Universiteta; 1973. 246 p. (In Russ.).
10. *Gayshun I.V.* Sistemy s diskretnym vremenem. Mn. IM NAN Belarusi; 2001. 400 p. (In Russ.).
11. *Gabasov R., Kirillova F.M., Al'sevich V.V. i dr.* Metody optimizatsii. Minsk: izd-vo "Chetyre chetverti"; 2011. 472 p. (In Russ.).

Информация об авторах:

S. T. Алиева – кандидат физико-математических наук, доцент, Бакинский государственный университет (1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23);

К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета (1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23), руководитель лаборатории "Управление в сложных динамических системах" института систем управления НАН Азербайджана (1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 68), AuthorID 247352.

Information about the authors:

S. T. Aliyeva – Candidate of Sciences (Physical and Mathematical), Associate Professor, Baku State University (23, Z. Khalilov St., Baku, Azerbaijan, 1148);

K. B. Mansimov – Doctor of Sciences (Physical and Mathematical), Professor, Head of the Mathematical Cybernetics Department, Baku State University (23, Z. Khalilov St., Baku, Azerbaijan, 1148), Head of the Laboratory "Control in Complex Dynamical Systems" of the Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, 1141), AuthorID 247352.

Научная статья

УДК 519.6: 532.5

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-12-21

***N*-кратное расщепление явной разностной схемы для уравнения вихря в вязкой несжимаемой жидкости**

**Н. К. Волосова¹, К. А. Волосов², А. К. Волосова², М. И. Карлов³, Д. Ф. Пастухов⁴,
Ю. Ф. Пастухов⁴**

¹Московский государственный технический университет (МГТУ) им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

²Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия

³Московский физико-технический университет (МФТИ), Москва, Россия

⁴Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь

Автор, ответственный за переписку: Дмитрий Феликсович Пастухов, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация. В работе впервые рассматривается возможность n -кратного ($n=100,200$) расщепления явной разностной схемы для уравнения вихря в системе уравнений гидродинамической задачи в прямоугольной каверне с вязкой несжимаемой жидкостью и с числом Рейнольдса $Re=1000$. Предложенный в работе алгоритм позволяет значительно увеличить максимальный временной шаг за одну итерацию общей задачи и уменьшить в десятки раз общее время расчета. Алгоритм расщепления для явной разностной схемы уравнения вихря эффективен в случае, если время, затраченное программой на цикл расщепления во много раз меньше времени решения общей задачи на одну итерацию. Численно показано, что качественно решение без расщепления совпадает с решением расщепленной схемы (совпадение в пяти значащих цифрах). При этом решение задачи без расщепления не является полностью установившимся (постоянно во времени первые пять значащих цифры после 400000 итераций). Численно показано, что двухслойная и трехслойная явные разностные схемы имеют установившиеся решения с совпадением полей в 11–12 значащих знаках в каждом узле расчетной сетки (скорости, вихря, функции тока) после 21000 итераций.

Ключевые слова: численные методы; гидродинамика; метод расщепления; устойчивость; разностные схемы; вихрь; функция тока

Для цитирования: Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. N -кратное расщепление явной разностной схемы для уравнения вихря в вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 12–21. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-12-21.

Статья поступила в редакцию 30.09.2023; одобрена после рецензирования 01.11.2023; принята к публикации 28.11.2023.

Research article

Explicit Difference Scheme N -fold Splitting For the Vortex Equation in a Viscous Incompressible Fluid

N.K. Volosova¹, K.A. Volosov², A.K. Volosova², M.I. Karlov³, D.F. Pastuhov⁴, Yu.F. Pastuhov⁴

¹Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russia

²Russian University of Transport (RUT MIIT), Moscow, Russia

³Moscow University of Physics and Technology (MIPT), Moscow, Russia

⁴Polotsk State University, Novopolotsk, Republic of Belarus

Corresponding author: Dmitriy F. Pastukhov, dmitrij.pastuhov@mail.ru



Эта работа © 2023 Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. This work is the first to consider the possibility of *N*-fold (*n*=100,200) splitting of an explicit difference scheme for the vortex equation in the system of equations of a hydrodynamic problem in a rectangular cavity with a viscous incompressible fluid and with the Reynolds number *Re*=1000. The algorithm proposed in the work allows us to significantly increase the maximum time step per iteration of the general problem and reduce the total calculation time by tens to hundreds of times. The splitting algorithm for the vortex equation explicit difference scheme is effective if the time spent by the program on the splitting cycle is many times less than the general problem on one iterationsolving time. It is shown numerically that the solution without splitting qualitatively coincides with the solution of the split circuit (match to five significant figures). In this case, the solution to the problem without splitting is not completely steady (the first five significant digits are constant in time after 400000 iterations). It is shown numerically that two-layer and three-layer explicit difference schemes have steady-state solutions with fields matching in 11-12 significant signs at each node of the computational grid (velocity, vortex, stream function) after 21000 iterations.

Keywords: numerical methods; hydrodynamics; splitting method, stability; difference schemes; vortex; stream function

For citation: Volosova N.K., Volosov K.A., Volosova A.K., Karlov M.I., Pastuhov D.F., Pastuhov Yu.F. Explicit Difference Scheme *N*-fold Splitting for the Vortex Equation in a Viscous Incompressible Fluid. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):12-21. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-12-21.

The article was submitted 30.09.2023; approved after reviewing 01.11.2023; accepted for publication 28.11.2023.

Введение

Рассматривается гидродинамическая задача для вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной каверне с подвижной крышкой. Данная тестовая задача является полигоном для апробации новых вычислительных методов и алгоритмов, так как имеет в прямоугольной области две особые точки поля скорости [1], [2], [3]. При движении точки наблюдения по левой боковой стороне прямоугольника вверх в угол значение скорости равно нулю. Справа от угла на верхнем отрезке скорость скачком меняется с нуля до единицы и направлена вместе с крышкой вправо. Аналогичная ситуация происходит в верхнем правом углу. В работе предложен алгоритм *n*-кратного расщепления явной разностной схемы для уравнения вихря.

В работе Р.П. Федоренко описан [4, с. 137] метод расщепления уравнения в частных производных по физическим направлениям (разделение по слагаемым в общем уравнении). В методе расщепления на каждом дробном временном интервале $\tau_1 = \tau_0 / n$ использовалось одно и то же уравнение вихря в общем виде, а число дробных шагов (кратность расщепления) было не *n*=2-3 как в работе [4], а *n*=100, 200.

Постановка задачи

Рассмотрим классическую гидродинамическую задачу в прямоугольной области (каверне) с системой уравнений в частных производных, начальными и краевыми условиями для физических полей [1].

Обозначим $(u(x, y), v(x, y))$ вектор скорости жидкой частицы (на твердой границе – боковых отрезках и на нижнем отрезке прямоугольной каверны скорость равна нулю – условие прилипания частиц жидкости). Также нормальная компонента скорости равна нулю на всей прямоугольной границе. Начало системы координат расположим в нижнем левом углу прямоугольника, направим ось *y*-вверх, ось *x*-вправо. Ширину прямоугольной каверны обозначим *L*, высоту буквой *H*.

В гидродинамической задаче в закрытой каверне подвижная верхняя крышка перемещается вправо с постоянной скоростью u_{\max} характерные масштабы длины *L*, времени $\frac{L}{u_{\max}}$, скорости u_{\max} , функции тока Lu_{\max} , вихря $\frac{u_{\max}}{L}$, числа Рейнольдса *Re*. Введем безразмерные переменные: \bar{x} – горизонтальная координата, \bar{y} – вертикальная координата, $\bar{\psi}, \bar{w}$ – безразмерные функции тока и вихря соответственно, (\bar{u}, \bar{v}) – вектор безразмерной скорости, \bar{t} – безразмерное время по формулам

$$0 \leq \bar{x} = \frac{x}{L} \leq 1, \quad 0 \leq \bar{y} = \frac{y}{L} \leq k = \frac{H}{L}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\psi_{\max}}, \quad \psi_{\max} = Lu_{\max}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{\max}}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_{\max}}, \quad \bar{w} = \frac{w}{w_{\max}}, \quad w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L}$$

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, \quad T = \frac{L}{u_{\max}}, \quad Re = \frac{u_{\max} L}{\nu}$$

С безразмерными переменными и функциями запишем систему уравнений гидродинамики [1], [2]:

$$\begin{cases} \overline{\psi}_{xx} + \overline{\psi}_{yy} = -\overline{w}(x, y), \quad 0 < \overline{x} = \frac{x}{L} < 1, \quad 0 < \overline{y} < k_{\max} \\ \overline{w} = \overline{v}_x - \overline{u}_y, \\ \overline{u} = \overline{\psi}_y; \overline{v} = -\overline{\psi}_x, \\ \overline{w}_t + \overline{u} \cdot \overline{w}_x + \overline{v} \cdot \overline{w}_y = \frac{1}{\text{Re}} (\overline{w}_{xx} + \overline{w}_{yy}), \quad 0 < \overline{t} = \frac{t}{T} \\ \overline{\psi}|_{\Gamma} \equiv 0, \overline{v}|_{\Gamma} \equiv 0, \overline{u}|_{\Gamma_1} = 0, \overline{u}|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь Γ_1 – объединение боковых сторон и нижнего отрезка, $\Gamma \setminus \Gamma_1$ – верхний отрезок прямоугольника Γ . Первым в системе (1) следует уравнение Пуассона для неизвестной функции тока и известной функции вихря. Двумерное уравнение Пуассона на прямоугольнике решается в матричном виде за конечное число арифметических действий с четвертым или шестым порядком погрешности [5, 6]. Далее мы опустим черту сверху над безразмерными функциями, временем и координатами.

Вторая строка системы (1) – функция вихря вычисляется через координатные производные поля скорости. Третья строка – компоненты скорости – вычисляются как частные производные от функции тока. Четвертая строка – уравнение динамики вихря, которое в системе уравнений (1) единственно явно зависит от времени. Слева стоит полная (конвективная) производная по времени. На границе прямоугольника отсутствует вертикальная компонента скорости, а горизонтальная равна нулю на нижнем отрезке и боковых сторонах, а на верхнем отрезке она равна единице.

Кроме двух упомянутых особых точек поля скорости для тестирования алгоритма использовалось сильно нестационарное и завихренное начальное поле скоростей. Оно задавалось нами [2] на равномерной прямоугольной сетке по формуле (2):

$$\begin{cases} u(x_n, y_m) = -u_0(x_n) \left(\frac{y_m}{k} \right) \sin\left(\frac{3\pi y_m}{2k} \right), \\ x_n = nh_1, y_m = mh_2, h_1 = \frac{1}{n_1}, h_2 = \frac{k}{n_2}, \\ n = \overline{0}, n_1, m = \overline{0}, n_2, n_1 = n_2 = 100 \end{cases} \quad (2)$$

где профиль (3) горизонтальной компоненты скорости на верхнем отрезке каверны

($y = k = 1$) имел вид симметричной трапеции [2] без особых точек поля скорости:

$$u(x, k) \equiv u_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{\tau}, 0 \leq x \leq \tau, \tau = \frac{n_0}{n_1} = \frac{1}{20} \\ 1, \tau \leq x \leq 1 - \tau, \\ \frac{1-x}{\tau}, 1 - \tau \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (3)$$

Аналитически метод n -кратного расщепления уравнения вихря внутри одного временного интервала можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{w^{k+((i+1)/n)} - w^{k+(i/n)}}{\tau_0/n} + u^k \cdot w_x^{k+(i/n)} + v^k \cdot w_y^{k+(i/n)} = \\ = \frac{1}{\text{Re}} (w_{xx}^{k+(i/n)} + w_{yy}^{k+(i/n)}), i = \overline{0}, n-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Система рекуррентных уравнений (4) для вихря с замороженным полем скорости ($u^k(x, y), v^k(x, y)$) состоит из n дробных шагов $i = \overline{0}, n-1$, верхний индекс i – указывает дробный слой времени в (4), индекс k – номер целого слоя времени в уравнении вихря в системе (1). Поля скорости, функции тока меняются последовательно, согласно системе (1), в которой поле вихря имеет уже не дробные индексы $w^{k+i/n}$, а целые w^k . В цикле с системой уравнений (4) изменяется только поле вихря $w^{k+i/n}, i = \overline{0}, n-1$. Поле скорости скачком изменяется, когда переменная внешнего цикла увеличивается на единицу от k до $k+1$ в системе уравнений (1).

Идея решения системы уравнений (4) заключается в уменьшении накопления ошибки округления и времени вычислений. Дифференциальные операторы по координате в (4) аппроксимированы, как и все уравнения системы (1), а также граничные условия с точностью $O(h^4)$, а по времени с точностью $O(\tau)$.

Предположим, что система уравнений (1) спектрально устойчива с максимальным временным шагом равным τ_0 , а система уравнений (4) с максимальным временным шагом τ_0/n .

Таким образом, за время τ_0/n , решая n раз уравнение (4), мы получаем уже скачок по времени τ_0 (в n раз больший, чем последовательное решение системы уравнений (1)) и уменьшаем ошибку округления, так как внутри цикла системы (4) не решаем другие уравнения системы (1).

Второе важное преимущество схемы *N*-кратного расщепления уравнения вихря (4) заключается в достижении установившихся конечных полей скорости, вихря и функции тока (15 значащих цифр в каждой точке поля не меняются во времени после 21000 итераций).

Уравнение (4) линейно относительно координатных производных $w_x^i, w_y^i, w_{xx}^i, w_{yy}^i$. Аппроксимируя каждую производную с порядком $O(h^4)$, получим невязку уравнения (4) по координате с той же точностью. Для первой производной на симметричном шаблоне методом неопределенных коэффициентов [5], [6] имеем

$$w_x(0) = \frac{1}{h} \left(\frac{2}{3}(w_1 - w_{-1}) - \frac{1}{12}(w_2 - w_{-2}) \right) + O(h^4). \quad (5)$$

Получим аналогичную формулу для второй производной на симметричном шаблоне [5], [6]:

$$w_{xx}(0) = \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{2}w_0 + \frac{4}{3}(w_1 + w_{-1}) - \frac{1}{12}(w_2 + w_{-2}) \right) + O(h^4). \quad (6)$$

Формулы (5), (6), можно использовать на внутренних узлах, удаленных от сторон прямоугольника не менее чем на два координатных шага сетки.

На первом прямоугольном контуре с узлами, удаленными на один шаг от сторон прямоугольника, получим первую производную (методом м. н. к.) на шаблоне со смещенным центром [5], [6] (индекс -1 имеет узлы сетки на границе прямоугольника):

$$w_x(0) = \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{4}w_{-1} - \frac{5}{6}w_0 + \frac{3}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{12}w_3 \right) + O(h^4). \quad (7)$$

Аналогично, для второй производной получим формулу (8) на шаблоне со смещенным центром (узел с нулевым индексом расположен на первом прямоугольном контуре, а узел с индексом -1 расположен на границе прямоугольника). Назовем прямоугольник и узлы на нем нулевым прямоугольным контуром [5], [6], [1], [2].

$$w_{xx}(0) = \frac{1}{h^2} \left(\frac{5}{6}w_{-1} - \frac{5}{4}w_0 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{7}{6}w_2 - \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{12}w_4 \right) + O(h^4) \quad (8)$$

Разложив формулы (5), (6) в ряд Тейлора на центральном шаблоне, получим невязку (центр шаблона с координатой $x=0$):

$$\frac{1}{h} \left(\frac{2}{3}(w_1 - w_{-1}) - \frac{1}{12}(w_2 - w_{-2}) \right) = w_x(0) - \frac{1}{30}h^4 w_x^{(5)}(\xi_1), \quad (9)$$

$$\frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{2}w_0 + \frac{4}{3}(w_1 + w_{-1}) - \frac{1}{12}(w_2 + w_{-2}) \right) = w_{xx}(0) - \frac{1}{90}h^4 w_{xx}^{(6)}(\xi_2), \quad (10)$$

$$\xi_1, \xi_2 \in (-2h, 2h).$$

Таким образом, для уравнения вихря в системе уравнений (1) во внутренних узлах с учетом формул (9), (10) можно найти невязку (11) на временном слое k с шагом τ_0 :

$$\begin{aligned} & w_t^k + \frac{\tau_0}{2} w_{tt}^k + u^k \cdot \left(w_x(0) - \frac{1}{30}h^4 w_x^{(5)}(\xi_1) \right) + \\ & + v^k \cdot \left(w_y(0) - \frac{1}{30}h^4 w_y^{(5)}(\xi_2) \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(w_{xx}^k + w_{yy}^k - \right. \\ & \left. - \frac{h^4}{90} (w_x^{(6)}(\xi_3) + w_y^{(6)}(\xi_4)) \right), \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in (-2h, 2h) \Leftrightarrow \\ & R = \frac{\tau_0}{2} w_{tt}^k - \frac{1}{30}h^4 (u^k w_x^{(5)}(\xi_1) + v^k w_y^{(5)}(\xi_2)) + \\ & + \frac{h^4}{90 \text{Re}} (w_x^{(6)}(\xi_3) + w_y^{(6)}(\xi_4)) = O(\tau_0 + h^4). \quad (11) \end{aligned}$$

Порядок аппроксимации невязки $R = O(\tau_0 + h^4)$ сохраняется и на первом прямоугольном контуре согласно формулам (7) и (8).

Рассмотрим спектральную устойчивость разностного уравнения вихря в системе (1) в пределе при быстром движении жидкости (число Рейнольдса $\text{Re} = 1000$) и при медленном вязком течении, например, движении крови в капиллярах $\text{Re} \rightarrow 0$ [7]. Приведем определение спектральной устойчивости из работы [6, с. 125].

Определение [6], [4]. Если при заданном законе стремлении $\tau, h \rightarrow 0$ существует постоянная $0 < c < \infty$, такая, что для всех $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$ справедливо неравенство $|\lambda(\varphi, \psi)| \leq \exp(c\tau)$, то спектральный признак выполнен.

В первом случае в (1) при $\text{Re} \rightarrow \infty$ пренебрежем диффузией в уравнении вихря. Тогда с центральным шаблоном на внутренних узлах сетки запишем разностное уравнение переноса в системе уравнений (1):

$$\begin{aligned} & \frac{w^{k+1} - w^k}{\tau_0} + u^k \cdot w_x^k + v^k \cdot w_y^k = 0, z_1 = \frac{\tau_0}{h} \Leftrightarrow \\ & w_{m,n}^{k+1} - w_{m,n}^k + z_1 (u_{m,n}^k l_x w_{m,n}^k + v_{m,n}^k l_y w_{m,n}^k) = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

$$l_x w_{m,n}^k = \frac{2}{3} (w_{m,n+1}^k - w_{m,n-1}^k) - \frac{1}{12} (w_{m,n+2}^k - w_{m,n-2}^k),$$

$$l_y w_{m,n}^k = \frac{2}{3} (w_{m+1,n}^k - w_{m-1,n}^k) - \frac{1}{12} (w_{m+2,n}^k - w_{m-2,n}^k).$$

Подставляя в уравнение (12) функцию возмущения [4] $w_{m,n}^k = \lambda^k(\varphi, \psi) \exp(i(n\varphi + m\psi))$, $i = \sqrt{-1}$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$ получим спектральное уравнение (13):

$$\lambda = 1 + iz_1 \left(u_{m,n}^k \left(\frac{4}{3} \sin(\varphi) - \frac{1}{6} \sin(2\varphi) \right) + v_{m,n}^k \left(\frac{4}{3} \sin(\psi) - \frac{1}{6} \sin(2\psi) \right) \right).$$

Рассмотрим задачу на максимум:

$$f(\varphi) = \left| \frac{4}{3} \sin(\varphi) - \frac{1}{6} \sin(2\varphi) \right| \rightarrow \max, \varphi \in [0, 2\pi], \quad (14)$$

$$f(\varphi) = \frac{|\sin(\varphi)|}{3} |4 - \cos(\varphi)| = \frac{|\sin(\varphi)|}{3} |4 \pm \sqrt{1 - \sin^2(\varphi)}| < \frac{5}{3}.$$

Обозначив $x = |\sin(\varphi)|$, $x \in [0, 1]$, перейдем к задаче

$$f(x) = \frac{x}{3} (4 \pm \sqrt{1 - x^2}) \rightarrow \max, x \in [0, 1]:$$

а) запишем необходимое условие экстремума:

$$f(x) = \frac{x}{3} (4 + \sqrt{1 - x^2}) \rightarrow \max \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(4 + \sqrt{1 - x^2} + x \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4\sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow 4x^4 + 12x^2 - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{-3 + \sqrt{24}}{2} = -\frac{3}{2} + \sqrt{6}, 0 < x = \sqrt{\sqrt{6} - \frac{3}{2}} < 1$$

$$f_{1\max} = \max_{x \in [0, 1]} \frac{x}{3} (4 + \sqrt{1 - x^2}) = \frac{x}{3} (4 + \sqrt{1 - x^2}) \Big|_{x = \sqrt{\sqrt{6} - \frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{6} - \frac{3}{2}}}{3} \left(4 + \sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{6}} \right) \approx 1,37222;$$

б) во втором случае

$$f(x) = \frac{x}{3} (4 - \sqrt{1 - x^2}) \rightarrow \max \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(4 - \sqrt{1 - x^2} - x \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} \right) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4\sqrt{1 - x^2} - 1 + 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \Rightarrow 4x^4 + 12x^2 - 15 = 0.$$

Но $x^2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{6}, 4\sqrt{1 - x^2} = 1 - 2x^2 = 4 - 2\sqrt{6} < 0$

и локальных точек экстремума нет $x \in (0, 1)$:

$$f_{2\max} = \max_{x \in [0, 1]} \frac{x}{3} (4 - \sqrt{1 - x^2}) \Big|_{x=1} = \frac{4}{3},$$

$$f_{\max} = \max(f_{1\max}, f_{2\max}) = f_{1\max}.$$

Тогда из (13) получим абсолютное значение:

$$|\lambda| = \sqrt{1 + z_1^2 (u_{m,n}^k f(\varphi) + v_{m,n}^k f(\psi))^2} \leq \sqrt{1 + z_1^2 4(f_{\max})^2} \approx 1 + 2f_{\max}^2 z_1^2 = 1 + 2f_{\max}^2 \tau_0^2 = 1 + 2f_{\max}^2 \left(\frac{\tau_0}{h} \right)^2 = 1 + \tau_0 \left(2f_{\max}^2 \frac{\tau_0}{h^2} \right).$$

Сравнивая последнее выражение с определением спектрального признака устойчивости получим [5], [6] постоянную с

$$|\lambda| \leq \exp(c\tau_0) \approx 1 + c\tau_0 \Leftrightarrow c = 2f_{\max}^2 \frac{\tau_0}{h^2} = \text{const} \Leftrightarrow \frac{\tau_0}{h^2} = \text{const}.$$

При медленном вязком течении [7] $\text{Re} \rightarrow 0$ можно пренебречь конвективным переносом, но сохранить слагаемое с диффузией вихря.

Разностная схема для уравнения вихря в (1) на внутренних узлах сетки примет вид

$$\frac{w^{k+1} - w^k}{\tau_0} = \frac{1}{\text{Re}} (w_{xx}^k + w_{yy}^k) z_2 = \frac{\tau_0}{\text{Re} h^2},$$

$$w^{k+1} = w^k + z_2 \left(-5w_{m,n}^k + \frac{4}{3} (w_{m,n+1}^k + w_{m,n-1}^k) - \frac{1}{12} (w_{m,n+2}^k + w_{m,n-2}^k) + \frac{4}{3} (w_{m+1,n}^k + w_{m-1,n}^k) - \frac{1}{12} (w_{m+2,n}^k + w_{m-2,n}^k) \right). \quad (15)$$

Подставим в разностную схему (15) функцию возмущения вида [4]:

$$w_{m,n}^k = \lambda^k(\varphi, \psi) \exp(i(n\varphi + m\psi)), i = \sqrt{-1}, \varphi, \psi \in [0, 2\pi],$$

получим спектральное уравнение.

$$\lambda = 1 + z_2 \left(-5 + \frac{8}{3} (\cos(\varphi) + \cos(\psi)) - \frac{1}{6} (\cos(2\varphi) + \cos(2\psi)) \right). \quad (16)$$

Введем вспомогательные переменные:

$$x = \cos(\varphi), y = \cos(\psi), x, y \in [-1, 1], \cos(2\varphi) = -1 + 2\cos^2(\varphi).$$

Перепишем уравнение (16) в виде

$$\lambda(x, y) = 1 + z_2 \left(-5 + \frac{8}{3} (x + y) - \frac{1}{3} (x^2 + y^2 - 1) \right). \quad (17)$$

Исследуем на экстремум выражение, стоящее в круглых скобках формулы (17):

$$g(x, y) = -5 + \frac{8}{3} (x + y) - \frac{1}{3} (x^2 + y^2 - 1) \rightarrow \text{extr} \Rightarrow$$

$$g_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} - \frac{2}{3} x = 0 \Leftrightarrow x = 4,$$

$$g_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} - \frac{2}{3} y = 0 \Leftrightarrow y = 4.$$

Но точка локального экстремума (4,4) $\notin [-1,1] \times [-1,1]$ функции $g(x, y)$. Из симметрии функционала также следует равенство координат в точке экстремума. Поэтому достаточно вычислить функцию $g(x, y)$ в точках $(-1, -1)$ и $(1, 1)$.

$$g(-1, -1) = -5 + \frac{8}{3}(-1-1) - \frac{1}{3}(1+1-1) = -\frac{32}{3},$$

$$g(1, 1) = -5 + \frac{8}{3}(1+1) - \frac{1}{3}(1+1-1) = 0.$$

Для спектральной устойчивости достаточно, чтобы $|\lambda(x, y)| \leq 1 \forall x, y \in [-1, 1]$, то

$$1 - \frac{32}{3}z_2 = 1 + z_2g(-1, -1) = -1 \leq \lambda(x, y) \leq 1 = 1 + z_2g(1, 1),$$

$$\frac{32}{3}z_2 = 2 \Leftrightarrow z_2 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}, z_2 \in \left[0, \frac{3}{16}\right]. \quad (18)$$

Таким образом, если уравнение переноса спектрально устойчиво для любого закона:

$\frac{\tau_0}{h^2} = const$, то разностное уравнение (15) с диффузионным членом спектрально устойчиво только на отрезке $z_2 \in \left[0, \frac{3}{16}\right]$.

Или $z_2 = \frac{\tau_0}{Re h^2} \leq \frac{3}{16} \Leftrightarrow \tau_0 \leq \frac{3}{16} Re h^2 (*)$.

В формуле (*) шаг τ_0 максимальный (соответствует верхней границе спектральной устойчивости) в задаче (1). На практике реальный шаг времени разностной схемы $\tau_1 = \tau_0/n$ много меньше τ_0 из-за решения других уравнений системы в (1) и 2 особых точек поля скорости.

Обозначим реальный шаг

$$\tau_1 = \frac{\tau_0}{n}, n\tau_1 \leq \frac{3}{16} Re h^2 \equiv \tau_0.$$

Видно, что при достаточно большой кратности расщепления n явной разностной схемы (4) с шагом τ_1 всегда можно выполнить условие $n\tau_1 \leq \frac{3}{16} Re h^2$.

Отметим, что поиск новых значений вихря в цикле (4) проводится только для внутренних узлов, то есть для узлов первого прямоугольного контура и узлов, расположенных дальше от границы прямоугольника.

Граничные значения вихря со вторым порядком погрешности приведены в работах

[1], [2] в системе (19). На границе прямоугольника в (19) значения функции вихря связаны с граничными значениями функции тока и компонентами скорости [1], [2].

$$\left\{ \begin{aligned} W^{k+1}_{m,0} &= \frac{7\psi^{k+1}_{m,0} - 8\psi^{k+1}_{m,1} + \psi^{k+1}_{m,2}}{2h_1^2} - 3\frac{V^{k+1}_{m,0}}{h_1}, \\ W^{k+1}_{m,n_1} &= \frac{7\psi^{k+1}_{m,n_1} - 8\psi^{k+1}_{m,n_1-1} + \psi^{k+1}_{m,n_1-2}}{2h_1^2} + 3\frac{V^{k+1}_{m,n_1}}{h_1}, \\ m &= \overline{1, n_2-1} \\ W^{k+1}_{0,n} &= \frac{7\psi^{k+1}_{0,n} - 8\psi^{k+1}_{1,n} + \psi^{k+1}_{2,n}}{2h_2^2} + 3\frac{u^{k+1}_{0,n}}{h_2}, \\ W^{k+1}_{n_2,n} &= \frac{7\psi^{k+1}_{n_2,n} - 8\psi^{k+1}_{n_2-1,n} + \psi^{k+1}_{n_2-2,n}}{2h_2^2} - 3\frac{u^{k+1}_{n_2,n}}{h_2}, \\ n &= \overline{1, n_1-1}, \\ W^{k+1}_{0,0} &= \frac{W^{k+1}_{0,1} + W^{k+1}_{1,0}}{2}, W^{k+1}_{n_2,n_1} = \frac{W^{k+1}_{n_2,n_1-1} + W^{k+1}_{n_2-1,n_1}}{2}, \\ W^{k+1}_{0,n_1} &= \frac{W^{k+1}_{0,n_1-1} + W^{k+1}_{1,n_1}}{2}, W^{k+1}_{n_2,0} = \frac{W^{k+1}_{n_2,1} + W^{k+1}_{n_2-1,0}}{2}. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Оценим время решения задачи (1) в трех случаях.

В первом случае (алгоритм А) система уравнений (1) решается последовательно, алгоритм расщепления ($n = 1$) в системе уравнений (4) не используется, временной шаг ($\tau_1 = \tau_0/n = \tau_0$).

Во втором случае (алгоритм В) уравнение вихря (4) решается на двухслойной схеме с кратностью расщепления $n = 100$. В алгоритме С $n = 200$ и трехслойная схема по времени. Программы алгоритмов А, В, С запускались одновременно и заметного временного различия для достижения выбранного числа итераций (внешней переменной цикла k) не обнаружено (из-за простоты явной разностной схемы (4)). Но если для наступления стационарного режима в алгоритме В было достаточно 1,5 часа работы программы, то для алгоритма А стационарный режим не был достигнут после двух суток работы программы. Тогда $(\tau_A/\tau_B) \sim (3/16)/(1/300) = 56$ (рис. 2).

На рис. 1 показано поле линий тока для решения задачи с кратностью $n = 1$ (отсутствие расщепления). Видно, что спустя 6000 шагов времени поле линий тока находится далеко от стационарного состояния. Центральный вихрь первого порядка обменивается моментом импульса с вихрями второго порядка, расположенных в нижних правом и левом углах прямоугольной каверны.

В работе [3] авторы А.А. Фомин и Л.Н. Фомина также получили численно стационарное решение задачи (1) и вихри трех порядков.

В работе Фоминых большее разрешение сетки 2500×2500 ($Re > 10000$), число ячеек в нашей сетке 100×100 (и $Re = 1000$ – в 10 раз меньше). Хотя нестационарный вихрь третьего порядка обнаружен нами на рис. 1.

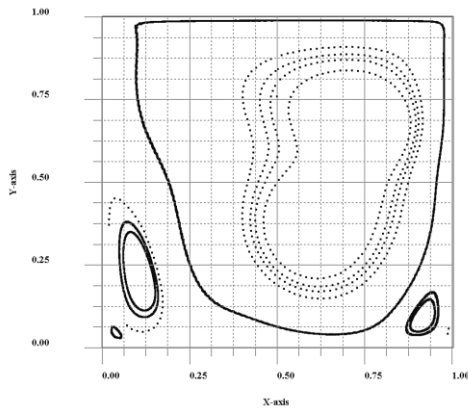


Рис. 1. Поле линий тока для решения задачи (1) без расщепления ($n=1$) $Re=1000$.

$$\text{Шаг времени } \tau = \frac{h^2 Re}{300}, n_1 = n_2 = 100, \\ h = 1/100 \text{ в момент } t = 6000 \tau$$

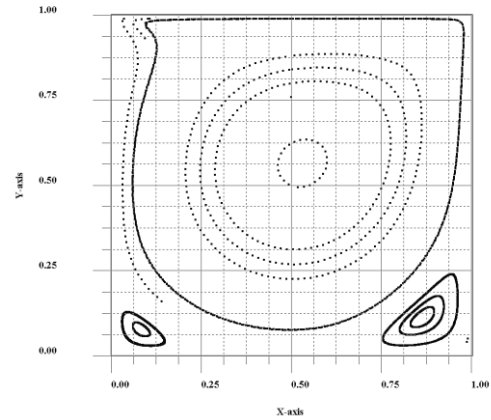
На рис. 2 показаны поля линий тока в предельных стационарных состояниях.

Рис. 2(А) соответствует решению задачи (1) без расщепления.

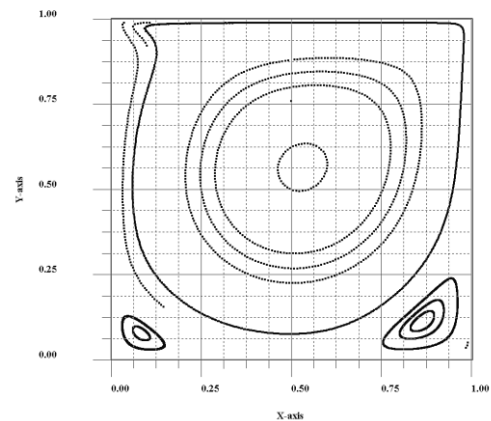
Рис. 2(В) соответствует решению задачи (4) с расщеплением $n=100$ с двухслойной аппроксимацией производной по времени $\frac{w^{k+(i+1)/n} - w^{k+i/n}}{\tau_0/n}$ и первым порядком погрешности $O(\tau_1)$, стационарное состояние достигается спустя $N=21000$ итераций, после чего max и min значения функции тока сохраняются с 15 значащими цифрами.

Третий рисунок (рис. 2(С)) соответствует стационарному решению с трехслойной временной производной $\frac{w^{k+(i+1)/n} - w^{k+(i-1)/n}}{2\tau_0/n}$ и со вторым порядком погрешности $O(\tau_1^2)$ и с кратностью расщепления $n=200$.

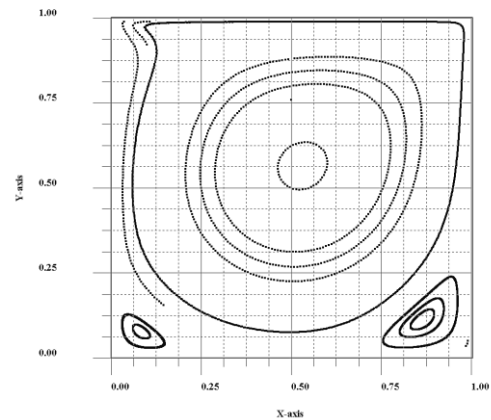
Поле тока становится стационарным спустя $N=43000$ итераций.



А



В



С

Рис. 2. Установившееся поле линий тока для задачи (1), число Рейнольдса $Re=1000$, n – кратность расщепления, $\tau_1 = \tau_0/n$.

$$\text{Рис. 2(А). } \tau_1 = \tau_0 = \frac{h^2 Re}{300}, t = 400000 \tau, n = 1;$$

$$\text{Рис. 2(В). } \tau_0 = \frac{3}{16} h^2 Re, t = 21000 \tau_0, n = 100;$$

$$\text{Рис. 2(С). } \tau_0 = \frac{3}{16} h^2 Re, t = 43000 \tau_0, n = 200$$

Общими показателями решения (1) являются максимальное и минимальное значение поля функции тока, поскольку все остальные поля можно получить через дифференциальные операторы от поля функции тока (как видно из задачи (1)).

Рассмотрим \max и \min значения функции тока в предельном (стационарном) состоянии решения задачи (1) для трех случаев:

Таблица 1. Сравнение значащих цифр в стационарном поле функции тока в задаче (1) для различных алгоритмов

Алгоритм	Ψ_{\max}	Ψ_{\min}
А) $n=1$	$1,71588 \cdot 10^{-3}$	-0,1183079
В) $n=100$	$1,715838733007 \cdot 10^{-3}$	-0,1183038468
С) $n=200$	$1,715838733009 \cdot 10^{-3}$	-0,1183038468

Примечание:

А) $n=1$ (2-х слойная схема), $N=400000$; В) $n=100$ (2-х слойная схема), $N=21000$; С) $n=200$ (3-слойная схема), $N=43000$

Таблица 2. Сравнение значащих цифр в нескольких точках стационарного поля горизонтальной компоненты скорости в задаче (1) для трех алгоритмов

Алгоритм	A:n=1	B:n=100	C:n=200
Γ_1	$3,258389 \cdot 10^{-2}$	$3,2583974148269 \cdot 10^{-2}$	$3,2583974148257 \cdot 10^{-2}$
Γ_2	$-9,77215 \cdot 10^{-2}$	$-9,7722656155239 \cdot 10^{-2}$	$-9,7722656155180 \cdot 10^{-2}$
Γ_3	$-1,73242 \cdot 10^{-2}$	$-1,732417602921899 \cdot 10^{-2}$	$-1,732417602922225 \cdot 10^{-2}$

Анализ Ψ_{\min} , Ψ_{\max} показывает, что два разных алгоритма: В – двухслойная схема по времени с расщеплением $n=100$; С – трехслойная временная схема с $n=200$ дают одинаковые предельные решения, в которых стационарные Ψ_{\min} , Ψ_{\max} совпадают в 11–12 значащих цифрах (табл. 1). То же можно сказать о горизонтальной компоненте и стационарного поля скорости в нескольких, но одних и тех же узлах сетки – совпадение в 11–12 значащих цифрах (табл. 2). Поэтому рис. 2(В) и рис. 2(С) неразличимы графически.

Решение без расщепления (алгоритм А) и решения с расщеплением (алгоритмы В, С) совпадают в 5 значащих цифрах.

Основные полученные результаты:

- 1) Впервые предложен алгоритм (4) n -кратного расщепления ($n=100, 200$), явной разностной схемы для уравнения вихря в десятки раз ускоряющий время решения гидродинамической задачи.
- 2) В предельных случаях с большими и малыми числами Рейнольдса показано, что для спектральной устойчивости разностной схемы уравнения вихря следует выбирать закон [5], [6] стремления к нулю τ_0, h .

$$\tau_0 = O(h^2), \tau_0, h \rightarrow 0, n\tau_1 \leq \frac{3}{16} h^2 \text{Re} = \tau_0.$$
- 3) Решения с расщеплением в системе уравнений (1) и шагом времени $\tau_0 = \frac{3}{16} h^2 \text{Re}$ соответствуют верхней границе спектральной устойчивости. Спектральная устойчивость с τ_0 подтверждена численно.
- 4) Предложена двухслойная временная схема для уравнения вихря с аппроксимацией $O(\tau + h^4)$.

Список источников

1. Salih A. Streamfunction – Vorticity Formulation // Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. p.10.
2. Сборник статей по гидродинамике / Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова [и др.]. 2-е изд. М.: МИИТ, 2023. 231 с. EDN: UDVEDI.
3. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Численное моделирование течения жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 363–377.
4. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: учеб. пособие для вузов / Р.П. Федоренко; Федоренко Р.П.; под ред. и с доп. А.И. Лобанова. 2-е изд., испр. и доп. Долгопрудный (Моск. обл.): Изд. дом Интеллект, 2008. 503 с. (Физтеховский учебник). ISBN 978-5-91559-011-2. EDN: QJUAEP.
5. Бахвалов, Н. С. Численные методы: учеб. пособие для студ. физ.-мат. специальностей вузов / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; Мос. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. 7-е изд. М.: Бином. Лаб. знаний, 2011. 636 с. (Классический университетский учебник). ISBN 978-5-9963-0449-3. EDN: QJXMXL

6. *Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: БИНОМ, 2010. 240 с.
7. *Волосов К.А., Вдовина Е.К., Пугина Л.В.* Моделирование "пульсирующих" режимов динамики свертывания крови. Математическое моделирование. 2014. Т 26, № 12. С. 14–32.
4. *Fedorenko R.P.* Vvedenie v vychislitel'nyuyu fiziku: ucheb. posobie dlya vuzov / R.P. Fedorenko; Fedorenko R.P.; pod red. i s dop. A.I. Lobanova. 2-e izd., ispr. i dop. Dolgoprudnyj (Mosk. obl.): Izd. dom Intellect; 2008. 503 p. (Fiztekhovskij uchebnyk). ISBN 978-5-91559-011-2. EDN: QJUAEP. (In Russ.).

References

1. *Salih A.* Streamfunction – Vorticity Formulation // Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. P. 10.
2. *Sbornik statej po gidrodinamike / N.K. Volosova, K.A. Volosov, A.K. Volosova [i dr.].* 2-e izd. М.: МИТ; 2023. 231 p. EDN: UDVEDI. (In Russ.).
3. *Fomin A.A., Fomina L.N.* CHislennoe modelirovanie techeniya zhidkosti v ploskoj kaverne pri bol'shix chislah Rejnoj'dsa. Vychislitel'naya mekhanika sploshnyh sred. 2014;(7(4):363-377. (In Russ.).
5. *Bahvalov N.S.* CHislennye metody: ucheb. posobie dlya stud. fiz.-mat. special'nostej vuzov. Mos. gos. un-t im. M.V. Lomono-sova. 7-e izd. Moskva: Binom. Lab. Znaniy; 2011. 636 p. (Klassicheskij universitetskij uchebnyk). ISBN 978-5-9963-0449-3. EDN: QJXMXL. (In Russ.).
6. *Bahvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V.* CHislennye metody v zadachah i uprazhneniyah. М.: BINOM; 2010. 240 p. (In Russ.).
7. *Volosov K.A., Vdovina E.K., Pugina L.V.* Modelirovanie "pul'sirubshchih" rezhimov dinamiki svyortyvaniya krovi. Matematicheskoe modelirovanie. 2014;(26(12)):14–32. (In Russ.).

Информация об авторах:

Наталья Константиновна Волосова – аспирант МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), navalosova@yandex.ru;

Константин Александрович Волосов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), konstantinvolosov@yandex.ru, AuthorID 128228;

Александра Константиновна Волосова – кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО "Трамплин" Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), alya01@yandex.ru, AuthorID 607500;

Михаил Иванович Карлов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического университета (МФТИ) (141701, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.), karlov@shade.msu.ru, AuthorID 14680;

Дмитрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), dmitrij.pastuhov@mail.ru, AuthorID 405101;

Юрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), pulsar1900@mail.ru, AuthorID 405109.

Information about the authors:

Natalya K. Volosova – Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (5-1, 2nd Baumanskaya St., Moscow, Russia, 105005), navalosova@yandex.ru;

Konstantin A. Volosov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (9-9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, Russia, 127994), konstantinvolosov@yandex.ru, AuthorID 128228;

Aleksandra K. Volosova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department "Tramplin" LLC, Russian University of Transport (9-9, Obraztsova St., Moscow, GSP-4, Russia, 127994), alya01@yandex.ru, AuthorID 607500;

Mikhail I. Karlov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow University of Physics and Technology (9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, Russia, 141701), karlov@shade.msu.ru, AuthorID 14680;

Dmitriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), dmitrij.pastuhov@mail.ru, AuthorID 405101;

Yuriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (29, Blokhin St., Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), pulsar1900@mail.ru, AuthorID 405109.

Научная статья

УДК 517.977

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-22-35

Исследование почти периодических решений дифференциальных уравнений

Геннадий Григорьевич Иванов¹, Геннадий Викторович Алфёров²,
Владимир Степанович Королёв³

^{1, 2, 3}Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Петергоф, Россия

¹guennadi.ivanov@gmail.com

²g.alferov@spbu.ru

³v.korolev@spbu.ru

Аннотация. Найдены условия, позволяющие определять как верхнюю, так и нижнюю оценки для числа почти периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрены вопросы существования и устойчивости этих решений.

Ключевые слова: производное число; периодические решения; почти периодические решения; негладкий анализ; производные Дини–Гёльдера

Для цитирования: Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С. Исследование почти периодических решений дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 22–35. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-22-35.

Статья поступила в редакцию 26.07.2023; одобрена после рецензирования 26.10.2023; принята к публикации 28.11.2023.

Research article

Study of Almost Periodic Solutions of Differential Equations

Gennadiy G. Ivanov¹, Gennady V. Alferov², Vladimir S. Korolev³

^{1, 2, 3}St. Petersburg State University, St. Petersburg, Peterhof, Russia

¹guennadi.ivanov@gmail.com

²g.alferov@spbu.ru

³v.korolev@spbu.ru

Abstract. Conditions and found that allow to determine both the upper and lower bounds for almost periodic solutions of ordinary differential equations of the first order. Reviewed questions of the existence and stability of these solutions.

Keywords: derived number; periodic solutions; almost periodic solutions; nonsmooth analysis

For citation: Ivanov G.G., Alferov G.V., Korolev V.S. Study of Almost Periodic Solutions of Differential Equations. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):22-35. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-22-35.

The article was submitted 26.07.2023; approved after reviewing 26.10.2023; accepted for publication 28.11.2023.



Эта работа © 2023 Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Введение

Различают два класса колебательных процессов – периодические и непериодические. В теории и практике существенное значение имеет промежуточный класс – почти периодические колебания.

Почти периодические колебания – это колебания, близкие к периодическим, которые слагаются из гармоник с несоизмеримыми периодами. Процесс, который состоит из суммы двух периодических колебаний с несоизмеримыми частотами, также является почти периодическим колебанием.

Теория почти периодических колебаний начала развиваться в работах латвийского математика П.Г. Боля, датского математика Х.А. Бора и др.

П.Г. Боль заложил основы теории почти периодических функций и теории квазипериодических функций, доказал теорему о разложимости квазипериодических функций в ряд Фурье и теорему о квазипериодической функции [1].

Научные работы Харальда Бора относятся в основном к теории функций, он внес большой вклад в развитие теории почти периодических функций [2]. Именем Харальда Бора названы равномерные почти периодические функции.

Фундаментальные результаты в теории периодических и почти периодических колебаний получены в работах Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [3], Ю.А. Митропольского, А.М. Самойленко, В.А. Плисса и др. [4–5].

Во многих задачах классической механики, небесной механики, робототехники и мехатроники встречаются процессы, в которых зависимость от времени не является периодической, а выражается посредством тригонометрических сумм.

В связи с этим возник интерес к исследованиям почти периодических решений дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами [6–12, 36].

В последние годы встал вопрос об изучении почти периодических функций в робототехнике [13–29], динамических системах [30, 33–35], теории устойчивости [10, 14–18, 42–43], в частности, в системах управления космическими объектами [33–41].

Верхняя оценка числа почти периодических решений

Пусть правая часть уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

есть непрерывная на R^2 функция.

Теорема 1. Если правая часть уравнения (1) при каждом фиксированном t есть возрастающая по x функция, причем существует момент t^* такой, что $f(t^*, x)$ строго возрастает, то уравнение (1) может иметь не более одного почти периодического решения.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, и пусть, напротив, уравнение (1) имеет два почти периодических решения $\phi(t, x_1)$ и $\phi(t, x_2)$, начинающихся при $t = 0$ в точках x_1 и x_2 соответственно. Учитывая почти периодичности решений, нетрудно показать, что решения $\phi(t, x_1)$ и $\phi(t, x_2)$ не пересекаются, и, следовательно, не нарушая общности, можно считать, что при всех t

$$\phi(t, x_1) < \phi(t, x_2). \quad (2)$$

Тогда, в силу монотонности функции f , при всех t будет справедливо неравенство

$$f(t, \phi(t, x_1)) \leq f(t, \phi(t, x_2)), \quad (3)$$

а при $t = t^*$, в силу строгого возрастания функции $f(t^*, x)$ и ввиду неравенства (2), будет

$$f(t^*, \phi(t^*, x_1)) < f(t^*, \phi(t^*, x_2)). \quad (4)$$

Не нарушая общности, можно считать, что $t^* > 0$. Выберем произвольное $T > t^*$.

Тогда

$$\int_0^T [f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))] dt = \delta > 0. \quad (5)$$

Действительно, в силу (3) $\delta \geq 0$, а из непрерывности функции f следует, что неравенство (4) выполняется в некоторой окрестности точки t^* , откуда и следует справедливость нашего утверждения.

Выберем произвольное $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\delta)$.

По предположению, функции $\phi(t, x_1)$ и $\phi(t, x_2)$ почти периодические и, следовательно, имеют общий ε -почти период.

Отсюда, существует $\omega' \geq T$ такое, что

$$|\phi(\omega', x_1) - x_1| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad |\phi(\omega', x_2) - x_2| \leq \varepsilon.$$

Тогда, с одной стороны, из (1), с учетом (3) и (5), имеем

$$\begin{aligned} & [\phi(\omega', x_2) - x_2] - [\phi(\omega', x_1) - x_1] = \\ & \int_0^T [f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))] dt + \\ & \int_T^{\omega'} [f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))] dt \geq \delta. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & |\phi(\omega', x_2) - x_2| - |\phi(\omega', x_1) - x_1| \leq \\ & |\phi(\omega', x_2) - x_2| + |\phi(\omega', x_1) - x_1| \leq \\ & 2\varepsilon < \delta. \end{aligned}$$

Полученное противоречие и доказывает, что уравнение (1) не может иметь двух различных почти периодических решений.

Теорема 2. Если правая часть уравнения (1) при каждом фиксированном t есть выпуклая по x функция, причем существует момент t^* такой, что $f(t^*, x)$ строго выпуклая, то уравнение (1) может иметь не более двух почти периодических решений.

Доказательство. Пусть выполнены условия утверждения, и пусть, напротив, уравнение (1) имеет три почти периодических решения $\phi(t, x_i)$, $i = 1, 2, 3$, начинающихся в точках x_1, x_2, x_3 при $t = 0$. В рассматриваемой ситуации уравнение (1) обладает свойством существования и единственности решений, и потому будем считать, что при всех t

$$\phi(t, x_1) < \phi(t, x_2) < \phi(t, x_3). \quad (6)$$

Выпишем два очевидных тождества, которые ввиду (6) имеют смысл при всех t :

$$\frac{\dot{\phi}(t, x_3) - \dot{\phi}(t, x_2)}{\phi(t, x_3) - \phi(t, x_2)} = \frac{f(t, \phi(t, x_3)) - f(t, \phi(t, x_2))}{\phi(t, x_3) - \phi(t, x_2)}$$

и

$$\frac{\dot{\phi}(t, x_2) - \dot{\phi}(t, x_1)}{\phi(t, x_2) - \phi(t, x_1)} = \frac{f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))}{\phi(t, x_2) - \phi(t, x_1)}.$$

Выберем произвольное $T > t^*$, как отмечалось в доказательстве теоремы 1, можно считать, что $t^* > 0$, и проинтегрируем эти равенства в пределах от 0 до T .

Тогда получим два новых тождества:

$$P(T) = \ln \frac{\phi(T, x_3) - \phi(T, x_2)}{x_3 - x_2} = \int_0^T \frac{f(t, \phi(t, x_3)) - f(t, \phi(t, x_2))}{\phi(t, x_3) - \phi(t, x_2)} dt$$

и

$$Q(T) = \ln \frac{\phi(T, x_2) - \phi(T, x_1)}{x_2 - x_1} = \int_0^T \frac{f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))}{\phi(t, x_2) - \phi(t, x_1)} dt.$$

Вычитая из первого равенства второе, имеем

$$\begin{aligned} P(T) - Q(T) &= \\ & \int_0^T [(f(t, \phi(t, x_3)) - f(t, \phi(t, x_2))) \\ & (\phi(t, x_3) - \phi(t, x_2))^{-1} - \\ & (f(t, \phi(t, x_2)) - f(t, \phi(t, x_1))) \\ & (\phi(t, x_2) - \phi(t, x_1))^{-1}] dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Представим решение $\phi(t, x_2)$ в виде:

$$\phi(t, x_2) = \alpha(t)\phi(t, x_1) + (1 - \alpha(t))\phi(t, x_3). \quad (8)$$

В силу (6) очевидно, что при всех t $\alpha \in (0, 1)$. Подставляя в (7) представление (8), получим

$$\begin{aligned} P(T) - Q(T) &= \\ & \int_0^T [\alpha(t)f(t, \phi(t, x_1)) + \\ & (1 - \alpha(t))f(t, \phi(t, x_3)) - \\ & f(t, \alpha(t)\phi(t, x_1) + (1 - \alpha(t))\phi(t, x_3))] \\ & \times [\alpha(t)(1 - \alpha(t))(\phi(t, x_3) - \phi(t, x_1))]^{-1} dt \\ & = G(T). \end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что

$$G(T) = \delta > 0,$$

а из определения функции G и из выпуклости по x функции f следует, что для любого $T' > 0$ будет

$$G(T + T') = G(T) + G(T'),$$

причем $G(T') \geq 0$.

Вернемся снова к функциям P и Q . Непосредственно из их определения видно, что они почти периодические и что

$$P(0) = Q(0) = 0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\delta)$ и $\omega' \geq T$ такое, что

$$|P(\omega')| < \varepsilon, \quad |Q(\omega')| < \varepsilon.$$

Существование такого ω' следует из существования у функций P и Q общего ε -почти периода. Тогда для выбранного ω' из (9) с учетом указанных выше свойств функции G имеем

$$|P(\omega') - Q(\omega')| = P(\omega') - Q(\omega') =$$

$$G(\omega') = G(T) + G(\omega' - T) \geq \delta.$$

С другой стороны,

$$|P(\omega') - Q(\omega')| \leq |P(\omega')| + |Q(\omega')| \leq 2\varepsilon < \delta.$$

Полученное противоречие и доказывает справедливость утверждения теоремы.

Теперь следующим шагом является доказательство утверждения аналогичного теореме 3 [36].

В дальнейшем будем считать, что правая часть уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (10)$$

является непрерывной на R^2 функцией, имеющей непрерывную на R^2 производную по x $f'(t, x)$ выпуклую по x при каждом фиксированном t , причем существует момент t^* такой, что $f'(t^*, x)$ строго выпукла по x . Как и выше решение уравнения (10), начинающееся при $t=0$ в точке x , будем обозначать через $\phi(t, x)$, и положим

$$\psi(t, x) = \ln \phi'(t, x) = \int_0^t f'(\tau, \phi(\tau, x)) d\tau.$$

Теорема 3. Уравнение (10) не может иметь более трех почти периодических решений.

Доказательство. Пусть уравнение (10) имеет четыре почти периодических решения $\phi(t, x_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда рассмотрим три последовательности $\{z_n^j\}$,

$$z_n^j = \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} |\phi(\omega_n, x) - x|, \quad j = 1, 2, 3.$$

Они ограничены и, следовательно, не нарушая общности, их можно считать сходящимися. Положим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^j = z^j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Покажем, что для любого $j = 1, 2, 3$ $z^j \neq 0$. Пусть, например, $z^1 = 0$. Тогда выберем произвольный интервал $[y_1, y_2] \subset (x_1, x_2)$. В силу функции $\phi'(t, y_1)$ и $\phi'(t, y_2)$ ограничены, откуда, на основании утверждения 4, заключаем, что совокупность функций $\phi(t, x)$, $x \in [y_1, y_2]$, является равномерно ограниченной и равномерно непрерывной по x . Далее, последовательность функций $\{\phi(\omega_n, x)\}$, $x \in [y_1, y_2]$, также является равномерно ограниченной и равномерно непрерывной по x . Учитывая сказанное, последовательности функций $\{\phi(\omega_n, x)\}$ и $\{\phi'(\omega_n, x)\}$, без нарушения общности, можно считать равномерно сходящимися к непрерывным функциям $\phi(x)$ и $\phi'(x)$ соответственно.

Из предположения о том, что $z^1 = 0$, следует, что на $[y_1, y_2]$

$$\phi(x) = x,$$

и значит

$$\phi'(x) = 1.$$

Из последнего тождества получаем, что на $[y_1, y_2] \subset (x_1, x_2) \subset (x_1, x_4)$

$$\psi(x) \equiv 0.$$

Но это невозможно, так как, в силу утверждения 9, $\psi(x)$ строго выпукла на любом замкнутом интервале, принадлежащем (x_1, x_4) .

Полученное противоречие и показывает, что z^1 не может быть равной нулю. Для остальных двух интервалов рассуждения аналогичные.

Из доказанного факта, что $z^j > 0$, $j = 1, 2, 3$, следует существование такого $\delta > 0$, что для всех $j = 1, 2, 3$:

$$z^j > \delta.$$

Выберем N столь большим, чтобы для всех $n > N$ и всех $j = 1, 2, 3$ и $i = 1, 2, 3, 4$ выполнялись следующие соотношения:

$$z_n^j > \frac{1}{2}\delta, \quad |\phi(\omega_n, x_i) - x_i| < \frac{1}{2}\delta, \quad \omega_n > t^*.$$

Зафиксируем произвольное $n > N$.

Тогда, в силу выбора N , функция

$$|\phi(\omega_n, x) - x|$$

на каждом из интервалов $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, 2, 3$, достигает своего максимума в некоторой внутренней точке этого интервала. Следовательно, в каждом интервале (x_j, x_{j+1}) , $j = 1, 2, 3$, существует точка y_j такая, что

$$\phi'(\omega_n, y_j) = 1.$$

Откуда, учитывая, что

$$\psi(t, x) = \ln \phi(t, x),$$

получим

$$\psi(\omega_n, y_j) = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Итак, если уравнение (10) имеет четыре почти периодических решения, то для некоторого достаточно большого n на (x_1, x_4) существуют три различные точки y_j , в каждой из которых

$$\psi(\omega_n, y_j) = 0.$$

Но при $x \in [x_1, x_4]$ и $\omega_n > t^*$ функция $\psi(\omega_n, x)$ строго выпуклая и, следовательно, не может принимать в $[x_1, x_4]$ трех одинаковых значений.

Полученное противоречие и показывает невозможность нашего предположения.

Полученные здесь основные результаты запишем в единой форме, для чего введем обозначения, положив

$$f^{-1}(t, x) = \int_0^x f(t, y) dy,$$

$$f^0(t, x) = f(t, x),$$

$$f^1(t, x) = f'(t, x),$$

где $f(t, x)$ – непрерывная по совокупности аргументов функция.

Теорема 4. Если при некотором $k = 1, 2, 3$ функция $f^{k-2}(t, x)$ непрерывна по совокупности аргументов и выпукла по x при каждом фиксированном t , причем существует такой момент t^* , что $f^{k-2}(t^*, x)$ строго выпукла, то уравнение (1) может иметь не более k почти периодических решений.

Нижняя оценка числа почти периодических решений

В предыдущих теоремах были найдены условия, позволяющие определить максимально возможное число почти периодических решений в дифференциальном уравнении первого порядка. Теперь мы исследуем вопрос существования у рассматриваемого уравнения почти периодических решений, что позволит определить минимально возможное число почти периодических решений у исследуемого дифференциального уравнения.

Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (11)$$

где f – непрерывная на R^2 почти периодическая по t равномерно по x на каждом компактном множестве функция и такая, что уравнение (11) обладает свойством существования и единственности решений.

При доказательстве наличия у уравнения (11) почти периодического решения будем использовать результат, полученный в работе [36], который мы сформулируем в виде следующего утверждения.

Лемма. Пусть правая часть уравнения (11) такова, что $f(t, x)$ убывает по $x \in [a, b]$ при каждом фиксированном t . Тогда, если (11) имеет ограниченное решение $\phi(t)$ такое, что $\{\phi(t): 0 \leq t < \infty\} \subset [a, b]$, то оно имеет почти периодическое решение $x(t)$, область значений которого принадлежит интервалу $[a, b]$.

Замечание. Если в уравнении (11) сделать замену переменной, положив $\tau = -t$, то получим уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = -f(-\tau, x). \quad (12)$$

Ясно, что если уравнение (11) имеет почти периодическое решение, то и уравнение (12) также имеет почти периодическое решение, и наоборот. Отсюда следует, что лемма остается в силе, если $f(t, x)$ возрастает по x при каждом фиксированном t .

Теорема 5. Если правая часть уравнения (11) есть функция, убывающая по x при каждом фиксированном t , причем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(t, x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(t, x) = -\infty$$

равномерно по t , то уравнение (11) имеет почти периодическое решение.

Доказательство. В силу предположения о том, что $f(t, x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -\infty$ и $f(t, x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ равномерно по t , найдутся постоянные $K > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что при $x < -K$ будет $f(t, x) \geq \alpha$, а при $x > K$ будет $f(t, x) \leq -\alpha$ сразу для всех t .

Тогда для $|x| > K$ будет

$$\frac{d}{dt} \Big|_{(11)} (x^2) < 0.$$

Следовательно, решение уравнения (11), начинающееся в любой точке $x_0, |x_0| \leq K$, не может покинуть полосу $[-K, K]$.

Таким образом, уравнение (11) имеет ограниченное решение, из чего, в силу леммы, заключаем, что (11) имеет хотя бы одно почти периодическое решение.

Теорема 6. Пусть $f(t, x)$ убывает по x при каждом фиксированном t , и существует момент t^* такой, что $f(t^*, x)$ строго убывает. Тогда, для того чтобы уравнение (11) имело единственное почти периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы оно имело хотя бы одно ограниченное решение.

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна, так как, если уравнение (11) имеет почти периодическое решение, то это решение и будет являться искомым ограниченным решением.

Докажем достаточность.

Если (11) имеет ограниченное решение, то в таком случае выполняются требования леммы, из которой следует, что уравнение (11) имеет почти периодическое решение. Но в силу теоремы 1 уравнение (11) при выполнении условий теоремы 6 не может иметь более одного почти периодического решения. Объединяя эти два утверждения, получаем, что уравнение (11) имеет при выполнении условий теоремы 6 единственное почти периодическое решение.

Теорема 7. Пусть правая часть уравнения (11) такова, что уравнение

$$f(t, \gamma(t)) \equiv 0$$

имеет n решений $\gamma_i(t), i = 1, 2, 3, 4$, обладающих следующим свойством: для любого $k = 0, 1, \dots, n$ в области

$$D_k = \{(t, x): t \in (-\infty, +\infty), \gamma_k(t) < x < \gamma_{k+1}(t)\},$$

где положено $\gamma_0 = -\infty, \gamma_{n+1} = +\infty$, функция $f(t, x)$ знакопостоянная, причем знак функции меняется при переходе в соседнюю область. Тогда, если

$$\beta_j = \max_t \gamma_j(t) < \min_t \gamma_{j+1}(t) = \alpha_{j+1},$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1,$$

и в каждой полосе

$$\alpha_i \leq x \leq \beta_i$$

функция $f(t, x)$ является возрастающей или убывающей по x при каждом фиксированном t , то уравнение (11) имеет n почти периодических решений.

Доказательство. Прежде всего покажем, что если существуют ограниченные определенные на $(-\infty, +\infty)$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ такие, что $\alpha(t) \leq \beta(t)$ и

$$G(\alpha)(t) = \dot{\alpha}(t) - f(t, \alpha(t)) \leq 0 \leq G(\beta)(t),$$

$$t \in (-\infty, +\infty),$$

то уравнение (11) имеет ограниченное решение.

Положим

$$c(t, x) = \alpha(t), x(t) < \alpha(t);$$

$$x(t) \in [\alpha(t), \beta(t)]; \beta(t), x(t) > \beta(t)$$

и рассмотрим уравнение

$$\dot{x} + x = c(t, x) + f(t, c(t, x)). \quad (13)$$

Ясно, что (13) переходит в (11), если уравнение (11) имеет решение $y(t)$ такое, что при всех t

$$\alpha(t) \leq y(t) \leq \beta(t).$$

Покажем, что такое решение существует.

Пусть это не так. Тогда решение $y(t; 0, y_0)$, начинающееся в произвольной точке $y_0 \in [\alpha(0), \beta(0)]$, покидает с течением времени рассматриваемую область.

Пусть, например, оно попадает в область $y(t) < \alpha(t)$. Чтобы могла реализоваться такая возможность, обязательно должна существовать точка t^* , в которой $y(t^*) < \alpha(t^*)$ и $\dot{y}(t^*) \leq \dot{\alpha}(t^*)$. В этом случае из уравнения (13) будем иметь

$$\dot{y}(t^*) - f(t^*, \alpha(t^*)) = \alpha(t^*) - y(t^*). \quad (14)$$

Но

$$\dot{y}(t^*) \leq \dot{\alpha}(t^*),$$

а по условию

$$\dot{\alpha} \leq f(t, \alpha),$$

следовательно,

$$\dot{y}(t^*) - f(t^*, \alpha(t^*)) \leq 0.$$

С другой стороны,

$$\alpha(t^*) - y(t^*) > 0.$$

Таким образом, левая часть равенства (14) не превосходит нуля, а его правая часть строго больше нуля при $t = t^*$.

Полученное противоречие показывает, что решение $y(t; 0, y_0)$ уравнения (13), начинающееся в точке $y_0 \in [\alpha(0), \beta(0)]$, не может попасть в область $y(t) < \alpha(t)$.

Аналогично доказывается, что это решение также не может попасть и в область $y(t) > \beta(t)$. Следовательно, при $t \geq 0$ будет иметь место оценка

$$\alpha(t) \leq y(t) \leq \beta(t),$$

из которой, в силу предположения об ограниченности функций α и β , следует существование у уравнения (13), а значит и у уравнения (11), ограниченного решения.

Подобным образом можно рассматривать ситуацию, когда

$$G(\alpha)(t) \geq 0 \geq G(\beta)(t).$$

Теперь выберем произвольное $i = 1, 2, \dots, n$ и, для определенности, будем считать, что в области D_{i-1}

$$f(t, x) \geq 0,$$

а в области D_i

$$f(t, x) \leq 0.$$

По условию теоремы

$$\beta_j < \alpha_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Следовательно, для выбранного i будет при $x \equiv \alpha_i$

$$G(x)(t) \leq 0,$$

а при $x \equiv \beta_i$

$$G(x)(t) \geq 0.$$

Таким образом, выполняются все требования только что доказанного утверждения, что позволяет сделать заключение о

наличии у уравнения (11) ограниченного решения, располагающе-гося в полосе

$$\alpha_i \leq x \leq \beta_i.$$

Но в этой полосе, по предположению, функция $f(t, x)$ является монотонной и почти периодической по t равномерно по x , т.е. в полосе $\alpha_i \leq x \leq \beta_i$ выполняются все требования леммы, в силу которой заключаем, что уравнение (11) имеет почти периодическое решение, расположенное в полосе $\alpha_i \leq x \leq \beta_i$.

Покажем, что в этой полосе не может существовать двух почти периодических решений. Пусть это не так.

Обозначим одно почти периодическое решение через $x_1(t)$, а другое – через $x_2(t)$.

Пусть, для определенности, $x_1(0) < x_2(0)$.

Разность $x_1(t) - x_2(t)$ представим в виде

$$x_1(t) - x_2(t) = x_1(0) - x_2(0) + \int_0^t [f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))] d\tau.$$

В силу существования и единственности решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ никогда не пересекаются, и потому при всех t будет

$$x_1(t) < x_2(t).$$

Ясно, что в полосе

$$\alpha_i \leq x \leq \beta_i$$

функция $f(t, x)$ убывает по x при каждом фиксированном t , следовательно, при всех t

$$f(t, x_1(t)) \geq f(t, x_2(t)).$$

Учитывая это, заключаем, что имеет место неравенство

$$[x_1(t) - x_2(t)] - [x_1(0) - x_2(0)] = \int_0^t [f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))] d\tau \geq 0. \quad (15)$$

Чтобы быть почти периодическим решением $x_1(t)$ из области, расположенной над кривой $\gamma_i(t)$, обязательно должно перейти в область, расположенную под кривой $\gamma_i(t)$. Это значит, что существует момент $t' > 0$ такой, что $x_1(t') < \gamma_i(t') < x_2(t')$. Но по условию теоремы $f(t', \gamma_i(t')) = 0$, и график функции $\gamma_i(t)$ является границей областей перемены знака функции $f(t, x)$.

Следовательно, в точке t' должно выполняться неравенство

$$f(t', x_1(t')) > f(t', x_2(t')).$$

Из этого неравенства, поскольку функция $f(t, x)$ непрерывна, сразу следует, что в (15) при $t \geq t'$ имеет место знак строгого неравенства.

Покажем, что это противоречит предположению о почти периодичности решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Действительно, разность двух почти периодических функций есть функция почти периодическая. Выберем убывающую до нуля последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_l\}$ и соответствующую ей последовательность $\{\omega_l\}$, где ω_l является ε_l -почти периодом функции $x_1(t) - x_2(t)$. Без нарушения общности, последовательность $\{\omega_l\}$ можно считать стремящейся к бесконечности при $l \rightarrow \infty$. Выберем L такое, что $\omega_L \geq t'$.

Тогда для всех $l > L$ будет

$$[x_1(\omega_l) - x_2(\omega_l)] - [x_1(0) - x_2(0)] =$$

$$\int_0^{\omega_l} [f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))] dt \geq \delta > 0,$$

что противоречит выбору последовательности $\{\omega_l\}$. Полученное противоречие и доказывает, что в полосе

$$\alpha_i \leq x \leq \beta_i$$

располагается только одно почти периодическое решение уравнения (11). Но таких полос n , по условию теоремы, из чего и заключаем, что уравнение (11) при выполнении условий теоремы 7 имеет n почти периодических решений.

Устойчивость почти периодических решений

Займемся теперь исследованием устойчивости решений уравнения (11).

Теорема 8. Если правая часть уравнения (11) есть функция, убывающая по x при каждом фиксированном t , то все решения этого уравнения являются равномерно устойчивыми.

Доказательство. Пусть $u(t)$ – произвольное решение уравнения (11).

Положим $y = x - u$. Уравнение для y будет иметь вид:

$$\dot{y} = f(t, u + y) - f(t, u) = g(t, y). \quad (16)$$

В качестве функции Ляпунова выберем функцию

$$v(y) = \frac{1}{2} y^2. \quad (17)$$

Поскольку $f(t, x)$ убывает по x при каждом фиксированном t , то производная функции (17) на решениях уравнения (16) будет удовлетворять неравенству

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(16)} = yg(t, y) \leq 0,$$

из которого следует равномерная устойчивость решения $y = 0$ уравнения (16), а значит и решения $u(t)$ уравнения (11). Учитывая, что в качестве $u(t)$ было выбрано произвольное решение уравнения (11), убеждаемся в справедливости утверждения утверждения.

Заметим, из доказанной теоремы сразу следует, что в условиях теоремы 7 все n почти периодических решений уравнения (11) являются устойчивыми либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$.

Обозначим через $\lambda_x[f](t, x)$ произвольное производное число функции $f(t, x)$ в точке x при фиксированном t .

Теорема 9. Если существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что для любого фиксированного t и каждого производного числа $\lambda_x[f](t, x)$ выполняется неравенство

$$\lambda_x[f](t, x) \leq -\alpha,$$

то все решения уравнения (11) равномерно асимптотически устойчивы в целом. Если же дополнительно известно, что уравнение (11) имеет почти периодическое решение, то все решения уравнения (11) являются асимптотически почти периодическими.

Доказательство. Пусть $u(t)$ – произвольное решение уравнения (11). Введем функцию y , положив $y = x - u$. Ясно, что если x является решением уравнения (11), то y будет решением уравнения (16). Найдем производную функции (17) на решениях уравнения (16).

Нетрудно показать, что существуют производные числа, для которых имеет место соотношение:

$$f(t, u + \theta y) - f(t, u) \leq y \lambda_{u+\theta y}[f](t, u + \theta y), \quad \theta \in (0, 1).$$

Учитывая, что по условию утверждения

$$\lambda_{u+\theta y}[f](t, u + \theta y) \leq -\alpha,$$

получим следующую оценку:

Из этого неравенства следует равномерная асимптотическая устойчивость в целом решения $y=0$ уравнения (16), а значит и решения $u(t)$ уравнения (11). Поскольку $u(t)$ – произвольное решение уравнения (11), то из этого следует, что все решения уравнения (11) являются асимптотически устойчивыми в целом.

Если же уравнение (11) имеет почти периодическое решение, то в силу его равномерной асимптотической устойчивости в целом и все решения уравнения (11) будут асимптотически почти периодическими.

Теорема 10. Если функция $f(t, x)$ из правой части уравнения (11) убывает по x при каждом фиксированном t , и на каждом компакте

$$\{(y, u) : |u| \leq u_0, d_1 \leq |y| \leq d_2, d_1 > 0\}$$

при $t \rightarrow \infty$

$$\text{sign}(y) \int_0^t [f(\tau, y+u) - f(\tau, u)] d\tau \rightarrow -\infty$$

равномерно, то решение $y=0$ уравнения (16) будет равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть $u(t)$ – произвольное ограниченное решение уравнения (11). Положим

$$y = x - u.$$

Из теоремы 8 следует, что решение $y=0$ уравнения (16) равномерно устойчиво, покажем, что все решения уравнения (16) стремятся к 0 при $t \rightarrow \infty$.

Пусть это не так. Тогда для некоторого решения $y(t; 0, y_0)$ уравнения (16) найдется $d > 0$ такое, что

$$y(t; 0, y_0) > d.$$

Для определенности мы здесь предположили, что $y_0 > 0$. При доказательстве теоремы 8 мы показали, что имеет место неравенство

$$y\dot{y} \leq 0,$$

из которого заключаем, что на решениях уравнения (16) $|y|$ не возрастает. Следовательно, в рассматриваемом случае при $t \geq 0$ будет $d \leq y(t) \leq y_0$.

Положим $u_0 = \sup_t |u(t)|$. Из (16) имеем

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{g(t, y)}{y} \leq \frac{g(t, y_0)}{y_0}.$$

Отсюда, в силу условий теоремы, получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} y_0 e^{1/y_0 \int_0^t g(\tau, y) d\tau} = 0,$$

что противоречит нашему предположению.

Случай $y_0 < 0$ рассматривается аналогично. Таким образом, решение $y=0$ уравнения (16) является равномерно асимптотически устойчивым.

Заключение

В работе представлено применение метода производных чисел [30, 31] в задачах оценки числа почти периодических решений дифференциальных уравнений первого порядка. Найдены условия для определения верхней и нижней оценки количества почти периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Исследованы вопросы существования и устойчивости этих решений.

Список источников

1. *Больш П.Г.* Избранные труды. Рига: Изд-во АН ЛатССР, 1961.
2. *Bohr H.* Collected mathematical works: In 3 Vol. / Ed. E. Volner and B. Jessen. Koebenhavn, 1953.
3. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
4. *Плисс В.А.* О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью. ДАН СССР, 1959. Т. 127, № 5. С. 965–968.
5. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on The Structure of Limit Invariant Sets of Stationary Control Systems with Nonlinearity of Hysteresis Type, 2017. AIP Conference Proceedings 1863, 080003.
7. *Ivanov G., Alferov G., Efimova P.* Integrability of Nonsmooth One-Variable Functions, 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA) 2017. С. 7973965.

8. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The Structural Study of Limited Invariant Sets of Relay Stabilized Systems, Chapter in book "Mechanical Systems: Research, Applications and Technology". 2017. С. 101–164.
9. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Дистанционное управление манипуляционными роботами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 4(47). С. 34–43.
10. *G. Ivanov, G. Alferov, A. Sharlay, and P. Efimova*, "Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System". 2017 AIP Conference Proceedings, 1863, 080002.
11. *F. Kulakov, G.V. Alferov, P. Efimova, S. Chernakova and D. Shymanchuk*, "Modeling and control of robot manipulators with the constraints at the moving objects", in Memory of V.I. Zubov SCP, 2015 IEEE Conference Proceedings 7342075 (Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., Saint-Petersburg, Russia, 2015), pp. 102–105.
12. *F. Kulakov, B. Sokolov, A. Shalyto, and G. Alferov*. Robot master slave and supervisory control with large time delays of control signals and feedback. 2016. Applied Mathematical Sciences, 10(33-36). P. 1783–1796.
13. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Исследование структуры предельного инвариантного множества одного класса стационарных систем с векторным управлением // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 2016. Вып. 48. С. 93–99.
14. *Иванов Г.Г.* К вопросу устойчивости линейно однородных систем с переключениями // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 33–34.
15. *Ivanov G.G., Sharlay A.S.* On Stability of Linear Homogeneous Switched Systems // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP). С. 13–15.
16. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Условия устойчивости линейных однородных систем с переключениями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 3(34). С. 37–48.
17. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(37). С. 25–30.
18. *Иванов Г.Г., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В.* Исследование структуры предельных инвариантных множеств стационарных управляемых систем с нелинейностями гистерезисного типа // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого): матер. XIII междунар. конф. 2016. С. 163–165.
19. *Ефимова П.А., Алфёров Г.В., Иванов Г.Г.* Стабилизация программного движения объекта управления с упруго присоединенными элементами // Процессы управления и устойчивость. 2017. Т. 4, № 1. С. 139–143.
20. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A.* The Structural Study of Limited Invariant Sets of Relay Stabilized Systems. Chapter in book (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. P. 101–164.
21. *Ефимова П.А., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Шиманчук Д.В., Шарлай А.С.* Управление многозвенными манипуляционными роботами при наличии связей у перемещаемых ими объектов // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 121–122.
22. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Копирующее управление удаленными роботами с задержкой в передаче сигнала // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика 2019. Вып. 3(46). С. 47–55.
23. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the Structure of Limit Invariant Sets of Stationary Control Systems with Nonlinearity of Hysteresis Type (2017) AIP Conference Proceedings, 1863, С. N080003. DOI:10.1063/1.4992264.
24. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Интегрируемость негладких функций одной переменной // Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы: тез. докл. междунар. конф., посвященной памяти проф. В.Ф. Демьянова. 2017. С. 149–153.
25. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Stability of Linear Systems with Multitask Right – Hand Member, Chapter in book (2018) Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering, pp. 74-112. DOI: 10.4018/978-1-5225-5045-7.ch004.

26. *Kulakov F., Alferov G.V., Efimova P., Chernakova S., Shymanchuk D.* Modeling and Control of Robot Manipulators with the Constraints at the Moving Objects // 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov SCP 2015. Proceedings, ст. № 7342075, pp.102–105. DOI:10.1109/SCP.2015.7342075.
27. *Ефимова П.А., Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Шиманчук Д.В., Шарлай А.С.* Управление многосвязными манипуляционными роботами при наличии связей у перемещаемых ими объектов // Устойчивость и процессы управления: матер. III междунар. конф. 2015. С. 121–122.
28. *Ефимова П.А., Шиманчук Д.В.* Моделирование движения космического манипуляционного робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 2014. Вып. 46. С. 20–30.
29. *Kulakov F., Alferov G., Efimova P.* Methods of remote control over space robots // 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading 2015. С. 7106742.
30. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Горovenko П.А.* Производные числа функций одной переменной // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 3 (42). С. 5–19.
31. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* (2023) Исследование решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 47–53.
32. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* (2023) Стабилизация программных движений систем переменной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2(61). С. 16–28.
33. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В.* Математические модели гибкого робота // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1995. Вып. 29. С. 92–97.
34. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Малафеев О.А.* Кинематический анализ исполнительной системы манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 2014. Вып. 46. С. 31–38.
35. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Малафеев О.А.* Динамический анализ исполнительной системы манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 2014. Вып. 46. С. 39–46.
36. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С., Селицкая Е.А.* Периодические решения дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 5–15.
37. *Кулаков Ф.М., Алфёров Г.В., Смирнов Е.Н.* Управление роботами, оцувствленными по усилиям // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1996. Вып. 30. С. 113–120.
38. *Алфёров Г.В.* К расчету динамической модели манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1996. Вып. 30. С. 6–14.
39. *Алфёров Г.В.* К вопросу управления робототехнической системой на основе базы знаний // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1995. Вып. 29. С. 6–12.
40. *Кулаков Ф.М., Соколов Б.В., Алфёров Г.В., Ефимова П.А.* Дистанционное управление космическими роботами с адаптацией к изменениям его внешней среды // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 4(43). С. 16–26.
41. *Алфёров Г.В., Малафеев О.А.* К вопросу об устойчивости в задачах проектирования роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Перм. ун-т. 1986. Вып. 1. С. 5–10.
42. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* (2022) Теорема об области асимптотической устойчивости и ее приложения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 1(56). С. 5–13.
43. *Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.* Об устойчивости решений системы ли-

нейных дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 2(57). С. 31–39.

References

1. Bol' P.G. Izbrannye trudy. Riga: Izd-vo AN LatSSR; 1961. (In Russ.).
2. Bohr H. Collected mathematical works: In 3 Vol. Ed. E.Volner and B. Jessen. Kopenhagen; 1953.
3. Krylov N.M., Bogolyubov N.N. Vvedenie v nelinejnyu mekhaniku. Kiev: Izd-vo AN USSR; 1937. (In Russ.).
4. Pliss V.A. O chisle periodicheskikh reshenij uravneniya s polinomial'noj pravoy chast'yu. DAN SSSR. 1959;127(5):965-968. (In Russ.).
5. Arnol'd V.I. Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennykh differencial'nykh uravnenij. M.: Nauka; 1978. (In Russ.).
6. Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A. Study on The Structure of Limit Invariant Sets of Stationary Control Systems with Non-linearity of Hysteresis Type, 2017. AIP Conference Proceedings 1863:080003.
7. Ivanov G., Alferov G., Efimova P. Integrability of Nonsmooth One-Variable Functions, 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov) (CNSA). 2017: 7973965.
8. Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A. The Structural Study of Limited Invariant Sets of Relay Stabilized Systems, Chapter in book "Mechanical Systems: Research, Applications and Technology". 2017:101-164.
9. Kulakov F.M., Alfyorov G.V., Efimova P.A. Distancionnoe upravlenie manipulyacionnymi robotami. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2019;4(47):34-43.
10. G. Ivanov, G. Alferov, A. Sharlay, and P. Efimova, "Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System". 2017 AIP Conference Proceedings. 1863: 080002.
11. F. Kulakov, G.V. Alferov, P. Efimova, S. Chernakova and D. Shymanchuk, "Modeling and control of robot manipulators with the constraints at the moving objects", in Memory of V.I. Zubov SCP. 2015 IEEE Conference Proceedings 7342075 (Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., Saint-Petersburg, Russia. 2015:102-105.
12. F. Kulakov, B. Sokolov, A. Shalyto, and G. Alferov. Robot master slave and supervisory control with large time delays of control signals and feedback. Applied Mathematical Sciences. 2016;10(33-36):1783-1796.
13. Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Efimova P.A. Issledovanie struktury predel'nogo invariantnogo mnozhestva odnogo klassa stacionarnykh sistem s vektornym upravleniem. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 2016;(48):93-99. (In Russ.).
14. Ivanov G.G. K voprosu ustojchivosti linejno odnorodnykh sistem s pereklyucheniyami. Ustojchivost' i processy upravleniya: mater. III mezhdunar. konf. 2015:33–34. (In Russ.).
15. Ivanov G.G., Sharlay A.S. On Stability of Linear Homogeneous Switched Systems. 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP):13-15.
16. Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Efimova P.A. Usloviya ustojchivosti linejnykh odnorodnykh sistem s pereklyucheniyami. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2016;3(34):37-48. (In Russ.).
17. Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Efimova P.A. Ustojchivost' selekturno-linejnykh differencial'nykh vklyuchenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2017;2(37):25-30. (In Russ.).
18. Ivanov G.G., Kulakov F.M., Alfyorov G.V. Issledovanie struktury predel'nykh invariantnykh mnozhestv stacionarnykh upravlyaemykh sistem s nelinejnostyami gisterezisnogo tipa. Ustojchivost' i kolebaniya nelinejnykh sistem upravleniya (konferenciya Pyatnickogo): mater. XIII mezhdunar. konf. 2016:163-165. (In Russ.).
19. Efimova P.A., Alfyorov G.V., Ivanov G.G. Stabilizaciya programmnoho dvizheniya ob"ekta upravleniya s uprugo prisoedinennymi elementami. Processy upravleniya i ustojchivost'. 2017;4(1):139–143. (In Russ.).
20. Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A. The Structural Study of Limited Invariant Sets of Relay Stabilized Systems. Chapter in book. Mechanical Systems: Research, Applications and Technology. 2017:101-164.
21. Efimova P.A., Kulakov F.M., Alfyorov G.V., SHymanchuk D.V., SHarlaj A.S. Upravlenie mnogozvennymi manipulyacionnymi robotami pri nalichii svyazej u peremeshchaemyh

- imi ob"ektov. Uстойchivost' i processy upravleniya: mater. III mezhdunar. konf. 2015:121-122. (In Russ.).
22. *Kulakov F.M., Alfyorov G.V., Efimova P.A.* Kopiruyushchee upravlenie udalennymi robotami s zaderzhkoj v peredache signala. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika 2019;3(46):47-55. (In Russ.).
 23. *Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A.* Study on the Structure of Limit Invariant Sets of Stationary Control Systems with Nonlinearity of Hysteresis Type. AIP Conference Proceedings. 2017;1863:N080003. DOI:10.1063/1.4992264.
 24. *Ivanov G.G., Alferov G.V., Efimova P.A.* Integrirovannost' negladkih funkcion odnoj peremennoj. Konstruktivnyj negladkij analiz i smezhnye voprosy: tez. dokl. mezhdunar. konf., posvyashchennoj pamyati prof. V.F. Dem'yanova. 2017:149-153. (In Russ.).
 25. *Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S.* Stability of Linear Systems with Multitask Right – Hand Member, Chapter in book. Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering. 2018:74-112. DOI: 10.4018/978-1-5225-5045-7.ch004.
 26. *Kulakov F., Alferov G.V., Efimova P., Chernakova S., Shymanchuk D.* Modeling and Control of Robot Manipulators with the Constraints at the Moving Objects. 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov SCP 2015;7342075:102-105. DOI:10.1109/SCP.2015.7342075.
 27. *Efimova P.A., Kulakov F.M., Alfyorov G.V., SHimanchuk D.V., SHarlay A.S.* Upravlenie mnogozvennymi manipulacionnymi robotami pri nalichii svyazej u peremeshchaemyh imi ob"ektov. Uстойchivost' i processy upravleniya: mater. III mezhdunar. konf. 2015:121-122. (In Russ.).
 28. *Efimova P.A., SHimanchuk D.V.* Modelirovanie dvizheniya kosmicheskogo manipulacionnogo robota. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 2014;46:20-30. (In Russ.).
 29. *Kulakov F., Alferov G., Efimova P.* Methods of remote control over space robots. International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading. 2015:7106742.
 30. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Gorovenko P.A.* Proizvodnye chisla funkcion odnoj peremennoj. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018;3(42):5-19. (In Russ.).
 31. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* (2023) Issledovanie reshenij linejnoj odnorodnoj sistemy differencial'nyh uravnenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2023;1(60):47-53. (In Russ.).
 32. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* (2023) Stabilizaciya programmnyh dvizhenij sistem peremennoj struktury. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2023;2(61):16-28. (In Russ.).
 33. *Kulakov F.M., Alfyorov G.V.* Matematicheskie modeli gibkogo robota. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 1995;29:92-97. (In Russ.).
 34. *Kulakov F.M., Alfyorov G.V., Malafeev O.A.* Kinematicheskij analiz ispolnitel'noj sistemy manipulacionnyh robotov. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 2014;46:31-38. (In Russ.).
 35. *Kulakov F.M., Alfyorov G.V., Malafeev O.A.* Dinamicheskij analiz ispolnitel'noj sistemy manipulacionnyh robotov. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 2014;46:39-46. (In Russ.).
 36. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S., Selickaya E.A.* Periodicheskie resheniya differencial'nyh uravnenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2019;3(46):5-15. (In Russ.).
 37. *Kulakov F.M., Alfyorov G.V., Smirnov E.N.* Upravlenie robotami, ochuvstvlennymi po usiliyam. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 1996;30:113-120. (In Russ.).
 38. *Alfyorov G.V.* K raschetu dinamicheskij modeli manipulacionnyh robotov. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 1996;(30):6-14. (In Russ.).
 39. *Alfyorov G.V.* K voprosu upravleniya robototekhnicheskij sistemoj na osnove bazy znaniy. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz.

- sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 1995;(29):6-12. (In Russ.).
40. *Kulakov F.M., Sokolov B.V., Alfyorov G.V., Efimova P.A.* Distancionnoe upravlenie kosmicheskimi robotami s adaptaciej k izmeneniyam ego vneshnej sredy. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2018;4(43):16-26. (In Russ.).
41. *Alfyorov G.V., Malafeev O.A.* K voprosu ob ustojchivosti v zadachah proektirovaniya robotov. Problemy mekhaniki i upravleniya: Nelinejnye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm': Perm. un-t. 1986;1:5-10. (In Russ.).
42. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* Teorema ob oblasti asimptoticheskoj ustojchivosti i ee prilozheniya. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2022;1(56):5-13. (In Russ.).
43. *Ivanov G.G., Alfyorov G.V., Korolyov V.S.* Ob ustojchivosti reshenij sistemy linejnyh differencial'nyh uravnenij. Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika. 2022;2(57):31-39. (In Russ.).

Информация об авторах:

Г. Г. Иванов – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, кафедра механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 116900;

Г. В. Алфёров – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 2873;

В. С. Королёв – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID 7342.

Information about the authors:

G. G. Ivanov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Department of Mechanics of Controlled Motion, St. Petersburg State University (35, Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 116900;

G. V. Alferov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35, Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 2873;

V. S. Korolev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35, Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID 7342.

Научная статья

УДК 517.977.56

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-36-51

Аналог принципа максимума Понтрягина и линеаризованные необходимые условия оптимальности в одной нелинейной задаче управления системой Гурса–Дарбу с переменной структурой

Камил Байрамали оглы Мансимов¹, Шабнам Шакир кызы Сулейманова²

¹Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

^{1,2}Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

¹kamilbmansimov@gmail.com

²suleymanovasebnem.85@gmail.com

Аннотация. Рассматривается одна двухэтапная задача оптимального управления, описываемая системами гиперболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Гурса. Построена формула приращения первого порядка функционала качества, позволяющая доказать необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Л.С. Понтрягина. В случае выпуклости областей управления доказано линеаризованное условие максимума. Приведен аналог дифференциального условия максимума. При предположении открытости областей управления установлен аналог классического уравнения Эйлера.

Ключевые слова: система Гурса–Дарбу; краевые условия Гурса; формула приращения; необходимое условие оптимальности; принцип максимума Понтрягина; вариация функционала; аналог уравнения Эйлера; функционал качества

Для цитирования: Мансимов К. Б., Сулейманова Ш. Ш. Аналог принципа максимума Понтрягина и линеаризованные необходимые условия оптимальности в одной нелинейной задаче управления системой Гурса–Дарбу с переменной структурой // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 36–51. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-36-51.

Статья поступила в редакцию 13.07.2023; одобрена после рецензирования 10.10.2023; принята к публикации 28.11.2023.

Research article

Pontryagin's Maximum Principle Analog and Linearized Necessary Conditions of Optimality in One Nonlinear Control Problem of a Gurs–Darboux System With a Variable Structure

Kamil B. Mansimov¹, Shabnam Sh. Suleymanova²

¹Baku State University, Baku, Azerbaijan

^{1,2}Institute of control system of Azerbaijan National academy of sciences, Baku, Azerbaijan

¹kamilbmansimov@gmail.com

²suleymanovasebnem.85@gmail.com

Abstract. One two-stage optimal control problem is considered, which is described by systems of second-order hyperbolic equations with Goursat boundary conditions. The formula of the first order increment of the functional is constructed which allows is to prove the necessary optimality condition of the type maximum principle L.S. Pontryagin. In the case of convexity of control domains a linearized integral maximum condition is proved. An analogue of the differential maximum condition is given. Assuming the openness of the control domains an analogue of the Euler equations is established.



Эта работа © 2023 Мансимов К.Б., Сулейманова Ш.Ш. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Keywords: Goursat–Darboux system; Goursat boundary conditions; increment formula; necessary optimality condition; Pontryagin's maximum principle; variation of the functional; analogue of the Euler equation; quality functional

For citation: Mansimov K. B., Suleymanova Sh. Sh. Pontryagin's Maximum Principle Analog and Linearized Necessary Conditions of Optimality in One Nonlinear Control Problem of a Gurs–Darboux System With a Variable Structure. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):36-51. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-36-51.

The article was submitted 13.07.2023; approved after reviewing 10.10.2023; accepted for publication 28.11.2023.

Введение

Начиная с работы [1], в дальнейшем, в работах [2–8] и др., получен ряд необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления, описываемых гиперболическими уравнениями второго порядка с краевыми условиями Гурса.

В предлагаемой же работе исследуется одна задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая краевыми задачами Гурса–Дарбу.

Установлен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка.

Заметим, что ряд задач оптимального управления с переменной структурой (иногда их называют ступенчатыми задачами оптимального управления), описываемый обыкновенными дифференциальными уравнениями исследованы в работах [9–12] и др.

1. Постановка задачи

Предположим, что $D_i = [t_{i-1}, t_i] \times [x_0, x_1], i = 1, 2$, заданные прямоугольники, $(T_i, X_i), i = \overline{1, k}, (t_0 < T_1 < \dots < T_k \leq t_1, x_0 < X_1 < \dots < X_k \leq x_1), (\theta_i, \xi_i), i = \overline{1, k}, (t_1 < \theta_1 < \dots < \theta_k \leq t_2, x_0 < \xi_1 < \dots < \xi_k \leq x_1)$ заданные точки, $U_1 \subset R^r, U_2 \subset R^q$ заданные компактные подмножества, $u_1(t, x), u_2(t, x)$ измеримые r и q -мерные соответственно, вектор-функции управляющих воздействий, удовлетворяющие ограничениям

$$u_1(t, x) \in U_1 \subset R^r, (t, x) \in D_1, \quad (1)$$

$$u_2(t, x) \in U_2 \subset R^q, (t, x) \in D_2. \quad (2)$$

Совокупность $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ управляющих функций $u_1(t, x), u_2(t, x)$ с вышеприведенными свойствами, назовем *допустимым управлением*.

Предположим, что управляемый двух-этапный процесс описывается системами нелинейных гиперболических уравнений Дарбу:

$$z_{tx} = f_1(t, x, z, z_t, z_x, u_1), (t, x) \in D_1, \quad (3)$$

$$y_{tx} = f_2(t, x, y, y_t, y_x, u_2), (t, x) \in D_2 \quad (4)$$

с краевыми условиями Гурса:

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), x \in [x_0, x_1], \\ z(t, x_0) &= b_1(t), t \in [t_0, t_1], \\ a(x_0) &= b_1(t_0), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y(t_1, x) &= Bz(t_1, x), x \in [x_0, x_1], \\ y(t, x_0) &= b_2(t), t \in [t_1, t_2]. \\ Bz(t_1, x_0) &= b_2(t_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $a(x), b_i(t), i = 1, 2$ – заданные абсолютно-непрерывные n -мерные вектор-функции, B – заданная $(n \times n)$ постоянная матрица, $f_1(t, x, z, z_t, z_x, u_1), f_2(t, x, y, y_t, y_x, u_2)$ – заданные n -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $(z, z_t, z_x), (y, y_t, y_x)$ соответственно.

Предполагается, что каждой паре $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ допустимых управляющих функций $u_1(t, x), u_2(t, x)$ соответствует единственное абсолютно-непрерывное решение (в смысле [4–6]) $(z(t, x), y(t, x))$ краевой задачи (3)–(6).

Считая $\varphi_1(z_1, z_2, \dots, z_k), \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_k)$ заданными непрерывно-дифференцируемыми скалярными функциями, рассмотрим задачу нахождения минимального значения много-точечного функционала

$$\begin{aligned} S(u_1, u_2) &= \varphi_1(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2), \dots, z(T_k, X_k)) + \\ &+ \varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), y(\theta_2, \xi_2), \dots, y(\theta_k, \xi_k)), \end{aligned} \quad (7)$$

при ограничениях (1)–(6).

Допустимое управление, доставляющее минимальное значение функционалу (7), при ограничениях (1)–(6) назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс $(u_1(t, x), u_2(t, x), z(t, x), y(t, x))$ – *оптимальным процессом*.

2. Вспомогательные построения

Считая $(u_1(t, x), u_2(t, x), z(t, x), y(t, x))$, $(\bar{u}_1(t, x), \bar{u}_2(t, x), \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x))$ допустимыми процессами введем обозначения $u_i(t, x) = \bar{u}_i(t, x) + \Delta u_i(t, x)$, $i = 1, 2$, $\bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x)$, $\bar{y}(t, x) = y(t, x) + \Delta y(t, x)$

и запишем выражение функционала качества

$$\begin{aligned} \Delta S(u_1, u_2) &= S(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - S(u_1, u_2) = \\ &= [\varphi_1(\bar{z}(T_1, X_1), \bar{z}(T_2, X_2), \dots, \bar{z}(T_k, X_k)) - \\ &\varphi_1(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2), \dots, z(T_k, X_k))] + \\ &+ [\varphi_2(\bar{y}(\theta_1, \xi_1), \bar{y}(\theta_2, \xi_2), \dots, \bar{y}(\theta_k, \xi_k)) - \\ &-\varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), y(\theta_2, \xi_2), \dots, y(\theta_k, \xi_k))]. \end{aligned} \quad (8)$$

Из введенных обозначений следует, что приращение $(\Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$ состояния $(z(t, x), y(t, x))$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta z_{tx} &= f_1(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{z}_t(t, x), \bar{z}_x(t, x), \bar{u}_1(t, x)) \\ &- f_1(t, x, z(t, x), z_t(t, x), z_x(t, x), u_1(t, x)), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta z(t_0, x) &= 0, x \in [x_0, x_1], \\ \Delta z(t, x_0) &= 0, t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{tx} &= \\ &= f_2(t, x, \bar{y}(t, x), \bar{y}_t(t, x), \bar{y}_x(t, x), \bar{u}_2(t, x)) - \\ &- f_2(t, x, y(t, x), y_t(t, x), y_x(t, x), u_2(t, x)), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t_1, x) &= B \Delta z(t_1, x), x \in [x_0, x_1], \\ \Delta y(t, x_0) &= 0, t \in [t_1, t_2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Считая $\psi_i(t, x)$, $i = 1, 2$ пока произвольными n -мерными вектор-функциями, введем функции (аналоги функции Гамильтона–Понтрягина)

$$\begin{aligned} H_1(t, x, z, z_t, z_x, u_1, \psi_1) &= \\ &= \psi_1' f_1(t, x, z, z_t, z_x, u_1), \\ H_2(t, x, y, y_t, y_x, u_2, \psi_2) &= \\ &= \psi_2' f_2(t, x, y, y_t, y_x, u_2). \end{aligned}$$

Для простоты дальнейших изложений введем обозначения типа

$$\begin{aligned} p_1 &= (z, z_t, z_x)', p_2 = (y, y_t, y_x)', \\ \Delta_{\bar{u}_i} H_i[t, x, p_i, \psi_i] &\equiv \\ &\equiv H_i(t, x, \bar{p}_i, \bar{u}_i, \psi_i) - H_i(t, x, p_i, u_i, \psi_i), \\ \frac{\partial H_i(t, x, p_i, u_i, \psi_i)}{\partial p_i} &= \frac{\partial H_i[t, x, p_i, \psi_i]}{\partial p_i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta H_i[t, x, p_i, \psi_i] &\equiv \\ &\equiv H_i(t, x, \bar{p}_i, \bar{u}_i, \psi_i) - H_i(t, x, p_i, u_i, \psi_i), \\ \Delta_{\bar{u}_i} f_i[t, x] &= \Delta_{\bar{u}_i} f_i(t, x, p_i(t, x), u_i(t, x)). \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем (') штрих означает для векторов скалярное произведение, а для матриц – операцию транспонирования.

Учитывая введенные в рассмотрение функции Гамильтона–Понтрягина из тождеств (9), (11) получим, что

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi_1'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta H_1[t, x, p_1, \psi_1] dx dt, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \psi_2'(t, x) \Delta y_{tx}(t, x) dx dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta H_2[t, x, p_2, \psi_2] dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая введенные обозначения (13), (14), формула приращения (8) функционала качества (7) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u_1, u_2) &= S(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - S(u_1, u_2) = \\ &= [\varphi_1(\bar{z}(T_1, X_1), \bar{z}(T_2, X_2), \dots, \bar{z}(T_k, X_k)) - \\ &-\varphi_1(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2), \dots, z(T_k, X_k))] + \\ &+ [\varphi_2(\bar{y}(\theta_1, \xi_1), \bar{y}(\theta_2, \xi_2), \dots, \bar{y}(\theta_k, \xi_k)) - \\ &-\varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), y(\theta_2, \xi_2), \dots, y(\theta_k, \xi_k))] + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi_1'(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta_{\bar{u}_1} H_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1) + \\ &+ H_1(t, x, \bar{p}_1, \bar{u}_1, \psi_1) - \\ &- H_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)] dx dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \psi_2'(t, x) \Delta y_{tx}(t, x) dx dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} [\Delta_{\bar{u}_2} H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2) + \\ &+ H_2(t, x, \bar{p}_2, \bar{u}_2, \psi_2) - \\ &- H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)] dx dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя формулу Тейлора, приращение (15) критерия качества преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Delta S(u_1, u_2) &= \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_i'(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \Delta z(T_i, X_i) + o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, X_i)\| \right) + \\
 & \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_2(y(\theta_1, \xi_1), y(\theta_2, \xi_2), \dots, y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} \times \\
 & \times \Delta y(\theta_i, \xi_i) + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|y(\theta_i, \xi_i)\| \right) + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'_1(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}_1} H_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1) dx dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1} H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial p_1} \Delta p_1(t, x) dx dt \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial p_1} \Delta p_1(t, x) dx dt \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_3 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta p_1(t, x)\| \right) dx dt + \\
 & + \int_{t_2}^{t_1} \int_{x_2}^{x_1} \psi'_2(t, x) \Delta y_{tx}(t, x) dx dt - \\
 & - \int_{t_2}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}_2} H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2) dx dt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_2} H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial p_2} \Delta p_2(t, x) dx dt \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial p_2} \Delta p_2(t, x) dx dt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} o_4 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta p_2(t, x)\| \right) dx dt. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем, $\|\alpha\|$ есть норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ – есть величина более высокого порядка, чем α .

Принимая во внимания краевые условия (10), (12), можно убедиться в справедливости тождеств

$$\Delta z(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \Delta z_{\tau s}(\tau, s) ds d\tau,$$

$$\begin{aligned}
 \Delta z_t(t, x) &= \int_{x_0}^x \Delta z_{t s}(t, s) ds, \\
 \Delta z_x(t, x) &= \int_{t_0}^t \Delta z_{\tau x}(\tau, x) d\tau, \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta y(t, x) &= B \Delta z(t_1, x) + \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \Delta y_{\tau s}(\tau, s) ds d\tau, \\
 \Delta y_t(t, x) &= \int_{x_0}^x \Delta z_{t s}(t, s) ds, \\
 \Delta y_x(t, x) &= B \Delta z_x(t_1, x) + \\
 & + \int_{t_1}^t \Delta y_{\tau x}(\tau, x) d\tau. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Учитывая тождество (17), и применяя теорему Фубини, из (18) получим, что

$$\begin{aligned}
 \Delta y(t, x) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^x B \Delta z_{\tau s}(\tau, s) ds d\tau + \\
 & + \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \Delta y_{\tau s}(\tau, s) ds d\tau, \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta y_x(t, x) &= \int_{t_0}^{t_1} B \Delta z_{\tau x}(\tau, x) d\tau + \\
 & + \int_{t_1}^t \Delta y_{\tau x}(\tau, x) d\tau. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Предположим, что $\alpha_i(t, x)$ – характеристическая функция области $[t_0, T_i] \times [x_0, X_i]$, $\beta_i(t, x)$ – характеристическая функция области $[t_1, \theta_i] \times [x_0, \xi_i]$, а $\gamma_i(x)$ – характеристическая функция отрезка $[x_0, \xi_i]$. Тогда $\Delta z(T_i, X_i)$ и $\Delta y(\theta_i, \xi_i)$ с учетом (17), (20), могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta z(T_i, X_i) &= \\
 & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \alpha_i(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta y(\theta_i, \xi_i) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \gamma_i(x) B \Delta z_{tx}(t, x) dx dt + \\
 & + \int_{t_1}^{\theta_i} \int_{x_0}^{\xi_i} \beta_i(t, x) \Delta y_{tx}(t, x) dx dt. \quad (22)
 \end{aligned}$$

Далее на основе тождеств (17)–(20), и теоремы Фубини получаем справедливость соотношений

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial z} \Delta z(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_t^{t_1} \int_x^{x_1} \frac{\partial H'_1(\tau, s, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial z} ds d\tau \right)' \times \\ & \quad \times \Delta z_{tx}(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial z_t} \Delta z_t(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_x^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, s, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial z_t} ds \right)' \times \\ & \quad \times \Delta z_{tx}(t, x) dx dt, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial z_x} \Delta z_x(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_t^{t_1} \frac{\partial H'_1(\tau, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial z_x} d\tau \right)' \times \\ & \quad \times \Delta z_{tx}(t, x) dx dt, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_1(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \times \\ & \quad \times \Delta z(T_i, X_i) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k \alpha_i(t, x) \times \\ & \quad \times \frac{\partial \varphi'_1(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \times \\ & \quad \times \Delta z_{tx}(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y} \Delta y(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_t^{t_2} \int_x^{x_1} \frac{\partial H_2(\tau, s, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y} ds d\tau \right)' \times \\ & \quad \times \Delta y_{tx}(t, x) dx dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x_1} B' \frac{\partial H_2(\tau, s, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y} ds d\tau \right)' \times \\ & \quad \times \Delta z_{tx}(t, x) dx dt, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y_t} \Delta y_t(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_x^{x_1} \frac{\partial H_2[t, s, p_2, \psi_2]}{\partial y_t} ds \right)' \times \\ & \quad \times \Delta y_{tx}(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y_x} \Delta y_x(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_t^{t_2} \frac{\partial H_2(\tau, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y_x} d\tau \right)' \times \\ & \quad \times \Delta y_{tx}(t, x) dx dt + \\ & \quad + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{t_1}^{t_2} B' \frac{\partial H_2(\tau, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y_x} d\tau \right)' \times \\ & \quad \times \Delta z_{tx}(t, x), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_2(y(\theta_1, \xi_1), y(\theta_2, \xi_2), \dots, y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} \times \\ & \quad \times \Delta y(\theta_i, \xi_i) = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_2(y(\theta_1, \xi_1), \dots, y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} \times \\ & \quad \times \beta_i(t, x) \Delta y_{tx}(t, x) dx dt \\ & + \sum_{i=1}^k \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \gamma_i(x) \frac{\partial \varphi'_2(y(\theta_1, \xi_1), \dots, y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} \times \\ & \quad \times B \Delta z_{tx}(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Теперь, учитывая тождества (29)–(30) в формуле приращения (16), и группируя подобные члены, получим, что

$$\begin{aligned} \Delta S(u_1, u_2) & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i(t, x) \times \right. \\ & \quad \times \frac{\partial \varphi_1(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{i=1}^k \gamma_i(x) \times \right. \\
 & \quad \left. \times \frac{\partial \varphi'_2(y(\theta_1, \xi_1), \dots, y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} \right] - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_t^{t_1} \int_x^{x_1} \frac{\partial H'_1(\tau, s, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial z} ds d\tau - \right. \\
 & \quad \left. - \int_x^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, s, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial z_t} ds - \right. \\
 & \quad \left. - \int_t^{t_1} \frac{\partial H'_1(\tau, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial z_x} d\tau + \beta_i(t, x) B' \times \right. \\
 & \quad \left. \times \frac{\partial \varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), y(\theta_2, \xi_2), \dots, y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} - \right. \\
 & \quad \left. - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} B' \frac{\partial H_2(\tau, s, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y} ds d\tau - \right. \\
 & \quad \left. - \int_{t_1}^{t_2} B' \frac{\partial H_2(\tau, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y_x} B d\tau \right]' \times \\
 & \quad \times \Delta z_{tx}(t, x) dx dt + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), \dots, y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} \times \right. \\
 & \quad \times \beta_i(t, x) - \\
 & \quad \left. - \int_t^{t_2} \int_x^{x_1} B' \frac{\partial H_2(\tau, s, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y} ds d\tau + \right. \\
 & \quad \left. + \int_x^{x_1} \frac{\partial H_2(t, s, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y_t} ds + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} B' \frac{\partial H_2(\tau, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial y_x} d\tau \right] \times \\
 & \quad \times \Delta y_{tx}(t, x) dx dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}_1} H_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1) dx dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1} H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial p_1} \times \\
 & \quad \times \Delta p_1(t, x) dx dt -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}_2} H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2) dx dt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_2} H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial p_2} \times \\
 & \quad \times \Delta p_2(t, x) dx dt + \\
 & + o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, X_i)\| \right) + \\
 & + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|y(\theta_i, \xi_i)\| \right) - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_3(\|\Delta p_1(t, x)\|) dx dt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} o_4(\|\Delta p_2(t, x)\|) dx dt. \quad (31)
 \end{aligned}$$

Предположим, что вектор-функции $\psi_i(t, x), i = 1, 2$ являются решениями двумерных интегральных уравнений с частными интегралами вида

$$\begin{aligned}
 & \psi_1(t, x) = \\
 & = - \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_1(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \alpha_i(t, x) + \\
 & + \int_t^{t_1} \int_x^{x_1} \frac{\partial H_1(\tau, s, p_1(\tau, s), u_1(\tau, s), \psi_1(\tau, s))}{\partial z} ds d\tau + \\
 & + \int_x^{x_1} \frac{\partial H_1(t, s, p_1(t, s), u_1(t, s), \psi_1(t, s))}{\partial z_t} ds + \\
 & + \int_t^{t_1} \frac{\partial H_1(\tau, x, p_1(\tau, x), u_1(\tau, x), \psi_1(\tau, x))}{\partial z_x} d\tau - \\
 & - \sum_{i=1}^k \gamma_i(x) B' \frac{\partial \varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), \dots, y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x_1} B' \frac{\partial H_2[\tau, s, p_2, \psi_2]}{\partial y} ds d\tau + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} B' \frac{\partial H_2[\tau, s, p_2, \psi_2]}{\partial y_x} d\tau, \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_2(t, x) = & \\
 = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), \dots, y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} \times & \\
 \times \beta_i(t, x) + & \\
 + \int_t^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_2[\tau, s, p_2, \psi_2]}{\partial y} ds d\tau + & \\
 + \int_t^{t_2} \frac{\partial H_2[t, s, p_2, \psi_2]}{\partial y_t} ds + & \\
 + \int_{t_1}^{t_2} B' \frac{\partial H_2[\tau, s, p_2, \psi_2]}{\partial y_x} d\tau. & \quad (33)
 \end{aligned}$$

Существование и единственность измеримых и ограниченных решений (32), (33) можно доказать известными (см., напр., [4]) методами.

Таким образом, из (31) следует, что, если $\psi_i(t, x), i = 1, 2$ являются решениями сопряженной системы (32), (33), то

$$\begin{aligned}
 \Delta S(u_1, u_2) & \\
 = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}_1} H_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1) dx dt - & \\
 - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1} H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial p_1} \times & \\
 \times \Delta p_1(t, x) dx dt - & \\
 - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}_2} H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2) dx dt - & \\
 - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_2} H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial p_2} \times & \\
 \times \Delta p_2(t, x) dx dt + & \\
 + o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, X_i)\| \right) + & \\
 + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|y(\theta_i, \xi_i)\| \right) - & \\
 - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_3(\|\Delta p_1(t, x)\|) dx dt + &
 \end{aligned}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} o_4(\|\Delta p_2(t, x)\|) dx dt. \quad (34)$$

Для вывода необходимого условия оптимальности с помощью формулы приращения (34) требуется оценка остаточного члена с помощью оценок для норм приращений состояний и их частных производных.

Для $\|\Delta p_1(t, x)\|$ справедливы оценки [13] при сделанных условиях гладкости на правую часть уравнения (3):

$$\begin{aligned}
 \|\Delta z(t, x)\| \leq & \\
 \leq L_1 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta_{\bar{u}_1} f_1[t, x]\| dx dt, & \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\Delta z_t(t, x)\| \leq & \\
 \leq \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta_{\bar{u}_1} f_1[t, x]\| dx dt + \right. & \\
 \left. + \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta_{\bar{u}_1} f_1[t, x]\| dx dt \right], & \quad (36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\Delta z_x(t, x)\| \leq & \\
 \leq L_1 \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta_{\bar{u}_1} f_1[t, x]\| dx dt + \right. & \\
 \left. + \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta_{\bar{u}_1} f_1[t, x]\| dx dt \right], & \quad (37)
 \end{aligned}$$

где $L_1 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

Найдем оценки для $\|\Delta p_2(t, x)\|$.

Из (11), переходя к эквивалентному интегральному уравнению, получим, что

$$\begin{aligned}
 \Delta y(t, x) = B \Delta z(t_1, x) + & \\
 + \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x (f_2(\tau, s, \bar{p}_2(\tau, s), \bar{u}_2(\tau, s)) - & \\
 - f_2(\tau, s, p_2(\tau, s), u_2(\tau, s))) ds d\tau. & \quad (38)
 \end{aligned}$$

Из (38) получаем, что

$$\begin{aligned}
 \Delta y_x(t, x) = B \Delta z_x(t_1, x) + & \\
 + \int_{t_1}^t (f_2(\tau, x, \bar{p}_2(\tau, x), \bar{u}_2(\tau, x)) - d\tau & \\
 - f_2(\tau, x, p_2(\tau, x), u_2(\tau, x))), & \quad (39)
 \end{aligned}$$

$$\Delta y_t(t, x) = \int_{x_0}^x (f_2(t, s, \bar{p}_2(t, s), \bar{u}_2(t, s)) - f_2(t, s, p_2(t, s), u_2(t, s))) ds. \quad (40)$$

Из тождеств (38)–(40) получаем, что

$$\begin{aligned} \|\Delta y(t, x)\| &\leq L_2[\|\Delta z(t_1, x)\| + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|f_2(\tau, s, p_2(\tau, s), \bar{u}_2(\tau, s)) - \\ &- f_2(\tau, s, p_2(\tau, s), u_2(\tau, s))\| ds d\tau + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|p_2(\tau, s)\| ds d\tau]. \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \|\Delta y_t(t, x)\| &\leq \\ &\leq L_3 \left[\int_{x_0}^x \|f_2(t, s, p_2(t, s), \bar{u}_2(t, s)) - \right. \\ &- f_2(t, s, p_2(t, s), u_2(t, s))\| ds + \\ &\left. + \int_{x_0}^x \|p_2(t, s)\| ds \right], \\ \|\Delta y_x(t, x)\| &\leq L_4[\|\Delta z_x(t_1, x)\| + \\ &+ \int_{t_1}^t \|f_2(\tau, x, p_2(\tau, x), \bar{u}_2(\tau, x)) - \\ &- f_2(\tau, x, p_2(\tau, x), u_2(\tau, x))\| d\tau + \\ &\left. + \int_{t_1}^t \|p_2(\tau, x)\| d\tau \right], \end{aligned} \quad (42)$$

где $L_i = \text{const} > 0, i = \overline{2,4}$ некоторые постоянные.

Далее, используя лемму Гронуолла–Беллмана (см., например, [14]) из неравенств (41), (42) после некоторых рассуждений получаем справедливость оценок:

$$\begin{aligned} \|\Delta y(t, x)\| &\leq L_5[\|\Delta z(t_1, x)\| + \\ &+ \int_{x_0}^x \|\Delta z(t_1, s)\| ds + \int_{x_0}^x \|\Delta z_s(t_1, s)\| ds + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x [f_2(\tau, s, p_2(\tau, s), \bar{u}_2(\tau, s)) - \\ &- f_2(\tau, s, p_2(\tau, s), u_2(\tau, s))] ds d\tau, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \|\Delta y_t(t, x)\| &\leq L_6 \int_{x_0}^x [\|\Delta z(t_1, s)\|] ds + \\ &+ \|f_2(t, s, p_2(t, s), \bar{u}_2(t, s)) - \\ &- f_2(t, s, p_2(t, s), u_2(t, s))\| + \\ &+ \int_{x_0}^x \|\Delta z_s(t_1, s)\| ds + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|f_2(\tau, s, p_2(\tau, s), \bar{u}_2(\tau, s)) - \\ &- f_2(\tau, s, p_2(\tau, s), u_2(\tau, s))\| ds d\tau. \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \|\Delta y_x(t, x)\| &\leq L_7[\|\Delta z_x(t_1, x)\| + \\ &+ \int_{t_1}^t f_2(\tau, x, \bar{p}_2(\tau, x), \bar{u}_2(\tau, x)) d\tau \\ &- f_2(\tau, x, p_2(\tau, x), u_2(\tau, x))\| + \\ &+ \int_{x_0}^x \|\Delta z(t_1, s)\| ds + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|f_2(\tau, s, p_2(\tau, s), \bar{u}_2(\tau, s)) - \\ &- f_2(\tau, s, p_2(\tau, s), u_2(\tau, s))\| ds d\tau], \end{aligned} \quad (45)$$

где $L_i = \text{const} > 0, i = \overline{5,7}$ некоторые постоянные.

Эти оценки позволяют получить необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

Считая $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ оптимальным управлением, его специальное приращение определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_1(t, x; \varepsilon) = \begin{cases} v_1 - u_1(t, x), & (t, x) \in D_1(\varepsilon), \\ 0, & (t, x) \in D_1 \setminus D_1(\varepsilon), \end{cases} \\ u_2(t, x; \varepsilon) = 0, & (t, x) \in D_2, \end{cases} \quad (46)$$

Здесь $D_1(\varepsilon) = [\theta, \theta + \varepsilon] \times [\xi, \xi + \varepsilon]$, $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ произвольная правильная точка (точка Лебега) (см., напр., [14]) управления $u_1(t, x)$, $v_1 \in U_1$ произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1, \xi + \varepsilon < x_1$.

Принимая во внимания оценки (35), (37), (43), (45) и учитывая формулу (46), из (34), на основе теоремы о среднем получаем, что

$$\begin{aligned} &- \varepsilon^2 [H_1(\theta, \xi, p_1(\theta, \xi), v_1, \psi_1(\theta, \xi)) - \\ &- H_1(\theta, \xi, p_1(\theta, \xi), u_1(\theta, \xi), \psi_1(\theta, \xi))] + o(\varepsilon^2) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует неравенство

$$H_1(\theta, \xi, p_1(\theta, \xi), v_1, \psi_1(\theta, \xi)) - H_1(\theta, \xi, p_1(\theta, \xi), u_1(\theta, \xi), \psi_1(\theta, \xi)) \leq 0.$$

Теперь специальное приращение оптимального управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_1(t, x; \mu) = 0, & (t, x) \in D_2, \\ u_2(t, x; \mu) = \begin{cases} v_2 - u_2(t, x), & (t, x) \in D_2(\mu), \\ 0, & (t, x) \in D_2 \setminus D_2(\mu). \end{cases} \end{cases} \quad (47)$$

Здесь $D_2(\mu) = [\theta, \theta + \mu] \times [\xi, \xi + \mu]$, $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, x_1]$ произвольная правильная точка управления $u_2(t, x)$, $v_2 \in U_2$ произвольный вектор, а $\mu > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta + \mu < t_2$, $\xi + \mu < x_1$.

При определении специального приращения управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ формулой (47), учитывая оценки (43)–(45) из формулы приращения (34) получаем, что вдоль оптимального управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$

$$-\mu^2 [H_2(\theta, \xi, p_2(\theta, \xi), v_2, \psi_2(\theta, \xi)) - H_2(\theta, \xi, p_2(\theta, \xi), u_2(\theta, \xi), \psi_2(\theta, \xi))] + o(\mu^2) \geq 0.$$

Следовательно,

$$H_2(\theta, \xi, p_2(\theta, \xi), v_2, \psi_2(\theta, \xi)) - H_2(\theta, \xi, p_2(\theta, \xi), u_2(\theta, \xi), \psi_2(\theta, \xi)) \leq 0.$$

На основе полученных неравенств сформулируем доказанный результат.

Теорема 1. При сделанных предположениях, для оптимальности допустимого управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \max_{v_1 \in U_1} H_1(\theta, \xi, p_1(\theta, \xi), v_1, \psi_1(\theta, \xi)) = \\ = H_1(\theta, \xi, p_1(\theta, \xi), u_1(\theta, \xi), \psi_1(\theta, \xi)) \end{aligned} \quad (48)$$

для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$,

$$\begin{aligned} \max_{v_2 \in U_2} H_2(\theta, \xi, p_2(\theta, \xi), v_2, \psi_2(\theta, \xi)) = \\ = H_2(\theta, \xi, p_2(\theta, \xi), u_2(\theta, \xi), \psi_2(\theta, \xi)) \end{aligned} \quad (49)$$

для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$.

Линеаризованный принцип максимума

В этом пункте исследование задачи (1)–(7) продолжается при следующих дополнительных предположениях:

1) множества $U_i, i = 1, 2$ выпуклы,

2) вектор-функции $f_1(t, x, p_1, u_1)$ и $f_2(t, x, p_2, u_2)$ непрерывны по совокупности аргументов вместе с частными производными по (p_1, u_1) и (p_2, u_2) соответственно.

Приведем формулу приращения функционала качества (7), соответствующую допустимым управлениям $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ и $(\bar{u}_1(t, x), \bar{u}_2(t, x))$ (см. (15)):

$$\begin{aligned} \Delta S(u_1, u_2) = & [\varphi_1(\bar{z}(T_1, X_1), \bar{z}(T_2, X_2), \dots, \bar{z}(T_k, X_k)) - \\ & - \varphi_1(z(T_1, X_1), z(T_2, X_2), \dots, z(T_k, X_k))] + \\ & + [\varphi_2(\bar{y}(\theta_1, \xi_1), \bar{y}(\theta_2, \xi_2), \dots, \bar{y}(\theta_k, \xi_k)) - \\ & - \varphi_2(y(\theta_1, \xi_1), y(\theta_2, \xi_2), \dots, y(\theta_k, \xi_k))] + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'_1(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} [H_1(t, x, \bar{p}_1, \bar{u}_1, \psi_1) + \\ & - H_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)] dx dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \psi'_2(t, x) \Delta y_{tx}(t, x) dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} [H_2(t, x, \bar{p}_2, \bar{u}_2, \psi_2) - \\ & - H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)] dx dt. \end{aligned} \quad (50)$$

Применяя формулу Тейлора к отдельным слагаемым в формуле (50), получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta S(u_1, u_2) = & \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_1(z(T_1, X_1), \dots, z(T_k, X_k))}{\partial z_i} \times \\ & \times \Delta z(T_i, X_i) + \\ & + \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi'_2(y(\theta_1, \xi_1), \dots, y(\theta_k, \xi_k))}{\partial y_i} \times \\ & \times \Delta y(\theta_i, \xi_i) + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'_1(t, x) \Delta z_{tx}(t, x) dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1} H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial p_1} \Delta p_1(t, x) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Delta_{\bar{u}_1} H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial u_1} \Delta u_1(t, x) dx dt \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \Delta_{\bar{u}_2} H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial p_2} \Delta p_2(t, x) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial u_2} \Delta u_2(t, x) dxdt \right] + \\
 & + o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, X_i)\| \right) + \\
 & + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|y(\theta_i, \xi_i)\| \right) - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_5(\|\Delta p_1(t, x) + \Delta u_1(t, x)\|) dxdt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} o_4(\|\Delta p_2(t, x) + \Delta u_2(t, x)\|) dxdt. \quad (51)
 \end{aligned}$$

Считая, что $\psi_i(t, x), i = 1, 2$ являются решениями сопряженной системы (32), (33), то аналогично с доказательством формулы приращения (34) доказывается справедливость следующей формулы приращения функционала качества:

$$\begin{aligned}
 & \Delta S(u_1, u_2) = \\
 & = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial u_1} \times \right. \\
 & \quad \times \Delta p_1(t, x) dxdt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial u_2} \Delta u_2(t, x) dxdt + \\
 & + o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, X_i)\| \right) + \\
 & + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|y(\theta_i, \xi_i)\| \right) - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_5(\|\Delta p_1(t, x) + \Delta u_1(t, x)\|) dxdt - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} o_4(\|\Delta p_2(t, x) + \Delta u_2(t, x)\|) dxdt. \quad (52)
 \end{aligned}$$

Из оценок установленных, например, в [1], следует, что

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq$$

$$\leq L_2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta u_1(t, x)\| dxdt, \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta z_t(t, x)\| \leq \\
 & \leq L_2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta u_1(t, x)\| dxdt \\
 & + \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta u_1(t, x)\| dx, \quad (54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta z_x(t, x)\| \leq L_2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta u_1(t, x)\| dxdt + \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u_1(t, x)\| dt. \quad (55)
 \end{aligned}$$

Перейдем к оценке для $\|\Delta y(t, x)\|$, $\|\Delta y_t(t, x)\|$ и $\|\Delta y_x(t, x)\|$.

Из краевой задачи (11)–(12), переходя к эквивалентному интегральному уравнению и используя условие Липшица, получаем, что

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta y(t, x)\| \leq C_1 [\|\Delta z(t_1, x)\| + \\
 & + \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|\Delta y(\tau, s)\| + \|\Delta y_\tau(\tau, s)\| + \\
 & + \|\Delta y_s(\tau, s)\| + \|\Delta u_2(\tau, s)\| dsd\tau, \quad (56)
 \end{aligned}$$

где $C_1 = const > 0$ некоторое постоянное.

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta y_t(t, x)\| \leq C_2 \int_{x_0}^x [\|\Delta u_2(t, s)\| + \\
 & + \|\Delta y(t, s)\| + \\
 & + \|\Delta y_t(t, s)\| \|\Delta y_s(t, s)\|] ds, \quad (57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta y_x(t, x)\| \leq C_3 [\|\Delta z_x(t_1, x)\| + \\
 & + \|\Delta y(\tau, x)\| \|\Delta y_\tau(\tau, x)\| + \\
 & + \int_{t_1}^t \|\Delta u_2(\tau, x)\| + \|\Delta y_x(\tau, x)\| d\tau, \quad (58)
 \end{aligned}$$

где $C_2 = const > 0, C_3 = const > 0$ также некоторые постоянные.

Далее, ясно, что

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta y(t, x)\| \leq \\
 & \leq C_4 [\|\Delta z(t_1, x)\| + \int_{t_1}^t \|\Delta y_\tau(\tau, x)\| d\tau, \quad (59)
 \end{aligned}$$

$$\|\Delta y(t, x)\| \leq \int_{x_0}^x \|\Delta y_s(t, s)\| ds, \quad (60)$$

($C_4 = const > 0$).

Из (57)–(58) применяя лемму Гронуолла (см., например, [14]) соответственно, получим, что

$$\begin{aligned} \|\Delta y_t(t, x)\| &\leq C_5 \left[\int_{x_0}^x \|\Delta u_2(t, s)\| ds + \right. \\ &+ \left. \int_{x_0}^x [\|\Delta y(t, s)\| + \|\Delta y_s(t, s)\|] ds, \right. \\ \|\Delta y_x(t, x)\| &\leq C_6 \|\Delta z_x(t_1, x)\| \\ &+ \int_{t_1}^t [\|\Delta y(\tau, x)\| + \|\Delta y_\tau(\tau, x)\|] d\tau + \\ &+ \left. \int_0^t \|\Delta u_2(\tau, x)\| d\tau, \right. \end{aligned}$$

где $C_5 = const > 0, C_6 = const > 0$ некоторые постоянные.

Из последних неравенств, используя соответственно оценки (59), (60), получим

$$\begin{aligned} \|\Delta y_t(t, x)\| &\leq C_7 \left[\int_{x_0}^x \|\Delta u_2(t, s)\| ds \right. \\ &+ \int_{x_0}^x \|\Delta y_s(t, s)\| ds + \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|\Delta y_\tau(\tau, s)\| ds d\tau + \\ &+ \left. \int_{x_0}^x \|\Delta z_x(t_1, s)\| ds \right], \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\Delta y_x(t, x)\| &\leq C_8 [\Delta z_x(t_1, x) + \\ &+ \int_{t_0}^t \|\Delta u_2(\tau, x)\| d\tau + \int_{t_1}^t \|\Delta y_\tau(\tau, x)\| d\tau + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|\Delta y_s(\tau, s)\| ds d\tau, \quad (62) \end{aligned}$$

($C_7 = const > 0, C_8 = const > 0$ некоторые постоянные).

Применяя к этим неравенствам лемму Вендорфа (см., например, [14]), будем иметь

$$\|\Delta y_t(t, x)\| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C_9 \left[\int_{x_0}^x [\|\Delta z(t_1, s)\| + \|\Delta u_2(t, s)\|] ds + \right. \\ &+ \left. \int_{x_0}^x \|\Delta y_s(t, s)\| ds, \quad (63) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\Delta y_x(t, x)\| &\leq C_{10} [\|\Delta z_x(t_1, x)\| + \\ &+ \int_{t_1}^t \|\Delta u_2(\tau, x)\| d\tau + \\ &+ \left. \int_{t_1}^t \|\Delta y_\tau(\tau, x)\| d\tau \right], \quad (64) \end{aligned}$$

($C_9 = const > 0, C_{10} = const > 0$ некоторые постоянные).

Усиливая эти неравенства (63), (64) друг с другом, а затем применяя к усиленным неравенствам лемму Вендорфа, аналогично будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Delta y_t(t, x)\| &\leq \\ &\leq C_{12} \left[\int_{x_0}^x \|\Delta z(t_1, s)\| [+ \|\Delta u_2(t, s)\|] ds + \right. \\ &+ \int_{x_0}^x \|\Delta z_s(t_1, s)\| ds + \\ &+ \left. \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|\Delta u_2(\tau, s)\| ds d\tau, \quad (65) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\Delta y_x(t, x)\| &\leq C_{13} \|\Delta z(t_1, x)\| + \\ &+ \int_{t_1}^t \|\Delta u_2(\tau, x)\| d\tau + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|\Delta u_2(\tau, s)\| ds d\tau + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|\Delta z(t_1, s)\| ds d\tau. \quad (66) \end{aligned}$$

Далее, из (59) с учетом (65) получаем, что

$$\begin{aligned} \|\Delta y(t, x)\| &\leq \\ &\leq C_{11} \|\Delta z(t_1, x)\| + \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|\Delta z(t_1, s)\| ds d\tau + \\ &+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|\Delta u_2(\tau, s)\| ds d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \int_{t_1}^t \int_{x_0}^x \|\Delta z_s(t_1, s)\| ds d\tau. \quad (67)$$

Используя оценки (65)–(67), с помощью специальных приращений управляющих функций получим необходимое условие оптимальности.

Предположим, что в () $\Delta u_2(t, x) \equiv 0$. Тогда из (52) получаем, что

$$\begin{aligned} & S(u_1 + \Delta u_1, v_1) - S(u_1, u_2) = \\ & = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial u_1} \times \right. \\ & \quad \times \Delta p_1(t, x) dx dt + \\ & \quad + o_1 \left(\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, X_i)\| \right) + \\ & \quad + o_2 \left(\sum_{i=1}^k \|y(\theta_i, \xi_i)\| \right) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_5 (\|\Delta p_1(t, x) + \Delta u_1(t, x)\|) dx dt - \\ & \quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} o_4 (\|\Delta p_2(t, x) + \\ & \quad + \Delta u_2(t, x)\|) dx dt. \quad (68) \end{aligned}$$

Пусть $\mu \in [0, 1]$ произвольное число, $v_1(t, x) \in U_1 \subset R^r$, $(t, x) \in D_1$, произвольное допустимое управление. Тогда с учетом выпуклости множества U_1 специальное приращение управляющей функции $u_1(t, x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_1(t, x; \mu) = \mu[v_1(t, x) - u_1(t, x)]. \quad (69)$$

Через $\Delta z(t, x; \mu)$ обозначим специальное приращение состояния $z(t, x)$ и $y(t, x)$, отвечающее приращению () управления. Из оценок (65)–(67) следует, что

$$\|\Delta z(t, x; \mu)\| \leq C_{14}\mu, \quad (70)$$

$$\|\Delta z_t(t, x; \mu)\| \leq C_{14}\mu, \quad (71)$$

$$\|\Delta z_x(t, x; \mu)\| \leq C_{14}\mu, \quad (72)$$

где $C_{14} = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

Принимая во внимания формулу (69) и оценки (70)–(72) из частичной формулы приращения (68), приходим к разложению

$$\begin{aligned} & S(u_1(t, x) + \Delta u_1(t, x; \mu), v_1(t, x)) - \\ & \quad - S(u_1(t, x), u_2(t, x)) = \\ & = -\mu \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial u_1} \times \\ & \quad \times (v_1(t, x) - u_1(t, x)) dx dt + o(\mu). \quad (73) \end{aligned}$$

Пусть теперь $v \in [0, 1]$ произвольное число, $v_2(t, x) \in U_1 \subset R^r$, $(t, x) \in D_1$, произвольное допустимое управление. Специальное приращение управляющей функции $u_2(t, x)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t, x; v) = v[v_2(t, x) - u_2(t, x)]. \quad (74)$$

Через $\Delta y(t, x; v)$ обозначим специальное приращение $y(t, x)$. Ясно, что $\Delta z(t, x; v) = 0$. Поэтому из оценок (65)–(67), учитывая (68), получаем, что

$$\begin{aligned} \|\Delta y(t, x; v)\| & \leq C_{15}v, (t, x) \in D_2. \\ \|\Delta y_t(t, x; v)\| & \leq C_{15}v, (t, x) \in D_2. \\ \|\Delta y_x(t, x; v)\| & \leq C_{15}v, (t, x) \in D_2. \quad (75) \end{aligned}$$

Учитывая (74), (75) из (68), получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned} & S(u_1(t, x), u_2(t, x) + \Delta u_2(t, x; v)) - \\ & \quad - S(u_1(t, x), u_2(t, x)) = \\ & = -v \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial u_2} \times \\ & \quad \times [v_2(t, x) - u_2(t, x)] dx dt + o(v). \quad (76) \end{aligned}$$

Предположим, что допустимое управление является оптимальным управлением в задаче (1)–(7). Тогда из разложений (73), (76) получаем справедливость неравенств

$$\begin{aligned} & \mu \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial u_1} \times \\ & \quad \times [v_1(t, x) - u_1(t, x)] dx dt - o(\mu) \leq 0, \quad (77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & v \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial u_2} \times \\ & \quad \times [v_2(t, x) - u_2(t, x)] dx dt + o(v) \leq 0. \quad (78) \end{aligned}$$

Из неравенств (77), (78) в силу произвольности $\mu \in [0, 1]$ и $v \in [0, 1]$ получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial u_1} \times [v_1(t, x) - u_1(t, x)] dx dt \leq 0, \quad (79)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial u_2} \times [v_2(t, x) - u_2(t, x)] dx dt \leq 0. \quad (80)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Если множества U_i , $i = 1, 2$ выпуклы, а $f_i(t, x, p_i, u_i)$, $i = 1, 2$ имеют непрерывные частные производные по (p_i, u_i) , $i = 1, 2$ соответственно, то для оптимальности допустимого управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ в задаче (1)–(7) необходимо, чтобы неравенства (79), (80) выполнялись для всех $v_1(t, x), v_2(t, x)$ соответственно.

Таким образом, доказано необходимое условие оптимальности в форме линейаризованного интегрального принципа максимума.

Непосредственным следствием теоремы является следующее утверждение.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда для оптимальности допустимого управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ в рассматриваемой задаче необходимо выполнение соотношений

$$\frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial u_1} \times [v_1(t, x) - u_1(t, x)] \leq 0 \quad (81)$$

для всех $v_1 \in U_1, (\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$,

$$\frac{\partial H'_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial u_2} \times [v_2(t, x) - u_2(t, x)] \leq 0 \quad (82)$$

для всех $v_2 \in U_2, (\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, x_1]$.

Полученное необходимое условие оптимальности является аналогом линейаризованного (дифференциального) [15] принципа максимума.

Необходимые условия оптимальности (79) и (81), (80) и (82) можно показать, что эквивалентны.

Проверка этих необходимых условий оптимальности легче, чем проверка условий оптимальности (79), (80).

Но они более слабы, чем аналог принципа максимума Понтрягина и получены при более жестких ограничениях на данные рассматриваемой задачи.

Аналог уравнения Эйлера

Предположим, что множества U_i , $i = 1, 2$ открыты, а $f_i(t, x, p_i, u_i)$, $i = 1, 2$ непрерывно-дифференцируемы по (p_i, u_i) , $i = 1, 2$ соответственно. Предположим, что ε произвольное, достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_1(t, x) \in R^r, (t, x) \in D_1$ произвольная n -мерная измеримая и ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управляющей функции).

Тогда специальное приращение управляющей функции $u_1(t, x)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_1(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \delta u_1(t, x). \quad (83)$$

Пусть $(\Delta z(t, x; \varepsilon), \Delta y(t, x; \varepsilon))$ специальное приращение состояния $(z(t, x), y(t, x))$, отвечающее приращению (83) управления $u_1(t, x)$.

Из оценок (65), (67) и формулу (83) следует, что $\|\Delta p_1(t, x; \varepsilon)\|, \|\Delta p_2(t, x; \varepsilon)\|$ имеют порядок малости μ . Тогда учитывая формулу (83) из (68) получаем разложение

$$\begin{aligned} S(u_1 + \varepsilon \delta u_1, u_2) - S(u_1, u_2) &= \\ = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial u_1} \times \\ \times \delta u_1(t, x) dx dt + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (84)$$

Теперь предположим, что

$$\Delta u_2(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \delta u_2(t, x). \quad (85)$$

где, как и выше, ε также достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_2(t, x) \in R^q, (t, x) \in D_2$ произвольная n -мерная измеримая и ограниченная вектор-функция.

Пусть $(\Delta z(t, x; \varepsilon), \Delta y(t, x; \varepsilon))$ специальное приращение состояния $(z(t, x), y(t, x))$, отвечающее приращению (85) управления $u_2(t, x)$. Ясно, что при этом $\|\Delta p_1(t, x; \varepsilon)\| = 0$, а $\|\Delta p_2(t, x; \varepsilon)\|$ имеют порядок малости ε , в силу оценок (65), (67). Тогда из формулы приращения (52) следует, что

$$\begin{aligned} S(u_1, u_2) - S(u_1, u_2 + \varepsilon \delta u_2) &= \\ = -\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial u_2} \times \\ \times \delta u_2(t, x) dx dt + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (86)$$

Из разложений (84), (86), что в силу открытости областей управления U_i , $i = 1, 2$ и основного результата вариационного исчисления следует, что если $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ оптимальное управление, то для всех $\delta u_1(t, x) \in R^r$, $\delta u_2(t, x) \in R^q$ выполняются соотношения

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial u_1} \times \delta u_1(t, x) dx dt = 0, \quad (87)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial u_2} \times \delta u_2(t, x) dx dt = 0. \quad (88)$$

Соотношения (87), (88) являются неявными необходимыми условиями первого порядка. Но из них можно получить явно выраженную через параметры рассматриваемой задачи вариацию управления определяя специальным образом.

Имеет место

Теорема 3 (аналог уравнения Эйлера). Если множества U_i , $i = 1, 2$ открыты, то для оптимальности допустимого управления $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ необходимо выполнение соотношений

$$\frac{\partial H_1(t, x, p_1, u_1, \psi_1)}{\partial u_1} = 0 \quad (89)$$

для всех $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times [x_0, x_1)$,

$$\frac{\partial H_2(t, x, p_2, u_2, \psi_2)}{\partial u_2} = 0 \quad (90)$$

для всех $(\theta, \xi) \in [t_1, t_2] \times [x_0, x_1)$.

Соотношения (89), (90) являются аналогом уравнения Эйлера из классического вариационного исчисления для рассматриваемой задачи.

Заключение

В статье рассматривается задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая в двух областях нелинейными системами гиперболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Гурса, при предположении что функционал качества является многоточечным.

При развитии аналога метода приращений для рассматриваемой задачи введены сопряженные уравнения в форме двумерных ин-

тегральных уравнений типа Вольтерра с одномерными слагаемыми. Построена общая формула приращения критерия качества первого порядка, носящего конструктивный характер. Приведены оценки норм приращений состояний. Исследуя полученную формулу приращения на игольчатого типа вариациях (аналог вариации Макшейна) управления, доказан аналог принципа максимума Понтрягина. При предположении выпуклости областей управления и гладкости правых частей уравнений также по управляющим функциям выведен аналог линеаризованного условия максимума.

В частности, приведено необходимое условие оптимальности в форме дифференциального условия максимума. В случае открытости областей управления установлен аналог классического уравнения Эйлера.

Список источников

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1964. № 5. С. 613–623.
2. Ахмедов К.Т., Ахиев С.С. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. 1972. № 5. С. 12–16.
3. Ащепков Л.Т., Васильев О.В. Об оптимальности особых управлений в системах Гурса–Дарбу // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. № 5. С. 1157–1167.
4. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. № 1. С. 61–67.
5. Срочко В.А. Условия оптимальности типа максимума в системах Гурса–Дарбу // Сибирский математический журнал. 1984. №2. С. 56–65.
6. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления с распределенными системами. Ч. I. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.
7. Мансимов К.Б. Условия оптимальности второго порядка системами Гурса–Дарбу при наличии ограничений // Дифференциальные уравнения. 1990. № 6. С. 954–965.

8. Мансимов К.Б. Интегральные необходимые условия оптимальности квазиисобных управлений в системах Гурса–Дарбу // Автоматика и телемеханика. 1993. № 5. С. 116–122.
9. Арсенашвили А.И., Тадумадзе Т.А. Необходимые условия оптимальности для управляемых систем с переменной структурой и непрерывными условиями преемственности // Тр. ИПМ. и М И.Н. Векуа. Тбилиси, 1988. Т. 27. С. 35–48.
10. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. 1993. № 6. С. 32–36.
11. Исмаилов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. № 10. С. 158–170.
12. Никольский М.С. Об одной вариационной задаче с переменной структурой // Вестник МГУ, Серия Вычислительной математики и кибернетики. 1987. № 1. С. 31–41.
13. Васильев О.В., Срочко В.А., Трелецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. М.: Наука, 1990. 151 с.
14. Новоженев М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький: Изд-во ГГУ, 1986. 87 с.
15. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: Либроком, 2011. 272 с.
- tematiki i matemematcheskoiy fiziki. 1975;5:1157-1167. (In Russ.).
4. Plotnikov V.I., Sumin V.I. Optimizatsiya ob"yektov s raspredelennimi parametrami, opisyyayemyimi infektsiyami Gursa–Darbu. Zhurnal vychislitelnoiy matematiki i matemematcheskoiy fiziki. 1972;1:61-67. (In Russ.).
5. Srochko V.A. Usloviya universal'nosti tipa maksimal'noy v rasteniyakh Gursa–Darbu. Sibirskiy matematicheskiy zhurnal 1984;2:56-65. (In Russ.).
6. Sumin V.I. Vol'terovy uravneniya v teorii upravleniya s raspredelennymi funktsional'nymi proyavleniyami. Ch. I. Nizhniy Novgorod: Izd-vo NNGU; 1992. 110 s. (In Russ.).
7. Mansimov K.B. Trebovaniya k srednemu tsvetu tsveta Gursa–Darbu pri nalichii ogranicheniy. Differentsialnii uravneniya. 1990;6:954-965. (In Russ.).
8. Mansimov K.B. Integral'nyye ekvivalentnyye usloviya kislotnosti kvazisobstvennykh upravleniy v sistemakh Gursa–Darbu. Avtomatika i telemekhanika. 1993;5:116-122. (In Russ.).
9. Arsenashvili A.I., Tadumadze T.A. Neobkhodimyeye usloviya potrebleniya dlya upravleniya sistemami s ukazaniyem struktury i nepreryvnymi usloviyami preyemstvennosti. Trudy IPM i M I.N. Vekua. Tbilisi, 1988;(1(27):35-48. (In Russ.).
10. Zakharov G.K. Optimizatsiya stupenchatykh sistem s upravleniyem dostupom. Avtomatika i telemekhanika. 1993;6:32-36. (In Russ.).
11. Ismaylov R.R., Mansimov K.B. Ob usloviyakh natsional'nosti v odnoy stupenchatoy zadache upravleniya. Zhurnal vychislitelnoiy matematiki i matemematcheskoiy fiziki. 2006;10:158-170. (In Russ.).

References

1. Yegorov A.I. Ob raspredelenii upravleniya protsessami v nekotorykh resursakh s raspredelennymi parametrami. Avtomatika i telemekhanika. 1964;5:613-623. (In Russ.).
2. Akhmedov K.T., Akhiyev S.S. Neobkhodimyeye usloviya vodnykh resursov dlya nekotorykh zadach teorii ekonomicheskogo upravleniya. Dokl. AN Azerb. SSR. 1972;5:2-16. (In Russ.).
3. Ashchepkov L.T., Vasil'yev O.V. Ob isklyuchitel'nosti osobykh upravleniy v istochnikakh Gursa–Darbu. Zhurnal vychislitelnoiy ma-
12. Nikol'skiy M.S. Ob odnoy variatsionnoy zadache s ustanovkoy stuktury. Vestnik MGU, Ser. vychislitelnoiy matematiki i kibernetiki. 1987;1:31-41. (In Russ.).
13. Vasil'yev O.V., Srochko V.A., Treletskiy V.A. Metody optimizatsii i ikh prilozheniya. M.: Nauka; 1990. 151 s. (In Russ.).
14. Novozhenov M.M., Sumin V.I., Sumin M.I. Metody obshcheprinyatogo upravleniya matematicheskoy fizikoy. Gor'kiy: Izd-vo GGU; 1986. 87 s. (In Russ.).
15. Gabasov R., Kirillova F.M. maksimal'naya v teorii printsipov upravleniya. M.: Librokom; 2011. 272 s. (In Russ.).

Информация об авторах:

К. Б. Мансимов – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математической кибернетики Бакинского государственного университета (1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23), руководитель лаборатории "Управление в сложных динамических системах" Института систем управления Министерства науки и образования Азербайджана (1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 68), AuthorID 247352;

Ш. Ш. Сулейманова – диссертант Института систем управления Министерства науки и образования Азербайджана (1141, Азербайджан, г. Баку, ул. Б. Вагабзаде, 68).

Information about the authors:

K. B. Mansimov – Doctor of Sciences (Physical and Mathematical), Professor, Head of the Mathematical Cybernetics Department, Baku State University (23, Z. Khalilov St., Baku, Azerbaijan, 1148), Head of the Laboratory "Control in Complex Dynamical Systems" of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, 1141), AuthorID 247352;

Sh. Sh. Suleymanova – dissertation candidate at the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan (68, B. Vagabzade St., Baku, Azerbaijan, 1141).

«Механика»

Научная статья

УДК 539.37:620.17

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-52-59

Исследование механического поведения эластомерных нанокомпозитов в условиях двухосного нагружения

Олег Константинович Гаришин¹, Владимир Васильевич Шадрин²

^{1,2}Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

²Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

¹gar@icmm.ru

²shadrin@icmm.ru

Аннотация. Проведены двухосные циклические испытания эластомерных композитов, наполненных зернистыми наночастицами (технический углерод и детонационные наноалмазы), нано-пластинками (малослойный графен) и нановолокнами (многостенные углеродные нанотрубки). Эксперименты проводились на уникальном четырехвекторном испытательном стенде Zwick/Roell с использованием специальных крестообразных образцов веерного типа. Исследования показали, что наибольшее влияние на изменение механических свойств материала в процессе циклического деформирования по взаимно перпендикулярным направлениям оказывают нановолокна (углеродные нанотрубки). Именно они, благодаря своей длине и гибкости, наиболее эффективно участвуют в перестройке микроструктуры, формируя тем самым макроскопическое поведение материала.

Ключевые слова: эластомерные нанокомпозиты; детонационные наноалмазы, малослойный графен, углеродные нанотрубки; двухосные механические испытания; циклические деформации; упругость; вязкоупругость

Для цитирования: Гаришин О. К., Шадрин В. В. Исследование механического поведения эластомерных нанокомпозитов в условиях двухосного нагружения // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 52–59. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-52-59.

Благодарности: работа выполнена в рамках Государственного задания ПФИЦ УрО РАН, регистрационный номер: АААА-А20-120022590044-7 (2020).

Статья поступила в редакцию 01.08.2023; одобрена после рецензирования 05.09.2023; принята к публикации 28.11.2023.

«Mechanics»

Research article

Studies of Elastomeric Nanocomposites Mechanical Behavior Under Biaxial Loading

Oleg K. Garishin¹, Vladimir V. Shadrin²

^{1,2}Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

²Perm State University, Perm, Russia

¹gar@icmm.ru

²shadrin@icmm.ru



Эта работа © 2023 Гаришин О.К., Шадрин В.В. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. Biaxial cyclic tests of elastomeric composites filled with granular nanoparticles (carbon black and detonation nanodiamonds), nanoplates (few-layer nanographene) and nanofibers (multi-walled carbon nanotubes) have been carried out. The experiments were carried out on Zwick/Roell's unique four-vector test stand using special fan-type cruciform specimens. Studies have shown that carbon nanotubes have the greatest influence on the change in the mechanical properties of a material during cyclic deformation in mutually perpendicular directions. It is they, due to their length and flexibility, that most effectively participate in the restructuring of the microstructure, thereby forming the macroscopic behavior of the material.

Keywords: *elastomeric nanocomposites; detonation nanodiamonds; few-layer nanographene; carbon nanotubes; biaxial mechanical tests; cyclic deformations; elasticity; viscoelasticity*

For citation: *Garishin O. K., Shadrin V. V. Studies of Elastomeric Nanocomposites Mechanical Behavior Under Biaxial Loading. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):52-59. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-52-59.*

Acknowledgments: the work was supported by the PFIC Ural RAS (State Assignment, registration number AAAA-A20-120022590044-7, 2020).

The article was submitted 01.08.2023; approved after reviewing 05.09.2023; accepted for publication 28.11.2023.

Введение

Наполненные эластомеры представляют собой иерархические структурно неоднородные системы со сложным механическим поведением. Они способны деформироваться без разрушения на десятки и даже сотни процентов, демонстрируя при этом хорошо выраженные нелинейно упругие и вязкоупругие свойства. Для них также характерны различные механические эффекты, связанные с перестройкой внутренней структуры материала при его деформировании – накопление внутренней поврежденности, возникновение наведенной механической анизотропии вследствие переориентации полимерных макромолекул и изменения взаимного расположения частиц наполнителя, эффект Маллинза и т.д. Поэтому для изучения механического поведения таких материалов требуются нетривиальные механические эксперименты, которые позволяют выявить все эти особенности. Это сложные циклические траектории нагружения с различной амплитудой по напряжениям и деформациям, остановками на релаксацию и т.д.

Кроме того, из практики хорошо известно, что при эксплуатации в конструкции такие материалы зачастую ведут себя далеко не так, как это наблюдалось при стандартных обычных испытаниях образцов. Использование двухосной машины позволяет существенно приблизиться к решению этой проблемы, задавая сложные траектории нагружения по разным осям, то есть появляется возможность испытывать образцы в условиях, более близких к реальности.

В работе представлена новая экспериментальная методика исследования механических свойств наполненных эластомеров в случае сложного двухосного нагружения. В ее основе лежит циклическое нагружение образцов по двум осям (последовательно или одновременно). При этом на каждом цикле задается своя индивидуальная амплитуда по деформациям и делаются временные остановки на релаксацию при смене направления движения захватов. Методика позволяет за одно испытание получить комплексные данные об упругих, вязких и пластических свойствах полимера, что существенно снижает трудоемкость исследований. Данный подход хорошо зарекомендовал себя для одноосных испытаний [1, 2], поэтому его обобщение на двухосный случай вполне оправдано и представляет серьезный научный интерес.

1. Описание установки для двухосных механических испытаний

Следует отметить, что количество публикаций по двухосным механическим испытаниям очень мало. Дело в том, что в мире существует всего несколько таких установок, причем принадлежат они коммерческим фирмам, которые не стремятся к опубликованию полученных на них результатов. Что касается России, то в Казанском научном центре РАН также имеется установка для двухосных механических испытаний, но она предназначена для исследования металлов [3, 4]. Она способна создавать очень большие усилия на захватах, но сам их ход движения недостаточен для исследования "мягких" конечно деформируемых полимеров.

В Пермском государственном национальном исследовательском университете имеется единственный в России четырехвекторный испытательный стенд Zwick/Roell, изготовленный по специальному заказу в ФРГ (рис. 1). Главная особенность этой уникальной установки в том, что на ней можно проводить механические испытания по двум взаимно перпендикулярным направлениям одновременно, причем независимо по каждой из осей. Стенд обладает широкими возможностями по программированию сложных траекторий нагружения: монотонное и циклическое растяжение – сжатие, изменение скорости деформирования на любом этапе приложения нагрузки, остановки на релаксацию в любой момент цикла и т.д.

Zwick/Roell имеет две взаимно перпендикулярные траверсы, на которых размещено по 2 независимо программируемых захвата с максимальным ходом 400 мм и скоростью перемещения от 0.001 до 7500 мм/мин (то есть полный ход равен 800 мм, а максимальная скорость деформирования 7500 мм/мин). Наибольшее усилие на захвате составляет 2500 Н. То есть, эта машина практически идеально подходит для испытания относительно "мягких" эластомерных материалов, способных деформироваться на десятки и сотни процентов.

В комплект оборудования стенда входит также видеоэкстензометр videoXtens. С его помощью можно бесконтактным образом измерять деформации непосредственно в рабочей части образца по перемещениям заранее нанесенных меток. Это позволяет значительно повысить точность измерений и исключить влияние искажающих факторов, связанных с формой образца и его закреплением в захватах.

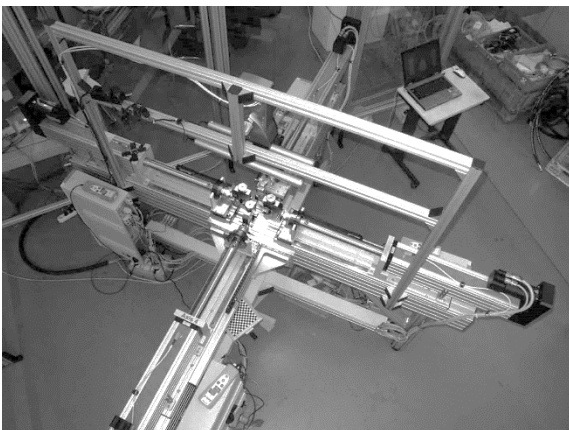


Рис. 1. Четырехвекторный испытательный стенд Zwick/Roell (общий вид)

Для двухосных экспериментов использовались специальные крестообразные образцы веерного типа (рис. 2), форма и размеры которых были определены на основе проведенных в ИМСС УрО РАН теоретических расчетов [3].

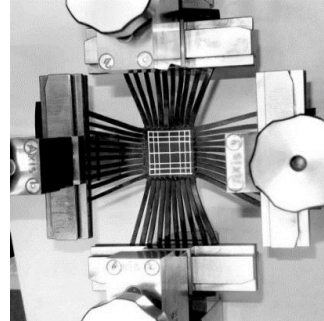


Рис. 2. Крестообразный образец для двухосных испытаний

Они оптимальны с точки зрения получения однородных полей деформаций и напряжений на рабочей части образца и минимизации размеров тяг (нерабочей части). Рабочая зона имела форму квадрата со стороной 35 мм. С каждой стороны зоны имелось по 10 стержнеобразных тяг из того же материала что и образец (длина тяги 45 мм, ширина 2 мм).

2. Материалы для испытаний

Основным объектом исследований были эластомерные нанокомпозиты на основе бутадиен-стирольного каучука (БСК) СКМС-30АРКМ-15 (матрица) и различных нанонаполнителей: Это технический углерод (ТУ), детонационные наноалмазы (ДНА), малослойный графен (МСГ), а также многостенные углеродные нанотрубки (МУНТ). Материалы для испытаний готовились в НИИ синтетического каучука (Санкт-Петербург).

СКМС-30АРКМ-15 это хорошо известный эластомер, который производится в промышленных масштабах. Его, например, широко используют в автомобильных шинах и различных резиновых амортизаторах (т.е. в достаточно сложных и тяжелых эксплуатационных условиях).

В качестве 3D наполнителя брали промышленный технический углерод марки N-330 с размером частиц 28-36 нм и удельной поверхностью 82 м²/г. Это один из наиболее распространенных на сегодня нанонаполнителей. Введение ТУ в эластомер позволяет существенно улучшить его механические характеристики (особенно прочность и деформатив-

ность) [6, 7]. Сегодня ТУ чаще всего используют в комплексе совместно с другими наполнителями [8–10].

Вторым 3D наполнителем были детонационные наноалмазы. ДНА сочетают в себе наноразмерность (4–6 нм), химическую стойкость ядра и химическую активность периферической оболочки. Эти наполнители в настоящее время достаточно широко используются при производстве наполненных эластомеров [5, 11].

2D наполнителем служил малослойный графен (МСГ), который получали по разработанной авторами из НИИСК оригинальной методике [12]. Она базируется на СВС синтезе графеновых наноструктур из гидролизного лигнина — природного биополимера, являющегося отходом деревообрабатывающей промышленности. Характерный размер частиц малослойного графена составлял порядка 100–300 нм, удельная поверхность — 499 м²/г. По своему виду они представляют собой агломераты из хаотично соединенных нанопластинок.

В качестве 1D наполнителя использовали многостенные углеродные нанотрубки (МУНТ) (изготовитель Институт Катализа СО РАН, Новосибирск). Характерные размеры нанотрубок по данным производителя: диаметр равнялся примерно 10–12 нм, средняя длина — от 30 до 40 мкм, а удельная поверхность — 260±15 м²/г. Число вложенных слоев (стенок) варьировалось от 5 до 15.

Кроме того, в качестве 1D также использовались их модифицированные с помощью самораспространяющегося высокотемпературного синтеза варианты (СВС МУНТ). СВС обработка позволила существенно улучшить их дисперсность и убрать нежелательные неорганические примеси [13].

3. Эксперимент и дискуссия

Все образцы испытывали по одной и той же программе: 1-й и 2-й циклы — деформирование по оси X; 3-й и 4-й — по оси Y; 5-й и 6-й — повторное нагружение по оси X. На каждом цикле производились следующие действия:

- 1) растяжение до деформации $\varepsilon=50\%$ и выдержка 10 мин;
- 2) полная разгрузка образца и снова выдержка на 10 мин.

Скорость деформирования на обоих этапах была постоянной и равнялась 25 %/мин.

Результаты испытаний представлены на рис. 3–8. По оси ординат отложено условное напряжение σ^0 (сила, отнесенная к начальной

площади сечения рабочей части образца), по оси абсцисс — деформация ε . Сплошные линии соответствуют первым двум циклам нагружения (деформирование по оси X), штриховые — 3 и 4 циклам (деформирование по Y), пунктирные — 5 и 6 циклы (повторное деформирование по X).

Следует отметить, что во всех экспериментах первые циклы нагружения по каждой оси (1, 3 и 5) всегда лежали выше или совпадали со вторыми (2, 4 и 6 соответственно).

На рис. 3 представлены результаты циклических двухосных испытаний для ненаполненного БСК. Все деформационные кривые как при нагружении "вдоль" по оси X, так и "поперек" по оси Y практически совпали. Гистерезисные потери и остаточные деформации выражены слабо. То есть, в чистом виде этот материал можно считать упругим и изотропным.

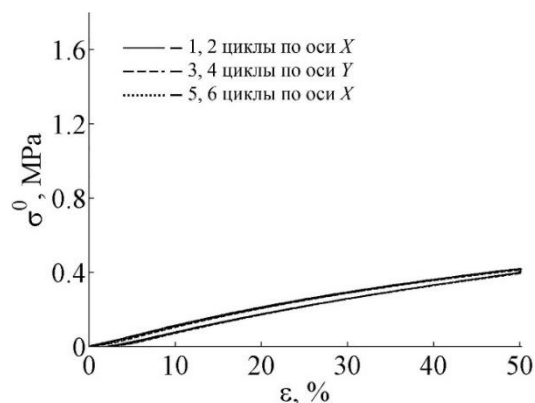


Рис. 3. Двухосные циклические испытания ненаполненного БСК

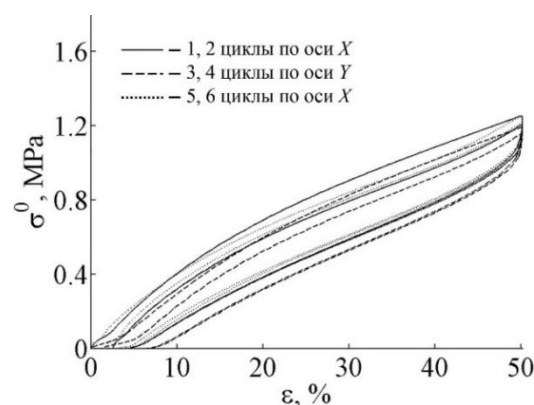


Рис. 4. Двухосные циклические испытания БСК наполненного 50 м.ч. ТУ

Иная картина наблюдается, если добавить в него 3D наполнитель в виде технического углерода. На рис. 4 хорошо видно, что при вводе в БСК 50 м.ч. ТУ происходит суще-

ственное увеличение жесткости системы (максимальное напряжение увеличивается в ~ 3.5 раза) и гистерезисных потерь (материал становится вязкоупругим). Появилась незначительная наведенная анизотропия механических свойств (т.е. изменение свойств изначально изотропного материала при его деформировании в разных направлениях). Циклы по осям X и Y не сильно различаются.

На рис. 5–8 показаны результаты циклических испытаний эластомерных композитов с двойным наполнителем – к 43 м.ч. технического углерода добавляли по 7 м.ч. ДНА, МСГ, МУНТ и СВС МУНТ. То есть все композитные системы имели одинаковую массовую концентрацию дисперсной фазы. Это было сделано для удобства сравнения результатов экспериментов и позволило вычленить влияние типа наполнителя (а не его количества).

Замена 7 м.ч. ТУ на 7 м.ч. детонационных наноалмазов (тоже 3D наполнитель) вызвала повышение общей жесткости композитной системы примерно на 10–15 % (рис. 5). Вязкие свойства (гистерезис) изменились незначительно. Но наведенная механическая анизотропия оказалась более выраженной – 5-й и 6-й циклы (повторно по оси X) лежали ниже. Предельные напряжения при $\epsilon=50\%$ снизились на $\approx 15\%$.

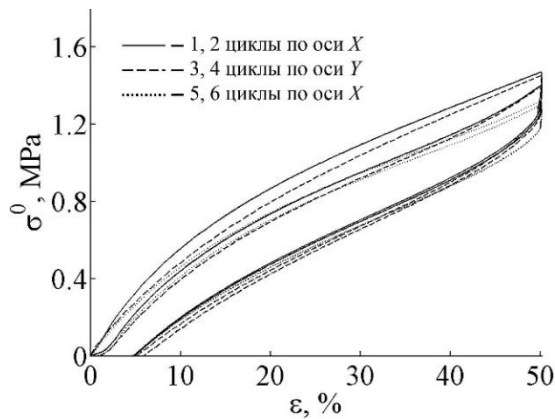


Рис. 5. Двухосные циклические испытания БСК наполненного 43 м.ч. ТУ и 7 м.ч. ДНА

Изменения в механическом поведении материала при добавлении 2D наполнителя в виде частиц малослойного графена вместо ДНА оказались практически незаметными (рис. 6). То есть, влияние 3D и 2D частиц примерно одного порядка.

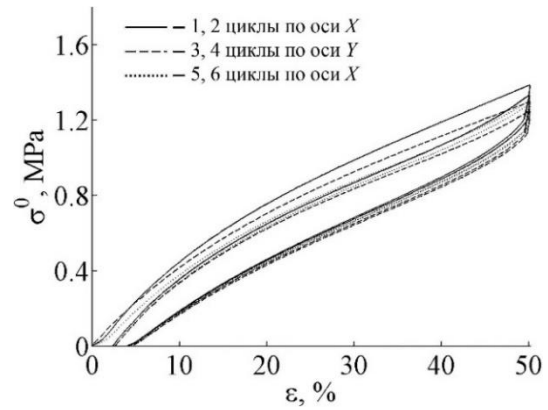


Рис. 6. Двухосные циклические испытания БСК наполненного 43 м.ч. ТУ и 7 м.ч. МСГ

Иная картина складывается при вводе в эластомер углеродных нанотрубок. На рис. 7 представлены результаты испытаний для композитов, содержащих ТУ и немодифицированные МУНТ. Хорошо видно, что если жесткость материала оказалась сопоставимой с композитами, содержащими ДНА и МСГ (см. рис. 5–6), то вязкие свойства стали значительно более выраженными (площадь гистерезиса выросла примерно в 1.5–2 раза). Наведенная механическая анизотропия также выросла.

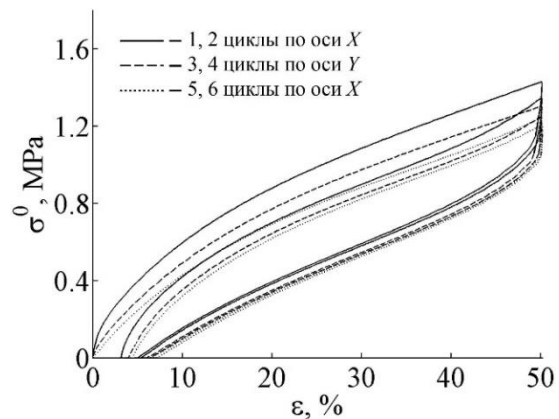


Рис. 7. Двухосные циклические испытания БСК наполненного 43 м.ч. ТУ и 7 м.ч. МУНТ

Наибольший эффект наблюдался при вводе в эластомерный композит модифицированных нанотрубок – СВС МУНТ (рис. 8), по сравнению с вариантом наполнения для 50 м.ч. ТУ (рис. 4).

В этом случае максимальные напряжения возросли почти в полтора раза по сравнению с вариантом для 50 м.ч. ТУ (рис. 4). Вязкие потери выросли более чем в два раза.

Наведенная анизотропия в данном материале оказалась максимальной по сравнению с 2D и 3D наполнителями.

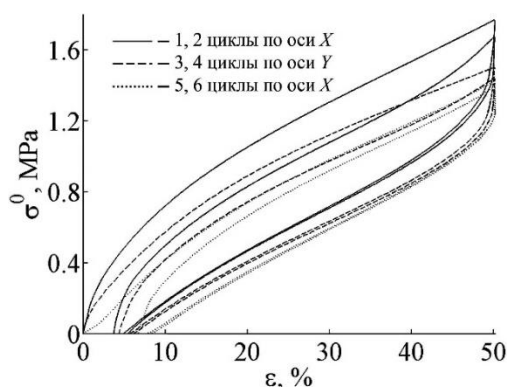


Рис. 8. Двухосные испытания БСК наполненного 43 м.ч. ТУ и 7 м.ч. СВС МВНТ

По мнению авторов, это связано с тем, что длинные и гибкие нановолокна намного эффективнее влияют на ориентационные процессы в микроструктуре наполненного эластомера при его деформировании по сравнению 2D и 3D наполнителями. Как показывает сравнение графиков на рис. 7 и 8, чем выше дисперсность и гибкость этих волокон, тем данные механические эффекты выражены сильнее.

Заключение

Двухосные циклические испытания эластомерных композитов, наполненных зернистыми, пластинчатыми и волокнистыми наночастицами показали, что наибольшее влияние на изменение механических свойств материала в процессе циклического деформирования по взаимно перпендикулярным направлениям оказывают нановолокна (углеродные нанотрубки). Именно они, благодаря своей длине и гибкости, наиболее эффективно участвуют в перестройке микроструктуры, формируя тем самым макроскопическое поведение материала.

Список источников

1. Garishin O.K., Shadrin V.V., Svistkov A.L., Sokolov A.K., Stockelhuber W.K. Visco-elastic-plastic properties of natural rubber filled with carbon black and layered clay nanoparticles. Experiment and simulation // Polymer Testing. 2017. Vol. 63. P. 133–140. URL: <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2017.08.002>.

2. Shadrin V.V., Svistkov A.L., Mokhireva K.A., Garishin O.K. Peculiarities of using dumbbell specimens made of elastomeric materials subject to finite deformation in complex loading tests // J. Letters on Materials, 2023 Vol. 13, № 1. P. 56–61. URL: <https://doi.org/10.22226/2410-3535-2023-1-56-61>.
3. Shlyannikov V. N., Zakharov A. P. Multiaxial crack growthrate under variable T-stresses // Engineering Fracture Mechanics. 2014. Vol. 123. P. 86–89.
4. Shlyannikov V. N., Tumanov A. V., Zakharov A. P., Gerasimenko A. A. Surface crack growth subjected to bendings and biaxial tension-compression // Frattura ed Integra Strutturale. 2016. Vol. 35. P. 257–267.
5. Mokhireva K. A., Svistkov A. L., Solod'ko V. N., Komar L. A., Stockelhuber K. W. Experimental analysis of the effect of carbon nanoparticles with different geometry on the appearance of anisotropy of mechanical properties in elastomeric composites // Polymer Testing. 2017. Vol. 59. P. 46–54. URL: <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2020.10188>.
6. Kraus G. Reinforcement of elastomers by carbon black // Rubber Chemistry and Technology. 1978. Vol. 51, № 1. P. 297–321.
7. Jovanovich V., Smaržija-Jovanovich S., Budinski-Simendich J., Markovich G., Marinović-Cincovich M. Composites based on carbon black reinforced NBR/EPDM rubber blends // Composites Part B: Engineering. 2013. Vol. 45(1). P. 333–340. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.05.020>.
8. Gao J., He Y., Gong X., Xu J. The role of carbon nanotubes in promoting the properties of carbon black-filled natural rubber/butadiene rubber composites // Results in Physics. 2017. Vol. 7. P. 4352–4358. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.rinp.2017.09.044>.
9. Garishin O. K., Shadrin V. V., Svistkov A. L., Sokolov A. K., Stockelhuber W. K. Visco-elastic-plastic properties of natural rubber filled with carbon black and layered clay nanoparticles Experiment and simulation // Polymer Testing. 2017. Vol. 63. P. 133–140. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.polymertesting.2017.08.002>.
10. Negri R. B. P., da Silva A. H. M. F.T., de Sousa A. M. F., da Silva A. L. N., da Rocha E. B. D. Improved mechanical and rheological behavior of nitrile rubber reinforced with multi-walled carbon nanotubes and carbon black dual-

- filler system // *Materials Today Communications*. 2021. Vol. 26. P. 101884(110). URL: <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2020.101884>.
11. Karami P., Khasraghi S., Hashemi M., Rabiei S., Shojaei A. Polymer/nanodiamond composites – a comprehensive review from synthesis and fabrication to properties and applications // *Advances in Colloid and Interface Science*. 2019. Vol. 269. P. 122–151. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cis.2019.04.006>.
 12. Voznyakovskii A. P., Neverovskaya A. Yu., Otvalko Ja. A., Gorelova E. V., Zabelina A. N., Lebedev S. V. Facile synthesis of 2D carbon structures as a filler for polymer composites // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 2018. Vol. 9, № 1. P. 125–128. URL: <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2018-9-1-125-128>.
 13. Возняковский А. П., Неверовская А. Ю., Меленевская Е. Ю., Чубарова Е. В., Кутин А. А., Суханова Т. Е. Особенности распределения одностенных углеродных нанотрубок в матрице полистирола // *Нанотехнологии: наука и производство*. 2018. № 4. P. 64–72. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=37256288>.
- ### References
1. Garishin O.K., Shadrin V.V., Svistkov A.L., Sokolov A.K., Stockelhuber W.K. Visco-elastic-plastic properties of natural rubber filled with carbon black and layered clay nanoparticles. Experiment and simulation. *Polymer Testing*. 2017;63:133-140. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2017.08.002>.
 2. Shadrin V.V., Svistkov A.L., Mokhireva K.A., Garishin O.K. Peculiarities of using dumbbell specimens made of elastomeric materials subject to finite deformation in complex loading tests. *J. Letters on Materials*. 2023; 13(1):56–61. <https://doi.org/10.22226/2410-3535-2023-1-56-61>.
 3. Shlyannikov V. N., Zakharov A. P. Multiaxial crack growth rate under variable T-stresses. *Engineering Fracture Mechanics*. 2014;123:86–89.
 4. Shlyannikov V. N., Tumanov A. V., Zakharov A. P., Gerasimenko A. A. Surface crack growth subjected to bendings and biaxial tension-compression. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2016;35:257–267.
 5. Mokhireva K. A., Svistkov A. L., Solod'ko V. N., Komar L. A., Stockelhuber K. W. Experimental analysis of the effect of carbon nanoparticles with different geometry on the appearance of anisotropy of mechanical properties in elastomeric composites. *Polymer Testing*. 2017;59:46–54. <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2020.101888>.
 6. Kraus G. Reinforcement of elastomers by carbon black. *Rubber Chemistry and Technology*. 1978;51(1):297–321.
 7. Jovanovich V., Smaržija-Jovanovich S., Budinski-Simendich J., Markovich G., Marinović-Cincovich M. Composites based on carbon black reinforced NBR/EPDM rubber blends. *Composites Part B: Engineering*. 2013;45(1):333–340. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.05.020>.
 8. Gao J., He Y., Gong X., Xu J. The role of carbon nanotubes in promoting the properties of carbon black-filled natural rubber/butadiene rubber composites. *Results in Physics*. 2017;7:4352–4358. <http://dx.doi.org/10.1016/j.rinp.2017.09.044>.
 9. Garishin O. K., Shadrin V. V., Svistkov A. L., Sokolov A. K., Stockelhuber W. K. Visco-elastic-plastic properties of natural rubber filled with carbon black and layered clay nanoparticles Experiment and simulation. *Polymer Testing*. 2017;63:133–140. <http://dx.doi.org/10.1016/j.polymertesting.2017.08.002>.
 10. Negri R. B. P., da Silva A. H. M. F.T., de Sousa A. M. F., da Silva A. L. N., da Rocha E. B. D. Improved mechanical and rheological behavior of nitrile rubber reinforced with multi-walled carbon nanotubes and carbon black dual-filler system. *Materials Today Communications*. 2021;(26):101884(110). <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2020.101884>.
 11. Karami P., Khasraghi S., Hashemi M., Rabiei S., Shojaei A. Polymer/nanodiamond composites – a comprehensive review from synthesis and fabrication to properties and applications. *Advances in Colloid and Interface Science*. 2019;(269):122–151. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cis.2019.04.006>.
 12. Voznyakovskii A. P., Neverovskaya A. Yu., Otvalko Ja. A., Gorelova E. V., Zabelina A. N., Lebedev S. V. Facile synthesis of 2D carbon structures as a filler for polymer composites. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. 2018;9(1):125–128. <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2018-9-1-125-128>.
 13. Voznyakovskij A.P., Neverovskaya A. YU., Melenevskaya E.YU., Chubarova E.V., Kutin A.A., Suhanova T.E. Osobennosti raspredeleniya odnostennyh uglerodnyh nanotrubok v matrice polistirola. *Nanotekhnologii: nauka i proizvodstvo*. 2018;(4):64–72. <https://elibrary.ru/item.asp?id=37256288> (In Russ.).

Информация об авторах:

О. К. Гаришин – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), AuthorID 5880;

В. В. Шадрин – ведущий инженер, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1); инженер, Пермский государственный национальный исследовательский университет (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID 10927.

Information about the authors:

O. K. Garishin – Doctor of Science (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Ac. Koroleva St., Perm, Russia, 614013), AuthorID 5880;

V. V. Shadrin – Leading Engineer, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Ac. Koroleva St., Perm, Russia, 614013); Engineer, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 10927.

Научная статья

УДК 532.5

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-60-69

Математическое моделирование нелинейной электроконвекции идеального жидкого диэлектрика в переменном электрическом поле

Владимир Алексеевич Ильин¹, Михаил Олегович Суханов²

^{1,2} Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

¹ilin1@psu.ru

²mihail.suhanov.2012@mail.ru

Аннотация. В работе проведено математическое моделирование нелинейных электроконвективных режимов идеального жидкого диэлектрика в переменном электрическом поле горизонтального конденсатора. Исследование проведено с использованием маломодовой модели электроконвекции для случая невесомости. В результате анализа полученных временных зависимостей, их Фурье-спектров, вычислений теплопотока и старших показателей Ляпунова построена карта нелинейных электроконвективных режимов. Определены границы окон периодичности в области хаоса. При выходе из окон периодичности хаос возникает по сценарию Фейгенбаума.

Ключевые слова: идеальная диэлектрическая жидкость; переменное электрическое поле; электроконвекция; нелинейные режимы; переходы к хаосу

Для цитирования: Ильин В. А., Суханов М. О. Математическое моделирование нелинейной электроконвекции идеального жидкого диэлектрика в переменном электрическом поле // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 60–69. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-60-69.

Статья поступила в редакцию 20.10.2023; одобрена после рецензирования 15.11.2023; принята к публикации 27.11.2023.

Research article

Mathematical Modeling of Nonlinear Electroconvection of an Ideal Liquid Dielectric in an Alternating Electric Field

Vladimir A. Il'in¹, Michael O. Sukhanov²

¹Perm State University, Perm, Russia

¹ilin1@psu.ru

²mihail.suhanov.2012@mail.ru

Abstract. Mathematical modeling of nonlinear electroconvective regimes of an ideal liquid dielectric in an alternating electric field of a horizontal capacitor is carried out. The study was carried out using a low-mode electroconvection model for the case of weightlessness. As a result of the analysis of the obtained time dependences, their Fourier-spectra, calculations of the heat flow and the higher Lyapunov exponents, a map of nonlinear electroconvective regimes is constructed. The boundaries of the periodicity windows in the chaos region are determined. In the windows of periodicity, chaos occurs according to the Feigenbaum scenario.

Keywords: ideal dielectric fluid; alternating electric field; electroconvection; nonlinear regimes; transitions to chaos



Эта работа © 2023 Ильин В.А., Суханов М.О. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

For citation: *Il'in V. A., Sukhanov M. O. Mathematical Modeling of Nonlinear Electroconvection of an Ideal Liquid Dielectric in an Alternating Electric Field. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):60-69. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-60-69.*

The article was submitted 20.10.2023; approved after reviewing 15.11.2023; accepted for publication 27.11.2023.

Введение

Наличие электрического заряда и его перенос в жидкостях с низкой проводимостью [1–7] оказывают существенное влияние на эволюцию малых возмущений и характер сформировавшихся структур. Существуют разные механизмы зарядообразования и неустойчивости в жидкостях: диэлектрофоретический [3, 4], электрокондуктивный [5] и инжекционный [6, 7]. В жидких диэлектриках с разными механизмами зарядообразования могут формироваться своеобразные конвективные структуры со сложной эволюцией. При диэлектрофоретическом механизме зарядообразования поляризационный заряд образуется при зависимости диэлектрической проницаемости от температуры [1, 2]. Неоднородность диэлектрической проницаемости может вызвать движение в жидкости даже в невесомости. С помощью управления амплитудой и частотой электрического поля можно контролировать конвекцию [3–5].

В работах [3, 4] изучены с использованием маломодовой модели электроконвективные колебания идеального жидкого диэлектрика в переменном электрическом поле горизонтального слоя при умеренных частотах. В данной работе исследование проведено в более широком диапазоне частот и амплитуд, получены новые интересные результаты.

В работе [5] исследованы с использованием другой маломодовой модели электроконвективные режимы слабопроводящей жидкости с электрокондуктивным механизмом зарядообразования в переменном электрическом поле.

Анализ колебаний в диэлектрических жидкостях важен с точки зрения фундаментальных научных проблем и для различных практических применений в электрогидродинамических устройствах [1, 2].

В настоящей работе исследована эволюция течений; проанализированы и проклассифицированы колебания жидкости при разных амплитудах и частотах внешнего поля; исследованы сценарии возникновения хаоса.

Актуальность этих исследований связана с необходимостью знать законы переходов от периодического поведения к хаотическому поведению в детерминированных нелинейных диссипативных системах, и обратных переходов. В реальных системах этому соответствуют переходы от ламинарного движения к турбулентному движению. Такие переходы встречаются во всех нелинейных системах и являются важной проблемой современных исследователей [8, 9].

Наблюдаемые в настоящей работе синхронное движение и перемежаемость были объектами исследований, например в работах [10, 11].

Существует ряд методов идентификации динамических режимов и определения их характеристик [9].

В данной работе помимо стандартных методов исследования строились Фурье-спектры [9, 12], с помощью алгоритма Бенеттина определялись Ляпуновские показатели [13, 14].

1. Постановка задачи

В работе рассматривается плоский горизонтальный конденсатор с неоднородно нагретой вязкой несжимаемой идеальной диэлектрической жидкостью в переменном вертикальном электрическом поле и поле силы тяжести. Идеальные тепло- и электропроводные границы находятся при $z = -h/2, h/2$ (h – толщина слоя) и нагреты до различной температуры $T(-h/2) = \Theta, T(h/2) = 0$. Здесь T – температура, отсчитываемая от среднего значения, Θ – характерная разность температур. При $\Theta > 0$ будет нагрев снизу. Потенциал электрического поля верхней границы заземлён и равен нулю: $\varphi(h/2) = 0$, а потенциал нижней границы изменяется со временем t гармонически: $\varphi(-h/2) = U \cos(\Omega t)$ (U – напряжение, $\Omega = 2\pi/t_f$ – частота, t_f – период модуляции).

Действующая на единицу объема жидкости электрическая сила, следующая [15]:

$$\mathbf{f}_e = \rho_e \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{2} \nabla \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} E^2 \right), \quad (1)$$

где ρ_e – свободный заряд единицы объема, ε – диэлектрическая проницаемость, ρ – плотность жидкости. Кулоновская часть силы (1) в идеальных диэлектриках отсутствует, поскольку в них нет свободного электрического заряда. Третье слагаемое имеет градиентный вид и приводит к переопределению давления в уравнении Навье–Стокса. Движение вызывает только диэлектрофоретическая (вторая) часть силы. Она связана с пространственной неоднородностью диэлектрической проницаемости.

Предполагается, что диэлектрическая проницаемость линейно зависит от температуры: $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 - \beta_\varepsilon T)$, где β_ε – положительный температурный коэффициент диэлектрической проницаемости. Тогда действует диэлектрофоретический механизм зарядообразования. Рассматривается электрогидродинамическое приближение, когда магнитные эффекты пренебрежимо малы по сравнению с электрическими эффектами [1]. Влияние инжекции не учитывается. В уравнении теплопроводности вязкая диссипация и джоулев разогрев пренебрежимо малы.

Уравнения электроконвекции идеально жидкого диэлектрика имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \nabla \varepsilon, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T &= \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) &= 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \\ \rho &= \rho_0 (1 - \beta T), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 - \beta_\varepsilon T). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{v} , p , T – поля скорости, давления и температуры, η – динамическая вязкость, χ – коэффициент теплопроводности, β – коэффициент теплового расширения жидкости. В основном, коэффициенты β , $\beta_\varepsilon \sim 10^{-2} \div 10^{-4}$ град $^{-1}$.

Уравнения электроконвекции безразмериваются, при этом выбираются безразмерные переменные на основе масштабов: времени – $[t] = \rho_0 h^2 / \eta$, расстояния – $[r] = h$, скорости – $[\mathbf{v}] = \chi / h$, температуры – $[T] = \Theta$, по-

тенциала – $[\varphi] = U \beta_\varepsilon \Theta$, давления – $[p] = \eta \chi / h^2$, частоты – $[\omega] = \rho_0 \Omega h^2 / \eta$.

Равновесное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= 0, \quad T_0 = -z + 1/2, \\ \varphi_0 &= (-z + 1/2) \cos \omega t, \quad \mathbf{E}_0 = \gamma \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь γ – единичный вектор, направленный по вертикали вверх.

Представим все переменные – скорость, температуру, давление, потенциал и напряженность в виде: $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$, $T = T_0 + \mathcal{G}$, $p = p_0 + p'$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ (штрихи означают отклонения величин от равновесных значений, затем штрихи опускаем).

Тогда безразмерные уравнения электроконвекции примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\operatorname{Pr}} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + (\operatorname{Ra} + \operatorname{Ra}_\varepsilon \cos^2(\omega t)) \mathcal{G} \gamma + \\ &+ \operatorname{Ra}_\varepsilon \cos(\omega t) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \gamma + \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{Pr} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - \mathbf{v} \gamma + (\mathbf{v} \nabla) \mathcal{G} &= \Delta \mathcal{G}, \\ \Delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \cos(\omega t) &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь использованы безразмерные параметры – число Прандтля Pr , тепловое число Рэлея Ra и электрическое число Рэлея $\operatorname{Ra}_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Pr} &= \frac{\eta}{\chi \rho_0}, \quad \operatorname{Ra} = \frac{\rho_0 g \beta \Theta h^3}{\eta \chi}, \\ \operatorname{Ra}_\varepsilon &= \frac{\varepsilon_0 U^2 (\beta_\varepsilon \Theta)^2}{\eta \chi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из определения электрического числа Рэлея видно, что оно не зависит от направления градиента температуры.

В задаче считается, что на свободных недеформируемых, изотермических границах слоя производная потенциала равна нулю (штрихом обозначена производная по z):

$$z = \pm 1/2: w = w' = \mathcal{G} = \varphi' = 0. \quad (6)$$

В плоскости слоя задача считается изотропной, используются плоские возмущения, когда $\mathbf{v} = (u, 0, w)$ и $\partial/\partial y = 0$.

2. Вывод модели электроконвекции

Используем функцию тока для скорости

$$w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (7)$$

В ее терминах уравнения электроконвекции примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi \right) &= \text{Ra} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + \\ &+ \text{Ra}_\varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \cos^2 \omega t + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \cos \omega t \right) + \Delta^2 \psi, \\ \text{Pr} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} &= \Delta \mathcal{G} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (8) \\ \Delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \cos \omega t &= 0. \end{aligned}$$

Тогда граничные условия переписутся:

$$z = \pm 1/2: \psi = \psi'' = \mathcal{G} = \varphi' = 0. \quad (9)$$

Для решения уравнений (8) используется метод Галеркина, и следующие аппроксимации функций, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\begin{aligned} \psi &= A(t) \sin kx \cos \pi z, \\ \mathcal{G} &= B(t) \cos kx \cos \pi z + C(t) \sin 2\pi z, \quad (10) \\ \varphi &= D(t) \cos kx \sin \pi z + E(t) \cos 2\pi z, \end{aligned}$$

где k – волновой вектор, характеризующий периодичность возмущений в плоскости конденсатора, A, B, C, D, E – зависящие от времени амплитуды. Вторые слагаемые в аппроксимациях необходимы, чтобы учесть нелинейность уравнений (8).

При подстановке аппроксимаций (10) в систему уравнений (8) после ортогонализации получают дифференциальные уравнения для амплитуд A, B, C и алгебраические выражения для амплитуд D, E :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= -(\pi^2 + k^2)A + \frac{k}{\pi^2 + k^2} (\text{Ra} + \text{Ra}_\varepsilon \cos^2 \omega t)B \\ &\quad + \frac{k\pi}{\pi^2 + k^2} \text{Ra}_\varepsilon \cos \omega t D, \\ \text{Pr} \frac{\partial B}{\partial t} &= kA - (\pi^2 + k^2)B - k\pi AC, \quad (11) \\ \text{Pr} \frac{\partial C}{\partial t} &= -4\pi^2 C + \frac{\pi k}{2} AB, \\ D &= -\frac{\pi}{\pi^2 + k^2} B \cos \omega t, \quad E = \frac{C}{2\pi}. \end{aligned}$$

Исключим амплитуду D и перемасштабируем следующие переменные:

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \pi k, \quad t \rightarrow \frac{\text{Pr}}{\pi^2(1+k^2)} t, \\ A &\rightarrow \frac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k} X, \quad B \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi} Y, \quad C \rightarrow \frac{1}{\pi} Z, \quad (12) \end{aligned}$$

тогда получим следующую трехмодовую модель электроконвекции (точка над переменными – производная по t):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\text{Pr} X + \text{Pr}(r + e \cos^2 2\pi v t) Y, \\ \dot{Y} &= -Y + X - XZ, \quad (13) \\ \dot{Z} &= -bZ + XY. \end{aligned}$$

В этих уравнениях вместо циклической частоты использована линейная частота $\omega = 2\pi v$ и введены следующие новые параметры:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_0}, \quad e = \frac{\text{Ra}_\varepsilon}{\text{Ra}_{\varepsilon 0}}, \quad b = \frac{4}{1+k^2}, \\ \text{Ra}_0 &= \frac{\pi^4(1+k^2)^3}{k^2}, \quad \text{Ra}_{\varepsilon 0} = \frac{\pi^4(1+k^2)^4}{k^4}, \quad (14) \end{aligned}$$

где r и e – нормированные тепловое и электрическое числа Рэлея; b – геометрический параметр; при $\text{Ra}_0, \text{Ra}_{\varepsilon 0}$ начинается термогравитационная или диэлектрофоретическая конвекция соответственно. Поскольку электрическое число Рэлея всегда положительное, то нормированное электрическое число также всегда положительно ($e > 0$).

Система дифференциальных уравнений (13) является модифицированной моделью Лоренца [9].

Для выявления характера конвекции и определения интенсивности ее теплопереноса вычислялось число Нуссельта (усредненный по времени безразмерный теплопоток) на границах слоя:

$$\text{Nu} = -\frac{k}{2} \int_0^{t_{end}} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=\pm \frac{1}{2}} dx, \quad \text{Nu} = \frac{qh}{\kappa \Theta}, \quad (15)$$

где q – плотность потока тепла, κ – коэффициент теплопроводности. Усреднение теплопотока делали по большому промежутку времени $t_{end} = N t_f$ (где $N > 100$, t_f – период колебаний):

$$\text{Nu} = 1 + 2 \frac{1}{t_{end}} \int_0^{t_{end}} Z(t) \Big|_{z=\pm \frac{1}{2}} dt. \quad (16)$$

При $Nu = 1$ тепло переносится молекулярным теплопереносом, при $Nu > 1$ возникает конвекция.

3. Результаты исследования

Уравнения (13) решались численно для разных частот и электрических чисел с одинаковыми начальными условиями. Полученные зависимости амплитуд от времени анализировались с помощью Фурье анализа, из которого делались выводы о частотных закономерностях и типе колебаний.

Вычисления были сделаны при следующих значениях параметров: $Pr = 10$, $Ra = 0$ ($r = 0$, это случай невесомости). Тогда критическое значение волнового числа $k = 1$ (при этом геометрический параметр $b = 2$), а электрическое число Рэлея $Ra_{ec} = 16\pi^4 = 1558.6$ [3].

В результате вычислений получены разные типы нелинейных колебаний жидкости: хаотические и периодические. При обобщении результатов получена карта нелинейных режимов электроконвекции на плоскости период модуляции $t_f = 1/\nu$ (обратная частота модуляции) – электрическое число e (рис. 1).

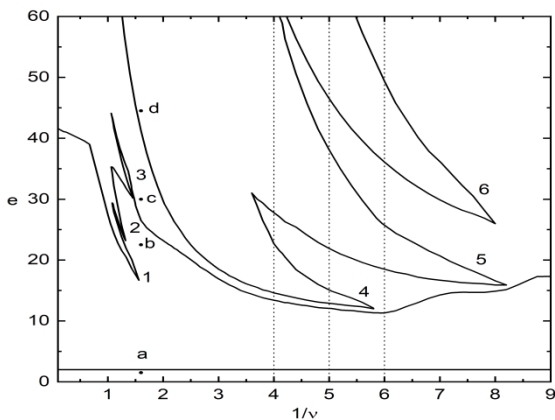


Рис. 1. Карта нелинейных режимов на плоскости период модуляции – электрическое число

Ниже линии $e = 2$ существует область устойчивости. В ней все возмущения затухают (рис. 2), например, в точке а (рис. 1). Выше этой линии возникают периодические колебания.

В постоянном электрическом поле при вычислении с одинаковыми начальными условиями определено, что хаос возникает при $e = 20.9$. Когда частота поля растет, тогда точка возникновения хаоса увеличивается в два раза: $e \rightarrow 41.8$.

На карте режимов (рис. 1) представлены различные области: 1, 2, 3 – области ("языки") хаотических режимов, ниже которых находится область периодических режимов; 4, 5, 6 – области ("языки") периодических режимов в области хаоса.

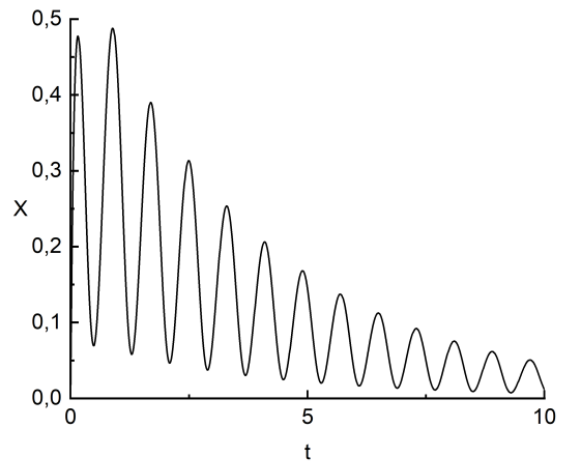


Рис. 2. Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени при $\nu = 0.625$ ($t_f = 1.6$), $e = 1.5$ (точка а на рис. 1)

При движении на карте режимов вверх по электрическому числу при заданной частоте через "язык" хаоса 1, мы попадем в периодическую область, затем в "язык" хаоса 2, затем в периодическую область, после чего в "язык" хаоса 3 и т. д. При движении на карте режимов вверх по электрическому числу при меньшей частоте (большем периоде) через область хаоса, мы будем последовательно проходить через "языки" периодических режимов 4, 5, 6. Эти "языки" периодических режимов называют окнами периодичности.

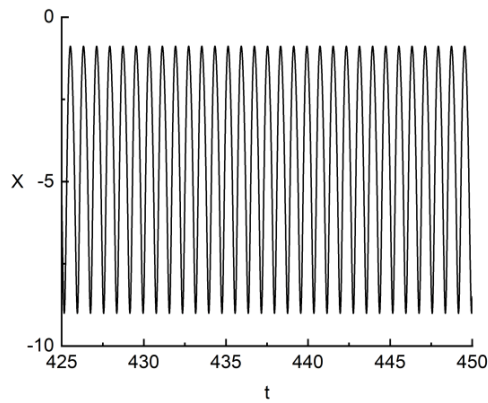
В точках b и d на карте режимов жидкость колеблется периодически (рис. 3, 4).

В этом случае колебания синхронные, в их Фурье-спектрах имеются кратные частоты: $\nu_n = n\nu$ (n – целое число).

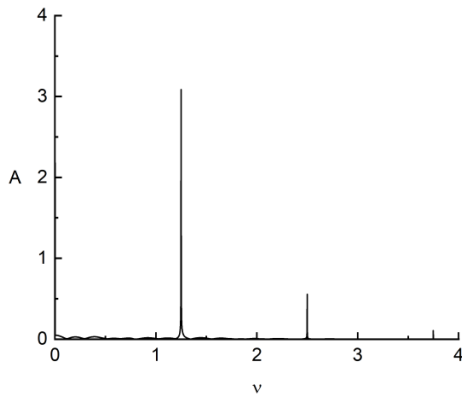
В точке b жидкость колеблется с удвоенной внешней частотой и ее четными гармониками (рис. 3), в спектре есть кратные частоты $n\nu$, $n = 2, 4, \dots$

В точке d жидкость колеблется с внешней частотой и ее нечетными гармониками (рис. 4), $n = 1, 3, \dots$

В точке c на карте режимов функция тока колеблется хаотически, спектр колебаний сплошной (рис. 5).

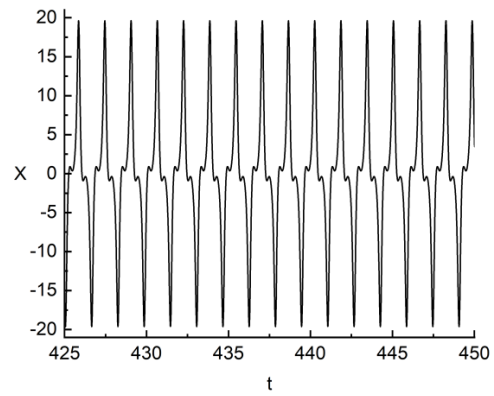


a

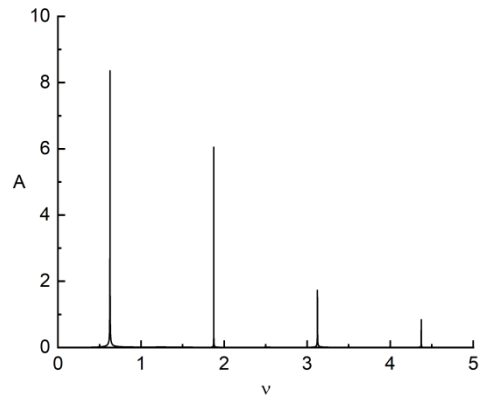


б

Рис. 3. Зависимость амплитуды периодических колебаний от времени (a), спектр Фурье (б) при $\nu = 0.625$ ($t_f = 1.6$), $e = 22.5$ (точка b на рис. 1)



a



б

Рис. 4. Зависимость амплитуды периодических колебаний от времени (a), спектр Фурье (б) при $\nu = 0.625$ ($t_f = 1.6$), $e = 44.5$ (точка d на рис. 1)

Фазовая траектория будет неустойчивой при хотя бы одном положительном показателе Ляпунова. Траектория будет асимптотически устойчивой при всех отрицательных показателях Ляпунова.

На рис. 6(б), 7(б) есть интервалы параметров, соответствующие отрицательному и положительному старшему показателю Ляпунова. Например, показатель положителен для частоты $\nu = 0.625$ на участке $22.5 < e < 41.3$, а для частоты $\nu = 0.25$ на участке $13.5 < e < 14.6$. Это соответствует попаданию в область хаоса.

Аналогичные результаты получаются при вычислении числа Нуссельта для тех же частот (рис. 6(a), 7(a)).

Таким образом, вычислялись показатели Ляпунова и зависимости чисел Нуссельта, в результате чего была построена карта режимов на рис. 1.

На следующем этапе нужно было определить или уточнить сценарии перехода к хаосу. Приведем результаты вычислений для периодов $t_f = 4; 5; 6$. Для этих периодов на карте режимов (рис. 1) изображены вертикальные точечные линии, вдоль которых проводились вычисления.

Был рассмотрен переход к хаосу в "языке" 4, первом окне периодичности, при $t_f = 4$ ($\nu = 0.25$). С ростом электрического числа период колебаний удваивается первый раз при $e_1 = 13.4062$, в спектре появляется частота в два раза меньше ($\nu = 0.125$). Вторая бифуркация удвоения периода происходит при $e_2 = 13.4621$, рождается $\nu = 0.0625$. Третья – при $e_3 = 13.4739$, появляется $\nu = 0.03125$. Постоянная Фейгенбаума определяется по формуле

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_k - e_{k-1}}{e_{k+1} - e_k} = 4.669... [8].$$

По первым трем точкам бифуркации была вычислена постоянная Фейгенбаума: $\delta = 4.706$. Погрешность вычисления составила 0.79 %.

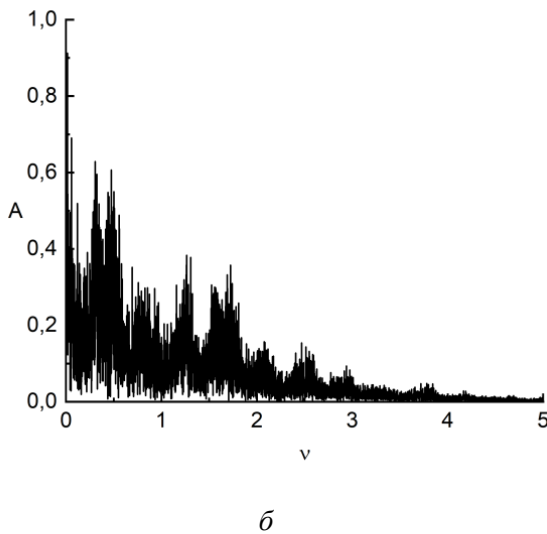
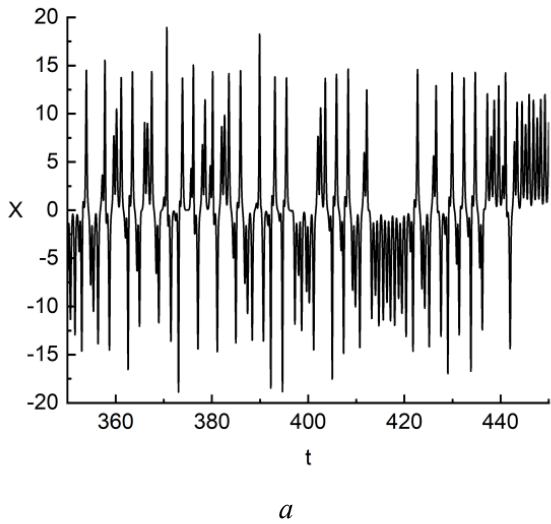


Рис. 5. Зависимость амплитуды хаотических колебаний от времени (а), спектр Фурье (б) при $\nu = 0.625$ ($t_f = 1.6$), $e = 30$ (точка с на рис. 1)

Затем был рассмотрен переход к хаосу в "языке" 5, втором окне периодичности, при $t_f = 5$ ($\nu = 0.2$). Первые бифуркации удвоения периода происходят соответственно при $e_1 = 35.985$, $e_2 = 36.477$, $e_3 = 36.569$.

Константа Фейгенбаума в этом случае равна: $\delta = 5.348$.

При рассмотрении перехода к хаосу в "языке" 6, третьем окне периодичности, при $t_f = 6$ ($\nu = 0.16$) первые три бифуркации удвоения периода получились равными: $e_1 = 47.509$, $e_2 = 47.890$, $e_3 = 47.953$. Постоянная Фейгенбаума равна: $\delta = 6.047$.

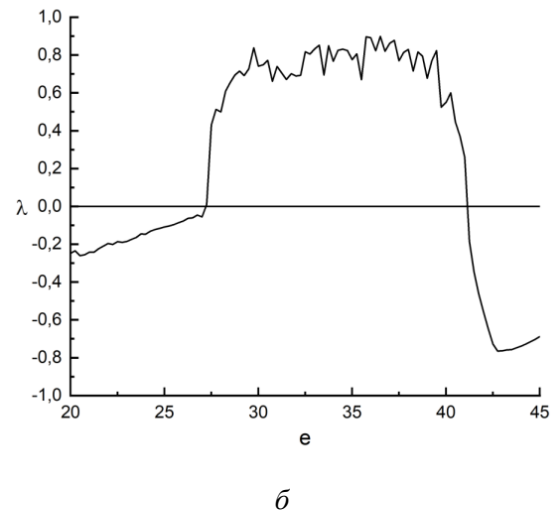
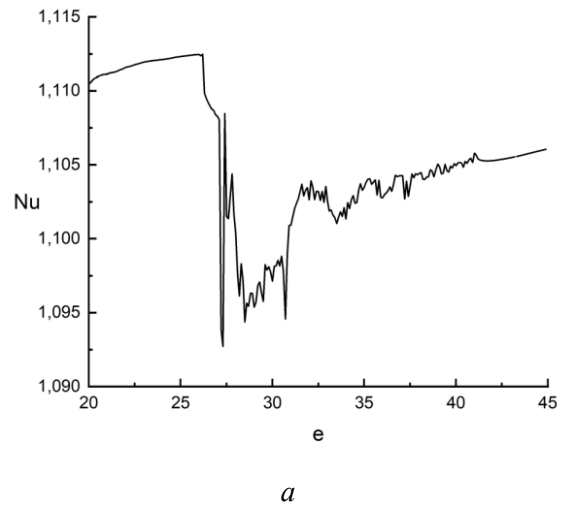


Рис. 6. Зависимость числа Нуссельта от электрического числа при частоте $\nu = 0.625$ (а). Зависимость старшего показателя Ляпунова от электрического числа при частоте $\nu = 0.625$ (б)

В рассмотренных двух последних случаях погрешность вычислений постоянной Фейгенбаума выше, но сценарий тот же.

Вычисления показали, что при выходе из окон периодичности хаос возникает по сценарию Фейгенбаума.

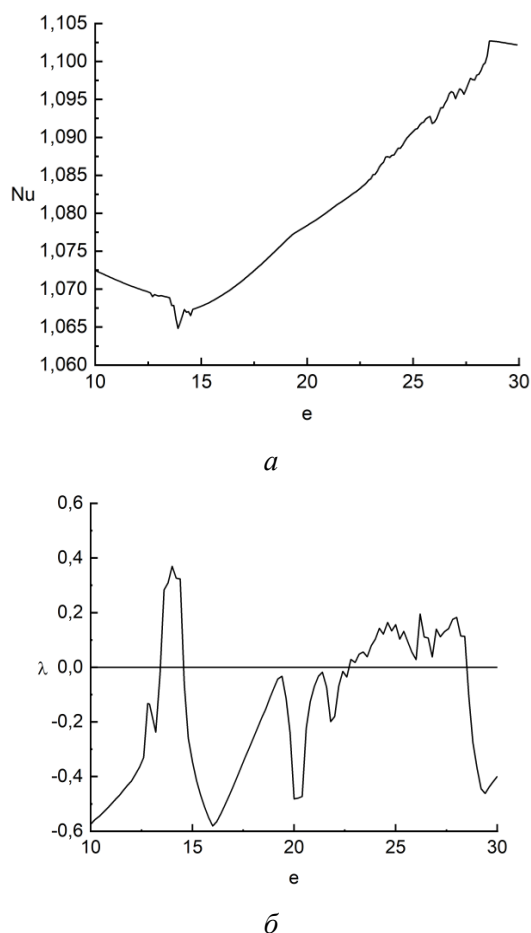


Рис. 7. Зависимость числа Нуссельта от электрического числа при частоте $\nu = 0.25$ (а). Зависимость старшего показателя Ляпунова от электрического числа при частоте $\nu = 0.25$ (б).

Заключение

В работе было проведено математическое моделирование нелинейной электроконвекции в горизонтальном слое с идеальным жидким диэлектриком. Для исследования использовалась трехмодовая модель. В идеальном диэлектрике в основном работает диэлектрфоретический механизм неустойчивости.

Были получены и исследованы разные хаотические и периодические режимы колебаний жидкости. В невесомости исследование проведено при умеренных и низких частотах электрического поля. С помощью метода Беннеттина вычислялись старшие показатели Ляпунова. На основе определения характера временной эволюции амплитуд задачи, вычислений теплопотока и показателей Ляпунова построена карта режимов электроконвекции. Определены границы окон периодичности в области хаоса при низких частотах элект-

рического поля. Вычисления показали, что при выходе из окон периодичности хаос возникает по сценарию Фейгенбаума, через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний.

Как известно, модельные свободные границы в задаче Релея–Бенара [9] позволяют в упрощенной постановке изучить движения жидкости в горизонтальном слое. При этом ее качественное поведение по сравнению с твердыми границами сохраняется, понижаются лишь границы переходов между режимами. Полученные в настоящей работе в приближенной постановке движения качественно должны соответствовать решениям задачи в полной постановке, при этом могут быть лишь количественные отличия в результатах.

Список источников

1. *Электроконвекция и теплообмен* / Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А. Кишинев: Штиинца, 1977. 176 с.
2. *Жакин А.И.* Электрогидродинамика // *Успехи физических наук.* 2012. Т. 182, № 5. С. 495–520.
3. *Ильин В.А., Смородин Б.Л.* Периодические и хаотические режимы электроконвекции жидкого диэлектрика в горизонтальном конденсаторе // *Письма в ЖТФ.* 2005. Т. 31, вып. 10. С. 57–63.
4. *Ильин В.А.* Маломодовая модель электроконвекции идеального диэлектрика // *Журнал технической физики.* 2010. Т. 80, вып. 8. С. 38–48.
5. *Ильин В.А., Смородин Б.Л.* Нелинейные режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости // *Письма в ЖТФ.* 2007. Т. 33, вып. 8. С. 81–87.
6. *Ильин В.А.* Электроконвекция слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе при униполярной инжекции заряда // *Журнал технической физики.* 2017. Т. 87, вып. 1. С. 5–9.
7. *Ильин В.А., Рушинская К.С.* Переходы между электроконвективными режимами слабопроводящей жидкости при инжекции заряда в горизонтальных ячейках с разным аспектным отношением // *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика.* 2017. Вып. 4 (39). С. 32–37.
8. *Введение в теорию колебаний и волн* / Рабинович М.И., Трубецков Д.И. М.: Наука, 1984. 432 с.

9. *Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности* / Берже П., Помо И., Видаль К. М.: Мир, 1991. 368 с.
 10. *Москаленко О.И., Короновский А.А., Сельский А.О., Евстифеев Е.В.* Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации, основанный на вычислении вероятности наблюдения синхронного режима // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48, вып. 2. С. 3–6.
 11. *Леманов В.В., Лукашов В.В., Шаров К.А.* Переход к турбулентности через перемежаемость в инертных и реагирующих струях // Известия РАН. МЖГ. 2020. № 6. С. 50–59.
 12. *Лекции по цифровой обработке сигнала* / Мячин М. Л. Ярославль: ЯрГУ, 2004. 203 с.
 13. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 9–20. <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
 14. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application // *Meccanica*. 1980. Vol. 15. P. 21–30. <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
 15. *Электродинамика сплошных сред* / Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. М.: Наука, 1982. 736 с.
- ### References
1. *Bologa M.K., Grosu F.P., Kozhuhar' I.A.* Elektrokonvektsiya i teploobmen. Kishinev: Shtiintsa; 1977. 320. (In Russ.).
 2. *Zhakin A.I.* Electrohydrodynamics. *Physics-Uspekhi*. 2012; 55(5):465-488. <https://doi.org/10.3367/ufne.0182.201205b.0495>.
 3. *Il'in V.A., Smorodin B.L.* Periodic and Chaotic Regimes of Liquid Dielectric Convection in a Horizontal Capacitor. *Technical Physics Letters*. 2005;31(5):432-434. <https://doi.org/10.1134/1.1931790>.
 4. *Il'in V.A.* Low Mode Model of Electroconvection of an Ideal Dielectric. *Technical Physics*. 2010;55(8):1113-1123. <https://doi.org/10.1134/S1063784210080062>.
 5. *Il'in V.A., Smorodin B.L.* Nonlinear Regimes of Electroconvection in a Low-Conducting Liquid. *Technical Physics Letters*. 2007;33(4):355-357. <https://doi.org/10.1134/S1063785007040256>
 6. *Il'in V.A.* Electric Convection of Low-Conductivity Liquid in a Horizontal Capacitor in the Presence of Unipolar Charge Injection. *Technical Physics*. 2017;62(1):1-5. <https://doi.org/10.1134/S1063784217010091>
 7. *Il'in V.A., Rushinskaya K.S.* Transitions between electroconvective regimes of a poorly conductive liquid under charge injection in horizontal cells with the different aspect ratio. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2017;39:32-37. (In Russ.).
 8. *Rabinovich M. I., Trubeckov D. I.* *Vvedenie v teoriyu kolebaniy i voln*. М.: Nauka; 1984. 432. (In Russ.).
 9. *Berzhe P., Pomo I., Vidal' K.* *Poryadok v haose. O deterministskom podhode k turbulentnosti*. М.: Mir; 1991. 368. (In Russ.).
 10. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Sel'skii A.O., Evstifeev E.V.* A method to detect the characteristics of intermittent generalized synchronization based on calculation of probability of the synchronous regime observation. *Tech. Phys. Lett.* 2022;48(1):45-48. <http://dx.doi.org/10.21883/TPL.2022.01.52468.18985>.
 11. *Lemanov V.V., Lukashov V.V., Sharov K.A.* Transition to Turbulence through Intermittence in Inert and Reacting Jets. *Fluid Dyn.* 2020;55:768-777. <https://doi.org/10.1134/S0015462820060087>.
 12. *Myachin M.L.* *Lekcii po cifrovoj obrabotke signala*. Yaroslavl': YarGU; 2004. 203. (In Russ.).
 13. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*. 1980;15:9-20. <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
 14. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application. *Meccanica*. 1980;15:21-30. <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
 15. *Landau L.D., Lifshic E.M.* *Elektrodinamika sploshnyh sred*. М.: Nauka; 1982. 736. (In Russ.).

Информация об авторах:

В. А. Ильин – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики фазовых переходов Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID (РИНЦ) 139347;

М. О. Суханов – студент-бакалавр физического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15).

Information about the authors:

V. A. Il'in – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Physics of Phase Transitions; Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID 139347;

M. O. Sukhanov – Bachelor student, Faculty of Physics; Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068).

Научная статья

УДК 531-9; 514.853

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-70-79

К задаче приведения уравнений динамики твердого тела в гиперболическом пространстве

Николай Николаевич Макеев

Саратов, Россия, nmakeyev@mail.ru

Аннотация. Приводится аффинное преобразование пространства скоростей системы уравнений движения абсолютно твердого тела, движущегося относительно центра инерции в гиперболическом пространстве постоянной отрицательной кривизны. Движение тела происходит под воздействием системы гироскопических сил и постоянной следящей обобщенной силы, заданной силовым винтом. Структура гироскопических сил задается специальными условиями, содержащими характерные постоянные параметры (гироскопические коэффициенты). Для преобразованной системы уравнений при заданных структурно-кинетических ограничениях проводится редуцирование системы к интегро-дифференциальному уравнению, полученному относительно одной из компонент винта скорости сдвига. Приводится пример точной линеаризации преобразованной системы уравнений.

Ключевые слова: гиперболическое пространство; абсолютно твердое тело; гироскопические силы; редуцирование динамической системы; линеаризация системы уравнений

Для цитирования: Макеев Н. Н. К задаче приведения уравнений динамики твердого тела в гиперболическом пространстве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 70–79. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-70-79.

Статья поступила в редакцию 10.10.2023; одобрена после рецензирования 25.10.2023; принята к публикации 29.11.2023.

Research article

On the Problem of Reducing the Equations of Rigid Body Dynamics in Hyperbolic Space

Nikolay N. Makeev

Saratov, Russia, nmakeyev@mail.ru

Abstract. An affine transformation of the space of velocities of the system of equations of motion of an absolutely rigid body is given, moving relative to the center of inertia in a hyperbolic space of constant negative curvature. The movement of the body occurs under the influence of a system of gyroscopic forces and a constant servo generalized force specified by the power screw. The structure of gyroscopic forces is given by special conditions containing characteristic constant parameters (gyroscopic coefficients). For the transformed system of equations under given structural-kinetic constraints, the system is reduced to an integro-differential equation obtained with respect to one of the components of the shear rate screw. An example of exact linearization of the transformed system of equations is given.

Keywords: hyperbolic space; absolutely rigid body; gyroscopic forces; reduction of a dynamical system; linearization of the system of equations

For citation: Makeev N. N. On the Problem of Reducing the Equations of Rigid Body Dynamics in Hyperbolic Space. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):70-79. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-70-79.

The article was submitted 10.10.2023; approved after reviewing 25.10.2023; accepted for publication 29.11.2023.



Эта работа © 2023 Макеев Н.Н. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Введение

Начало исследованию динамики твердого тела в гиперболическом пространстве было положено в работах, опубликованных в период, начиная с 70-х годов XIX века. Целью этих работ являлась верификация основных положений геометрии Н.И. Лобачевского в применении принципов классической механики Галилея–Ньютона к решению задач динамики твердого тела для неевклидовых пространств.

В 1873 г. У.К. Клиффорд исследовал движение тела в пространстве постоянной положительной кривизны (эллиптическом пространстве Римана) и эти исследования в дальнейшем продолжились. Основой этих разработок явилась геометрическая теория винтов, созданная Р.С. Боллом, конструктивное построение которой было наиболее полно разработано А.П. Котельниковым.

Новый этап в развитии теории динамики твердого тела для гиперболического пространства открылся с публикации работы А.П. Широкова [1], в которой рассмотрен аналог регулярной прецессии тела, существующий в евклидовом пространстве и распространенный на пространство Н.И. Лобачевского. Публикация этой работы вызвала появление ряда новых исследований в области динамики тела в гиперболическом пространстве, а также в трехмерном псевдоевклидовом пространстве и на плоскости Лобачевского.

К настоящему времени это научное направление продолжает расширяться. Библиография, относящаяся к истории возникновения и развития неевклидовой механики, содержится в работе [2].

1. Предварительные положения

Согласно проективной модели Ф. Клейна [2], пространство Лобачевского (пространство L_3) реализуется внутренними точками абсолюта

$$g_{ij}x^{ij} = -(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 + (x^4)^2 = 0 \quad (1)$$

гиперболического пространства Γ_3 . Здесь g_{ij} – метрический тензор псевдовекторного четырехмерного пространства, рассматриваемого как трехмерное проективное пространство P_3 , реализующее пространство L_3 . Отобразив точки пространства P_3 на точки гиперболы псевдоевклидова пространства R_4^1 , при реше-

нии задач в пространстве Γ_3 применяем тензорный аппарат пространства R_4^1 .

Под движением пространства Γ_3 понимается проективное линейное преобразование, переводящее в себя абсолют (1). Поскольку между одночленными группами движений в пространстве Γ_3 и специальными линейными комплексами в пространстве P_3 существует взаимно однозначное соответствие, то движение в пространстве Γ_3 , как и в пространстве L_3 , можно задавать бивектором пространства R_4^1 [3].

Трехмерное проективное пространство P_3 , реализующее пространство L_3 , рассматривается как псевдовекторное четырехмерное пространство с метрическим тензором g_{ij} (1). Для отображения винтов в пространстве L_3 здесь применяется правило А. Котельникова–Е. Штуди путем их отображения на комплексные векторы комплексного евклидова пространства [2].

Рассмотрим свободное от связей абсолютно твердое тело, движущееся относительно его центра инерции в гиперболическом пространстве L_3 . Пусть $R^0(e_1^0 \dots e_4^0)$ – опорный координатный тетраэдр, автополярный относительно абсолюта (1), неизменно связанный с инерциальным конфигурационным пространством L_3 . Этот неподвижный тетраэдр задается точками e_j^0 ($j = 1, \dots, 4$) данного пространства. С твердым телом неизменно свяжем подвижный координатный невырожденный тетраэдр $R(e_1 \dots e_4)$ (тетраэдр инерции тела), заданный точками e_j ($j = 1, \dots, 4$), также автополярный относительно абсолюта (1). При этом тетраэдр R выбирается так, чтобы его вершина – точка e_4 тела – была собственной, совпадала с центром инерции тела, и чтобы пространственные ориентации этих тетраэдров совпадали [2].

Положение тетраэдра R и его точек относительно R^0 задается параметрами положения и ориентации по схеме, принятой в работе [2]. Положение точки e_4 задается двумя линейными и одним угловым параметрами, а ориентация тетраэдра R относительно R^0 определяется заданными углами Эйлера.

Таким образом, взаимное положение данных тетраэдров устанавливается упорядоченным набором шести заданных характерных параметров.

Мгновенное состояние тела в пространстве L_3 задается винтом мгновенной скорости $V^{j4}(v^{j4}, \omega^{j4})$ (кинематическим винтом) и винтом мгновенного кинетического момента (винтом импульса или кинетическим винтом) $G^{j4}(B_{j4}v^{j4}, -A_{j4}\omega^{j4})$ ($j=1, 2, 3$) стержня. Здесь (v^{j4}, B_{j4}) – компоненты скорости сдвига и моменты инерции сдвига тела относительно его главных осей инерции, соответственно; (ω^{j4}, A_{j4}) ($j=1, 2, 3$) – компоненты скорости вращения и моменты инерции вращения тела относительно тех же осей, соответственно. Определения моментов инерции твердых тел в пространстве L_3 как понятия приведены в работе [1].

В дальнейшем предполагается, что движение твердого тела происходит под воздействием сил с *гироскопической структурой* (по Томсону и Тэту [4, 5]).

Система уравнений движения твердого тела, происходящего под воздействием силового винта внешних сил в пространстве L_3 , имеет вид [4]

$$\begin{aligned} & B_{14}\dot{v}^{14} + (A_{34} + B_{24})(v^{34}\omega^{24} - v^{24}\omega^{34}) + \\ & + \lambda^{24}v^{34} - \lambda^{34}v^{24} + \lambda^{12}\omega^{24} - \lambda^{31}\omega^{34} = k^2m^{14}, \\ & A_{14}\dot{\omega}^{14} + (B_{34} - B_{24})(\omega^{24}\omega^{34} + v^{24}v^{34}) + \\ & + \lambda^{12}v^{24} - \lambda^{31}v^{34} + \lambda^{34}\omega^{24} - \lambda^{24}\omega^{34} = \\ & = -k^2n^{23} \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2)$$

В системе уравнений (2) каждая из двух групп уравнений задана приведенным здесь уравнением-представителем. Остальные уравнения каждой из этих групп могут быть получены из данных путем циклической перестановки индексов 1, 2, 3 в указанных величинах, что здесь и всюду далее обозначается общепринятым символом (1, 2, 3).

В уравнениях (2) числа $\lambda^{rs}, m^{rs}, n^{rs}$ ($r=1, 2, 3; s=1, \dots, 4; r \neq s$) – заданные постоянные коэффициенты и характерные параметры винта внешних сил, соответственно.

Поскольку мощность силового винта с параметрами λ^{rs} при $m^{rs}=n^{rs}=0$ тождественно равна нулю, то силы, определяемые этим винтом при данных условиях, являются *гироскопическими*, а параметры λ^{rs} – заданными гироскопическими коэффициентами, обуславливающими гироскопический эффект.

Система уравнений (2) эволюционного типа является многопараметрической и аналитически замкнутой относительно компонент скоростей v^{i4}, ω^{i4} ($i=1, 2, 3$) при значениях заданных параметров $(m^{rs}, n^{rs}) = \text{const}$. Эта система может быть интерпретирована как динамическая система гиростата, движущегося в пространстве L_3 , с гиростатическими параметрами λ^{rs} [4]. Система уравнений (2) в дальнейшем называется *основной динамической системой* (ОДС).

Из многообразия решений (ω^{j4}, v^{j4}) ($j=1, 2, 3$) системы уравнений (2) выделим множество, для которого гипотетически существуют соотношения связи вида

$$\omega^{j4} = n_j v^{j4} + m_j \quad (j=1, 2, 3), \quad (3)$$

где n_j, m_j – неотрицательные постоянные, подлежащие определению такие, что

$$\prod_{j=1}^3 n_j \neq 0, \quad \prod_{i,j=1}^3 (n_i - n_j) \neq 0 \quad (i \neq j). \quad (4)$$

Система равенств (3) при условиях (4) может быть геометрически истолкована как невырожденное аффинное преобразование, являющееся композицией центрально-аффинного преобразования с центром, совпадающим с центром инерции тела, и параллельного переноса. При этом постоянные n_j являются коэффициентами центрально-аффинного преобразования, величины m_j – параметрами параллельного переноса, а первое соотношение (4) – условием невырожденности данного преобразования.

Если допустить, что все параметры $n_j = n, m_j = 0$, то условия (3) соответствуют винтовому движению тела с параметром винта $n \neq 0$. Второе ограничение (4) исключает существование винтового движения тела из множества возможных движений, определяемого условиями (3).

Ограничения (4) исключают существование двух следующих случаев движения тела. Первый из них, при котором все $n_j = 0$, согласно равенствам (3), соответствует перманентному вращению тела со скоростями $\omega^{j4} = m_j$ ($j=1, 2, 3$). Второй случай, при котором все значения $n_j = n_0 \neq 0$, как будет показано далее, предполагает существование центральной структурно-кинетической симметрии тела ($A_{j4} = A, B_{j4} = B; j=1, 2, 3$), для которого значение величины параметра n является неопределенным.

Ставится задача: применяя невырожденное преобразование (3) с условиями (4), привести ОДС (2) к динамической системе третьего порядка при выполнении определенных ограничений.

Эта формулировка соответствует ограниченной задаче редуцирования ОДС, реализуемой при определенных условиях совместности, построенных для исходной и преобразованной динамических систем.

2. Приведение основной динамической системы

Применяя к уравнениям системы (2) преобразование (3), в результате получаем системы уравнений следующих групп 1 и 2. Уравнения движения группы 1:

$$\begin{aligned} a_{01}\dot{v}^{14} + a_{11}v^{24}v^{34} + a_{21}v^{24} + \\ + a_{31}v^{34} + a_{41} = 0, \\ a_{02}\dot{v}^{24} + a_{12}v^{34}v^{14} + a_{22}v^{14} + \\ + a_{32}v^{34} + a_{42} = 0, \\ a_{03}\dot{v}^{34} + a_{13}v^{14}v^{24} + a_{23}v^{14} + \\ + a_{33}v^{24} + a_{43} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где для коэффициентов a_{ij} имеем:

$$\begin{aligned} a_{01} = A_{14}n_1, \quad a_{11} = (B_{34} - B_{24})(1 + n_2n_3), \\ a_{41} = (B_{34} - B_{24})m_2m_3 + \lambda^{34}m_2 - \\ - \lambda^{24}m_3 + k^2n^{14} \quad (1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь циклической перестановке подлежат только вторые номера двойных индексов. При этом индексы номеров 0 и 4 здесь и всюду далее в данной перестановке не участвуют. Для остальных коэффициентов имеем:

$$\begin{aligned} a_{21} = (B_{34} - B_{24})m_3n_2 + \lambda^{34}n_2 + \lambda^{12}, \\ a_{22} = (B_{14} - B_{34})m_3n_1 - \lambda^{34}n_1 - \lambda^{12}, \\ a_{23} = (B_{24} - B_{14})m_2n_1 + \lambda^{24}n_1 + \lambda^{31}, \\ a_{31} = (B_{34} - B_{24})m_2n_3 - \lambda^{24}n_3 - \lambda^{31}, \\ a_{32} = (B_{14} - B_{34})m_1n_3 + \lambda^{14}n_3 + \lambda^{23}, \\ a_{33} = (B_{24} - B_{14})m_1n_2 - \lambda^{14}n_2 - \lambda^{23}. \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (7) имеют сходную форму представления по отношению к характерным показателям системы уравнений (5) – инерционным параметрам B_{j4} , параметрам преобразования (3) n_j , m_j и гироскопическим коэффици-

циентам λ^{rs} ($i, j; r, s = 1, 2, 3; r \neq s$). Эта особенность отражает симметрическую структуру набора этих характеристик.

Аналогично для группы 2 имеем:

$$\begin{aligned} b_{01}\dot{v}^{14} + b_{11}v^{24}v^{34} + b_{21}v^{24} + \\ + b_{31}v^{34} + b_{41} = 0, \\ b_{02}\dot{v}^{24} + b_{12}v^{34}v^{14} + b_{22}v^{14} + \\ + b_{32}v^{34} + b_{42} = 0, \\ b_{03}\dot{v}^{34} + b_{13}v^{14}v^{24} + b_{23}v^{14} + \\ + b_{33}v^{24} + b_{43} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициенты b_{ij} определяются как

$$\begin{aligned} b_{01} = B_{14}, \quad b_{11} = (A_{34} + B_{24})(n_2 - n_3), \\ b_{41} = \lambda^{12}m_2 - \lambda^{31}m_3 - k^2m^{14} \\ (1, 2, 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{21} = -(A_{34} + B_{24})m_3 + \lambda^{12}n_2 - \lambda^{34}, \\ b_{22} = (A_{14} + B_{34})m_3 - \lambda^{12}n_1 + \lambda^{34}, \\ b_{23} = -(A_{24} + B_{14})m_2 + \lambda^{31}n_1 - \lambda^{24}, \\ b_{31} = (A_{34} + B_{24})m_2 - \lambda^{31}n_3 + \lambda^{24}, \\ b_{32} = -(A_{14} + B_{34})m_1 + \lambda^{23}n_3 - \lambda^{14}, \\ b_{33} = (A_{24} + B_{14})m_1 - \lambda^{23}n_2 + \lambda^{14}. \end{aligned} \quad (9)$$

Сопоставляя между собой уравнения групп 1, 2, определяемые системами (5) и (8), получаем условия их совместности:

$$\frac{a_{1j}}{a_{0j}} = \frac{b_{1j}}{b_{0j}} = p \quad (j = 1, 2, 3), \quad (10)$$

$$\frac{a_{2r}}{a_{0r}} = \frac{b_{2r}}{b_{0r}} = p \quad (r = 2, 3), \quad (11)$$

$$\frac{c_{21}}{c_{01}} = \frac{c_{33}}{c_{03}} = p, \quad (12)$$

$$\frac{a_{3r}}{a_{0r}} = \frac{b_{3r}}{b_{0r}} = p \quad (r = 1, 2), \quad (13)$$

$$\frac{a_{4j}}{a_{0j}} = \frac{b_{4j}}{b_{0j}} = p \quad (j = 1, 2, 3), \quad (14)$$

где c – условное обозначение коэффициентов a, b с указанными в равенствах (12) индексами; p – параметр пропорциональности.

Из условий (10)–(14) согласно равенствам (6), (7), (9) следуют соотношения связи, соответственно

$$\begin{aligned} & A_{14}(A_{34} + B_{24})(n_2 - n_3)n_1 - \\ & - B_{14}(B_{34} - B_{24})(1 + n_2 n_3) = 0 \quad (15) \\ & (1, 2, 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (B_{14} - B_{34})m_3 n_1 - \lambda^{34} n_1 - \lambda^{12} = A_{24} n_2 p, \\ & (B_{24} - B_{14})m_2 n_1 + \lambda^{24} n_1 + \lambda^{31} = A_{34} n_3 p, \\ & (A_{14} + B_{34})m_3 - \lambda^{12} n_1 + \lambda^{34} = B_{24} p, \\ & (A_{24} + B_{14})m_2 - \lambda^{31} n_1 + \lambda^{24} = -B_{34} p, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (B_{34} - B_{24})m_3 n_2 + \lambda^{34} n_2 + \lambda^{12} = A_{14} n_1 p, \\ & (B_{24} - B_{14})m_1 n_2 - \lambda^{14} n_2 - \lambda^{23} = A_{34} n_3 p, \\ & (A_{24} + B_{14})m_1 - \lambda^{23} n_2 + \lambda^{14} = B_{34} p, \\ & (A_{34} + B_{24})m_3 - \lambda^{12} n_2 + \lambda^{34} = -B_{14} p, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (B_{34} - B_{24})m_2 n_3 - \lambda^{24} n_3 - \lambda^{31} = A_{14} n_1 p, \\ & (B_{14} - B_{34})m_1 n_3 + \lambda^{14} n_3 + \lambda^{23} = A_{24} n_2 p, \\ & (A_{34} + B_{24})m_2 - \lambda^{31} n_3 + \lambda^{24} = B_{14} p, \\ & (A_{14} + B_{34})m_1 - \lambda^{23} n_3 + \lambda^{14} = B_{24} p. \quad (18) \end{aligned}$$

В соответствии с условиями (14) имеем

$$\begin{aligned} & (B_{34} - B_{24})m_2 m_3 + \lambda^{34} m_2 - \\ & - \lambda^{24} m_3 + k^2 n^{14} = A_{14} n_1 p, \\ & \lambda^{12} m_2 - \lambda^{31} m_3 - k^2 m^{14} = B_{14} p \\ & (1, 2, 3). \quad (19) \end{aligned}$$

Если не выполняется второе условие (4), то, согласно ограничениям (15), твердое тело обладает центральной кинетической симметрией, а значение параметра n , как отмечалось ранее, становится неопределенным.

Обозначим

$$J_1 = \frac{B_{14}(B_{34} - B_{24})}{A_{14}(A_{34} + B_{24})} \quad (1, 2, 3)$$

и положим

$$\prod_{i, j=1}^3 (B_{i4} - B_{j4}) \neq 0 \quad (i \neq j),$$

что равносильно условию $J_j \neq 0$ ($j=1, 2, 3$).

Это условие исключает наличие центральной

кинетической симметрии тела и тогда соотношения (15) представляются в виде

$$\begin{aligned} & n_1(n_2 - n_3) - J_1(1 + n_2 n_3) = 0 \quad (20) \\ & (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Равенства (20) определяют квадратичную зависимость коэффициентов n_j от инерционных параметров тела. Обозначая

$$D_1 = [(1 - J_3)n_3]^{-1}[(1 + 2J_1)n_3^2 + J_1 J_3],$$

$$D = D_1^2 + 4J_1,$$

из системы уравнений (20) получаем зависимость вида $n_1(n_3)$:

$$2n_1 = D_1 \mp \sqrt{D}, \quad (21)$$

где $J_3 \neq 1$ в силу свойства, согласно которому

$$(A_{34} + B_{34})B_{14} \neq B_{24}B_{34} - A_{24}A_{34}.$$

Зависимость (21) определена в ограниченной односвязной области, в которой $D \geq 0$, откуда следует

$$[(1 + 2J_1)n_3^2 + J_1 J_3]^2 + 4J_1[(1 - J_3)n_3]^2 \geq 0.$$

Из соотношений (20) следует

$$n_2 = \frac{(D_1 \mp \sqrt{D})n_3 + 2J_1}{D_1 \mp \sqrt{D} - 2J_1 n_3} \quad (22)$$

для области действительных значений параметров при ограничении

$$J_1 n_3^2 - D_1 n_3 - 1 \neq 0.$$

Поскольку, согласно равенствам (20),

$$n_3 = \frac{J_3(1 + n_1 n_2)}{n_1 - n_2} \quad (n_1 \neq n_2),$$

то в силу равенств (21), (22) явная зависимость величины n_3 от инерционных параметров тела определяется очевидным образом.

Итак, значения всех параметров n_j , удовлетворяющих условиям (15), определены и в дальнейшем полагаются известными.

Из соотношений совместности – последних равенств (16)–(18) – получаем, соответственно,

$$\begin{aligned} & m_1 = -(A_{14} + B_{34})^{-1}(B_{24} p - \lambda^{23} n_3 + \lambda^{14}) \quad (23) \\ & (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Равенства (23) для параметров m_j являются определяющими при известных выражениях, относящихся к величинам λ^{rs} . Внося выражения (23) в остальные уравнения данной системы, представляющие условия совместности систем уравнений (5), (8), в результате получаем следующие соотношения.

Из уравнений системы (17) при условии $\Delta_1 \neq 0$ получаем:

$$\begin{aligned}\lambda^{14} &= \Delta_1^{-1}(c_2 F_2 - c_4 F_1), \\ \lambda^{23} &= \Delta_1^{-1}(c_3 F_1 - c_1 F_2),\end{aligned}\quad (24)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}c_1 &= (A_{14} + B_{34} + B_{24} - B_{14})n_2, \\ c_2 &= A_{14} + B_{34} + (B_{14} - B_{24})n_2 n_3, \\ c_3 &= A_{24} + B_{14} - (A_{14} + B_{34}), \\ c_4 &= (A_{14} + B_{34})n_2 - (A_{24} + B_{14})n_3,\end{aligned}$$

$$\Delta_1 = c_1 c_4 - c_2 c_3,$$

$$\begin{aligned}F_1 &= [A_{34}(A_{14} + B_{34})n_3 + B_{24}(B_{24} - B_{14})n_2]p, \\ F_2 &= [B_{24}(A_{24} + B_{14}) + B_{34}(A_{14} + B_{34})]p.\end{aligned}$$

Аналогичным образом, в силу уравнений системы (16) при условии $\Delta_2 \neq 0$, имеем:

$$\begin{aligned}\lambda^{24} &= \Delta_2^{-1}(g_2 F_4 - g_4 F_3), \\ \lambda^{31} &= \Delta_2^{-1}(g_3 F_3 - g_1 F_4),\end{aligned}\quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}g_1 &= A_{34} + B_{24} - (A_{24} + B_{14}), \\ g_2 &= (A_{24} + B_{14})n_3 - (A_{34} + B_{24})n_1, \\ g_3 &= [B_{24} - B_{14} - (A_{24} + B_{14})]n_1, \\ g_4 &= (A_{24} + B_{14})n_3 - (A_{34} + B_{24})n_1,\end{aligned}$$

$$\Delta_2 = g_1 g_4 - g_2 g_3,$$

$$\begin{aligned}F_3 &= [B_{14}(A_{24} + B_{14}) + B_{34}(A_{34} + B_{24})]p, \\ F_4 &= [B_{34}(B_{24} - B_{14})n_1 + A_{34}(A_{24} + B_{14})n_3]p.\end{aligned}$$

Согласно уравнениям системы (16) при ограничении $\Delta_3 \neq 0$ находим:

$$\begin{aligned}\lambda^{12} &= \Delta_3^{-1}(h_2 F_6 - h_4 F_5), \\ \lambda^{34} &= \Delta_3^{-1}(h_3 F_5 - h_1 F_6).\end{aligned}\quad (26)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned}h_1 &= (A_{34} + B_{24})n_1 - (A_{14} + B_{34})n_2, \\ h_2 &= A_{14} + B_{34} - (A_{34} + B_{24}), \\ h_3 &= A_{34} + B_{24} - (B_{14} - B_{34})n_1 n_2, \\ h_4 &= A_{34} + B_{24} + (B_{14} - B_{34}), \\ \Delta_3 &= h_1 h_4 - h_2 h_3,\end{aligned}$$

$$F_5 = [B_{14}(A_{14} + B_{34}) + B_{24}(A_{34} + B_{24})]p,$$

$$F_6 = [A_{24}(A_{34} + B_{24})n_2 + B_{14}(B_{14} - B_{34})n_1]p.$$

Итак, равенства (24)–(26) при заданных условиях однозначно выражают величины гироскопических параметров λ^{rs} , где $(r, s) = 1, \dots, 4$, через моменты инерции тела с точностью до слагаемых, содержащих параметр p . Параметры силового винта m^{j^4}, n^{j^4} ($j = 1, 2, 3$) определяются равенствами (19), (23) также с точностью до слагаемых, содержащих свободный параметр p .

Первые три уравнения системы (18), не применявшиеся для определения неизвестных параметров, при подстановке в них найденных выражений для соответствующих величин превращаются в тождества.

Таким образом, все неизвестные параметры n_j, m_j преобразования (3), а также условия совместности для величин $\lambda^{ij}, \lambda^{j^4}, n^{j^4}, m^{j^4}$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$) при заданных ограничениях определены с точностью до величин, содержащих свободный параметр p .

3. Редуцирование приведенной динамической системы

Объединенная система уравнений (5), (8) (совокупность групп 1 и 2) является преобразованной динамической системой третьего порядка с квадратичной нелинейностью. Одна из этих групп уравнений (например, группа 1) принимается за определяющую, а другая применяется для установления условий совместности соответствующих уравнений данных групп.

Уравнения системы (5) при определенных условиях имеют структуру, характерную для динамических уравнений гиростата с постоянным гиростатическим моментом, движущегося относительно центра инерции в евклидовом пространстве R^3 . Данная система уравнений с точностью до структурных признаков изоморфна динамической системе Н.Е. Жуковского [6], а модель моментно-силового воздействия на гиростат эквивалентна видоизмененной модели Р. Граммеля [7].

Эта модель реализуется в режиме авто-регулирования при воздействии постоянного результирующего момента внешних сил, заданного относительно координатного тетраэдра инерции $R(e_r)$. Отсюда следует, что для данной системы уравнений возможно применение алгоритма редуцирования путем выделения определяющего уравнения для одной из переменных v^{j4} . Применим этот прием к системе уравнений (5), для которой коэффициенты a_{rs} удовлетворяют приведенным выше условиям совместности. При этом предполагается, что для данной системы в общем случае не существуют алгебраические первые интегралы относительно компонент v^{j4} ($j=1, 2, 3$).

Введем структурно-кинетические условия симметрии:

$$A_{r4} = A, \quad B_{r4} = B \quad (r=1, 2), \quad (27)$$

$$a_{23} \neq 0 \quad (28)$$

и применим естественно принимаемые ограничения $a_{0j} \neq 0$ ($j=1, 2, 3$). Равенства (27) определяют кинетическую симметрию тела относительно главной центральной оси инерции (e_4, e_3) координатного тетраэдра инерции R . В этом случае имеем $a_{13} = 0$ и третье уравнение системы (5) становится линейным, причем

$$\begin{aligned} a_{23} &= \lambda^{24} n_1 + \lambda^{31}, \\ a_{33} &= -(\lambda^{14} n_2 + \lambda^{23}), \\ a_{43} &= \lambda^{24} m_1 - \lambda^{14} m_2 + k^2 n^{34}. \end{aligned} \quad (29)$$

Поставим задачу: произвести редуцирование системы уравнений (5) путем сведения ее к определяющему уравнению относительно одной из компонент винта скорости сдвига тела при условиях (27), (28).

Выражая из линейного уравнения (5) величину v^{14} , согласно условию (28), получаем

$$v^{14} = -(a_{23})^{-1}(a_{03}\dot{v}^{34} + a_{33}v^{24} + a_{43}), \quad (30)$$

где коэффициенты a_{r3} ($r=2, 3, 4$) определяются равенствами (29).

В силу соотношения (30) и условий (27), (28) из системы уравнений (5) следует:

$$\begin{aligned} \ddot{v}^{34} + k_1 \dot{v}^{24} - k_2 v^{24} v^{34} - \\ - k_3 v^{24} - k_4 v^{34} - k_5 = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\dot{v}^{24} - f(v^{34})v^{24} = F(\dot{v}^{34}, v^{34}), \quad (32)$$

где обозначено

$$k_1 = (a_{03})^{-1} a_{33}, \quad k_r = m a_{(r-1)1} \quad (r=2, \dots, 5),$$

$$m = (a_{01} a_{03})^{-1} a_{23}, \quad n = (a_{01} a_{02})^{-1} a_{21} a_{22},$$

$$f(v^{34}) = \lambda_1 (a_{12} v^{34} + a_{22}),$$

$$F(\dot{v}^{34}, v^{34}) = a_{22} \lambda_2 \dot{v}^{34} + (a_{12} \lambda_2 - H_1) v^{34} - H_2,$$

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (a_{33}, a_{03}) \rho, \quad \rho = (a_{02} a_{23})^{-1},$$

$$(H_1, H_2) = (\sigma_1, \sigma_2) \rho, \quad (33)$$

$$\sigma_r = a_{r2} a_{43} - a_{23} a_{(r+2)2} \quad (r=1, 2).$$

Рассматривая равенство (32) как уравнение относительно величины v^{24} , получаем

$$v^{24} = \mu(v^{34}) \Phi(\dot{v}^{34}, v^{34}), \quad (34)$$

где обозначено

$$\mu(v^{34}) = \exp \int_0^t f(v^{34}) d\tau, \quad (35)$$

$$\Phi(\dot{v}^{34}, v^{34}) = v_0^{24} + \int_0^t F(\dot{v}^{34}, v^{34}) \mu^{-1}(v^{34}) d\tau,$$

при этом $v_0^{24} = v^{24}(0)$.

Из равенств (31), (33), (34), (35) имеем

$$\begin{aligned} \ddot{v}^{34} + k_1 F - (\mu k_2 \Phi + k_4) v^{34} + \\ + (k_1 f - k_3) \mu \Phi - k_5 = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Равенство (36) является результирующим интегро-дифференциальным уравнением, содержащим функции μ, f, F, Φ , зависящие от \dot{v}^{34}, v^{34} . Уравнение (36) может вырождаться в определяющее дифференциальное уравнение относительно функции v^{34} . Это возможно, в частности, при значениях $a_{22} = a_{42} = 0, \quad a_{12}(a_{03} - a_{43}) + a_{23} a_{32} = 0$.

4. Приведение к линейной динамической системе

Рассмотрим пример вырождения системы уравнений (5) в линейную систему. Введем структурно-кинетические условия:

$$A_{j4} = A, \quad B_{j4} = B \quad (j=1, 2, 3), \quad (37)$$

к которым присоединим ограничения

$$\lambda^{14} = \lambda^{23} = 0. \quad (38)$$

Условия (37) выражают кинетическую симметрию тела относительно его центра

инерции, а ограничения (38) – перекрестную стабилизацию данных компонент гироскопического винта, действующего на тело. В силу условий (37), (38) имеем $a_{32} = a_{33} = 0$ и из системы уравнений (5) получаем

$$\ddot{v}^{14} + \Omega^2 v^{14} = L, \quad (39)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= n + k_4, \\ L &= (a_{22})^{-1} a_{42} n + (a_{23})^{-1} a_{43} k_4. \end{aligned}$$

Здесь a_{ij} ($i = 1, \dots, 4; j = 1, 2, 3$) – инерционно-кинетические коэффициенты, определяемые равенствами (6), (7).

Обозначим

$$\begin{aligned} (U_1, U_2) &= \lambda^{34} (n_1, n_2) + (\lambda^{12}, \lambda^{12}), \\ (U_3, U_4) &= \lambda^{24} (n_3, n_1) + (\lambda^{31}, \lambda^{31}). \end{aligned}$$

Если выполняется условие

$$(n_2)^{-1} U_1 U_2 + (n_3)^{-1} U_3 U_4 > 0, \quad (40)$$

то уравнение (39) определяет движение проекции фазовой точки на координатную ось 1–4 как гармонического осциллятора с собственной частотой Ω , находящегося под воздействием постоянной моментно-силовой нагрузки L . В случае, при котором имеет место условие (40) с противоположным знаком, уравнение (39) при $L = 0$ соответствует движению проекции фазовой точки по той же координатной оси, происходящему под воздействием гипотетической силы отталкивания, линейно зависящей от величины отклонения этой точки.

Полагая решение уравнения (39) известным, выражения для компонент v^{24}, v^{34} определяются из уравнений системы

$$a_{0r} \dot{v}^{r4} + a_{2r} v^{14} + a_{4r} = 0 \quad (r = 2, 3),$$

которая следует из системы (5) при условиях (37), (38).

Данный пример показывает, что движение твердого тела в пространстве L_3 под воздействием заданной моментно-силовой нагрузки относительно его центра инерции при условиях (37), (38) в определенном смысле можно сопоставить с движением гармонического осциллятора в фазовом пространстве.

5. Приведение интегралов динамической системы

В работе [5] показано, что для ОДС (2) при движении тела по инерции, когда компоненты результирующего винта внешних сил

$$m^{j4} = 0, \quad n^{rs} = 0 \quad (j, r, s = 1, 2, 3; r \neq s),$$

существуют алгебраические интегралы

$$\begin{aligned} I &\equiv \sum_{(123)} [B_{14} (v^{14})^2 + A_{14} (\omega^{14})^2] = h^2, \\ I_1 &\equiv \sum_{(123)} [(B_{14} v^{14} + \lambda^{23})^2 - (A_{14} \omega^{14} + \lambda^{14})^2] = h_1, \\ I_2 &\equiv \sum_{(123)} (B_{14} v^{14} + \lambda^{23})(A_{14} \omega^{14} + \lambda^{14}) = h_2. \end{aligned} \quad (41)$$

В равенствах (41) величины I, I_1, I_2 являются интегралами энергии и кинетического винта, соответственно. При этом величина I_2 представляет собой аналог классического интеграла Э. Нетер [5], существующего для уравнений движения тела в евклидовом пространстве. Символ $(1, 2, 3)$, находящийся под знаком суммы, обозначает суммирование по всем величинам, получаемым циклической перестановкой данных числовых индексов, содержащихся в этих величинах.

Применим к интегралам (41) преобразование (3), предварительно полагая

$$\begin{aligned} m_j &= 0, \quad B_{j4} - A_{j4} n_j > 0 \quad (j = 1, 2, 3), \\ \lambda^{j4} &= \lambda^{rs} = 0 \quad (j, r, s = 1, 2, 3; r \neq s), \end{aligned} \quad (42)$$

и приведем геометрическую интерпретацию преобразованных интегралов.

Обозначим:

$$\begin{aligned} K_1 &= B_{14} + A_{14} n_1^2, \quad N_1 = (B_{14})^2 - (A_{14} n_1)^2 \\ &(1, 2, 3). \end{aligned} \quad (43)$$

Преобразованные алгебраические интегралы (41) при условиях (42) в обозначениях (43) имеют вид

$$\sum_{(123)} [K_1 (v^{14})^2] = h^2, \quad (44)$$

$$\sum_{(123)} [N_1 (v^{14})^2] = h_1, \quad (45)$$

$$\sum_{(123)} [A_{14} B_{14} n_1 (v^{14})^2] = h_2. \quad (46)$$

Уравнение (44) в пространстве квазиординат v^{j4} является каноническим уравнением преобразованного эллипсоида кинетической энергии сдвиг с длинами полуосей, равными $(K_j)^{-1/2}h$ ($j = 1, 2, 3; h > 0$). Здесь каждому фиксированному значению параметра h соответствует единственный определенный уровень энергии сдвига.

Равенство (45) представляет в v -пространстве уравнение поверхности второго порядка, характеризующей согласно условиям (42) модуль преобразованного кинетического винта сдвига тела. Если характерная величина $N_j h_1 > 0$, то эта поверхность является эллипсоидом с длинами полуосей

$$p_j = \sqrt{(N_j)^{-1}h_1} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Соотношение (46) истолковывается как уравнение проекции преобразованного кинетического винта сдвига тела на некоторую ось, связанную с осью этого винта.

Линейная связка преобразованных интегралов (44)–(46) в координатном v -пространстве определяет область изменения величин компонент v^{j4} , соответствующую данному набору фиксированных значений параметров h, h_1, h_2 .

Аналогичное истолкование интегралов возможно и в общем случае, вне ограничений (42), но оно обладало бы меньшей наглядностью по сравнению с интерпретацией в случае, определяемом этими ограничениями.

Заключение

Установлена принципиальная возможность приведения исходной динамической системы шестого порядка к нелинейной системе третьего порядка. Исходная система как гладкое аналитическое многообразие описывает движение твердого тела относительно центра инерции в гиперболическом пространстве постоянной отрицательной кривизны. Это приведение реализовано при выполнении ряда параметрических ограничений, условий совместности и выполнено с точностью до функций, зависящих от некоторого произвольного независимого параметра.

Приведение системы уравнений с использованием преобразования вида (3) ранее применялось в работе [8] при решении задачи о движении относительно неподвижной точки гиростата в центральном гравитационном поле евклидова пространства R^3 .

В этой работе примененное преобразование позволило произвести интегрирование преобразованной системы уравнений движения в квадратурах.

Для приведенной динамической системы в случае осевой структурно-кинетической симметрии тела произведено ее редуцирование к интегро-дифференциальному уравнению для одной из компонент винта скорости сдвига тела. Этот прием способствует нахождению точных частных решений системы в замкнутой конечной форме (без применения разложений функций в ряды и приближенных методов). Как было отмечено: "Для построения точных решений классической задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, сведение этой задачи к одному уравнению имеет принципиальное значение" [9]. Действительность этого положения подтверждается практикой исследований при решении задач классической динамики твердого тела.

Преобразование вида (3) в частном случае, для которого все $m_j = 0$, было применено в работе [10], где рассматривалась задача, аналогичная приведенной в настоящей статье.

Список источников

1. Широков А.П. Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского // Ученые записки Казанского университета. 1963. Т. 123. Кн. 1. С. 196–207.
2. Крюков М.С. О движении стержня по инерции в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1964. № 4. С. 86–98.
3. Крюков М.С. О движении твердого тела в пространстве Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1967. № 5. С. 34–39.
4. Макеев Н.Н. Устойчивость перманентных движений гиростата в пространстве Лобачевского // Дифференциальная геометрия. Геометрия обобщенных пространств и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: изд-во Саратов. ун-та. 1981. Вып. 6. С. 58–71.
5. Макеев Н.Н. Интегралы уравнений движения в пространстве Лобачевского // Математический вестник Вятского государственного университета. 2022. № 1 (24). С. 24–32. DOI: 10.25730/VSU.0536.22.004.
6. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельною жидкостью: собр. соч. в 7 т. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 2. С. 152–309.

7. *Граммель Р.* Теория несимметричного гироскопа с реактивным приводом // Механика: периодический сб. переводов иностранных статей. 1958. № 6. С. 145–151.
 8. *Харламова Е.И.* Некоторые решения задачи о движении тела, имеющего закрепленную точку // Прикладная математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 4. С. 733–737.
 9. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегро-дифференциальное уравнение динамики твердого тела. Донецк: Академия наук УССР. Ин-т прикладной математики и механики, 1986. 296 с.
 10. *Макеев Н.Н.* Движение симметричного твердого тела в пространстве Лобачевского // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. Перм. ун-т. Пермь, 2010. Вып. 42. С. 46–63.
- References**
1. *Shirokov A.P.* Vintovaya regul'yarnaya pretsessiya v prostranstve Lobachevskogo // Uchenye zapiski Kazanskogo un-ta. 1963;(123:1):196-207. (In Russ.).
 2. *Kryukov M.S.* O dvizhenii sterzhnya po inertsiy v prostranstve Lobachevskogo // Izvestiya vuzov. Mathematica. 1964;(4):86-98. (In Russ.).
 3. *Kryukov M.S.* O dvizhenii tverdogo tela v prostranstve Lobachevskogo // Izvestiya vuzov. Mathematica. 1967;(5):34-39. (In Russ.).
 4. *Makeev N.N.* Ustoychivost' permanentnykh dvizheniy girostata v prostranstve Lobachevskogo // Differentsialnaya geometriya. Geometriya // obobshchennykh prostranstv i yeye prilozheniya: mezhvuz. sb. nauch. tr. Saratov: izd-vo Saratov. un-ta. 1981;(6):58-71. (In Russ.).
 5. *Makeev N.N.* Integraly uravneniy dvizheniya v prostranstve Lobachevskogo // Matematicheskiy vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta. 2022;(1:24):24-32. DOI: 10.25730/VSU.0536.22.004. (In Russ.).
 6. *Zhukovsky N.E.* O dvizhenii tvyerdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennyye odnorodnoyu kapel'noyu zhidkost'yu: sobr. soch. v 7 t. M.; L.: Gostekhizdat, 1949. T. 2. S. 152–309. (In Russ.).
 7. *Grammel R.* Teoriya nesimmetrichnogo gioskopa s reaktivnym privodom // Mekhanika: periodicheskiy sb. perevodov inostrannykh statey. 1958. N 6. S. 145-151. (In Russ.).
 8. *Kharlamova E.I.* Nekotorye resheniya zadachi o dvizhenii tela, imeyushchego zakrepyennuyu tochku // Prikladnaya matematika i mekhanika. 1965;(29:4):733-737. (In Russ.).
 9. *Kharlamova E.I., Mozalevskaya G.V.* Integrodifferentsialnoe uravnenie dinamiki tvyerdogo tela. Donetsk: Akademiya nauk USSR. In-t prikladnoy matematiki i mekhaniki. 1986. 296 s. (In Russ.).
 10. *Makeev N.N.* Dvizhenie simmetrichnogo tvyerdogo tela v prostranstve Lobachevskogo // Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr. Perm. un-t. Perm', 2010;(42):46-63. (In Russ.).

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев – доктор физико-математических наук, профессор, AuthorID: 374535, WoS: AAW-4380-2020, IRID: 310401529.

Information about the author:

N. N. Makeev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, AuthorID: 374535, WoS: AAW-4380-2020, IRID: 310401529.

Научная статья

УДК 539.3

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-80-88

Экспериментальное исследование концентрации напряжений в окрестностях вершин V-образных трещин разной глубины при их заполнении различными материалами

Андрей Юрьевич Фёдоров¹, Елизавета Борисовна Галкина²,
Алексей Игоревич Слободинюк³

^{1,2}Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

³Институт технической химии УрО РАН, Пермь, Россия

¹fedorov@icmm.ru

²galkina.e@icmm.ru

³slobodinyuk.aleksey.ktn@mail.ru

Аннотация. Одним из вариантов устранения концентрации напряжений в окрестности вершин поверхностных трещин (V-образных надрезов) является заполнение полости трещин материалом. Эффективность данного варианта зависит от угла раскрытия трещин, свойств материала с трещиной и заполняющего материала, адгезионной прочности между основным и заполняющим материалами. При рассмотрении задачи о трещине с заполняющим материалом в рамках теории упругости, решения содержат сингулярное поведение напряжений в окрестностях вершин трещин. Из анализа полученных решений следует, что при определенной комбинации углов V-образных надрезов и свойств материалов отсутствуют сингулярные решения, что является наиболее оптимальным вариантом для устранения концентрации напряжений. Кроме этого, показано, что при наличии сингулярных решений уровень концентрации напряжений зависит от характера сингулярности напряжений. Вместе с тем эти результаты, как правило, имеют качественный характер. В настоящей работе, опираясь на теоретические результаты, приводятся экспериментальные результаты, дающие количественное представление об уровне концентрации напряжений в образцах с V-образным надрезом, заполненным материалом, при разных глубинах и углах надрезов и различных механических характеристиках заполняющих материалов.

Ключевые слова: сингулярность напряжений; концентрация напряжений; замкнутый составной клин; V-образный надрез

Для цитирования: Фёдоров А. Ю., Галкина Е. Б., Слободинюк А. И. Экспериментальное исследование концентрации напряжений в окрестностях вершин V-образных трещин разной глубины при их заполнении различными материалами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 80–88. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-80-88.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ и Пермского края (проект № 20-41-596007).

Статья поступила в редакцию 05.09.2023; одобрена после рецензирования 27.10.2023; принята к публикации 28.11.2023.

Research article

Experimental Study of Stress Concentration Near the Tips of V-shaped Cracks of Different Depths Filled With Various Materials

Andrey Yu. Fedorov¹, Elizaveta B. Galkina², Aleksey I. Slobodinyuk³



© Работа 2023 Фёдоров А.Ю., Галкина Е.Б., Слободинюк А.И. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

^{1,2}Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

³Institute of Technical Chemistry UB RAS, Perm, Russia

¹fedorov@icmm.ru

²galkina.e@icmm.ru

³slobodinyuk.aleksey.ktn@mail.ru

Abstract. One of the ways to eliminate the stress concentration in the vicinity of tips of surface cracks (V-shaped notches) is to fill the crack cavity with material. The effectiveness of this variant depends on the crack opening angle, the properties of the original and filler materials, and the strength of adhesion between the filler and basic materials. The solutions to the problem of a crack with a filling material obtained in the framework of the theory of elasticity revealed a singular behavior of stresses in the vicinity of crack tips. The analysis of the solutions obtained demonstrate that at a certain combination of V-notch angles and material properties there are no singular solutions, which is the best option for eliminating stress concentration. In addition, it is shown that in case of singular solutions, the level of stress concentration depends on the nature of the stress singularity. It should be noted however that these results are of a qualitative nature. In this paper, based on theoretical results, we present the results of experimental study, which give a quantitative estimate of the level of stress concentration in the samples with a V-shaped notch filled with material at different values of the notch depth and notch angles and various mechanical characteristics of filling materials.

Keywords: *stress singularity; stress concentration; closed bi-material wedge; V-notch*

For citation: Fedorov A. Yu., Galkina E. B., Slobodinyuk A. I. Experimental Study of Stress Concentration Near the Tips of V-shaped Cracks of Different Depths Filled With Various Materials. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):80-88. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-80-88.

Acknowledgments: the Russian Foundation funded the work for Basic Research and the Perm Territory (Project number 20-41-596007).

The article was submitted 05.09.2023; approved after reviewing 27.10.2023; accepted for publication 28.11.2023.

Введение

В задачах теории упругости вершины V-образных надрезов относят к особым точкам, а их окрестности, как правило, являются зонами сильной концентрации напряжений. В общем случае характер поведения напряжений в окрестности особых точек определяется: видом нагружения, геометрией тела вблизи особой точки (углы раствора между касательными из особой точки), механическими характеристиками материала в окрестности особой точки (модули упругости, коэффициенты Пуассона). Именно эти показатели определили направление экспериментальных и численных работ, связанное с поиском геометрических и механических характеристик, обеспечивающих более низкий уровень концентрации напряжений.

Хорошим примером таких исследований является работа [1], где теоретически и экспериментально было показано, что комбинации значений углов и механических свойств, соответствующие решениям без сингулярности напряжений, обеспечивают малонапряженное состояние вблизи вершины.

Аналогичные по содержанию исследования приведены в работах [2–6]. В определенной мере итог этим исследованиям подводят работы [7–9], где было показано, что минимальный уровень концентрации напряжений в окрестности особых точек имеет место при значениях геометрических параметров и упругих постоянных материалов, которые определяют границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений. Этот результат был использован в качестве основы для методики поиска значений упругих постоянных материала прослойки и ее геометрии на краях поверхности контакта, обеспечивающих минимальный уровень концентрации напряжений [10].

Одним из вариантов уменьшения уровня напряжений в окрестности V-образных надрезов является скругление вершины надреза (или использование U-надреза). Другим вариантом уменьшения уровня напряжений в окрестности V-образных надрезов является заполнение его полости материалом ("залечивание"). Результаты анализа сингулярности напряжений являются полезными для поиска упругих постоянных заполняющего ма-

териала, обеспечивающего наилучшее снижение уровня концентрации напряжений вблизи вершины V-образного надреза, полость которого заполнена этим материалом. В этом случае необходимо построить и исследовать сингулярные решения вблизи вершины соответствующего замкнутого составного клина.

В работах [11–13] приведены общие решения и трансцендентные уравнения, позволяющие определить собственные значения для составного клина. Примерами исследований, посвященных получению численных результатов и их анализу для различных вариантов составных замкнутых клиньев, могут служить работы [14–17].

В работе [17] представлен сравнительный анализ численных результатов о показателях сингулярности напряжений в составном замкнутом клине и однородном клине с гранями, свободными от напряжений, при различных соотношениях углов раствора и модулей упругости однородных частей составного клина, и при различных значениях коэффициентов Пуассона.

Одним из главных результатов работы [17] является установление аномального влияния на характер сингулярности напряжений коэффициента Пуассона при приближении его значения к 0.5. А именно: исчезновение сингулярности напряжений при симметричном (относительно биссектрисы угла раствора) напряженном состоянии. Это послужило основой для устранения сингулярности напряжений в вершине V-образного надреза при заполнении его полости материалом с коэффициентом Пуассона, близким к 0.5. На численных моделях продемонстрировано, что уровень концентрации напряжений может быть снижен при достаточно больших углах раскрытия и жесткости заполняющего слабосжимаемого материала на несколько порядков меньше жесткости основного материала.

В работе [18] продемонстрировано, что при заполнении надреза материалом, имеющим модуль упругости на три порядка ниже, чем у основного материала, повышение предельной нагрузки составляет 15 %.

В настоящей работе приведены результаты серии экспериментов при разных глубинах V-образного надреза и при заполнении материалами, имеющими модули упругости на один, два и на три порядка ниже, чем у основного материала.

Наряду с экспериментом проведены численные расчеты, дающие представление о значениях механических характеристик материалов, при которых в вершине составного замкнутого клина отсутствует сингулярность напряжений. Результаты численных расчетов дают теоретическое обоснование результатам экспериментов.

1. Численные результаты для составного замкнутого клина

Одно из направлений исследования поведения напряжений в окрестности особых точек связано с построением собственных решений для составного замкнутого клина. Собственные решения в каждой из подобластей $i = 1, 2$ имеют вид [19]:

$$u_r^{ki} = r^{\lambda_k} \xi_r^{ki}(\varphi); \quad u_\varphi^{ki} = r^{\lambda_k} \xi_\varphi^{ki}(\varphi), \quad (1)$$

где r, φ – полярные координаты с центром в вершине клина, $k = 1, 2, 3, \dots$, λ_k – собственные значения, $\xi_r^{ki}, \xi_\varphi^{ki}$ – собственные функции, u_r^{ki}, u_φ^{ki} – перемещения в полярной системе координат. Наличие в спектре собственных значений λ_k с $\text{Re} \lambda_k < 1$ будет определять сингулярное поведение напряжений в окрестности вершины составного клина.

Построение собственных решений излагается в [11, 12], где также приводится трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений:

$$\begin{aligned} & \left((1+\beta)^2 \sin^2 p\gamma_1 - p^2 (\beta-\alpha) \sin^2 \gamma_1 \right) \times \\ & \times \left((1-\beta)^2 \sin^2 p\gamma_2 - (\beta-\alpha)^2 p^2 \sin^2 \gamma_2 \right) + \\ & + (1-\alpha^2) \sin^2 p(\pi-\gamma_1) \left[2p^2 (\beta-\alpha)^2 \sin^2 \gamma_1 + \right. \\ & \left. + 2(1-\beta)^2 \sin p\gamma_1 \sin p\gamma_2 - (1-\alpha^2) \sin^2 p(\pi-\gamma_1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь: $p = 1 - \lambda$; γ_1 – угол V-образного надреза;

$$\alpha = \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1) - (\kappa_2 + 1)}{\Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)}, \quad \beta = \frac{\Gamma(\kappa_1 - 1) - (\kappa_2 - 1)}{\Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)}$$

– комбинированные параметры упругих постоянных материалов (параметры Дандерса) [20], при этом $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$ при плоско-деформированном состоянии (ПДС), $\kappa_i = (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i)$ при плоско-напряженном состоянии (ПНС); $\Gamma = G_2/G_1$, где $G_i = E_i/2(1 + \nu_i)$, ν_i, G_i – коэффициенты Пуассона и модули сдвига, $i = 1, 2$.

Таблица 1. Пограничные значения коэффициента Пуассона ν_1

ν_2 E_2/E_1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45	0.5
10	0.4659	0.4701	0.4757	0.4825	0.4907	0.4952	0.4999
100	0.4967	0.4971	0.4976	0.4983	0.4991	0.4996	0.4999
1000	0.4996	0.4997	0.4997	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999

Так как $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\pi$, из соотношения (2) следует, что собственные значения зависят только от величины одного из углов и механических характеристик материалов ν_1 , ν_2 , G_2/G_1 . Для поиска собственных значений был использован алгоритм, основанный на применении метода Мюллера и принципа аргумента [21].

Полученные результаты демонстрируют, что зависимости собственных значений от угла γ_1 для различных коэффициентов Пуассона ν_1 существенно отличаются. При этом для симметричного относительно биссектрисы угла γ_1 напряженного состояния при слабосжимаемых заполняющих материалах имеются диапазоны значений γ_1, ν_1 , при которых сингулярность напряжений отсутствует.

В табл. 1 приведены значения коэффициентов Пуассона заполняющего материала ν_1 , при которых для углов $0 < \gamma_1 \leq 15^\circ$ при разных значениях коэффициента Пуассона основного материала ν_2 и различных отношениях модуля упругости основного материала к модулю упругости заполняющего материала E_2/E_1 будет отсутствовать сингулярность напряжений.

В частности, для основного материала с коэффициентом Пуассона $\nu_2 = 0.3$ при заполнении V-образного надреза материалом, модуль упругости которого на два порядка меньше, чем модуль упругости основного материала ($E_2/E_1 = 100$), сингулярные решения не возникают, если коэффициент Пуассона ν_1 больше или равен 0.4983.

2. Экспериментальное исследование

Для оценки эффективности снижения концентрации напряжений вблизи V-образного надреза путем его заполнения другим материалом были проведены разрушающие испытания на растяжение. Критерием оценки является максимальная сила, предшествующая разрушению образцов.

Результаты получены для образцов с незаполненным V-образным надрезом и образцов с V-образным надрезом, заполненным определенным материалом. Схема образцов представлена на рис. 1.

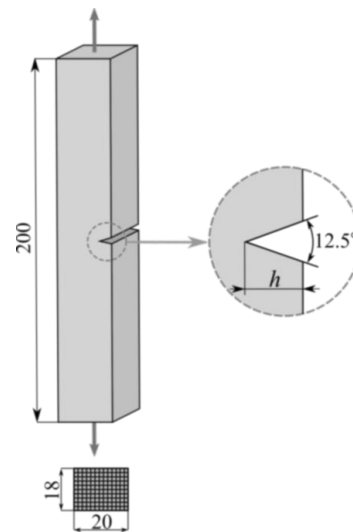


Рис. 1. Расчетная схема образцов из эбонита, размеры в мм

На эффективность "залечивания" сильно влияет адгезионная прочность между материалом образца и заполняющим материалом. Поэтому были проведены испытания по определению адгезионной прочности между материалами. Для интерпретации результатов для материалов, обладающих наибольшей адгезионной прочностью экспериментально были определены модули упругости.

Образцы были вырезаны из листового эбонита в масляной среде. V-образный надрез сформирован специально изготовленным резцом с углом заточки 12.5° на фрезерном станке с ручным управлением. В качестве материалов для заполнения полости V-образного надреза были выбраны уретансодержащие материалы с коэффициентом Пуассона, близким к 0.5, изготовленные в лаборатории Института технической химии УрО РАН: материал П480, П66, П45 и П9.

Для получения этих материалов по методике, описанной в работе [22], были синтезированы два олигодизоцианата (П-10000 К и СКУ-ПФЛ-100). Для материала П480 использовали олигодизоцианат П-10000 К, а также смесь олигодивинилизопрендиола (ПДИ-1 К) с 3,3'-дихлор-4,4'-диаминодифенилметана при мольном соотношении 0.4 к 0.6 в качестве отверждающей смеси. Для получения материалов П66, П45 и П9 были использованы смеси олигодизоцианата СКУ-ПФЛ-100 и эпоксидной смолы ЭД-20 при массовом соотношении 93 к 7 – для материала П65, 85 к 15 – для материала П45, и 78 к 22 – для материала П9. В качестве отвердителя также использовали 3,3'-дихлор-4,4'-диамино-дифенилметан. Перед заполнением материалами поверхность образцов из эбонита очищалась, обезжиривалась и высушивалась. Время отверждения – 24 часа при температуре 23 °С и затем 48 часов при температуре 80 °С.

Для определения модуля упругости материалов использовалось испытание на растяжение. Модуль упругости определялся в соответствии с региональным стандартом ГОСТ 9550-81 по формуле

$$E = \frac{(F_2 - F_1) \cdot l_0}{A_0 \cdot (\Delta l_2 - \Delta l_1)}, \quad (3)$$

где F_2 – нагрузка, соответствующая верхнему пределу относительного удлинения, F_1 – нагрузка, соответствующая нижнему пределу относительного удлинения, l_0 – база экстензометра, A_0 – площадь начального поперечного сечения образца, Δl_2 – удлинение, соответствующее нагрузке F_2 , Δl_1 – удлинение, соответствующее нагрузке F_1 . Для испытания на растяжение взяты четыре образца из эбонита, длиной 200 мм и с размерами прямоугольного сечения 18×15 мм. Скорость нагружения составляла 1 мм/мин. В результате испытаний были получены следующие значения модуля упругости: для эбонита – 2121.9 ± 86.5 МПа; для П480 – 4.4 ± 0.2 МПа; для П66 – 32.3 ± 0.8 МПа; для П45 – 59.5 ± 2.8 МПа; для П9 – 235.3 ± 8.9 МПа.

Следует отметить, что модуль упругости материала П480 почти на три порядка ниже модуля упругости эбонита.

Метод испытаний на адгезионную прочность был основан на отрыве двух склеенных брусков длиной 100 мм из эбонита с прямоугольным сечением размерами 18 мм на 20 мм

(рис. 2). Толщина наносимого слоя минимальна. В качестве склеивающего материала использованы материалы П480, П66, П45 и П9. Результатом испытания является усилие отрыва, необходимое для нарушения адгезии.

Прочность при отрыве рассчитывается по формуле

$$\sigma = F/A, \quad (4)$$

где F – максимальная сила при отрыве, A – площадь образца.

Все испытания проводились на универсальной испытательной машине SHIMADZU серии AGS-X. Для определения прочности при отрыве для каждого материала испытано по три образца. Скорость нагружения составляла 1 мм/мин. Обработка результатов измерений проведена в соответствии с ГОСТ Р 8.736-2011.

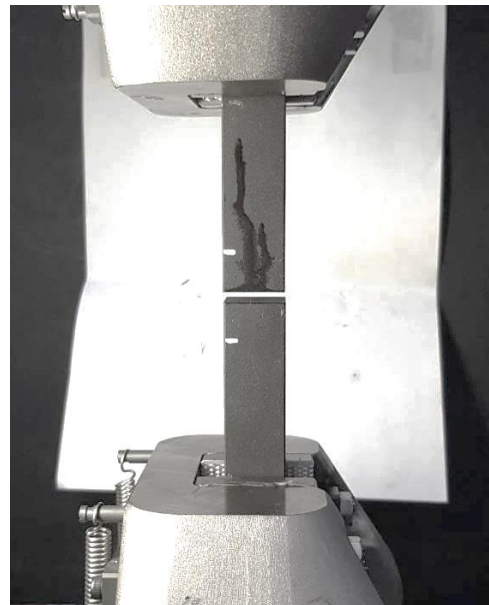


Рис. 2. Испытание на определение адгезионной прочности между эбонитом и заполняющими материалами

Среднее арифметическое значений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (5)$$

где x_i – i -й результат измерений, n – число измерений.

Среднее квадратическое отклонение:

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (6)$$

Результаты испытаний показали следующие значения прочности при отрыве $\sigma_{пр}$ (МПа): для П480 – 1.7 ± 0.7 МПа; для П66 – 5.9 ± 3.2 МПа; для П45 – 8.3 ± 3.3 МПа; для П9 – 9.1 ± 2.4 МПа.

В частности, получено, что наибольшей адгезионной прочностью при отрыве от эбонита обладает материал П9.

Для определения влияния заполняющего материала на прочность образцов было выбрано испытание на растяжение. Для испытания были взяты образцы из эбонита в форме брусков, длиной 200 мм, имеющие одинаковую площадь наименьшего поперечного сечения. Глубина V-образного надреза h составляет 5 мм, 7.5 мм и 10 мм с углом раствора 12.5° (рис. 3). Анализ снимков, сделанных с помощью микроскопа, позволил установить, что радиус скругления в вершине надреза составляет примерно 0.05 мм.

Результатом испытаний являются значения силы F , при которых происходит разрушение образцов. Эти значения приведены в табл. 2. В табл. 3 приведены результаты увеличения силы, при которой происходит разрушение образцов с надрезом, заполненным материалом, по отношению к образцам с полостью, не заполненной материалом.

Полученные результаты дают количественную оценку повышения прочности образцов с V-образными надрезами при заполнении их полости материалами и влияния на конечный результат глубины полости и модулей упругости материала, заполняющего полость.



Рис. 3. Образцы из эбонита с разной глубиной V-образного надреза: а) глубиной 5 мм; б) глубиной 7.5 мм; в) глубиной 10 мм

Таблица 2. Значения разрушающей силы F

h , мм	Образец	F , Н
5.0	с V-образным надрезом, не заполненным материалом	3481.8 ± 190.5
7.5		2650.4 ± 18.8
10.0		1955.9 ± 59.1
5.0	с V-образным надрезом, заполненным материалом П480	3938.7 ± 52.7
7.5		2937.6 ± 71.5
10.0		2408.6 ± 38.6
5.0	с V-образным надрезом, заполненным материалом П66	4751.3 ± 103.0
7.5		3794.5 ± 225.3
10.0		3159.8 ± 132.4
5.0	с V-образным надрезом, заполненным материалом П45	5312.2 ± 98.1
7.5		4353.5 ± 75.6
10.0		3922.1 ± 160.7
5.0	с V-образным надрезом, заполненным материалом П9	6237.5 ± 81.9
7.5		4756.7 ± 62.2
10.0		4169.1 ± 94.6

Таблица 3. Увеличение разрушающей силы F при заполнении полости V-образного надреза материалом (в %)

Глубина h , мм	П480	П66	П45	П9
5.0	13	36	47	77
7.5	14	43	69	83
10.0	23	62	112	118

Наибольшее увеличение предельной силы, при которой происходит разрушение, обеспечивает заполнение полости надреза материалом П9. Для отношения модулей упругости эбонита и материала П9, согласно данным из табл. 1, пограничное значение коэффициента Пуассона, заполняющего полость материала, не больше 0.4907. Для этой пары материалов имеет место самый большой диапазон значений коэффициента Пуассона, заполняющего полость материала (от 0.4907 до 0.5), при которых сингулярность напряжений в вершине не возникает. Значение коэффициента Пуассона материала П9 располагается в этом диапазоне. Следует отметить, что материал П9 имеет наибольшую (среди рассмотренных материалов) прочность адгезионной связи с эбонитом.

Для всех рассмотренных материалов, заполняющих полость надреза, наблюдается следующая закономерность: с увеличением глубины надреза относительная разница предельных нагрузок увеличивается, то есть эффективность от заполнения полости материалом проявляется ярче.

Заключение

Приведены экспериментальные результаты по разрушению образцов с поверхностными трещинами разной глубины (V-образными надрезами) при заполнении полости трещин различными материалами. Полученные результаты позволяют наряду с известными численными оценками влияния на уровень концентрации напряжений в окрестности вершин поверхностных трещин механических характеристик материалов, заполняющих трещины получить количественные представления о влиянии на прочность образцов с поверхностными трещинами, размеров трещин и модулей упругости заполняющих материалов.

Список источников

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
2. Wu Z. Design free of stress singularities for bi-material components // *Compos. Struct.* 2004. Vol. 65, № 3–4. P. 339–345.
3. Xu L. R., Kuai H., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design // *Exp. Mech.* 2004. Vol. 44, № 6. P. 608–615.
4. Xu L.R., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // *Exp. Mech.* 2004. Vol. 44, № 6. P. 616–621.
5. Wang P., Xu L.R. Convex interfacial joints with least stress singularities in dissimilar materials // *Mech. Mater.* 2006. Vol. 38, № 11. P. 1001–1011.
6. Baladi A., Arezoodar A.F. Dissimilar materials joint and effect of angle junction on stress distribution at interface // *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering.* 2011. Vol. 5, № 7. P. 1184–1187.
7. Борзенков С.М., Матвеев В.П. Оптимизация упругих тел в окрестности особых точек // *Изв. РАН. МТТ.* 1996. № 2. С. 93–100.
8. Матвеев В.П., Федоров А.Ю. Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2011. Т. 4, № 4. С. 63–70.
9. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Optimization of geometry and mechanical characteristics of elastic bodies in the vicinity of singular points // *Acta Mech.* 2018. Vol. 229, № 2. P. 645–658.
10. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Designing of interlayers between materials with minimum stress level at the interface // *Int. J. Adhes. Adhes.* 2021. Vol. 111. P. 102963.
11. Bogy D.B. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // *J. Appl. Mech.* 1968. Vol. 35, № 3. P. 460–466.
12. Dempsey J.P., Sinclair G.B. On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge // *Journal of Elasticity.* 1981. Vol. 11, № 3. P. 317–327.
13. Paggi M., Carpinteri A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Appl. Mech. Rev.* 2008. Vol. 61, № 2. P. 020801.
14. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification. *Appl. Mech. Rev.* 2004. Vol. 57, № 5. P. 385–439.
15. Bogy D.B., Wang K.C. Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials // *Int. J. Solids Struct.* 1971. Vol. 7, № 8. P. 993–1005.
16. Chen D.H., Nisitani H. Singular stress field near the corner of jointed dissimilar materials // *J. Appl. Mech.* 1993. Vol. 60, № 9. P. 607–611.
17. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Numerical and applied results of the analysis of singular solutions for a closed wedge consisting of two dissimilar materials // *Acta Mech.* 2020. Vol. 231, № 7. P. 2711–2721.
18. Fedorov A., Galkina E. Experimental study of the effectiveness of stress reduction near V-shaped notch filled with a certain material // *Procedia Structural Integrity.* 2023. Vol. 50. P. 83–90.
19. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech.* 1952. Vol. 19, № 4. P. 526–528.
20. Dundurs J. Discussion: "Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading" (Bogy, D. B., 1968, ASME *J. Appl. Mech.*, 35, pp. 460–466) // *J. Appl. Mech.* 1969. Vol. 36, № 3. P. 650–652.
21. Матвеев В.П., Севодина М.А., Севодина Н.В. Приложения метода Мюллера и принципа аргумента к задачам на собственные значения в механике деформируемого твердого тела // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2014. Т. 7, № 3. С. 331–336.

22. *Slobodinyuk D., Slobodinyuk A., Strelnikov V., Kiselkov D.* Simple and efficient synthesis of oligoetherdiamines: hardeners of epoxyurethane oligomers for obtaining coatings with shape memory effect // *Polymers*. 2023. Vol. 15, № 11. P. 2450.

References

1. *Chobanyan K.S.* Stress state in compound elastic bodies. Yerevan: Armenian Academy of Sciences Press; 1987. 338 p. (In Russ.).
2. *Wu Z.* Design free of stress singularities for bi-material components. *Compos. Struct.* 2004;65(3-4):339-345. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.11.009>.
3. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design. *Exp. Mech.* 2004;44(6):608-615. <https://doi.org/10.1007/BF02428250>.
4. *Xu L.R., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis. *Exp. Mech.* 2004;44(6):616-621. <https://doi.org/10.1007/BF02428251>.
5. *Wang P., Xu L.R.* Convex interfacial joints with least stress singularities in dissimilar materials *Mech. Mater.* 2006;38(11):1001-1011. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.10.002>.
6. *Baladi A., Arezoodar A. F.* Dissimilar materials joint and effect of angle junction on stress distribution at interface. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*. 2011;5(7):1184-1187. <https://doi.org/10.5281/zenodo.1331703>.
7. *Borzenkov S., Matveenko V.* Optimization of elastic bodies in the vicinity of singular points. *Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*. 1996;(2):93-100. (In Russ.).
8. *Matveenko V.P., Fedorov A.Yu.* Optimization of the geometry of compound elastic bodies with aim to improve strength test procedures for adhesive joints. *Computational Continuum Mechanics*. 2011;4(4):63-70. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.40>.
9. *Fedorov A.Yu., Matveenko V.P.* Optimization of geometry and mechanical characteristics of elastic bodies in the vicinity of singular points. *Acta Mech.* 2018;229(2):645-658. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1990-5>.
10. *Fedorov A.Yu., Matveenko V.P.* Designing of interlayers between materials with minimum stress level at the interface *Int. J. Adhes. Adhes.* 2021;111:102963. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2021.102963>.
11. *Bogy D.B.* Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. *J. Appl. Mech.* 1968;35(3):460-466. <https://doi.org/10.1115/1.3601236>.
12. *Dempsey J.P., Sinclair G.B.* On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge. *Journal of Elasticity*. 1981;11(3):317-327. <https://doi.org/10.1007/BF00041942>.
13. *Paggi M., Carpinteri A.* On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.* 2008;61(2):020801. <https://doi.org/2010.1115/1.2885134>.
14. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification. *Appl. Mech. Rev.* 2004;57(5):385-439. <https://doi.org/10.1115/1.1767846>.
15. *Bogy D.B., Wang K.C.* Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials. *Int. J. Solids Struct.* 1971. Vol. 7, № 8. P. 993–1005. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90077-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90077-1).
16. *Chen D.H., Nisitani H.* Singular stress field near the corner of jointed dissimilar materials. *J. Appl. Mech.* 1993;60(9):607-611. <https://doi.org/10.1115/1.2900847>.
17. *Fedorov A.Yu., Matveenko V.P.* Numerical and applied results of the analysis of singular solutions for a closed wedge consisting of two dissimilar materials. *Acta Mech.* 2020;231(7):2711-2721. <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02668-w>.
18. *Fedorov A., Galkina E.* Experimental study of the effectiveness of stress reduction near V-shaped notch filled with a certain material // *Procedia Structural Integrity*. 2023;50:83-90. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2023.10.025>.
19. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech.* 1952;19(4):526-528. <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140730-111744170>.
20. *Dundurs J.* Discussion: "Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading" (Bogy, D. B., 1968, ASME *J. Appl. Mech.*, 35, pp. 460–466). *J. Appl. Mech.* 1969;36(3):650-652. <https://doi.org/10.1115/1.3564739>.
21. *Matveenko V.P., Sevodin M.A., Sevodina N.V.* Applications of Muller's method and the argument principle to eigenvalue problems in solid

mechanics. Computational Continuum Mechanics. 2014;7(3):331-336.

<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.32>.

22. *Slobodinyuk D., Slobodinyuk A., Strelnikov V., Kiselkov D.* Simple and efficient synthesis

of oligoetherdiamines: hardeners of epoxyurethane oligomers for obtaining coatings with shape memory effect // *Polymers*. 2023. Vol. 15, № 11. P. 2450.

Информация об авторах:

А. Ю. Фёдоров – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1), WoS Researcher ID: D-1600-2013, Scopus Author ID: 5588521350, РИНЦ Author ID: 64232;

Е. Б. Галкина – младший научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 1), РИНЦ Author ID: 1144216;

А. И. Слободинюк – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института технической химии УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, 3), WoS Researcher ID: ААЕ-3165-2020, Scopus Author ID: 54890714400, РИНЦ Author ID: 721158.

Information about the authors:

A. Yu. Fedorov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Academician Korolev St., Perm, Russia, 614018), WoS Researcher ID: D-1600-2013, Scopus Author ID: 5588521350, Author ID: 64232;

E. B. Galkina – Junior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Academician Korolev St., Perm, Russia, 614018), Author ID: 1144216;

A. I. Slobodinyuk – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Institute of Technical Chemistry UB RAS (3, Academician Korolev St., Perm, Russia, 614018), WoS Researcher ID: ААЕ-3165-2020, Scopus Author ID: 54890714400, Author ID: 721158.

«Информатика»

Научная статья

УДК 004.942

DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-89-95

Разработка модели для оценки опасности деструктивных воздействий вредоносных утилит на автоматизированные системы специального назначения с использованием регрессионного анализа**Николай Сергеевич Кобяков**Пермский военный институт войск национальной гвардии Российской Федерации, Пермь, Россия
kkobyakov1234@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается вопрос использования регрессионного анализа для разработки модели оценки опасности вредоносных утилит на автоматизированные системы. Исходными данными для моделирования являются результаты опроса высококвалифицированных специалистов в области обеспечения информационной безопасности. Для моделирования использовался пакет прикладных программ Excel и STATISTICA. Результаты моделирования верифицированы на тестовом наборе данных. Сформированная модель может быть использована специалистами, обеспечивающими информационную безопасность при обработке информации в автоматизированных системах специального назначения, от деструктивного воздействия ранее неизвестных вредоносных утилит.

Ключевые слова: регрессионный анализ; вредоносные утилиты; автоматизированные системы

Для цитирования: Кобяков Н. С. Разработка модели для оценки опасности деструктивных воздействий вредоносных утилит на автоматизированные системы специального назначения с использованием регрессионного анализа // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 89–95. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-89-95.

Статья поступила в редакцию 10.10.2023; одобрена после рецензирования 26.10.2023; принята к публикации 27.11.2023.

«Computer Science»

Research article

Model Development for Assessing the Danger of Malicious Utilities' Destructive Effects on Automated Special-Purpose Systems Using Regression Analysis**Nikolay S. Kobayakov**Perm military Institute of National Guard Troops, Perm, Russia
kkobyakov1234@gmail.com

Abstract The paper examines the issue of using regression analysis to develop a model for assessing the danger of malicious utilities on automated systems. The initial data for modeling are the results of a survey of highly qualified specialists in the field of information security. The application package Excel and STATISTICA were used for modeling. The modeling results were verified on a test data set. The generated model can be used by specialists who ensure information security when processing information in automated systems for special purposes, from the destructive effects of previously unknown malicious utilities.



Эта работа © 2023 Кобяков Н.С. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Keywords: *regression analysis; malicious utilities; automated systems*

For citation: *Kobyakov N. S. Model Development for Assessing the Danger of Malicious Utilities' Destructive Effects on Automated Special-Purpose Systems Using Regression Analysis. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2023;4(63):89-95. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2023-4-89-95.*

The article was submitted 10.10.2023; approved after reviewing 26.10.2023; accepted for publication 27.11.2023.

Введение

Обеспечение информационной безопасности в условиях постоянно совершенствующихся методов реализации атак на автоматизированные системы специального назначения становится все более актуальным вопросом. Согласно методического документа [1] актуальными угрозами для систем и сетей являются:

1) использование уязвимостей (уязвимостей кода (программного обеспечения), уязвимостей архитектуры и конфигурации систем и сетей, а также организационных и многофакторных уязвимостей);

2) внедрение вредоносного программного обеспечения;

3) использование недеklarированных возможностей программного обеспечения и (или) программно-аппаратных средств;

4) установка программных и (или) программно-аппаратных закладок в программное обеспечение и (или) программно-аппаратные средства;

5) формирование и использование скрытых каналов (по времени, по памяти) для передачи конфиденциальных данных;

6) перехват (измерение) побочных электромагнитных излучений и наводок (других физических полей) для доступа к конфиденциальной информации, содержащейся в аппаратных средствах аутентификации;

7) инвазивные способы доступа к конфиденциальной информации, содержащейся в аппаратных средствах аутентификации;

8) нарушение безопасности при поставках программных, программно-аппаратных средств и (или) услуг по установке, настройке, испытаниям, пусконаладочным работам (в том числе администрированию, обслуживанию);

9) ошибочные действия в ходе создания и эксплуатации систем и сетей, в том числе при установке, настройке программных и программно-аппаратных средств.

В рамках данной работы рассмотрим угрозу внедрения вредоносного программного обеспечения, а именно вредоносных утилит [2].

Исследованию защищенности автоматизированных систем специального назначения посвящено множество работ [3–5], но в данных работах не приводятся модели для численных оценок опасности вредоносных программ.

Цель исследования. Разработать модель для оценки опасности деструктивных воздействий вредоносных утилит на автоматизированные системы.

Постановка задачи. Для достижения цели работы необходимо решить следующие задачи:

1. Определить исходные данные для моделирования (поведенческие паттерны вредоносных утилит, вид регрессии).

2. Провести опрос специалистов в области информационной безопасности (в результате получить сведения об опасности вредоносных утилит на основе их поведенческих паттернов).

3. С использованием прикладных программ сформировать модель для оценки опасности вредоносных утилит.

4. Выполнить верификацию полученной модели на тестовом наборе данных.

1. Модели и алгоритмы реализации организационных мер защиты информации в АССН от деструктивных воздействий ранее неизвестных вредоносных программ

В работе [6] описан процесс разработки информационно-логической модели комплексной системы защиты информации от ранее неизвестных вредоносных программ. В ходе моделирования определены группы должностных лиц, участвующие в процессе обеспечения информационной безопасности:

1. Руководители подразделений, обеспечивающих информационную безопасность автоматизированных систем специального назначения.

2. Специалисты, обеспечивающие информационную безопасность автоматизированных систем специального назначения.

3. Пользователи автоматизированных систем специального назначения.

Для каждой группы должностных лиц определены на основе модели Захмана [7] реализуемые мероприятия при появлении ранее неизвестных вредоносных программ, ответственные должностные лица, временные рамки и результат выполнения действий.

Поскольку реализуемые мероприятия зависят от опасности вредоносной программы ([0–3.99] – низкая, [4.0–6.99] – средняя, [7.0–8.99] – высокая, [9.0–10.0] – критическая), для обеспечения корректного функционирования комплексной системы защиты информации необходимо разработать модель для оценки опасности деструктивных воздействий.

2. Регрессионный анализ

Использование регрессионного анализа направлено на решение следующих задач [8]:

1. Предсказание значения зависимой переменной с помощью независимых переменных.
2. Определение вклада отдельных независимых переменных в вариацию зависимой переменной.

В зависимости от взаимосвязи между величинами регрессия может быть линейной или нелинейной.

Существуют следующие основные виды регрессий:

1. Парная регрессия, предназначенная для описания наиболее вероятных значений одной переменной, исходя из значений другой.
2. Множественная регрессия, которая является расширением парной регрессии. При построении моделей множественной регрессии оценивается степень влияния нескольких признаков на исследуемый параметр.

Также возможно разделение регрессионных моделей, исходя из типов исходных данных:

1. Пространственная выборка (значения показателей относятся к одному моменту времени).
2. Временная выборка (значения одного показателя, относящиеся к различным моментам времени).

Процесс формирования математической модели включает в себя последовательную реализацию следующих этапов [8]:

1. Этап спецификации – качественное изучение моделируемого процесса (объекта, явления).

2. Информационный этап – сбор информации.

3. Идентификация модели – выполнение статистического анализа модели и оценка неопределенных параметров.

4. Верификация – проверка истинности модели (ее адекватности).

3. Этап спецификации

Согласно ранее проведенных исследований [2], актуальными для АССН являются следующие классы вредоносных программ:

1. Вредоносные утилиты.
2. Троянские программы.
3. Вирусы и черви.

Возможность создания модели оценки опасности деструктивных воздействий вредоносных программ на автоматизированные системы специального назначения рассмотрим на примере вредоносных утилит.

Вредоносные утилиты реализуют поведенческие паттерны, представленные в табл. 1:

Таблица 1. Поведенческие паттерны вредоносных утилит

Наименование поведенческого паттерна	Обозначение
Проникновение на компьютер-жертву	p ₁
Скрытие следов присутствия преступников в системе	p ₂
Внесение в список разрешенных посетителей системы новых пользователей	p ₃
Прекращение работы системы	p ₄
Проведение атак типа "Отказ в обслуживании"	p ₅
Сбор и анализ сетевых пакетов	p ₆
Подмена адреса отправителя письма по электронной почте	p ₇
Создание вредоносных программ	p ₈
Навязывание ложной информации (уведомление об опасности, нарушениях)	p ₉
Модификация вредоносных программ	p ₁₀
Распространение флуда (бесполезных сообщений по каналам электронной почты)	p ₁₁

Согласно [1] при оценке угроз необходимо определить негативные последствия их реализации.

В случае, если в отношении автоматизированной системы специального назначения будет реализована угроза внедрения вредоносного программного обеспечения, могут быть следующие негативные последствия:

1. Нарушение конфиденциальности информации, обрабатываемой в автоматизированной системе.

2. Нарушение доступности отдельных элементов или в целом автоматизированной системы.

3. Нарушение целостности, обрабатываемой в автоматизированной системе.

Кроме того, реализация угрозы на большое количество элементов системы может повлечь за собой нарушение функционирования отдельных подразделений и, как следствие, несвоевременное выполнение задач.

Исходя из определенных параметров модели для оценки опасности деструктивных воздействий вредоносных утилит на АССН целесообразно использовать множественную линейную регрессию. Общий вид модели, сформированной на основе множественной линейной регрессии имеет вид:

$$Y = a + b_1 * p_1 + b_2 * p_2 + \dots + b_n * p_n, \quad (1)$$

где:

Y – значение исследуемой величины;

a – коэффициент множественной линейной регрессии;

$b_{1,\dots,n}$ – коэффициенты чистой регрессии;

$p_{1,\dots,n}$ – поведенческие паттерны вредоносных утилит.

4. Информационный этап

Для построения модели оценки опасности деструктивных воздействий вредоносных утилит на автоматизированные системы специального назначения среди специалистов в области обеспечения информационной безопасности был проведен опрос. В ходе опроса специалистам было предложено оценить опасности вредоносных утилит, исходя из реализуемых ими поведенческих паттернов (р).

Результаты опроса обобщены и представлены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты опроса

№ п/п	Реализуемые поведенческие паттерны	Опасность
1.	p1, p2, p5	10
2.	p2, p8, p10	4,4
3.	p7, p11	1,78
4.	p5, p6	2,98
5.	p8, p10	0,89
6.	p4,p5,p6	5,33
7.	p7, p11	1,78
8.	p4,p5	3,84
9.	p4,p9	2,87
10.	p4,p6	3,84
11.	p3, p9	2,87
12.	p3, p6	3,84
13.	p6	1,49
14.	p2	3,5
15.	p6, p11	1,78
16.	p5 p9	2,02
17.	p3, p8	2,87
18.	p7 p10	1,86
19.	p3 p7	3,84
20.	p1, p11	5,3
21.	p1, p4, p6, p9	9,36
22.	p2, p11	3,8
23.	p3, p10	2,71
24.	p4, p9	2,87
25.	p6,p7	2,98

5. Идентификация модели

В ходе моделирования необходимо выявить зависимость между переменной J (характеризующую опасность вредоносной утилиты) и $p_{1,\dots,11}$ (поведенческими паттернами вредоносных утилит). Для идентификации модели воспользуемся пакетами прикладных программ Excel и STATISTICA.

Внесем полученные в табл. 2 значения опасности и реализуемые поведенческие паттерны в редактор Excel. Для этого в столбец J внесем значение опасности, оцененное экспертами, а в соответствующих столбцах $p_{1,\dots,11}$ значение "0", если паттерн не реализован в вредоносной утилите и "1", если реализован.

Пример заполнения сведений об опасности вредоносных утилит представлен на рис. 1.

	J	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10	p11
1	10	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	4,4	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
3	1,78	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
4	2,98	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
5	0,89	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
6	5,33	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
7	1,78	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
8	3,84	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0

Рис. 1. Заполнение сведений о вредоносных утилитах

Используя опцию регрессия функции анализа данных, получим значения коэффициентов, представленных на рис. 2.

	Коэффициенты
Y-пересечение	0,20834616
Переменная X 1	5,066050423
Переменная X 2	3,355314361
Переменная X 3	2,196232151
Переменная X 4	2,246651596
Переменная X 5	1,39056984
Переменная X 6	1,416477567
Переменная X 7	1,390236255
Переменная X 8	0,470499356
Переменная X 9	0,427796886
Переменная X 10	0,28595847
Переменная X 11	0,116139912

Рис. 2. Коэффициенты регрессионной модели

На основе полученных коэффициентов составим модель множественной регрессии (1):

$$Y = 0,21 + 5,07 * p_1 + 3,36 * p_2 + 2,2 * p_3 + 2,25 * p_4 + 1,39 * p_5 + 1,42 * p_6 + 1,39 * p_7 + 0,47 * p_8 + 0,43 * p_9 + 0,29 * p_{10} + 0,12 * p_{11} \quad (2)$$

6. Верификация модели

С точки зрения регрессионного анализа адекватность модели может быть подтверждена данными, представленными на рис. 3.

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,999432309
R-квадрат	0,998864941
Нормированный R	0,997904506
Стандартная ошибка	0,098815022
Наблюдения	25

Рис. 3. Регрессионная статистика

Проверка возможности применения сформированной модели для оценки опасности ранее неизвестных вредоносных утилит выполнена на 10 примерах. Тестовый набор данных является репрезентативным, так как включает в себя примеры с различными комбинациями поведенческих паттернов.

Результаты верификации модели представлены в табл. 3.

Таблица 3. Результаты верификации

№ п/п	Реализуемые поведенческие паттерны	Вычисленная опасность	Уровень опасности
1.	p1, p2, p8, p10	9,4	Критический
2.	p1, p2	8,64	Высокий
3.	p4, p5, p10	4,17	Средний
4.	p1, p6	6,7	Средний
5.	p3, p7, p11	3,92	Низкий
6.	p1	5,28	Средний
7.	p3, p11	2,53	Низкий
8.	p6, p9	2,06	Низкий
9.	p7, p9	2,03	Низкий
10.	p9, p11	0,76	Низкий

Верификация модели на тестовом наборе данных подтверждает целесообразность оценки опасности вредоносных утилит, основываясь на поведенческих паттернах. Вычисленные значения и уровни опасности вредоносных утилит логичны, поскольку соответствуют нанесенному автоматизированной системе ущербу.

Заключение

В данной статье рассмотрен вопрос разработки модели для оценки опасности деструктивных воздействий вредоносных утилит на автоматизированные системы специального назначения. В ходе моделирования с использованием пакета прикладных программ Excel и STATISTICA получены коэффициенты для каждого поведенческого паттерна.

Разработанная модель может быть использована специалистами в области обеспечения информационной безопасности для реализации превентивных мер защиты от деструктивных воздействий ранее неизвестных вредоносных утилит.

Список источников

1. *Методический документ* Методика оценки угроз безопасности информации Утвержден ФСТЭК России 5 февраля 2021 г.
2. Мельников, А.В. Подход к оценке опасности деструктивных воздействий вредоносных программ на автоматизированные системы специального назначения / А.В. Мельников, Н.С. Кобяков // *Безопасность информационных технологий*. 2023. Т. 30, № 3. С. 51–60. DOI 10.26583/bit.2023.3.03. EDN RJWWZH.
3. Gromov Y. Building an external classifier of negative impacts in assessing survivability and ensuring the security of information systems Minin Y., Eliseev A., Alrammahi A.A.H., Sari F.A. // В сб.: *Proceedings – 2020 2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA 2020*. 2. 2020. С. 636–641.
4. Сумин В.И. Анализ функционирования и структурная декомпозиция информационных систем специального назначения / Сумин В.И., Смоленцева Т.Е., Громов Ю.Ю., Тютюнник В.М. // *Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы*. 2021. № 8. С. 5–14.
5. Горячев С.Н. Анализ деструктивных функций и процессов реализации угроз вредоносных программ на ИС органов внутренних дел / С.Н. Горячев, Н.С. Кобяков // *Защита информации. Инсайд*. 2022. № 2(104). С. 42–45. EDN FOWCTU.
6. Мельников А.В. Модели и алгоритмы реализации организационных мер защиты информации в АССН от деструктивных воздействий ранее неизвестных вредоносных программ / А.В. Мельников, Н.С. Кобяков, Р.А. Жилин // *Вестник Воронежского института МВД России*. 2023. № 3. С. 80–87. EDN ZILKNA.
7. Zachman J.A. "A framework for information systems architecture," in *IBM Systems Journal*. Vol. 26, no. 3, pp. 276–292, 1987, doi: 10.1147/sj.263.0276.
8. Данилова О.Ю. Правовая статистика: методы и модели / О.Ю. Данилова, В.В. Меньших, С.В. Синегубов. Воронеж: Воронежский институт Министерства внутренних дел Российской Федерации, 2018. 302 с. ISBN 978-5-88591-666-0. EDN YOZXWX.

References

1. *Methodological document* Methodology for assessing threats to information security Approved by the FSTEC of Russia on February 5. 2021. (In Russ.).
2. Melnikov A.V., Kobayakov N.S. Approach to assessing the danger of destructive effects of malware on special-purpose automated systems. *IT Security (Russia)*, [S.l.], 2023;(30(3):51–60. DOI 10.26583/bit.2023.3.03. EDN RJWWZH. (In Russ.).
3. Gromov Y., Minin Y., Eliseev A., Alrammahi A.A.H., Sari F.A. Building an external classifier of negative impacts in assessing survivability and ensuring the security of information systems. *2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency. Proceedings – 2020*. 2020;2:636-641.
4. Sumin V.I., Smolentseva T.E., Gromov Yu.Yu., Tyutyunnik V.M. Analysis of the functioning and structural decomposition of special-purpose information systems. *Scientific and technical information. Series 2: Information processes and systems*. 2021;8:5-14.
5. Goryachev S.N., Kobayakov N.S. Analysis of destructive functions and processes of implementation of threats of malicious programs on the IS of internal affairs bodies. *Information Protection. Insider*. 2022;(2(104)):42-45. EDN FOWCTU. (In Russ.).
6. Melnikov A.V., Kobayakov N.S., Zhilin R.A. Models and algorithms for the implementation of organizational measures to protect information in ASSN from the destructive effects of previously unknown malware. *Vestnik Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia*. 2023;(3):80-87. EDN ZILKNA. (In Russ.).
7. Zachman J. A. "A framework for information systems architecture," in *IBM Systems Journal*. Vol. 26, no. 3, pp. 276-292, 1987, doi: 10.1147/sj.263.0276. (In Russ.).
8. Danilova O.Yu., Menshikh V.V., Sinegubov S.V. *Legal statistics: methods and models*. Voronezh: Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of the Russian Federation; 2018. 302 p. ISBN 978-5-88591-666-0. EDN YOZXWX. (In Russ.).

Информация об авторе:

Н. С. Кобяков – начальник учебной лаборатории технической защиты информации кафедры информационных технологий и защиты информации, Пермский военный институт войск национальной гвардии Российской Федерации (614030, Россия, г. Пермь, ул. Гремячий Лог, д. 1), AuthorID 1126165.

Information about the author:

N. S. Kobayakov – Head of the technical information security educational laboratory of the information technology and information security department, Perm Military Institute of the National Guard of the Russian Federation, (1, Gremyachy Log St., Perm, Russia, 614030), AuthorID 1126165.

Научный периодический журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" зарегистрирован в 2007 г. как самостоятельное издание, являющееся продолжением серии журнала "Вестник Пермского университета", издаваемого с 1994 г.

В каждом номере научного журнала автору разрешается опубликование в любом разделе не более одной статьи, в том числе в соавторстве.

Статьи, оформленные в соответствии с нижеизложенными правилами, должны быть отправлены через **личный кабинет автора на сайте журнала**. Статьи отправляются в двух форматах: текстовый документ и pdf-файл без данных об авторе (для организации слепого рецензирования). Вместе с рукописью отправляются контактные данные авторов в свободной форме в текстовом документе (ФИО, должность, место работы с указанием полного адреса, e-mail, номер телефона) и **экспертное заключение о возможности открытого опубликования**. Для публикации статьи необходимо заполнить и подписать **договор**.

Аннотация статьи (на русском и английском языках) должна содержать основные краткие сведения: описание проблемы, включая цели и задачи исследования; методы исследования с указанием новизны, если имеется; полученные результаты и выводы. Объем аннотации примерно 250 слов

Текст статьи должен содержать разделы: Введение, Постановка задачи, Методы исследования, Результаты, Обсуждения, Заключение, **Благодарности** для русскоязычной статьи; Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgements для англоязычной статьи. Объем рукописи – не менее 6 страниц машинописного текста.

Оформление. Текст статьи необходимо оформить в редакторе **Word**. Формат листа, используемый для написания статьи – А4. Размеры верхнего и нижнего полей – 2.6 см, правого и левого – 2.5 см. Расстояние до верхнего и нижнего колонтитулов 1.25 см. Шрифтом Times New Roman Сур, размер – 11 пт, межстрочный интервал – одинарный. Подписи к рисункам и таблицам набираются курсивом, в конце заголовков и ячеек таблицы точка не ставится. Формулы набираются в редакторе Microsoft Word Equation.

Структура статьи

Вид статьи

УДК (шрифт Times New Roman – 10 пт).

DOI

Название статьи на русском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

Ф.И.О. автора (-ов) полностью

Место работы (с указанием подразделения), город и страна (шрифт Times New Roman – 10 пт), e-mail

Аннотация на русском языке (шрифт Times New Roman – 10 пт).

Ключевые слова на русском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 10 пт, курсивный).

Название статьи на английском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

На английском языке Ф.И.О. автора (-ов) полностью

Место работы (с указанием подразделения), город и страна (шрифт Times New Roman – 10 пт), e-mail

Аннотация на английском языке (шрифт Times New Roman – 10 пт).

Ключевые слова на английском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 10 пт, курсивный).

Основной текст статьи набирается в две колонки одинаковой ширины, расстояние между колонками – 0.5 см, абзацный отступ основного текста – 1.0 см (задается автоматически, не пробелами). Другие отступы не допускаются. Выравнивание текста по ширине.

Список источников оформляется в едином формате, в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018, без использования тире. Если в списке литературы используется источник из электронного ресурса, необходимо указать дату обращения. Ссылка на литературный источник указывается в тексте статьи в квадратных скобках после упоминания цитаты. Список использованных литературных источников необходимо представить на русском и английском языках (**References**). **Список литературы на латинице**, называемый References, готовится отдельно от Списка литературы и размещается сразу за указанным списком. Ссылки на зарубежные источники необходимо повторять в Списке литературы и References. В References недопустимо использовать российские ГОСТы. Необходимо следовать требованиям международных стандартов. Инструкция по оформлению списка литературы в латинице – References, стандарт "Harvard" находится по ссылке http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Все рукописи проходят двойное слепое рецензирование двумя специалистами в научной области исследования. При возникновении спорной ситуации назначается третий рецензент. Окончательное решение о публикации рукописи принимает главный редактор журнала.

Датой поступления статьи считается день ее отправки через личный кабинет на сайте журнала или по электронной почте журнала (главного редактора). Рукописи рассматриваются в порядке их поступления в течение одного месяца в зависимости от сложности ситуации и объема работы. Редакция оставляет за собой право без согласования с автором проводить литературную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла.

Одобренные статьи публикуются бесплатно. Полнотекстовая версия каждой рукописи выставляется на сайте журнала и в системе РИНЦ (e-library).

Scientific periodical journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" is published since 1994 in the series of the journal "Bulletin of Perm University". Then it was registered as an independent publication in 2007.

An author is allowed to publish no more than one article (also as co-author) in any section for each issue of the journal.

Article's structure should be accordant with the rules below and should be sent through the **author's personal account on the journal's website**. Articles should be sent in two formats: a text document and a pdf-file without information about the author(s) (for review). Authors contact data (name, position and place of work with address, e-mail, phone number in a text document) and **an expert letter on the open publication possibility** should be sent with the manuscript. Author(s) must make and sign **an agreement**.

Abstract (in Russian and English) should contain main information of research: a problem including the goals and objectives of the study; research methods with novelty indication, if any; significant results and findings. The abstract size is approximately 250 words.

Text should contain sections: Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgments. The manuscript size is at least 6 typewritten pages.

An article text must be formatted in the editor Word. The sheet format is A4. The top and bottom margins are 2.6 cm, the right and left margins are 2.5 cm. The distances to the header and footer are 1.25 cm. Times New Roman Cyr font, size – 11 pt, single spacing. Legends for figures and tables are typed in italics style. Formulas are typed in the editor Microsoft Word Equation.

The structure of the article

Article's type

UDC (Times New Roman font – 10 pt).

TITLE in Russian (Times New Roman font – 16 pt, bold).

Name: author (s) name in full,

Place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 10 pt), **e-mail**

Abstract in Russian (Times New Roman font – 10 pt).

Keywords in Russian: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 10 pt, italic).

TITLE in English (Times New Roman font – 16 pt, bold).

In English author (s) name in full, place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 10 pt), **e-mail,**

Abstract in English (Times New Roman font – 10 pt).

Keywords in English: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 10 pt, italic).

The article text is typed in two columns of the same width, the distance between the columns is 0.5 cm, the paragraph indent is 1.0 cm (set automatically, not spaces). No other indents are allowed. Justify the text in width.

References are formed in a single format with using GOST R 7.0.100–2018 without a dash. If a source from an electronic resource is used, the author should indicate the request date. To indicate a source in text author uses square brackets after the quotation mention. References must be submitted **in Russian and English**.

The References list in Latin, called References, is prepared separately from the References List in Russian and placed below. Foreign sources references should be repeated in the References Lists in Russian and English. It is inadmissible to use Russian GOSTs in References. It is necessary to follow the requirements of international standards. Instructions on the References in Latin script design – References, Harvard standard can be found at http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc

REVIEW AND PUBLICATION OF ARTICLES

All manuscripts are double-blind peer-reviewed by two research scientists. If a disputable situation arises, a third reviewer is appointed. The final decision on the manuscript publication is made by the editor-in-chief of the journal.

The receipt date of the article is the day of its submission through the personal account on the journal's website or by e-mail of the journal (or editor-in-chief). Manuscripts are reviewed in the order they are received within one month, review period may be changed depending on a situation complexity and a works amount. The journal editors can to edit the article text without basic meaning change.

Approved articles are published free. The full-text version of each manuscript is posted on the journal's website and in the RSCI system (e-library).

Научное издание

ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Математика. Механика. Информатика

Выпуск 4 (63)

2023

Адрес учредителя и издателя
614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ

Адрес редакции
614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ
Механико-математический факультет
e-mail: vestnik_mmi@psu.ru

Редактор Е.В. Шумилова
Корректор В.Е. Пирожкова
Компьютерная верстка: Г.И. Кушнина

Подписано в печать 12.12.2023. Выход в свет 19.12.2023
Формат 60 × 84/8. Усл. печ. л. 11,39. Тираж 500 экз. Заказ 150

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Управление издательской деятельности

614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15. Тел. (342) 239-66-36

Отпечатано в типографии ПГНИУ. Тел. (342) 239-65-47

Подписной индекс журнала
«Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика»
в онлайн-каталоге «Урал-Пресс» – 015010

https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase_id=396133

Распространяется бесплатно и по подписке